



www.dirasats.com

هذا الغلاف لا يعبر عن حقوق الملكية او فحوى الكتاب, فهو مجرد واجهة للموقع المحمل منه



شكرا لك على ثقتك بنا وعلى اختيار موقعنا

www.dirasats.com



من اجل تواصل معنا المرجو زيارة الموقع ستجد جميع المعلومات

www.dirasats.com



ANALYSE NUMERIQUE
CHAPITRE 2 : RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

- (I) Décomposition LU
- (II) Exemples de la décomposition LU
- (III) Méthode de Cholesky
- (IV) Exemples de la décomposition de Cholesky
- (V) Correction de l'exercice 2 de la série 2.

(I) Décomposition LU

La décomposition LU d'une matrice A , est une méthode de décomposition d'une matrice comme produit d'une matrice triangulaire inférieure L (Lower, Inférieure en anglais) par une matrice triangulaire supérieure U (Upper, Supérieure en anglais). Nous allons utiliser cette décomposition pour résoudre des systèmes linéaires.

(II) Exemples de la décomposition LU

EXEMPLE 1

RAPPEL (Voir l'exemple 1 du précédent document)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y + 4z = 2 \\ x + 3y + z = 1 \\ x + 5y + 6z = -6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y + 4z = 2 \\ y - z = 0 \\ 3y + 4z = -7 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y + 4z = 2 \\ y - z = 0 \\ 7z = -7 \end{array} \right.$$

Itération 1:

$$L1 \leftarrow L1$$

$$L2 \leftarrow L2 - \frac{1}{2}L1$$

$$L3 \leftarrow L3 - \frac{1}{2}L1$$

Itération 2:

$$E1 \leftarrow E1$$

$$E2 \leftarrow E2$$

$$E3 \leftarrow E3 - \frac{3}{1}E2$$

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = LU \text{ avec } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{1} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 2

RAPPEL (Voir l'exemple 2 du précédent document)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 5y + 9z = 4 \\ 3x + 5y + 7z = 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 3z = -2 \\ -y - 2z = -4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 3z = -2 \\ z = -6 \end{array} \right.$$

Itération 1:

$$L1 \leftarrow L1$$

$$L2 \leftarrow L2 - \frac{2}{1}L1$$

$$L3 \leftarrow L3 - \frac{3}{1}L1$$

Itération 2:

$$E1 \leftarrow E1$$

$$E2 \leftarrow E2$$

$$E3 \leftarrow E3 - \frac{-1}{1}E2$$

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = LU \text{ avec } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{1} & 1 & 0 \\ \frac{3}{1} & \frac{-1}{1} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 3

RAPPEL (Voir l'exemple 3 du précédent document)

$$\begin{array}{lll} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 4y + 2z = -30 \\ 10x + 4y + 8z = -64 \\ 5x + 6y + 7z = -56 \end{array} \right. & \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} 5x + 4y + 2z = -30 \\ -4y + 4z = -4 \\ 2y + 5z = -26 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 3z = -2 \\ z = -6 \end{array} \right. \end{array}$$

Itération 1:

$$L1 \leftarrow L1$$

$$L2 \leftarrow L2 - \frac{10}{5}L1 = L2 - 2L1$$

$$L3 \leftarrow L3 - \frac{5}{5}L1 = L3 - L1$$

Itération 2:

$$E1 \leftarrow E1$$

$$E2 \leftarrow E2$$

$$E3 \leftarrow E3 - \frac{2}{-4}E2 = E3 - \frac{1}{-2}E2$$

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 10 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = LU \text{ avec } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{10}{5} & 1 & 0 \\ \frac{5}{5} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 4

RAPPEL (Voir la correction de l'exercice 1 de la série 2 - document précédent)

$$\begin{array}{lll} \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = 2 \end{array} \right. & \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ -3y - 4z = 6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ -2z = 8 \end{array} \right. \end{array}$$

Itération 1:

$$L1 \leftarrow L1$$

$$L2 \leftarrow L2 - \frac{2}{1}L1 = L2 - 2L1$$

$$L3 \leftarrow L3 - \frac{4}{1}L1 = L3 - 4L1$$

Itération 2:

$$E1 \leftarrow E1$$

$$E2 \leftarrow E2$$

$$E3 \leftarrow E3 - \frac{-3}{-2}E2 = E3 - E2$$

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = LU \text{ avec } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(III) Méthode de Cholesky

[André-Louis Cholesky, un polytechnicien et officier français, né le 15 octobre 1875 à Montguyon et mort le 31 août 1918.]

RAPPEL :

Matrice symétrique

Définition : La matrice transposée (ou la transposée) d'une matrice A est la matrice notée A^T , obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Notation : La transposée de A notée également A^t , OU tA OU A^t . MAIS SOUVENT ON UTILISE A^T ou A^t .

Définition : Une matrice A est dite symétrique si $A^T = A$.

Remarque : Pour calculer A^T , on échange les lignes de A par les colonnes de A (ou les colonnes de A par les lignes de A).

Exemples :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{on a } A^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{on a } B^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 12 \\ 3 & 8 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{donc B n'est pas symétrique} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{on a } C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{donc C est symétrique} \end{aligned}$$

RAPPEL : deux matrices A et B sont égales si : (1) elles ont la même taille, (2) $a_{ij} = b_{ij}$.

Matrice symétrique définie positive

Définition : Une matrice A est dite symétrique définie positive si et seulement si, ses mineurs fondamentaux sont strictement positifs.

Exemple des mineurs fondamentaux:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Le mineur fondamental d'ordre 1 est : $\det(a) = a$

Le mineur fondamental d'ordre 2 est : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Le mineur fondamental d'ordre 3 est : $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Exemple : Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive.

$$\text{On a } A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } A = A^T, \text{ on note } A \in S.$$

Le mineur fondamental d'ordre 1 est : $4 > 0$

Le mineur fondamental d'ordre 2 est : $\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 16 > 0$

Le mineur fondamental d'ordre 3 est : $\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 16 > 0$

Finalement, la matrice A est symétrique et définie positive, on note $A \in S^{++}$

Décomposition de Cholesky

Théorème : Toute matrice symétrique définie positive admet une unique décomposition LL^T où L est une matrice triangulaire inférieure avec $l_{ii} > 0$.

===== RAPPEL =====

PRODUIT MATRICIEL :

$AB = C$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

c_{11} = Première Ligne de A \times Première colonne de B

.....=.....Ligne de A..... \timesColonne de B...

c_{ij} = i-ème Ligne de A \times j-ème colonne de

===== FIN =====

RAPPEL =====

CALCUL DE L : Exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice A est symétrique définie positive (voir ci-dessus).

Pour calculer L, on pose $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ on a $L^T = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$

$$A = LL^T$$

Première colonne de A :

$$4 = a^2 \text{ donc } a = -2 \text{ ou } a = +2 \text{ mais on prend (Cholesky) } a = +2$$

$$2 = ba + c * 0 + 0 * 0 = ba \text{ donc } b = 1$$

$$2 = da + e * 0 + f * 0 = da \text{ donc } d = 1$$

Deuxième colonne de A :

$$2 = \text{ça ne sert à rien}$$

$$5 = bb + cc + 0 * 0 = b^2 + c^2 = 1 + c^2 \text{ donc } c^2 = 4 \text{ donc } c = -2 \text{ ou } c = +2 \text{ (Cholesky)}$$

on prend $c = +2$

$$3 = db + ec + f * 0 = 1 * 1 + 2e \text{ donc } e = 1$$

Troisième colonne de A :

$$2 = \text{ça ne sert à rien}$$

3 = ça ne sert à rien

$3 = dd + ee + ff = 1 + 1 + f^2$ donc $f^2 = 1$ donc $f = -1$ ou $f = +1$ (Cholesky) on prend $c = +1$

$$\text{Finalement, } L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pourquoi L est inversible ? $\det(L) = 2 \times 2 \times 1 = 4 \neq 0$ donc inversible

Résolution de $Ax = b$

La résolution du système $Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b$, se ramène alors à la résolution des deux systèmes triangulaires $\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$

$Ly = b$ est un système triangulaire inférieur

$L^T x = y$ est un système triangulaire supérieur

Résolution du système $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 = 6 \\ y_1 + 2y_2 = 11 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 9 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

Résolution du système $L^T x = y$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Finalement, $S = (0, 1, 2)^T$

(IV) Exemples de la décomposition de Cholesky

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 10 \\ 3 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -4 & 13 & -15 \\ 6 & -15 & 34 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(V) Correction de l'exercice 2 de la série 2

Exercice 2 :

Soit la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

- 1- Montrer que la matrice A est une matrice symétrique définie positive.
- 2- Déterminer une matrice L, triangulaire inférieure et inversible, telle que $A = LL^T$.
- 3- En déduire la solution du système $Ax = b$ où $b = (6, 11, 9)^T$.

Réponse :

1. On a $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, donc $A = A^T$, on note $A \in S$.

Les mineurs fondamentaux de la matrice A sont respectivement :

Le mineur fondamental d'ordre 1 est égal à $4 > 0$,

Le mineur fondamental d'ordre 2 est égal à $16 > 0$,

Le mineur fondamental d'ordre 3 est égal à $16 > 0$.

La matrice A est donc symétrique définie positive.

2. CALCUL DE L :

Pour calculer L, on pose $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ on a $L^T = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$

Première colonne de A :

$$4 = a^2 \text{ donc } a = -2 \text{ ou } a = +2 \text{ mais on prend (Cholesky) } a = +2$$

$$2 = ba + c * 0 + 0 * 0 = ba \text{ donc } b = 1$$

$$2 = da + e * 0 + f * 0 = da \text{ donc } d = 1$$

Deuxième colonne de A :

$2 =$ ça ne sert à rien

$$5 = bb + cc + 0 * 0 = b^2 + c^2 = 1 + c^2 \text{ donc } c^2 = 4 \text{ donc } c = -2 \text{ ou } c = +2$$

(Cholesky) on prend $c = +2$

$$3 = db + ec + f * 0 = 1 \times 1 + 2e \text{ donc } e = 1$$

Troisième colonne de A :

2 = ça ne sert à rien

3 = ça ne sert à rien

$3 = dd + ee + ff = 1 + 1 + f^2$ donc $f^2 = 1$ donc $f = -1$ ou $f = +1$ (Cholesky) on prend $c = +1$

$$\text{Finalement, } L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice L est inversible car $\det(L) = 2 \times 2 \times 1 = 4 \neq 0$.

3. La résolution du système $Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b$, se ramène alors à la résolution des deux systèmes triangulaires $\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$

Résolution du système $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 = 6 \\ y_1 + 2y_2 = 11 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 9 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

Résolution du système $L^T x = y$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Finalement, $S = (0, 1, 2)^T$