

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

I. Góc và cung lượng giác:

1. Giá trị lượng giác của một số góc:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2. Cung liên kết: (cos đối, sin bù, phụ chéo)

	$-x$	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} + x$
\sin	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$
\cos	$\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$
\tan	$-\tan x$	$-\tan x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\cot x$
\cot	$-\cot x$	$-\cot x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\tan x$

II. Công thức lượng giác:

1. Công thức cơ bản:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\tan a \cdot \cot a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

2. Công thức cộng:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

3. Công thức nhân đôi, nhân ba:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ &= (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

4. Công thức hạ bậc:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} = 1 - \sin^2 x \\ &= (1 - \cos x)(1 + \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1 - \cos^2 x \\ &= (1 + \cos x)(1 - \cos x) \end{aligned}$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

6. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

➤ Một số chú ý cần thiết:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} \sin^8 x + \cos^8 x &= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x \\ &= (1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x)^2 - 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x \\ &= \frac{1}{8} \sin^4 2x - \sin^2 2x + 1 \end{aligned}$$

Trong một số phương trình lượng giác, đôi khi ta phải sử dụng cách đặt như sau:

Đặt $t = \tan x$

$$\text{Khi đó: } \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

B. BÀI TẬP

1. Dạng cơ bản:

- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Trường hợp đặc biệt:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Cách giải:

- Biến đổi đưa về dạng phương trình cơ bản đã nêu.
- Phương pháp này thường được kết hợp với cùng liên kết.

Giải các phương trình:

1. $2 \sin(x - 30^\circ) = \sqrt{2}$
2. $2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2x + \pi}{3}\right) - 2 = 0$
3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
4. $2\sqrt{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0$
5. $6 \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) + 3\sqrt{3} = 0$
6. $\tan(2x - 15^\circ) - 1 = 0$
7. $\sqrt{3} \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$
8. $3 \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sqrt{3} = 0$
9. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$
10. $\sin(x - 45^\circ) = \cos 2x$

$$11. \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$12. \sin 2x = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$13. \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$14. \tan 2x + \cot 3x = 0$$

$$15. \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cot\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$16. \tan\left(\frac{6\pi}{5} - 3x\right) \cdot \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$17. \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (\cos 2x - 1) = 0$$

$$18. \left(\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 1\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

2. Dạng bậc 2 hay bậc n của một hàm lượng giác:

- $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0 \quad (1)$
- $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0 \quad (2)$
- $a \tan^2 x + b \tan x - c = 0 \quad (3)$
- $a \cot^2 x + a \cot x + c = 0 \quad (4)$

Cách giải:

- Đặt t là một trong các hàm lượng giác.
- Giải phương trình theo t và dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình đã cho.
- Nếu đặt $t = \sin x$ (hay $\cos x$) thì nhớ kèm theo điều kiện $-1 \leq t \leq 1$

Giải các phương trình:

1. $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 5 = 0$
2. $6 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
3. $2 \cos^2 2x + \cos 2x = 0$
4. $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$
5. $\cot^2 2x + 3 \cot 2x + 2 = 0$
6. $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$
7. $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$
8. $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0$
9. $\cos x + 3 \cos \frac{x}{2} + 2 = 0$

10. $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$
11. $\cos 2x + 3\sin x = 2$
12. $6\sin^2 x - 2\sin^2 2x = 5$
13. $6\sin^2 3x - \cos 12x = 4$
14. $\cos 2x + \sin^2 x - 2\cos x + 1 = 0$
15. $2\cos^2 2x - 2(\sqrt{3} + 1)\cos 2x + 2\sqrt{3} = 0$
16. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$
17. $\tan x + \cot x = 2$
18. $\frac{4}{\cos^2 x} + \tan x = 7$
19. $\tan x + \cot x = 2$
20. $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$

3. Dạng 3: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$

Cách giải:

- Nếu $a^2 + b^2 < c^2$: phương trình vô nghiệm
- Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$: Ta chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$. Pt trở thành:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \cdot \sin x + \sin \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Ta dễ dàng giải được.

Lưu ý: $\left(\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

Dạng biến thể:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \sin y + d \cos y$$

Trong đó: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \sin y \text{ (có thể } c \cdot \cos y)$$

Trong đó: $a^2 + b^2 = c^2$

Giải các phương trình:

1. $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{\frac{3}{2}}$
2. $\sqrt{3} \sin 5x + \cos 5x = 0$
3. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$

4. $4 \sin x + \cos x = 4$
5. $\sin 2x + \cos 2x = 1$
6. $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}$
7. $\sin^2 x + \sin 2x = 3 \cos^2 x$
8. $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$
9. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$
10. $\tan x - \sqrt{3} = \frac{1}{\cos x}$
11. $\frac{\cos x - \sin 2x}{2 \cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$
12. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$
13. $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$
14. $2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x + 2 \cos^2 2x = \sqrt{3} + 1$
15. $2 \sin 17x + \sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 0$

4. Dạng 4:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = d$$

Cách giải:

Cách 1:

- Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Pt trở thành: $a = d$ (kiểm tra đúng sai và kết luận có nhận nghiệm $\cos x = 0$ hay không?)

- Xét $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$. Pt trở thành: $a \cdot \tan^2 x + b \cdot \tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$

Đặt $t = \tan x$ ta dễ dàng giải được được pt.

Cách 2:

Dùng công thức hạ bậc đưa về phương trình dạng 3.

- **Chú ý:** đối với dạng phương trình **thuần nhất bậc 3 hay bậc 4 đối với sin và cos** ta cũng có cách giải hoàn toàn tương tự.

Giải các phương trình:

1. $2 \cos^2 x + 5 \sin x \cos x + 6 \sin^2 x - 1 = 0$
2. $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = \sin^2 x + 1 = 0$
3. $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 1 = 0$
4. $\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - 1 = 0$
5. $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos x = 3 + 2 \cos^2 x$

6. $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$
7. $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x = 4\sin 2x$
8. $3\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 2$
9. $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$
10. $3\cos^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$
11. $4\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x = 0$
12. $\cos^3 x - 4\sin^2 x + \sin x = 3\cos x \sin^2 x$
13. $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos x + \sin x$
14. $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$
15. $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x \cos x = 0$
16. $4\sin^3 x + 3\cos^2 x - 3\sin x = \sin^2 x \cos x$
17. $2\cos^3 x = \sin 3x$

5. Dạng 5:

$$a(\sin x + \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$$

Cách giải:

Đặt $t = \sin x + \cos x$

Điều kiện: $|t| \leq \sqrt{2}$ (Do $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$)

Ta có: $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x.\cos x$

$$\Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Pt trở thành: $a.t + b.\frac{t^2 - 1}{2} + c = 0$

Ta dễ dàng giải được.

Chú ý: đối với dạng phương trình

$$a(\sin x - \cos x) + b.\sin x.\cos x + c = 0$$

Bằng cách đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

ta sẽ giải được với cách giải hoàn toàn tương tự như trên

Giải các phương trình:

1. $2(\sin x + \cos x) + 6\sin x \cos x - 2 = 0$
2. $\sin x + \cos x - 4\sin x \cos x - 1 = 0$
3. $\sin x \cos x - \sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1 = 0$
4. $6(\sin x - \cos x) - 1 = \sin x \cos x$
5. $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6}\sin x \cos x$
6. $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3\sin 2x$

7. $2\sin 2x + 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 8 = 0$
8. $\sin x - 2\sin 2x = \frac{1}{2} - \cos x$

6. Dạng 6: $A.B = 0$

Cách giải:

- Dùng các công thức biến đổi đưa về dạng $A.B = 0$

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Giải các phương trình: (dạng tích)

1. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
2. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$
3. $1 + 2\sin x + \cos 3x = 2\cos x.\cos 2x$
4. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$
5. $2\sin x.\cos 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x$
6. $\sin 2x + 4\sin x \cos^2 x = 2\sin x$
7. $4\sin^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\sin x$
8. $7\cos x = 4\cos^3 x + 4\sin 2x$
9. $\sin x(1 - \sin x) = \cos x(\cos x - 1)$
10. $\sin x + 2\cos x + \cos 2x - 2\sin x \cos x = 0$
11. $\sin^3 x + 2\cos x - 2 + \sin^2 x = 0$
12. $\sin 2x - \cos 2x = 3\sin x + \cos x - 2$

Giải các phương trình: (hạ bậc)

1. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}$
2. $\sin^4 x + \frac{5}{3}\cos^4 x = 1$
3. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$
4. $2\sin^6 x + \cos^4 x - \cos 2x = 0$
5. $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x$
6. $\sin x + 2 + \tan \frac{x}{2} = 0$
7. $\sin 2x + \cos 2x + \tan x = 2$
8. $2\cos^6 x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$

➤ **Một số lưu ý khi giải các bài toán lượng giác trong các đề thi đại học:**

- Xuất hiện $\sqrt{3}$ nghĩ đến phương trình III.
- Xuất hiện $\sqrt{3}$ và góc lượng giác lớn nghĩ đến dạng biến thể của phương trình III.

- Ngoài hai trường hợp nhận dạng trên thì từ giả thiết cố gắng đưa bài toán về chung một góc.
- Xuất hiện góc lớn thì dùng công thức tổng thành tích để đưa về các góc nhỏ.
- Xuất hiện các góc có cộng thêm $k\frac{\pi}{4}, k\frac{\pi}{2}, k\pi, k\frac{\pi}{3}, \dots$ thì có thể dùng công thức tổng thành tích, tích thành tổng hoặc cung liên kết, hoặc công thức cộng để làm mất các $k\frac{\pi}{4}, k\frac{\pi}{2}, k\pi, k\frac{\pi}{3}, \dots$
- Xuất hiện $\sqrt{2}$ thì nghĩ đến phương trình III hoặc cũng có khả năng là các vế còn lại nhóm được $(\sin x \pm \cos x)$ để triệt $\sqrt{2}$ vì

$$t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

- Khi đã đơn giản các góc, mà chưa đưa về được phương trình quen thuộc thì nghĩ ngay đến khả năng “nhóm nhà, nhóm cửa”. Lưu ý, khả năng tách phương trình bậc hai theo sin (hoặc cos) về tích hai phương trình bậc nhất.

Chú ý: Góc lớn là góc có số đo lớn hơn $2x$. Ta chỉ sử dụng công thức nhân ba khi đã đưa bài toán về $\sin x, \sin^2 x$ hoặc $\cos x, \cos^2 x$.

CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC

Đề 2002:

- $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$
- $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$
- $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$
- $1 + \tan^4 x = \frac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$
- $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8\sin 2x}$
- $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x\left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right)$
- $\sqrt{\frac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$

Đề 2003:

- $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$

- $\cot 2x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$
- $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan^2 x - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$
- $3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0$
- $\cos 2x = \cos x(2\tan^2 x - 1) = 2$
- $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$
- $(2 - \sqrt{3})\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
- $\frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\cos x + \sin x} = 2(1 + \sin x)$

Đề 2004:

- $\cot x = \tan x + \frac{2\sin 4x}{\sin 2x}$
- $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$
- $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
- $\sin 4x \cdot \sin 7x = \cos 3x \cdot \cos 6x$
- $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 - \cos x} = 1$
- $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
- $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$
- $\sin x + \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x)$

Đề 2005:

- $\cos^2 3x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$
- $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$
- $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$
- $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
- $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$
- $\sin x \cos 2x + \cos^2 x(\tan^2 x - 1) + 2\sin^3 x = 0$
- $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

Đề 2006:

$$33. \frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$$

$$34. \cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4$$

$$35. \cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$$

$$36. \cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$$

$$37. 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin x + 1 = 0$$

$$38. (2 \sin^2 x - 1) \operatorname{tg}^2 2x + 3(2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$39. \cos 2x + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$40. \cos^3 x + \sin^3 x + 2 \sin^2 x = 1$$

$$41. 4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x + 3 \sin 2x + 6 \cos x = 0$$

Đề 2007:

$$42. (1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$$

$$43. 2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$$

$$44. \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$45. \sin 2x + \sin x - \frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot g 2x$$

$$46. 2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$$

$$47. \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$48. \frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \operatorname{tg} x - \cot g x$$

$$49. 2\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right) \cos x = 1$$

$$50. (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$$

Đề 2008:

$$51. \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)} = 4 \sin \left(\frac{7\pi}{4} - x \right)$$

$$52. \sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$$

$$53. 2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$$

$$54. \tan x = \cot x + 4 \cos^2 2x$$

$$55. \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$56. 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$57. 3 \sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$58. 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$$

Đề 2009:

$$59. \frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$$

$$60. \sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$$

$$61. \sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$$

Đề 2010:

$$62. \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

$$63. (\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$$

$$64. \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$$