

Exercice 1.

Considérons les polynômes suivants :

$$P = (0, 1, 0, 3, 4, 0, 0, 7, 0, 0, \dots), Q = (3, 1, 0, 0, 5, 2, 0, 0, 6, 0, 0, \dots)$$

1. Effectuer $P + Q$;
2. Déterminer $\deg P$ et $\deg Q$ en les supposant à coefficients dans :
(i) \mathbb{R} , (ii) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, (iii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- 3) Réécrire P et Q en utilisant l'indéterminée X et en les supposant à coefficients dans :
(i) \mathbb{R} , (ii) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, (iii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

Soient $P = 2X^4 + 2X^3$, $Q = 3 + X + 2X^3 + 3X^4$

1. Effectuer le produit $P \cdot Q$.
2. (a) Calculer $\deg P \cdot Q$ en tant qu'éléments de :
(i) $\mathbb{R}[X]$, (iii) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$
b) Que peut-on en déduire ?
3. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, tel que : $p(0) = 1$, $P(1) = 0$
 $P(2) = -1$ et $p(-1) = 1$

Exercice 3.

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q dans $\mathbb{R}[X]$: $P = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$
et $Q = X^2 - 5X + 4$
2. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre 4 :
 $A = 1 - 2X + X^3 + X^4$ $B = 1 + 2X + X^2 + X^4$

Exercice 4.

1. Etudier l'irréductibilité de P dans $\mathbb{K}[X]$:
(a) $P = X^2 - X - 1$ $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
(c) $F = X^{18} - 5X^{13} + 15$ $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
2. Déterminer tout les polynômes irréductibles, de degré ≤ 3 , dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 5.

Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^6 - 1$
2. $P = 1 + X^4$

Exercice 6.

Décomposer en éléments simples Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

$$F_1 = \frac{X^2+1}{(X+2)(X-1)^2}, \quad F_2 = \frac{2X+1}{(X+1)(X-1)}$$

$$G_1 = \frac{3X+1}{(X^2+X+1)}, \quad G_2 = \frac{X^4}{(X^2+1)^2}$$

Exercice 4

(C) : Eisenstein : $P = 5$; $P \nmid 5$; $P \nmid 0$; $P \nmid 15$; $P \nmid 1$. et $p^2 = 25 \nmid 45 = a_0$.
 $\Rightarrow P$ irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$

Facultatifs**Exercice 7.**

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction $f(X) = \frac{1}{X(X+1)}$.
2. En déduire la limite de la suite $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$

Exercice 8.

1. Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 0$ à coefficients dans \mathbb{Z} .

- a) Montrer que si P admet une racine $\theta \in \mathbb{Z}$, alors θ divise a_0 .
 - b) Les polynômes $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines dans \mathbb{Z} ?
- 2) a) Montrer que si P admet une racine $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, avec $\alpha \wedge \beta = 1$, alors α divise a_0 et β divise a_n , (dans \mathbb{Z}).

b) Montrer que $X^3 - 2$ n'admet pas de racine dans \mathbb{Q} et en déduire que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas un rationnel.

Exercice 9.

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = 3X^5 + 4X^2 + 1, \quad Q = X^2 + 2X + 3$$

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre 3 :

$$A = 1 + X^3 - 2X^4 + X^6, \quad B = 1 + X^2 + X^3.$$

Exercice 10.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$

$$F = \frac{X^2 + X + 1}{(X^2 + 1)(X^2 - 1)}, \quad H = \frac{X^2 + 1}{(X^2 + 1)(X - 1)}, \quad G = \frac{X^3 + X + 1}{X^3(X - 1)^2}$$

✱ **Exercice 11**

Considérons l'application $\psi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}; P \mapsto \psi(P) = P(i)$

1. Montrer que ψ est un homomorphisme d'anneaux.
2. Déterminer $\text{Ker}(\psi)$ et $\text{Im}(\psi)$.
3. En déduire que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.

(G, *, e)