

Bon Courage

Bienvenue sur KLPrepa, votre référence en ligne pour les étudiants universitaires. Découvrez une base de données complète comprenant des cours, résumés, exercices corrigés, examens corrigés et polycopiés pour les niveaux Doctorat, Master et Licence. Bonne exploration académique!

Télécharger des Cours, Résumé, Exercices et Examens Corrigés ICI :

<https://www.physiquechimiemathbiologie.com>

Les Spécialités disponibles sur le site : Biologie, Géologie, Physique, Chimie, Mathématique, Informatique, Electronique, Automatique, Télécommunication, Electrotechnique, Electromécanique, Hydraulique, Travaux publics, Génie Civil, Génie Mécanique, Génie des Procédés, Génie Climatique, Construction, Génie Énergétique, Génie des Matériaux, Maintenance Industrielle, Biochimie, Microbiologie, Toxicologie, Génétique, Écologie et Environnement, Sciences Alimentaires, Sciences Agronomie, Médecine, Pharmacie, Commande Électrique, Machine Électrique, Microélectronique, Instrumentation, Géotechniques, Réseaux Électriques,...

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à vous, cher visiteur de KLPrepa. Merci de choisir notre site comme ressource éducative. Nous vous souhaitons un parcours académique couronné de succès et de prospérité. Bonne chance dans toutes vos entreprises!

Solution contrôle.

Durée : 1H.

+

Nom : **N^o Apogée** : **N^o de table** : ...

Prénom : **Local** : **Note** :

+

*Il est interdit d'utiliser des objets connectés par ondes – wifi, bluetooth, etc.
(tablette, portable, casque anti-bruit, calculatrice, baladeur etc.), d'échanger de matériel
(stylo, règle, document, etc.) et de communiquer entre candidats au cours de l'épreuve.*

+

Exercice 1. 6 points

Trouver en fonction de z la fonction complexe f holomorphe sur \mathbb{C} telle que $f(0) = 1$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ si } z = x + iy \text{ on a } \operatorname{Re}[f(z)] = (\cos x)chy.$$

Réponse.

Si $f = P + iQ$. et $P(x, y) \stackrel{(3)}{=} (\cos x)chy$ alors les conditions de Cauchy $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} \stackrel{(2)}{=} -\frac{\partial Q}{\partial x}$.

(1) $\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = (-\sin x)chy$ donc $Q(x, y) \stackrel{(4)}{=} (-\sin x)shy + C(x)$ et (2) $\Rightarrow C'(x) = 0$ donc $C(x) = C^{te}$..

(3) et (4) $\Rightarrow f(z) = (\cos x)chy - i(\sin x)shy - iC^{te} = (\sin x)\cos iy + (\cos x)\sin iy - iC^{te} = \cos z - iC^{te}$.
 $f(0) = 1 = \cos 0 - iC^{te} \Rightarrow C^{te} = 0$. Donc $f(z) = \cos z$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2. 6 points

a) Développer en série de Laurent sur la couronne $C_i(0, 2)$ la fonction:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}.$$

b) En déduire le résidu $\text{Res}(f, i)$ de f en i .

c) Par une méthode différente, calculer le résidu $\text{Res}(f, -i)$ de f en $-i$.

Réponse.

a) On a $f(z) = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+i} = \frac{\frac{1}{2i}}{z-i} + \frac{-\frac{1}{2i}}{z+i}$ et si $Z = z - i$, $|\frac{Z}{2}i| < 1$ donc

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2i}}{Z} + \frac{-\frac{1}{2i}}{2i(1+\frac{Z}{2i})} = \frac{\frac{1}{2i}}{Z} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{Z}{2i}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2iZ} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Z}{2}i\right)^n = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-i)^n, \quad a_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}i\right)^n$$

b) $\text{Res}(f, i) = a_{-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}i\right)^{-1} = \frac{1}{2i}$.

c) $\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) f(z) = -\frac{1}{2i} \left[= \frac{g(-i)}{h'(-i)} \quad , g(z) = 1 \text{ et } h(z) = z^2 + 1. \right]$

.....

.....

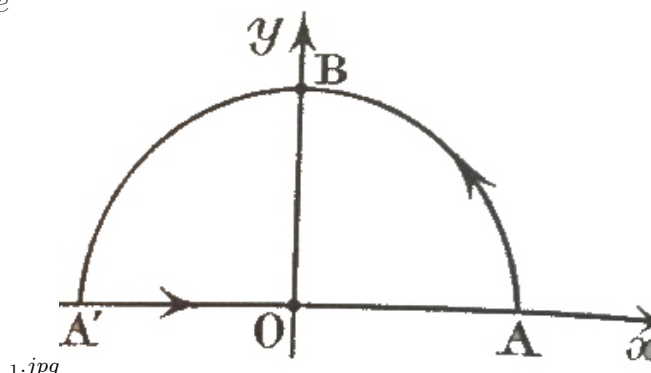
.....

Exercice 3. 8 points

En integrant la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ le long de la courbe fermée $\Gamma^+ = \widehat{A'A} \cup C^+(O, R)$, où $\widehat{A'A}$ est le diamètre joinant les points A et A' d'affixe R et $-R$ respectivement et $C^+(O, R)$ le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon $R \in]1, +\infty[$, trouver la valeur de l'intégrale impropre:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}.$$

cercle



Réponse.

Le théorème des résidus $\Rightarrow \int_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{int}\Gamma^+} \text{Res}(f; z_k)$.

f a 4 pôles simples $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}(1+2k)}$, $k = 0, 1, 2$, ou 3 . On a $\text{Res}(f; z_k) = \frac{1}{4(z_k)^3} = -\frac{z_k}{4}$ et z_0 et $z_1 \in \text{int}\Gamma^+$ mais z_2 et $z_3 \notin \text{int}\Gamma^+$.

Donc $\int_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \left(-\frac{z_0}{4} - \frac{z_1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = \int_{C^+(O, R)} f(z)dz + \int_{\widehat{A'A}} f(z)dz$.

Sur $C^+(O, R)$ $z = Re^{i\theta}$ $dz = izd\theta$ $\theta \in [0, \pi]$.

$\left| \int_{C^+(O, R)} f(z)dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}} d\theta \right| \leq \frac{R}{R^4-1} \pi (|1+R^4e^{4i\theta}| \geq |1-R^4|)$ donc

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C^+(O, R)} f(z)dz = 0 \quad (1)$$

Autrement $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} zf(z) = 0 + L1$ de Jordan $\Rightarrow (1)$

$$\text{Sur } \overset{\curvearrowright}{A'A}, z = t \quad dz = dt \quad t \in [-R, R].$$

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{A'A}} f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{dt}{1+t^4} \text{ donc}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\widehat{A'_A}} f(z) dz = 2I \ .$$

Donc

$$I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$