المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2011

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : 4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

نضع : $\mathbb{A}^0=\mathbb{I}$ و $\mathbb{A}^1=\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2=\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{n+1}=\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}$

0,50 ن ① بين أن : $\forall k\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{2k}=\mathbb{I}$

0,50 ن ② بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده.

ليكن α عددا حقيقيا .

لكل x و y من المجال $I=]\alpha,+\infty[$ نضع : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0,50 ن ① أ) بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I

0,50 ن ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي

0,50 ن ج) بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده

0,50 ن ② بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية

③ نعتبر التطبيق :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x-\alpha}$$

0,50 ن أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

0,50 ن ب) حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)}=a^3+a$ بحيث : $x^{(3)}=x*x*x$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N=\underbrace{111\ldots11}_{\text{2010 مرة 1}}$

0,25 ن ① بين أن N يقبل القسمة على العدد 11

0,75 ن ② أ) تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010}-1=9N$

0,50 ن ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$

0,50 ن ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N .

0,50 ن ③ بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 .

www.baclive.blogspot.com

التمرين الثالث : (3,5 ن) الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

① تحقق أن العدد $z_1 = 2 - m$ حل للمعادلة (E_m) . — 0,50 ن

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

أ) بين أن $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i) - 3 = 0$ — 0,50 ن

ب) حدد قيمتي m بحيث $z_1 z_2 = 1$ — 1,00 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

تعتبر التطبيق $\mathcal{S}$ الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث :

و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

① أ) بين أن التطبيق $\mathcal{S}$ هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1 — 0,25 ن

ب) بين أن : $z'' = iz + 2$. — 0,25 ن

② نفترض أن النقطة M تخالف $\mathcal{O}$ أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

أ) أحسب $\frac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$ — 0,50 ن

ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة. — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E) : e^x = x^n$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $(e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x))$. — 0,25 ن

② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0. — 0,50 ن

③ أحسب النهايات التالية ثم أوّل هندسيا النتائج المحصل عليها : — 1,50 ن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad و \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad و \quad \lim_{x\to1^+} f(x) \quad و \quad \lim_{x\to1^-} f(x)$$

④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها. — 0,75 ن

⑤ بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتيها. — 0,50 ن

⑥ أنشىء المنحنى $(\mathscr{C})$ — 0,50 ن

⑦ بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1 < \alpha_n < e < b_n$. — 0,50 ن

www.baclive.blogspot.com

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq3}$ و $(b_n)_{n\geq3}$.	
① بين أن $(\forall n \geq 3)$: $b_n \geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq3}$	0,50 ن
② أ) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .	0,50 ن
ب) بين أن $(\forall n \geq 3)$: $\frac{1}{n} < ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$.	0,50 ن
ج) بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = e$	0,50 ن

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

① أ) بين أن : $(\forall x \geq 0)$: $0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$.	0,50 ن
ب) بين أن : $(\forall x \geq 1)$: $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.	0,50 ن
② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ و أن : $(\forall x \geq 0)$: $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$.	0,50 ن
③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي : $\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$	
أ) بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.	0,25 ن
ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0,+\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ و أن $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.	0,75 ن
(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$)	
④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$	
أ) بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.	0,50 ن
ب) استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F .	0,50 ن

www.baclive.blogspot.com

التمرين الأول : (4,0 ن) الجزء الأول

■ ①

سوف نستعمل البرهان بالترجع .

من أجل $k = 0$ لدينا : $A^{2.0} = A^0 = I$.

نفترض أن : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})$: $A^{2k} = I$.

لدينا :

$$A^{2(k+1)} = A^{2k} \times A^2 = I \times A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و بالتالي : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})$: $A^{2k} = I$.

■ ②

لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

لدينا : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})$: $A^{2k} = I$.

من أجل $k = 1$ لدينا : $A^2 = A \times A = I$:

و منه A مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو المصفوفة A نفسها

يعني : $A^{-1} = A$.

الجزء الثاني

■ ① أ

ليكن x و y عنصرين من $]\alpha, +\infty[$

إذن : $x > \alpha$ و $y > \alpha$.

و منه : $(x - \alpha) > 0$ و $(y - \alpha) > 0$.

يعني : $(x - \alpha)(y - \alpha) > 0$ إذن $(x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha > \alpha$

أي : $x * y \in I$.

و بالتالي : $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■ ① ب

التبادلية : ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :

$$x * y = (x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha = (y - \alpha)(x - \alpha) + \alpha = y * x$$

إذن $*$ تبادلي في I .

التجميعية : ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من I

لدينا :

$$x * (y * z) = x * \big((y - \alpha)(z - \alpha) + \alpha\big) = (x - \alpha) \times [(y - \alpha)(z - \alpha) + \alpha - \alpha] + \alpha$$

$$= (x - \alpha) \times [yz - y\alpha - \alpha z + \alpha^2] + \alpha$$

$$= xyz - xy\alpha - xz\alpha + \alpha^2 x - yz\alpha + \alpha^2 y + \alpha^2 z - \alpha^3 + \alpha$$

$$= \boxed{xyz - \alpha(xy + xz + yz) + \alpha^2(x + y + z) - (\alpha^3 - \alpha)} \quad (1)$$

$$(x * y) * z = \big((x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha\big) * z$$

$$= [(x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha - \alpha] \times (z - \alpha) + \alpha$$

$$= [xy - x\alpha - \alpha y + \alpha^2] \times (z - \alpha) + \alpha$$

$$= xyz - xy\alpha - xz\alpha + \alpha^2 x - yz\alpha + \alpha^2 y + \alpha^2 z - \alpha^3 + \alpha$$

$$= \boxed{xyz - \alpha(xy + xz + yz) + \alpha^2(x + y + z) - (\alpha^3 - \alpha)} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $x * (y * z) = (x * y) * z$

يعني : $*$ تجميعي في I .

■ ① ج

ليكن e العنصر المحايد لـ $*$ في I .

إذن : $x * e = e * x = x$

ننطلق من الكتابة $x * e = x$ (لأن القانون $*$ تبادلي)

$$\Leftrightarrow \quad xe - x\alpha - \alpha e + \alpha^2 = x - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad e(x - \alpha) = x - \alpha^2 + \alpha x - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad e(x - \alpha) = (x - \alpha)(1 + \alpha)$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\frac{1}{(x - \alpha)}$ (لأن : $x > \alpha$)

نحصل على : $e = (1 + \alpha)$

و لدينا : $1 > 0$ إذن : $1 + \alpha > \alpha$.

و منه : $(1 + \alpha) \epsilon I$

و بالتالي : $(1 + \alpha)$ هو العنصر المحايد لـ $*$ في I .

■ ②

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

القانون $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I

القانون $*$ تبادلي و تجميعي في المجموعة I

القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في المجموعة I

لكي يكون الزوج $(I,*)$ زمرة يكفي أن يقبل كل عنصر من I مماثلا بالقانون $*$.

ليكن x عنصرا من I .

نقول بأن y هو مماثل x بالنسبة لـ $*$ في I إذا و فقط إذا كان :

$$\boxed{x * y = y * x = (1 + \alpha)}$$

www.baclive.blogspot.com

ننطلق من الكتابة : $x * y = (1+\alpha)$

$$\Leftrightarrow \quad (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha = (1+\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \quad xy - \alpha x - \alpha y + \alpha^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad y(x-\alpha) = 1 + \alpha(x-\alpha)$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\frac{1}{(x-\alpha)}$
(لأن : $x > \alpha$)

نحصل على : $y = \frac{1}{(x-\alpha)} + \alpha$

بما أن : $x > \alpha$ فإن : $(x-\alpha) > 0$ و منه : $\frac{1}{(x-\alpha)} > 0$

إذن: $\frac{1}{(x-\alpha)} + \alpha > \alpha$

يعني : $\left(\frac{1}{x-\alpha} + \alpha\right) \in I$

و بالتالي كل عنصر x يقبل مماثلا في I بالقانون $*$ و هو العنصر : $\left(\frac{1}{x-\alpha} + \alpha\right)$

خلاصة : $(I,*)$ زمرة تبادلية.

■ 3 أ

التشاكل : ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :
$$\varphi(x*y) = \frac{1}{(x*y)-\alpha} = \frac{1}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$$
$$= \left(\frac{1}{x-\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{y-\alpha}\right) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

التقابل : ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-\alpha} = y$$
$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$$

نلاحظ أن المعادلة $(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا

و هو : $\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$

إذن φ تقابل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

■ 3 ب

لدينا : $x^{(3)} = \alpha^3 + \alpha$.

$$\Leftrightarrow \quad x * x * x = \alpha^3 + \alpha$$
$$\Leftrightarrow \quad \varphi(x*x*x) = \varphi(\alpha^3+\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \quad \varphi(x) \times \varphi(x) \times \varphi(x) = \varphi(\alpha^3+\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x-\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^3}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^3 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2\alpha$$

و بما أن $\alpha \notin I$ فإن $2\alpha \notin I$

و بالتالي المعادلة لا تقبل حلولا في I .

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ 1

لدينا :
$$\begin{cases} 1 \equiv 1[11] \\ 10^1 \equiv -1[11] \\ 10^2 \equiv 1[11] \\ \vdots \\ 10^{2k} \equiv 1[11] \\ 10^{2k+1} \equiv -1[11] \\ \vdots \\ 10^{2009} \equiv -1[11] \end{cases}$$

عند المرور إلى المجموع بين أطراف هذه المتوافقات نحصل على :

$$1 + 10 + \cdots + 10^{2009} \equiv \left(\sum_{k=0}^{2009} (-1)^k\right)[11]$$

و لدينا :
$$\left(\sum_{k=0}^{2009} (-1)^k\right) = \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ زوجي}}}^{2009} (-1)^k\right) + \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ فردي}}}^{2009} (-1)^k\right)$$
$$= \left(\sum_{m=0}^{1004} (-1)^{2m}\right) + \left(\sum_{m=0}^{1004} (-1)^{2m+1}\right)$$
$$= 1004 - 1004 = 0$$

إذن: $1 + 10 + \cdots + 10^{2009} \equiv 0[11]$

يعني : $\underbrace{111\cdots1}_{\text{2010 مرة}} \equiv 0[11]$

و بالتالي : $11 / N$

■ 2 أ

نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 لا تقسم العدد 2011

إذن : 2011 عدد أولي .

و لدينا :
$$N = 1 + 10 + \cdots + 10^{2009}$$
$$= 10^0 + 10^1 + \cdots + 10^{2009}$$

إذن N هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 10

إذن : $N = \frac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$

و بالتالي : $9N = 10^{2010} - 1$

www.baclive.blogspot.com

■ 2 ب

لدينا 2011 عدد أولي و $10 \wedge 2011 = 1$ إذن حسب مبرهنة $Fermat$: $10^{2011-1} \equiv 1[2011]$

يعني : $2011 / (10^{2010} - 1)$

يعني : $\boxed{2011 / 9N}$

■ 2 ج

بما أن : $2011 / 9N$ و $2011 \wedge 9 = 1$

فإنه حسب مبرهنة $Gauss$: $2011 / N$

■ 3

لدينا : $22121 = 11 \times 2011$

و لدينا كذلك حسب ما سبق : $2011 / N$ و $11 / N$.

إذن $11 \times 2011 / N$ لأن $2011 \wedge 11 = 1$.

و بالتالي : $\boxed{22121 / N}$

التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ 1

بتعويض z بالعدد العقدي $(2 - m)$ في المعادلة (E_m) نحصل على الصفر

إذن $(2 - m)$ حل للمعادلة (E_m) .

■ 2 أ

باستعمال خاصية جداء حلي ثلاثية الحدود

$ax^2 + bx + c = 0$ نجد : $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

يعني : $z_1 z_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4 - im^2 - 2(1-i)m}{1} = 1$$
$$\Leftrightarrow 4 - im^2 - 2m + 2im = 1$$
$$\Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

■ 2 ب

لنحل المعادلة : $im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

لدينا : $\Delta = 4(1-i)^2 + 12i = 4i = \left(\sqrt{2}(1+i)\right)^2$

إذن : $m_1 = \frac{2(i-1) - \sqrt{2}(1+i)}{2i} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

و $m_2 = \frac{2(i-1) + \sqrt{2}(1+i)}{2i} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

الجزء الثاني

■ 1 أ

لتكن E صورة العدد العقدي 1

لدينا : $\mathcal{S}(M) = M'$

$$\Leftrightarrow z' - 1 = -(z - 1)$$
$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_E = -(z_M - z_E)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EM'} = -\overrightarrow{EM}$$

إذن : E هي منتصف القطعة $[MM']$.

و بالتالي : $\boxed{\mathcal{S} \text{ هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة } E}$.

■ 1 ب

لدينا الكتابة $M'' = \mathcal{R}(M)$ تكافئ :

$(z_{M''} - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_M - z_\Omega)$.

$$\Leftrightarrow z'' - (1+i) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(z - (1+i)\right)$$

و لدينا : $e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.

إذن : $z'' - (1+i) = i(z - 1 - i)$

$$\Leftrightarrow z'' = iz - i + 1 + i + 1$$
$$\Leftrightarrow z'' = iz + 2$$

■ 2 أ

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

$z'' = iz + 2$ و $z' - 1 = -(z - 1)$

إذن : $\boxed{\frac{z'' - 2}{z' - 2} = \frac{iz}{z} = i}$ $(*)$ $\Leftarrow$ $\boxed{\frac{z'' - 2}{z' - 2} \in i\mathbb{R}}$

و منه : $AM''M'$ مثلث قائم الزاوية في النقطة A .

و من النتيجة $(*)$ نستنتج أن : $\left|\frac{z'' - 2}{z' - 2}\right| = |i| = 1$

يعني : $|z'' - 2| = |z' - 2|$

أي : $AM'' = AM'$.

إذن $AM'M''$ متساوي الساقين رأسه A .

و بالتالي : $\boxed{AM'M'' \text{ مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في } A}$.

■ 2 ب

العبارة : A و Ω و M' و M'' متداورة تكافئ :

$$arg\left(\frac{z_{M''} - z_A}{z_{M'} - z_A}\right) \equiv arg\left(\frac{z_{M''} - z_\Omega}{z_{M'} - z_\Omega}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z'' - 2}{z' - 2}\right) \equiv arg\left(\frac{z'' - 1 - i}{z' - 1 - i}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{iz}{-z}\right) \equiv arg\left(\frac{iz + 1 - i}{-z + 1 - i}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv arg\left(-i\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right)\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv arg(-i) + arg\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} + arg\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{-z + 1 + i}{-z + 1 - i}\right) \in \mathbb{R}}$$

www.baclive.blogspot.com

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right)} = \left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\bar{z}+1-i}{-\bar{z}+1+i} = \frac{-z+1+i}{-z+1-i}$$

$$\Leftrightarrow (-z+1-i)(-\bar{z}+1-i) = (-\bar{z}+1+i)(-z+1+i)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $4i - 2zi - 2\bar{z}i = 0$

نضع : $z = x + iy$ نحصل على :

$$4i - 2i(x+iy) - 2i(x-iy) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 1}$$

و بالتالي مجموعة النقط M التي من أجلها : A و Ω و M' و M'' متداورة هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = 1$.

التمرين الرابع : (6,5 ن)

الجزء الأول

■ ①

ليكن x عنصرا من $]0,1[\cup]1,+\infty[$

ننطلق من الكتابة : $n = f(x)$

$$\Leftrightarrow n = \frac{x}{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow n \ln x = x$$

$$\Leftrightarrow e^{n \ln x} = e^x$$

$$\Leftrightarrow x^n = e^x$$

■ ②

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$

إذن f قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و لدينا : $f'_d(0) = 0$.

■ ③

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

من النهايتين :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

نستنتج أن المستقيم : $x = 1$ مقارب عمودي لـ $(\mathscr{C}_f)$

و من النهايتين :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

نستنتج أن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

■ ④

لدينا f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ لأنها خارج دالتين قابلتين للإشتقاق.

ليكن x عنصرا من $]0,1[\cup]1,+\infty[$

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

إشارة f' متعلقة إذن بإشارة $\ln x - 1$ فقط.

و لدينا : $f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

■ ⑤

لدينا :

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}\right)' = \frac{\frac{(\ln x)^2}{x} - (\ln x - 1)\left(\frac{2\ln x}{x}\right)}{(\ln x)^4}$$

$$= \frac{(\ln x)(2-\ln x)}{x(\ln x)^4} = \frac{(2-\ln x)}{x(\ln x)^3}$$

f'' تنعدم في e^2 .

و لدينا : $(\forall x \geq e^2) : f''(x) < 0$

و $(\forall x \leq e^2) : f''(x) > 0$

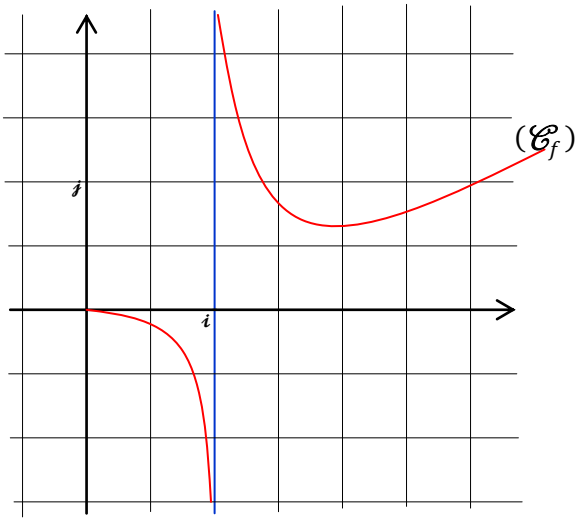
إذن f'' تنعدم في e^2 و تغير إشارتها بجواره

إذن : $(e^2, f(e^2))$ هي نقطة انعطاف لـ $(\mathscr{C}_f)$

و لدينا : $(e^2, f(e^2)) \leftrightsquigarrow \left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$

www.baclive.blogspot.com

■ 6 إنشاء : $(\mathscr{C}_f)$



■ 7

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n :

f_n دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]1,e[$.

إذن f_n تقابل من المجال $]1,e[$ نحو المجال $f(]1,e[)$

و لدينا : $f(]1,e[) =]e,+\infty[$.

و بما أن : $n \in]e,+\infty[$ لأن $n \geq 3$.

فإن : n يمتلك سابقا واحدا بالتقابل f_n في المجال $]1,e[$.

أو بتعبير آخر : $f_n(\alpha_n) = n$: $\exists!\, \alpha_n \in]1,e[$.

إذن حسب السؤال 1 : $e^{\alpha_n} = (\alpha_n)^n$: $\exists!\, \alpha_n \in]1,e[$.

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f_n :

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]e,+\infty[$.

إذن : f_n تقابل من المجال $]e,+\infty[$ نحو المجال $f(]e,+\infty[)$

بحيث : $f(]e,+\infty[) =]e,+\infty[$.

و بما أن $n \in]e,+\infty[$ لأن $n \geq 3$.

فإن : n يمتلك سابقا واحدا بالتقابل f_n على المجال $]e,+\infty[$.

يعني : $f_n(b_n) = n$: $\exists!\, b_n \geq e$.

و بالتالي : $e^{b_n} = (b_n)^n$: $\exists!\, b_n \geq e$.

الجزء الثاني

■ 1

سوف نستعمل في هذا السؤال : $e^{b_n} = (b_n)^n$.

لدينا حسب السؤال 7 $b_n \geq e$.

$$\Rightarrow (b_n)^n \geq e^n$$
$$\Rightarrow e^{b_n} \geq e^n$$
$$\Rightarrow b_n \geq n$$

و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

فإنه بالضرورة : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

■ 2 أ

لدينا : $(n+2) > n$ إذن : $f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$.

و بما أن دالة تناقصية على المجال $]1,e]$ فإن : $a_{n+1} \leq a_n$

و منه : $(a_n)_{n\geq3}$ متتالية تناقصية .

و بما أن هذه المتتالية مصغورة بالعدد 1 (لأن : $a_n > 1$ حسب السؤال 7)

فإن : $(a_n)_{n\geq3}$ متتالية متقاربة .

■ 2 ب

لدينا : $1 < a_n < e$ يعني : $1 < \ln(e^{a_n}) < e$

و منه : $1 < \ln((a_n)^n) < e$ يعني : $1 < n\ln(a_n) < e$

إذن : $\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n} = 0$

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = 0$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1}$

■ 2 ج

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{(a_n)}$

لأن : $(a_n)^n = e^{(a_n)}$

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(a_n)} = e$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n = e}$

التمرين الخامس : (3,5 ن)

■ 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال : $[0,+\infty[$ و t عددا حقيقيا بحيث $0 \leq t \leq x$.

إذن : $-x^2 \leq -t^2 \leq 0$.

و منه : $e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq 1$.

يعني : $\int_0^x e^{-x^2}dt \leq \int_0^x e^{-t^2}dt \leq \int_0^x 1dt$

أي : $e^{-x^2}\int_0^x e^{-x^2}dt \leq e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \leq e^{-x^2}\int_0^x 1dt$

أي : $e^{-2x^2}[t]_0^x \leq F(x) \leq e^{-x^2}[t]_0^x$

إذن : $xe^{-2x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

و بما أن : $x \geq 0$ فإن $xe^{-2x^2} \geq 0$.

و بالتالي : $\boxed{0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}}$.

www.baclive.blogspot.com

■ 1 ب

ليكن $x \geq 1$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الموجب x نحصل على :

$x^2 \geq x$ و هذا يعني : $-x^2 \leq -x$.

و منه : $(\forall x \geq 1) \ : \ e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

بما أن : $0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)} = 0 \times 0 = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

■ 2

لدينا $t \to e^{-t^2}$ دالة متصلة على المجال $[0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز φ

بحيث : $e^{-t^2} = \varphi'(t)$

و لدينا : $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = e^{-x^2}\varphi(x)$

بما أن الدالتين : $x \to \varphi(x)$ و $x \to e^{-x^2}$ قابلتين للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

فإن F قابلة للإشتقاق كذلك على المجال $[0,+\infty[$.

و لدينا : $F'(x) = \left(e^{-x^2}\varphi(x)\right)'$

$$= \left(e^{-x^2}\right)'\varphi(x) + \left(e^{-x^2}\right)\varphi'(x)$$

$$= (-2x)\left(e^{-x^2}\right)\varphi(x) + \left(e^{-x^2}\right)\left(e^{-x^2}\right)$$

$$= -2xF(x) + e^{-2x^2}$$

■ 3 أ

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} G(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} F(tg\,x)$

نضع : $y = tg\,(x)$.

إذا كان : $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ فإن : $tg\,(x) \to +\infty$.

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} F(tg\,x) = \lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = 0 = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$

إذن G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$

■ 3 ب

لدينا G دالة متصلة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و قابلة للإشتقاق على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

و لدينا : $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و $G(0) = F(tg\,0) = F(0) = 0$

إذن : $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = G(0)$

و منه حسب مبرهنة : $(Rolle)$ $\left(\exists\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) \ : \ G'(\alpha) = 0$

نضع : $c = tg(\alpha)$.

لدينا : $G(x) = F(tg\,x)$ و منه : $G'(\alpha) = F'(tg\,\alpha) = F'(c)$

إذن إذا كان $G'(\alpha) = 0$ فإن : $\boxed{F'(c) = 0}$ (1)

من جهة أخرى إذا كان $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $tg(\alpha) \in]0,+\infty[$ لأن tg دالة تزايدية على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

إذن : $\boxed{c \in]0,+\infty[}$ (2)

و لدينا : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$. و $F'(c) = 0$

إذن : $e^{-2c^2} - 2cF(c) = 0$

يعني : $\boxed{F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\boxed{(\exists c \in]0,+\infty[) \ : \ F'(c) = 0 \ \text{و} \ F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}}$$

■ 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$

لدينا : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

إذن : $F''(x) = -4xe^{-2x^2} - 2F(x) - 2xe^{-2x^2} + 4x^2F(x)$

و لدينا : $H'(x) = \left(\frac{F'(x)e^{x^2}}{2x}\right)'$

$$= \frac{2x\left(F''(x)e^{x^2} + 2xF'(x)e^{x^2}\right) - 2F'(x)e^{x^2}}{4x^2}$$

$$= \frac{2xF''(x)e^{x^2} + 4x^2F'(x)e^{x^2} - 2F'(x)e^{x^2}}{4x^2}$$

www.baclive.blogspot.com

نعوض $F'(x)$ و $F''(x)$ بقيمتيهما ثم ننشر و نبسط نحصل على :

$$H'(x) = \frac{-8x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} = \frac{-2e^{-x^2}(4x^2+1)}{4x^2} < 0$$

إذن الدالة H تناقصية قطعا على : $]0,+\infty[$.

■ 4 ب

لدينا حسب السؤال : 3 ب

$(\exists\, c \in]0,+\infty[) \;:\; F'(c) = 0$

إذن : $H(c) = \frac{F'(c).e^{-c^2}}{2c} = 0$

يعني : $(\exists\, c \in]0,+\infty[) \;:\; H(c) = 0$

بما أن الدالة H متصلة و تناقصية قطعا على : $]0,+\infty[$

فإن H تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $H(]0,+\infty[)$

إذن : $(\exists!\, c \in]0,+\infty[) \;:\; H(c) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\exists!\, c \in]0,+\infty[) \;:\; F'(c) = 0$ و $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$

و لدينا : $H(x) = \frac{F'(x).e^{x^2}}{2x}$

إذن : $F'(x) = \frac{2x.H(x)}{e^{x^2}}$

الدالة F' تنعدم في العدد c

إذا كان $x > c$ فإن : $H(x) < H(c)$ لأن H تناقصية على $]0,+\infty[$

و لدينا : $H(c) = 0$ إذن : $H(x) < 0$

و منه : $(\forall x \geq 0) \;:\; \frac{2x.H(x)}{e^{x^2}} \leq 0$

يعني : $(\forall x \geq c) \;:\; F'(x) \leq 0$

و منه F تناقصية على المجال $[c,+\infty[$

إذا كان $x < c$ فإن $H(x) > H(c)$

و منه : $H(x) > 0$

إذن : $(\forall x \geq 0) \;:\; \frac{2x.H(x)}{e^{x^2}} \geq 0$

يعني : $(\forall x \leq c) \;:\; F'(x) \geq 0$

و منه : F تزايدية على المجال $[0,c]$

و لدينا : $F(c) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$

و نلخص جميع النتائج في الجدول التالي :

x	0		c		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
F	0	↗	$\frac{e^{-2c^2}}{2c}$	↘	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■

www.baclive.blogspot.com

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع : $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

① أ) بين أن $(*)$ قانون تركيب داخلي في I . — 0,50 ن

ب) بين أن القانون $(*)$ تبادلي و تجميعي . — 0,50 ن

ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. — 0,50 ن

② بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. — 0,50 ن

③ نعتبر المجموعتين : $\mathbb{H} = \{ 2^n \ / \ n\epsilon\mathbb{Z} \}$ و $\mathbb{K} = \left\{ \dfrac{1}{2^n+1} \ / \ n\epsilon\mathbb{Z} \right\}$

أ) بين أن $\mathbb{H}$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$. — 0,50 ن

ب) نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : — 0,50 ن

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & I \\ x & \longrightarrow & \dfrac{1}{x+1} \end{array}$$

بين أن التطبيق φ تشاكل من $(\mathbb{H},\times)$ إلى $(I,*)$.

ج) استنتج أن $(\mathbb{K},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x \equiv 2[19]$.

① أ) تحقق أن : $10^{x+1} \equiv 1[19]$. — 0,25 ن

ب) بين أن : $10^{18} \equiv 1[19]$. — 0,50 ن

② ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$. — 0,50 ن

أ) بين أن : $10^d \equiv 1[19]$. — 0,75 ن

ب) بين أن : $d \equiv 18$. — 0,50 ن

ج) استنتج أن : $x \equiv 17[18]$. — 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : \ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

① بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . — 0,50 ن

② حدد العددين العقديين α و β بحيث : — 0,50 ن

$$(\forall z\epsilon\mathbb{C}) : \ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

③ أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $(5-12i)$. — 0,50 ن

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

www.baclive.blogspot.com

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\sigma,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$.

① بين أن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة C. — 0,50 ن

② نعتبر الدوران $\mathcal{R}_1$ الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران $\mathcal{R}_2$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_1$ و M_2 صورتها بالدوران $\mathcal{R}_2$.

أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}_1$ هي : $z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$ — 0,50 ن

ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z . — 0,50 ن

ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة **ثابتة** . — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,0 ن) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\ln x$.

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma,\vec{i},\vec{j})$. $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\text{cm})$

① أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ — 1,00 ن

② أ) ضع جدول تغيرات الدالة f . — 0,50 ن

ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} . — 0,75 ن

③ أحسب : $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشىء $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}^{-1})$ منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. — 0,50 ن

④ أ) أحسب التكامل : $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$ (يمكن أن تضع $t=f^{-1}(x)$) — 0,50 ن

ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}^{-1})$ و المستقيمات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$. — 0,50 ن

⑤ نعتبر المعادلة : $(E_n)\ :\ x+\ln x=n$.

أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n . — 0,25 ن

ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ — 0,50 ن

⑥ أ) بين أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f(x_n)\le f(n)$ ثم استنتج أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*):\ x_n\le n$. — 0,50 ن

ب) بين أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ n-\ln n\le x_n$. — 0,50 ن

ج) أحسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-n}{n}\right)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln n}\right)$ — 0,50 ن

www.baclive.blogspot.com

التمرين الخامس : (4,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,50 ن ① بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي و حيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 ن ② بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة (نضع : $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$)

0,50 ن ③ أ) تحقق أنه من أجل $t \neq 1$ لدينا : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

0,50 ن ب) استنتج أن : $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$

0,50 ن ④ أ) بين أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt$

0,50 ن ب) بين أن : $(\forall n \geq 2) \ : \quad 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

0,50 ن ج) استنتج أن : $\boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$

www.baclive.blogspot.com

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ 1 أ

ليكن x و y عنصرين من $]0,1[$

إذن : $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$

إذن : $-1 < -x < 0$ و $-1 < -y < 0$

إذن : $0 < 1-x < 1$ و $0 < 1-y < 1$

و منه : $\boxed{0 < (1-x)(1-y) < 1}$ (1)

و بما أن $xy > 0$ فإن : $(1-x)(1-y) + xy > xy$

يعني : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} < 1}$ (2)

و لدينا : $xy > 0$ و $xy + (1-x)(1-y) > 0$

إذن : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} > 0}$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن :

$$(\forall (x,y) \epsilon I^2) \ ; \ 0 < \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall (x,y) \epsilon I^2) \ ; \ 0 < x * y < 1$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall (x,y) \epsilon I^2) \ ; \ x * y \ \epsilon \ I$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■ 1 ب

ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :

$$x * y = \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} = \frac{yx}{yx+(1-y)(1-x)} = y * x$$

إذن $*$ قانون تبادلي في I .

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من I .

لدينا :

$$x * (y * z) = \frac{x(y*z)}{x(y*z)+(1-x)\big(1-(y*z)\big)} = \frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$$

و بنفس الطريقة نحسب $(x * y) * z$ نحصل على :

$$(x * y) * z = \frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)} = x * (y * z)$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في I .

■ 1 ج

ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في I .

$$\Leftrightarrow \ (\forall x \epsilon I) \ ; \ x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall x \epsilon I) \ ; \ \frac{xe}{xe+(1-x)(1-e)} = x$$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على :

$$\Leftrightarrow \ (\forall x \epsilon I) \ ; \ \frac{e}{xe+(1-x)(1-e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall x \epsilon I) \ ; \ xe + 1 - e - x + ex = e$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall x \epsilon I) \ ; \ e = \frac{1}{2} \ \epsilon \ ]0,1[$$

إذن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في I و هو : $\frac{1}{2}$.

■ 2

حصلنا لحد الآن على ما يلي :

- $I =]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- $*$ قانون تركيب داخلي في I .
- $*$ يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I .
- $*$ تبادلي و تجميعي في I .

إذن لكي تكون $(I,*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن :

كل عنصر x يقبل مماثلا بالقانون $*$ في المجموعة I .

ليكن x' مماثل x في المجموعة I بالنسبة للقانون $*$

إذن : $x * x' = x' * x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \ \frac{xx'}{xx'+(1-x)(1-x')} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ x' = (1-x)$$

بما أن : $x \epsilon I$ فإن $1 > x > 0$

إذن : $1 > 1 - x > 0$

و منه $(1-x)$ هو مماثل x بالنسبة لـ $*$ في I .

و بالتالي : $(I,*)$ زمرة تبادلية .

■ 3 أ

لدينا $H = \{2^n \ / \ n \epsilon \mathbb{Z}\}$

إذن : H جزء غير فارغ من $\mathbb{R}_+^*$

لأن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 2^n \ \epsilon \ \mathbb{R}_+^*$

ليكن 2^n و 2^m عنصرين من H

www.baclive.blogspot.com

لدينا : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن : $(H,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

■ 3 ب

ليكن x و y عنصرين من H .

لدينا : $\varphi(x) * \varphi(y) = \left(\frac{1}{1+x}\right) * \left(\frac{1}{1+y}\right)$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)(1+y)}}{\frac{1}{(1+x)(1+y)} + \left(1-\frac{1}{1+x}\right)\left(1-\frac{1}{1+y}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}$$

$$= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy)$$

إذن φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

■ 3 ج

ليكن 2^n عنصرا من H .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(H) = K$$

لدينا : φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك $(H,\times)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ حسب السؤال 3 أ

إذن $(\varphi(H),\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$

و بالتالي : $(K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

■ 1 أ

لدينا : $10^x \equiv 2[19]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد : $10^{x+1} \equiv 20[19]$

من جهة أخرى لدينا : $20 \equiv 1[19]$

إذن : $\boxed{10^{x+1} \equiv 1[19]}$

■ 1 ب

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$:

$$(\forall\, a \wedge 19 = 1) \;;\; a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل $a = 10$ لدينا $10 \wedge 19 = 1$ إذن : $10^{19-1} \equiv 1[19]$

أي : $\boxed{10^{18} \equiv 1[19]}$

■ 2 أ

نضع : $d = (x+1) \wedge 18$ إذن حسب $(Bezout)$:

$$\exists\, (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \;;\; d = 18u + (x+1)v$$

لدينا : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ إذن : $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

يعني : $\boxed{10^{(x+1)v} \equiv 1[19]}$ (1)

و لدينا كذلك : $10^{18} \equiv 1[19]$ إذن : $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

يعني : $\boxed{10^{18u} \equiv 1[19]}$ (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

يعني : $10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19]$

و بالتالي : $\boxed{10^d \equiv 1[19]}$

■ 2 ب

لدينا : $d = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $\boxed{d \setminus 18}$

و منه : $d \in \{1,2,3,6,9,18\}$

و لدينا :
$$\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases}$$

و بالتالي : $\boxed{d = 18}$

■ 2 ج

لدينا : $18 = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $18 \,/\, (x+1)$

و بما أن : $18 \,/\, (-18)$

فإن : $18/(x+1) - 18$

أي : $18 \,/\, (x-17)$

و منه : $x \equiv 17[18]$

www.baclive.blogspot.com

التمرين الثالث : (4 ن)

الجزء الأول

■ ①

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

■ ②

ننشر التعبير : $(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$ نحصل على :

$$(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta) = z^3+(\alpha+2i)z^2+(\beta+2i\alpha)z+2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1+i) \\ \alpha+2i = -(1+2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(1+4i) \\ \beta = 5i-5 \end{cases}$$

■ ③ أ

ليكن $(x+iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5-12i)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = 5-12i \\ |x+iy| = \sqrt{5^2+12^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)+2ixy = 5-12i \\ x^2+y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y^2) = 5 \\ xy = -6 \\ x^2+y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=-3 \text{ أو } x=3 \\ y=2 \text{ أو } y=-2 \end{cases}}$$

إذن الجذران المربعان للعدد العقدي $(5-12)$ هما : $(3-2i)$ و $(-3+2i)$

■ ③ ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i) = 0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا : $z^2-(1+4i)z-5+5i = 0$

لدينا :

$$\Delta = (1+4i)^2-4(-5+5i) = 5-12i = (3-2i)^2$$

إذن : $z_1 = -1+3i$ و $z_2 = 2+i$

و بالتالي : المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$-2i$ و $2+i$ و $-1+3i$

الجزء الثاني

■ ①

لدينا : $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{-1+3i-2-i}{-2i-2-i} = \dfrac{3-2i}{2+3i} = -i = e^{\frac{-i\pi}{2}}$

و منه : $\boxed{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}[2\pi]}$ (1)

و لدينا كذلك : $\left|\dfrac{a-c}{b-c}\right| = |-i| = 1$

إذن : $\boxed{\dfrac{CA}{CB} = 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في C .

■ ② أ

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

لدينا : $\mathcal{R}_1(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow (z_1-b) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z-b)$$

$$\Leftrightarrow (z_1+2i) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+2i)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$$

■ ② ب

لدينا : $\mathcal{R}_2(M) = M_2$

$$\Leftrightarrow (z_2-a) = e^{\frac{-2i\pi}{3}}(z-a)$$

$$\Leftrightarrow (z_2+1-3i) = \left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+1-3i)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-(1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

■ ② ج

لدينا I هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

$$\Leftrightarrow aff(I) = \frac{z_1+z_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I) = -\sqrt{3}-i-\frac{(1-3i)(3+i\sqrt{3})}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I) = constante\ complexe$$

إذن $aff(I)$ عدد عقدي ثابت.

أي : $\boxed{I \text{ نقطة ثابتة في المستوى.}}$

www.baclive.blogspot.com

التمرين الرابع : (6 ن)

■ ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

■ ② أ

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

■ ② ب

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

إذن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

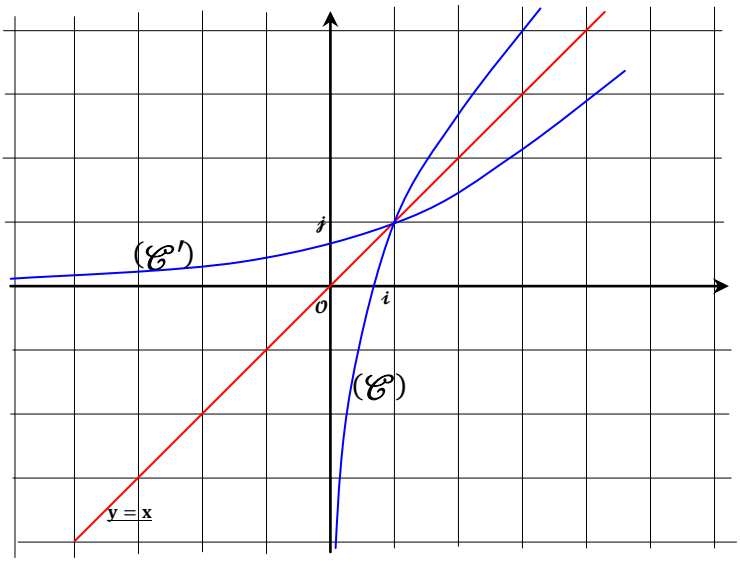
و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	0 ↗	$+\infty$

■ ③

$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$

$f(e) = e + \ln e = e + 1 \approx 3{,}72$



■ ④ أ

لنحسب التكامل : $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$

من أجل ذلك نضع : $t = f^{-1}(x)$ إذن : $x = f(t)$

و منه : $\frac{dx}{dt} = f'(t)$

إذن :

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx = \int_1^{e} t f'(t)\,dt$$
$$= [tf(t)]_1^e - \int_1^e f(t)\,dt$$
$$= [tf(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t\ln t - t\right]_1^e$$
$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4{,}9$$

■ ④ ب

نضع A هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$A = \int_1^{e+1} \left(x - f^{-1}(x)\right) dx$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \int_1^{e+1} x\,dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\frac{e^2 + 2e}{2}\right) - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{2}$$

www.baclive.blogspot.com

■ 5 أ

نضع : $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا h دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا كذلك : $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن h دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

و منه h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $]-\infty,+\infty[$

و بما أن : $0 \in]-\infty,+\infty[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل h .

يعني : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ h(x_n) = 0$

بتعبير آخر : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ x_n + \ln(x_n) = n$

■ 5 ب

x_1 هو حل المعادلة : $x + \ln x = 1$

إذن : $x_1 = 1$

و لدينا : $f(x_n) = n$ إذن : $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن : f^{-1} دالة تزايدية قطعا فإن :

$$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n \quad (1)$$

إذن من النتيجة $x_{n+1} > x_n$ نستنتج أن $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ متتالية تزايدية قطعا.}}$

نفترض أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مكبورة بعدد حقيقي A

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ x_n \le A$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ :\ f(x_n) \le f(A) = B$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ :\ n \le B$

$\Leftrightarrow$ المجموعة $\mathbb{N}$ مكبورة بالعدد B

$\Leftrightarrow$ مستحيل

إذن : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ غير مكبورة}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متباعدة.

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

■ 6 أ

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow\ n \ge 1$

$\Leftrightarrow\ \ln n \ge 0$

$\Leftrightarrow\ n + \ln n \ge n$

$\Leftrightarrow\ f(n) \ge f(x_n)$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(n) \ge f(x_n)$

و بما أن f^{-1} دالة تزايدية فإن : $f^{-1}(f(n)) \ge f^{-1}(f(x_n))$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \ge x_n}$

■ 6 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \ge x_n$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{x_n}{n} \le 1$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln(x_n) - ln(n) \le 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_{n} - ln(n) \le x_n$

$\Leftrightarrow\ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n - ln(n) \le x_n}$

ملاحظة :

لدينا :

$$\lim_{n\infty}(n - \ln n) = \lim_{n\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$$

إذن : $\underbrace{n - ln(n)}_{\infty \to +\infty} \le x_n$

و هذا دليل آخر على أن : $\lim\limits_{n\infty} x_n = +\infty$

■ 6 ج

لدينا : $n - \ln n \le x_n$

إذن : $\frac{n - x_n}{n} \le \frac{\ln n}{n}$

و منه : $\left|\frac{n - x_n}{n}\right| \le \frac{\ln n}{n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{ln\, n}{n}\right) = 0$

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left|\frac{n - x_n}{n}\right| = 0$

أي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{x_n - n}{n}\right) = 0$

و لدينا حسب السؤالين أ و ب : $n - \ln n \le x_n \le n$

إذن : $\frac{n - \ln n}{n - ln\, n} \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \frac{n}{n - ln\, n}$

يعني : $1 \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \frac{n}{n - ln\, n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{n}{n - ln\, n}\right) = \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{1 - \frac{ln\, n}{n}}\right) = 1$

فإن : $\underbrace{1}_{\infty \to \boxed{1}} \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \underbrace{\frac{n}{n - ln\, n}}_{\infty \to \boxed{1}}$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{x_n}{n - ln\, n}\right) = 1}$

www.baclive.blogspot.com

التمرين الخامس : (4 ن)

■ ①

لدينا f_n دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,1[$.

و لدينا : $\forall x \in]0,1[\; ; \; f_n'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} > 0$

إذن : f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$

و منه f_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا : $f_n(0) = -1 < 0$

و $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 0$

إذن : $0 \in]f_n(0), f_n(1)[$

و منه : 0 يمتلك سابقا واحدا α_n بالتقابل f_n

يعني : $\exists! \; \alpha_n \in]0,1[\; ; \; f_n(\alpha_n) = 0$

■ ②

لدينا : $f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\Leftrightarrow \; f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

و بما أن : $x \in]0,1[$ فإن : $\frac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

و منه : $\forall x \in]0,1[\; ; \; f_{n+1}(x) > f_n(x)$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \in]0,1[$ إذن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

و نعلم أن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن : $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$ فإن : $\boxed{\alpha_n < \alpha_{n+1}}$

إذن $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية تناقصية قطعا.

و لدينا : $(\forall n \geq 2) \; ; \; 0 < \alpha_n < 1$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ مصغورة بالعدد 0

و بالتالي : $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية متقاربة .

■ ③ أ

لدينا $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف لـ1 .

إذن : $1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

■ ③ ب

لدينا من أجل : $t \neq 1$

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \cdots + t^{n-1})\, dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

$$\Leftrightarrow \; \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

■ ④ أ

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

يعني : $-1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 0$

إذن : $1 = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$

و منه : $\boxed{1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt}$

■ ④ ب

ننطلق من الكتابة : $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow \; 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{1}{1-\alpha_n} \geq \frac{1}{1-t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \; 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow \; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n\, dt$$

$$\Leftrightarrow \; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}\right)$$

و بما أن : $\alpha_n^{n+1} < 1$

فإن : $\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}\right) \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall n \geq 2) \; ; \; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

www.baclive.blogspot.com

■ 4 ج

لدينا :

$$\underbrace{0}_{\xrightarrow{+\infty}\ \boxed{0}} \leq \int_0^{\alpha_n}\left(\frac{t^n}{1-t}\right)dt \leq \underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{+\infty}\ \boxed{0}}$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\int_0^{\alpha_n}\left(\frac{t^n}{1-t}\right)dt = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty}(1+\ln(1-\alpha_n)) = 0$

نضع : $\ell = \lim\limits_{n\infty}\alpha_n$

إذن : $1+\ln(1-\ell) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \ln(1-\ell) = -1\\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{1-\ell}\right) = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\ell} = e\\
&\Leftrightarrow \quad e(1-\ell) = 1\\
&\Leftrightarrow \quad e - e\ell = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \ell = \frac{e-1}{e}\\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = 1-e^{-1}}
\end{aligned}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

www.baclive.blogspot.com

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2012

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

0,75 ن ① أحسب : $\mathbb{I}-\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2$

0,50 ن ② استنتج أن $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا يتم تحديده .

(II) لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $\mathbf{I}=]1,+\infty[$ نضع : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

0,25 ن ① تحقق أن : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$

0,50 ن ② بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I

0,50 ن ③ نذكر أن : $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق :

$$\boldsymbol{\varphi}:\ \mathbb{R}_+^*\longrightarrow \mathbf{I}\qquad x\longrightarrow\sqrt{x+1}$$

0,50 ن أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ إلى $(\boldsymbol{I},*)$.

0,25 ن ب) استنتج بنية $(\boldsymbol{I},*)$.

0,75 ن ج) بين أن المجموعة : $\Gamma=\{\sqrt{1+2^m}/m\in\mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(\boldsymbol{I},*)$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان.

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) حيث : a عدد عقدي غير منعدم .

$$(\boldsymbol{E})\ :\ iZ^2+(2-i)aZ-(1+i)a^2=0$$

0,75 ن ① حدد Z_1 و Z_2 حلي المعادلة (E) .

0,25 ن ② أ) تحقق أن : $Z_1Z_2=a^2(i-1)$

0,50 ن ب) بين أن : Z_1Z_2 عدد حقيقي $\Leftrightarrow$ $arg\,a=\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

www.baclive.blogspot.com

(II) ليكن c عددا عقديا غير منعدم و z عدد عقدي غير منعدم .

0,50 ن ① أ) نعتبر النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي هي : 1 و $(i+1)$ و c و ic و z .

0,50 ن ب) بين أن : A و D و M نقط مستقيمية $\Leftrightarrow$ $(ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$

0,50 ن ② بين أن : $(AD)\perp(OM)$ $\Leftrightarrow$ $(ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$

ليكن h لحق النقطة H : المسقط العمودي للنقطة o على (AD) .

0,75 ن أ) بين أن : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$

0,25 ن ب) استنتج أن : $(CH)\perp(BH)$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)\ :\ 143x-195y=52$

0,50 ن ① أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 . و استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

0,75 ن ب) علما أن : $(-1;-1)$ حل خاص لـ (E) . أوجد الحل العام لـ (E) في $\mathbb{Z}^2$

0,50 ن ② ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع العدد 5 بين أن : $n^{4k}\equiv 1[5]$, $\forall k\in\mathbb{N}$

③ ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث : $x\equiv y[4]$

0,50 ن أ) بين أن : $n^x\equiv n^y[5]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

0,50 ن ب) استنتج أن : $n^x\equiv n^y[10]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

0,25 ن ④ ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث يكون الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) .

بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$: العددان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

التمرين الرابع : (5,5 ن)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x)=x+\frac{e^{-x}}{n}$

ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن ① أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

0,50 ن ② أ) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $-\infty$.

0,50 ن ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ بجوار $+\infty$

و حدد الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_n)$ و **(D)**

0,75 ن ③ أدرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها.

0,50 ن ④ أنشىء المنحنى $(\mathscr{C}_3)$ نأخذ : $\boxed{f_3(-1,5)\approx 0}$ و $\boxed{ln3=1,1}$ و $\boxed{f_3(0,6)\approx 0}$

0,25 ن ⑤ أ) بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن : $\frac{e}{n}<\ln(n)$

1,00 ن ب) بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث :

$x_n\leq -ln(n)$ و $\frac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$

www.baclive.blogspot.com

ج) أحسب : $\lim_{n\infty} x_n$ و $\lim_{n\infty} y_n$ — 0,50 ن

6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \\ g(0) = -1 \end{cases}$

أ) بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 — 0,25 ن

ب) تحقق أن لكل $n \geq 3$ $\quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ — 0,50 ن

ج) استنتج : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n}$ — 0,25 ن

التمرين الخامس : (4,5 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{ln(1+2x)}{2x^2}, \forall x\epsilon]0,1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$

1) ليكن x عنصرا من المجال $[0,1]$ بين أنه مهما يكن t من المجال $[0,x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$ — 0,25 ن

2) ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$

أ) بين أن $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$ — 0,50 ن

ب) بين أن $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 0 — 0,75 ن

3) باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء بين أن : — 0,75 ن

$$\forall x\epsilon[0,1] : \int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

4) ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$

أ) بين أن $F'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ — 0,50 ن

ب) بين أن $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2t)^2}$ — 0,75 ن

ج) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0,x]$ بين أن : — 0,75 ن

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د) استنتج أن الدالة F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0 — 0,25 ن

www.baclive.blogspot.com

التمرين الأول : (3,3 ن)

■(I)①

$$I-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

■(I)②

لدينا حسب السؤال① : $A^2=I-A$

إذن : $A(A+I)=A^2+A=I$

و كذلك : $(A+I)A=A^2+A=I$

و منه A مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو المصفوفة $(A+I)$

أي بتعبير آخر : $\boxed{A^{-1}=A+I}$

■(II)①

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$.

لدينا :

$$(x^2-1)(y^2-1)+1=(xy)^2-x^2-y^2+1+1$$
$$=x^2y^2-x^2-y^2+2$$

■(II)②

ليكن a و b عنصرين من $I=]1;+\infty[$

إذن : $a>1$ و $b>0$

و منه : $a^2>1$ و $b^2>1$

يعني : $(a^2-1)>0$ و $(b^2-1)>0$

$$\Leftrightarrow\ (b^2-1)(a^2-1)>0$$
$$\Leftrightarrow\ (b^2-1)(a^2-1)+1>1$$
$$\Leftrightarrow\ a^2b^2-a^2-b^2+2>1$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}>1$$
$$\Leftrightarrow\ a*b>1$$
$$\Leftrightarrow\ \boxed{a*b\in I}$$

و منه $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■(II)③أ

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا :
$$\varphi(a)*\varphi(b)=\sqrt{a+1}*\sqrt{b+1}$$
$$=\sqrt{(a+1)(b+1)-(a+1)-(b+1)+2}$$
$$=\sqrt{ab+1}=\varphi(a\times b)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$

ليكن y عنصرا من I .

لدينا : $\varphi(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=y \Leftrightarrow x=y^2-1$

بما أن : $y>1$ فإن : $y^2-1>0$ و منه $x\in\mathbb{R}_+^*$

و بما أن : y^2-1 عدد وحيد

فإن : $(\forall y\in I),(\exists!\,x=y^2-1)\ :\ \varphi(x)=y$

و منه φ تقابل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$

و تقابله العكسي معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\varphi^{-1}\ :\ (I,*)&\to&(\mathbb{R}_+^*,\times)\\ y&\to&y^2-1\end{array}}$$

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$.

■(II)③ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا : $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو العدد 1 و كل عنصر x يقبل مماثلا و هو مقلوبه $\frac{1}{x}$.

إذن : $(I,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $*$ هو العدد $\varphi(1)$ و كل عنصر y يقبل مماثلا و هو $Sym(y)$.

و لدينا : $\varphi(1)=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

و لدينا كذلك : $y\in I$

إذن يوجد x من $\mathbb{R}^*$ بحيث : $\boxed{y=\varphi(x)\ \Leftrightarrow\ x=\varphi^{-1}(y)=y^2-1}$

www.baclive.blogspot.com

و منه :

$$\begin{aligned} Sym(y) &= Sym(\varphi(x)) \\ &= \varphi(Sym(x)) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{y^2-1}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{y^2-1}+1} = \sqrt{\frac{y^2}{y^2-1}} \end{aligned}$$

■ (II) ③ ج

لدينا (Γ) جزء غير فارغ من I

لأنه إذا كان : $m\epsilon\mathbb{Z}$ فإن : $2^m > 0$

يعني : $2^m + 1 > 1$

يعني : $\sqrt{2^m+1} > 1$

يعني : $\sqrt{2^m+1}\,\epsilon\, I$

ليكن $\sqrt{1+2^m}$ و $\sqrt{1+2^n}$ عنصرين من (Γ)

لدينا :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1+2^m}\right) * \left(\sqrt{1+2^n}\right)' &= \left(\sqrt{1+2^m}\right) * \left(\sqrt{\frac{1+2^n}{2^n}}\right) \\ &= \sqrt{(1+2^m)\left(\frac{1+2^n}{2^n}\right) - (1+2^m) - \left(\frac{1+2^n}{2^n}\right) + 2} \\ &= \sqrt{2^{m-n}+1}\ \epsilon\ (\Gamma) \end{aligned}$$

و بالتالي $(\Gamma,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني : (3,3 ن)

■ (I) ①

$$(E)\ :\ iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$$

لدينا : $\Delta = (2-i)^2a^2 + 4i(1+i)a^2$

$\Delta = (ai)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1 = \frac{(i-2)a + ai}{2i} = a(1+i)$$

$$z_2 = \frac{(i-2)a - ai}{2i} = ai$$

■ (I) ② أ

$$z_1z_2 = ai(a)(1+i)$$

$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2i - a^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{z_1z_2 = a^2(i-1)}$$

■ (I) ② ب

في البداية يجب كتابة z_1z_2 في شكله المثلثي.

لدينا : $z_1z_2 = a^2(i-1)$

$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\ e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}}$$

و لدينا : $z_1z_2\ \epsilon\ \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\quad arg(z_1z_2) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad arg\left(a^2\sqrt{2}\ e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad arg\left(a^2\sqrt{2}\ \right) + arg\left(e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad arg(a^2) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\,arg(a) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\,arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{4}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]}$$

www.baclive.blogspot.com

■(II)①أ

لدينا : $A(1)$ و $B(i+1)$ و $C(c)$ و $D(ic)$ و $M(z)$

ننطلق من المعلومة : " A و D و M نقط مستقيمية "

$$\Leftrightarrow \quad (AD) \parallel (AM)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overline{\frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}}\right) = \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overline{\frac{z-1}{ic-1}}\right) = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\bar{z}-1}{-ic-1} = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (ic-1)(\bar{z}-1) + (z-1)(ic+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{z}ic - ic - \bar{z} + 1 + zic + z - ic - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\bar{z}(ic-1) + z(ic+1) = 2ic}$$

■(II)①ب

$$(AD) \perp (OM) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_M - z_O}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overline{\frac{z_M - z_O}{z_D - z_A}}\right) = -\left(\frac{z_M - z_O}{z_D - z_A}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overline{\frac{z-0}{ic-1}}\right) = -\left(\frac{z-0}{ic-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\bar{z}}{-ic-1} = \frac{-z}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{z}(ic-1) = z(ic+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad z(ic-1) - \bar{z}(ic-1) = 0$$

■(II)②أ

لدينا H هي المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

يعني : $\boxed{\begin{cases}(AD) \perp (OH) \\ (AD) \parallel (AH)\end{cases}}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\left(\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right) \in i\mathbb{R} \\ \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right) \in \mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\left(\overline{\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A}}\right) = -\left(\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right) \\ \left(\overline{\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A}}\right) = \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\left(\overline{\frac{h-0}{ic-1}}\right) = -\left(\frac{h-0}{ic-1}\right) \\ \left(\overline{\frac{h-1}{ic-1}}\right) = \left(\frac{h-1}{ic-1}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\left(\frac{\bar{h}}{-ic-1}\right) = -\left(\frac{h}{ic-1}\right) \\ \left(\frac{\bar{h}-1}{-ic-1}\right) = \left(\frac{h-1}{ic-1}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\bar{h}(ic-1) = h(ic+1) \\ (\bar{h}-1)(ic+1) = -(h-1)(ic+1)\end{cases}$$

من المعادلة الثانية من النظمة نستنتج ما يلي :

$$\bar{h}(ic-1) = (ic-1) - (h-1)(ic+1)$$

نعوض في المعادلة الأولى نحصل على :

$$(ic-1) - (h-1)(ic+1) = h(ic+1)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $2ic - 2h - 2hic = 0$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\frac{i}{2c}$ نحصل على :

$$-1 - \frac{hi}{c} + h = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h - 1 = \frac{hi}{c}$$

نضيف إلى كل من الطرفين العدد $-i$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)}$$

■(II)②ب

لدينا : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$

يعني : $\frac{h-(1+i)}{h-c} = \frac{i}{c}$

لدينا :

$$\left(\overline{\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C}}\right) = -\left(\overline{\frac{h-(1+i)}{h-c}}\right) = \frac{-i}{c} = -\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C}\right)$$

و منه : $\boxed{(CH) \perp (BH)}$

www.baclive.blogspot.com

التمرين الثالث : (3,3 ن)

■ 1 أ

باستعمال خوارزمية إقليدس نحدد $195 \wedge 143$ بالطريقة التالية :

195	143
52	1

لدينا : $52 \neq 0$ إذن نواصل .

143	52
39	2

لدينا : $39 \neq 0$ إذن نواصل .

52	39
13	1

لدينا : $13 \neq 0$ إذن نواصل .

39	13
0	3

لدينا : $0 = 0$ إذن **نتوقف** .

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195 هو آخر باقي غير منعدم : 13

بتعبير آخر : $\boxed{195 \wedge 143 = 13}$ (1)

من النتيجة (1) نستنتج وجود عددين نسبيين k و u بحيث : $143u + 195k = 13$

نضع : $v = -k$ إذن : $143u - 195v = 13$

و بما أن : $13 \backslash 52$ فإن : $(143u - 195v) \backslash 52$

و منه : $(\exists w \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ 52 = (143u - 195v)w$

أي : $(\exists\, x, y \,\epsilon\, \mathbb{Z})\ ;\ 52 = 143\underbrace{uw}_{x} - 195\underbrace{vw}_{y}$

و بالتالي : $(\exists\, x, y \,\epsilon\, \mathbb{Z})\ ;\ 52 = 143x - 195y$

أي أن المعادلة أعلاه تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

■ 1 ب

لدينا $(-1, -1)$ حل خاص للمعادلة (E)

يعني : $\boxed{143(-1) - 195(-1) = 52}$ $(*)$

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .

يعني : $\boxed{143x - 195y = 52}$ $(**)$

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين $(*)$ و $(**)$ طرفا بطرف نحصل على :

$143(-1 - x) - 195(-1 - y) = 0$

يعني : $143(x + 1) = 195(y + 1)$

لدينا : $195 = 15 \times 13$ و $143 = 11 \times 13$

نحصل على : $11(x + 1) = 15(y + 1)$

و منه : $11 \backslash 15(y + 1)$

و بما أن : $11 \wedge 15 = 1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $11 \backslash (y + 1)$

منه : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ y + 1 = 11k$

أي : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ y = 11k - 1$

نعوض y في المتساوية $(*)$ نحصل على : $x = 15k - 1$

عكسيا : لدينا $\forall k \epsilon \mathbb{Z}\ ;\ 143(15k - 1) - 195(11k - 1) = 52$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\boxed{\mathcal{S} : \{(15k - 1\,; 11k - 1)\ ;\ k \epsilon \mathbb{Z}\}}$$

■ 2

لدينا $n \wedge 5 = 1$ بحيث $n \epsilon \mathbb{N}^*$

لدينا 5 عدد أولي و لا يقسم n .

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$: $n^{5-1} \equiv 1[5]$

يعني : $n^4 \equiv 1[5]$

و منه : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ (n^4)^k \equiv 1^k[5]$

يعني : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ n^{4k} \equiv 1[5]$

■ 3 أ

لدينا : $x \equiv y[4]$

$\Leftrightarrow\ 4 \backslash (x - y)$

$\Leftrightarrow\ (\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x - y) = 4k$

و منه حسب نتيجة السؤال 2 : $n^{x-y} = n^{4k} \equiv 1[5]$

إذن : $n^x \cdot n^{-y} \equiv 1[5]$

و بما أن : $n^y \equiv n^y[5]$

فإنه عند المرور إلى الجداء بين آخر متوافقتين نحصل على :

$n^x \cdot n^{-y} \cdot n^y \equiv n^y[5]$

أي : $\boxed{n^x \equiv n^y[5]}$ $(\otimes)$

■ 3 ب

لدينا : $x \equiv y[4]$

$\Leftrightarrow\ (\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x - y) = 4k$

$\Leftrightarrow\ (\exists\ k' = 2k\ \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x - y) = 2k'$

إذن $x - y$ عدد زوجي .

و منه x و y فرديان معا أو زوجيان معا.

نقوم بدمج هذه الحالتين مع حالتي زوجية العدد n لنحصل على أربع حالات

و كلها تعبر عن زوجية التعبير $(n^x - n^y)$

(عدد زوجي) =	(عدد زوجي) (عدد زوجي)	-	(عدد زوجي) (عدد زوجي)
(عدد زوجي) =	(عدد زوجي) (عدد فردي)	-	(عدد زوجي) (عدد فردي)
(عدد زوجي) =	(عدد فردي) (عدد زوجي)	-	(عدد فردي) (عدد زوجي)
(عدد زوجي) =	(عدد فردي) (عدد فردي)	-	(عدد فردي) (عدد فردي)

www.baclive.blogspot.com

نستنتج من هاته الحالات الأربع أن العدد $(n^x - n^y)$ عدد زوجي دائما

و ذلك كيفما كانت زوجية الأعداد x و y و n

و منه : $\boxed{(\exists u \in \mathbb{Z})\ ;\ n^x - n^y = 2u}$ $(\odot)$

من النتيجتين $\otimes$ و $\odot$ نستنتج أن : $\begin{cases} 2 \setminus (n^x - n^y) \\ 2 \setminus (n^x - n^y) \end{cases}$

إذن : $2 \times 5 \setminus (n^x - n^y)$ لأن 2 و 5 عددان أوليان.

و بالتالي : $\boxed{n^x \equiv n^y [10]}$

■ 4

لدينا (x, y) حل للمعادلة (E) .

يعني : $(\exists k \in \mathbb{Z})\ ;\ x = 15k - 1$ و $y = 11k - 1$

لدينا : $(15k - 1) \equiv (11k - 1)[4]$ لأن : $4 \setminus (4k)$

و منه : $x \equiv y[4]$

إذن حسب نتيجة السؤال 3 ب : $n^x \equiv n^y [10]$

و هذا يعني أن n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العدد العشري

أو بتعبير آخر نضع : $n^x = \overline{\alpha\beta^{(10)}}$ و $n^y = \overline{ms^{(10)}}$

رقم وحدات n^x هو العدد β و رقم وحدات n^y هو s

لدينا : $n^x \equiv n^y [10]$ يعني : $\overline{\alpha\beta^{(10)}} \equiv \overline{ms^{(10)}}[10]$

يعني : $10m + s \equiv 10\alpha + \beta [10]$

يعني : $s \equiv \beta [10]$

يعني : $\boxed{s = \beta}$ لأن : $s < 10$ و $\beta < 10$

التمرين الرابع : (3,3 ن)

■ 1

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right) = (+\infty) + 0 = (+\infty)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} \right) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} \left(x e^{x} + \frac{1}{n} \right) = (+\infty)\left(0^- + \frac{1}{n} \right) = \boxed{-\infty}$$

■ 2 أ

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$

إذن : $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

و لدينا : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} (f_n(x) - x) = 0$

إذن $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$

■ 2 أ

لدينا $f_n(x) - y = \frac{e^{-x}}{n} > 0$

إذن المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ يوجد فوق المستقيم (D)

■ 3

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f_n'(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n} = \frac{n - e^{-x}}{n}$$

إذا كان $x = -\ln n$ فإن $f_n'(x) = 0$

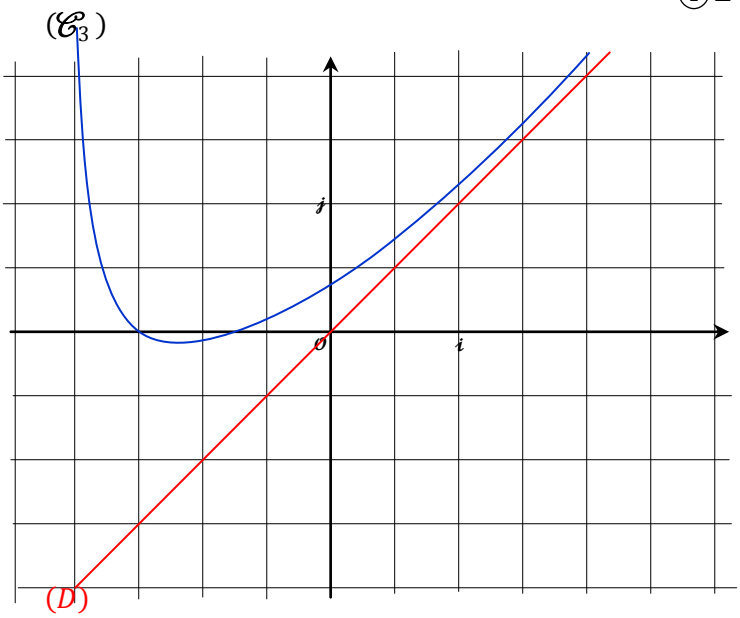
إذا كان $x > -\ln n$ فإن $f_n'(x) > 0$

إذا كان $x < -\ln n$ فإن $f_n'(x) < 0$

و لدينا : $f_n(-\ln n) = -\ln n + \frac{1}{n} e^{\ln n} = \ln\left(\frac{e}{n}\right)$

x	$-\infty$		$-\ln n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	↘	$\ln\left(\frac{e}{n}\right)$	↗	$+\infty$

■ 4



■ 5 أ

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{e}{x}$$

φ دالة قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها فرق دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0, +\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{x + e}{x^2} > 0$

إذن φ دالة تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$

www.baclive.blogspot.com

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln x - \frac{e}{x}\right) = +\infty$

و $\lim_{x\to0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to0^+} \left(\ln x - \frac{e}{x}\right) = -\infty$

و لدينا كذلك : $\varphi(3) \approx 0{,}2 > 0$

نحصل إذن على الجدول التالي :

x	0		3		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	
φ	$-\infty$	↗	$0{,}2$	↗	$+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن : $(\forall x > 0)\ ;\ \varphi(x) > 0$

إذن : $\boxed{(\forall n \geq 3)\ ;\ \ln 3 > \frac{e}{n}}$

■ 5 ب

المرحلة الأولى :

لدينا f_n دالة تزايدية قطعا على $[-\ln n\ ;\ +\infty[$

من أجل $n \geq 3$ وجدنا أن $\ln n > \frac{e}{n}$ و منه : $-\ln n < \frac{-e}{n}$

إذن : $\left[\frac{-e}{n}\ ;\ +\infty\right[\subset [-\ln n\ ;\ +\infty[$

أي : f_n دالة تزايدية قطعا على $\left[\frac{-e}{n}\ ;\ +\infty\right[$

و بالأخص f_n دالة تزايدية قطعا على $\left[\frac{-e}{n}\ ;0\right]$ لأن : $\left[\frac{-e}{n}\ ;0\right] \subset \left[\frac{-e}{n}\ ;+\infty\right[$

و بالتالي : $\boxed{f_n \text{ تقابل من } \left[\frac{-e}{n}\ ;0\right] \text{ نحو صورته } \left(\left[\frac{-e}{n}\ ;0\right]\right)}$.(1)

من جهة ثانية لدينا : $\boxed{f_n(0) = \frac{1}{n} > 0}$ لأن : $n \geq 3$

(2)

و لدينا كذلك : $f_n\left(\frac{-e}{n}\right) = \frac{-e}{n} + \frac{1}{n}\left(e^{\frac{e}{n}}\right)$

لدينا : $n \geq 3$ إذن : $\frac{e}{n} \leq \frac{e}{3}$

و بما أن : $\frac{e}{3} < 1$ فإن : $\frac{e}{n} < 1$

و منه : $\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n} < \frac{e}{n}$ يعني : $\left(\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n} - \frac{e}{n}\right) < 0$

إذن : $\boxed{f_n\left(\frac{-e}{n}\right) < 0}$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن : $\boxed{f_n(0) \cdot f_n\left(\frac{-e}{n}\right) < 0}$

و من (1) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطية أن :

$$\boxed{\exists!\ y_n \in \left[\frac{-e}{n};0\right]\ :\ f_n(y_n) = 0}$$

المرحلة الثانية :

لدينا f_n دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]-\infty\ ;\ -\ln n]$.

إذن f_n تقابل من $]-\infty\ ;\ -\ln n]$ نحو صورته $f_n(]-\infty\ ;\ -\ln n])$

و لدينا : $f_n(]-\infty\ ;\ -\ln n]) = \left[\ln\left(\frac{e}{n}\right)\ ;\ +\infty\right[$

إذن f_n تقابل من المجال $]-\infty\ ;\ -\ln n]$ نحو المجال $\left[\ln\left(\frac{e}{n}\right)\ ;\ +\infty\right[$

من أجل $n \geq 3$ لدينا : $\ln n \geq \ln 3 \approx 1{,}09$

إذن : $\ln n > 1$ و منه : $1 - \ln n < 0$

و منه : $\ln\left(\frac{e}{n}\right) < 0$ لأن : $\ln\left(\frac{e}{n}\right) = 1 - \ln n$

من هذه النتيجة نستنتج أن : $0 \in \left[\ln\left(\frac{e}{n}\right)\ ;\ +\infty\right[$

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل f_n

أو بتعبير آخر : $\exists!\ x_n \in]-\infty\ ;\ -\ln n]\ :\ f_n(x_n) = 0$

أي : $\boxed{\exists!\ x_n \leq -\ln n\ :\ f_n(x_n) = 0}$

■ 5 ج

لدينا : $x_n \leq -\ln n$ يعني : $x_n \leq \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

و لدينا : $\lim_{n\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$

إذن بالضرورة : $\boxed{\lim_{n\infty} x_n = -\infty}$

و لدينا : $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

بما أن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{-e}{n}\right) = \lim_{n\infty} 0 = 0$

فإن : $\boxed{\lim_{n\infty} y_n = 0}$

■ 6 أ

لدينا : $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}(-1 - x\ln x) = -1 = g(0)$

إذن : g دالة متصلة على اليمين في الصفر .

■ 6 ب

لدينا حسب السؤال 5 ب : $f_n(x_n) = 0$

إذن : $x_n + \frac{e^{-x_n}}{n} = 0$ و منه : $x_n = \frac{-e^{-x_n}}{n}$

أي : $\boxed{\frac{-1}{x_n} = ne^{x_n}}$ (*)

يعني : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = g(ne^{x_n})$

$$= -1 - ne^{x_n}\ln(ne^{x_n})$$

$$= -1 - \boxed{ne^{x_n}}(\ln n + x_n)$$

$$= -1 - \boxed{-\frac{1}{x_n}}(\ln n + x_n)$$

$$= \boxed{-1 + \frac{1}{x_n}(\ln n + x_n)}$$

www.baclive.blogspot.com

$$\Leftrightarrow \quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = -1 + \frac{\ln n}{x_n} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \boxed{\frac{\ln n}{x_n}}$$

■ 6 ج

بما أن : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{n\to+\infty \\ u=\frac{-1}{x_n}}} g(u) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad g(0) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right) = -1}$$

التمرين الخامس : (3,3 ن)

■ 1

ليكن $x \in [0;1]$ و $t \in [0;x]$

لدينا : $0 \le t \le x$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le 2t \le 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \le 2t+1 \le 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2t+1} \le 1}$$

■ 2 أ

ليكن x عنصرا من $]0;1]$

$$\frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t+1-1}{1+2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t+1}{1+2t} - \frac{1}{1+2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x 1\,dt - \frac{1}{2x^2}\int_0^x \left(\frac{2}{2t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^2}[t]_0^x - \frac{1}{2x^2}[\ln(2t+1)]_0^x$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x+1)}{2x^2} = F(x)$$

■ 2 ب

لدينا حسب السؤال 1 :

$$\frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2t+1} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{2x+1} \le \frac{t}{2t+1} \le t$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)dt \le \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)dt \le \frac{2}{x^2}\int_0^x t\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2(1+2x)}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le F(x) \le \frac{2}{x^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2}{2x^2(1+2x)} \le F(x) \le \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{(1+2x)} \le F(x) \le 1}$$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1+2x}\right) = \lim\limits_{x\to0^+} 1 = 1$

فإن : $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = 1 = F(0)$

و بالتالي : F دالة متصلة على اليمين في الصفر.

■ 3

لدينا : $\int_0^x \left(\frac{2t}{2t+1}\right)dt = \int_0^x \underbrace{(2t)}_{u'}\underbrace{\left(\frac{1}{2t+1}\right)}_{v}dt$

$$= \left[\frac{t^2}{2t+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-2t^2}{(2t+1)^2}dt$$

$$= \frac{x^2}{2x+1} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt$$

www.baclive.blogspot.com

■ 4 أ

في البداية لدينا : $h : x \to \dfrac{x}{1+2x}$

و هي دالة متصلة على $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ و بالأخص على المجال $]0;x]$

بحيث : $0 \le x \le 1$

إذن : h تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز H بحيث : $H'(x) = h(x)$

لدينا إذن : $F(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \frac{2}{x^2} H(x)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \left(\frac{2}{x^2}\right)' H(x) + \left(\frac{2}{x^2}\right) H'(x)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \left(\frac{-4x}{x^4}\right)\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt + \left(\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{1+2x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \left(\frac{-2}{x^3}\right)\int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right) dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$

بعد ذلك نستعمل نتيجة السؤال 3 نحصل على :

$$F'(x) = \left(\frac{-2}{x^3}\right)\left(\frac{x^2}{2x+1} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt\right) + \frac{2}{x(1+2x)}$$

$$= \frac{-2}{x(1+2x)} - \frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$

$$\boxed{F'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt}$$

■ 4 ب

لدينا حسب السؤال 1 : $\dfrac{1}{2x+1} \le \dfrac{1}{2t+1} \le 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{2x+1} \le \frac{t}{2t+1} \le t$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 \le \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 \le t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 dt \le \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt \le \int_0^x t^2\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 dt \ge F'(x) \ge \frac{-4}{x^3}\int_0^x t^2\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-4}{x^3(1+2x)^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x \ge F'(x) \ge \frac{-4}{x^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{-4}{3(1+2x)^2} \ge F'(x) \ge \frac{-4}{3}}$$

■ 4 ج

لدينا : $F(x) = \dfrac{2}{x^2} H(x)$

بحيث : $H(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt$

نلاحظ أن F دالة متصلة على $[0;x]$ و قابلة للإشتقاق على $]0;x[$ لإنها جداء دالتين متصلتين و قابلتين للإشتقاق

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists\, c \in]0,x[\ ; \ F'(c) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$

و بما أن : $\forall\, c \in]0,1] \ ; \ \dfrac{-4}{3} \le F'(x) \le \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

فإن : $\dfrac{-4}{3} \le F'(c) \le \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

لأن : $0 < c < x < 1$

ومنه : $\dfrac{-4}{3} \le \left(\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) \le \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

بما أن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{3}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{3(1+2x)^2}\right) = \frac{-4}{3}$

فإن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = \frac{-4}{3}$

و بالتالي : F دالة قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

و لدينا : $\boxed{F'_d(0) = \dfrac{-4}{3}}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

www.baclive.blogspot.com

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2012

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

(I) لكل a و b من المجال $I=[1;+\infty[$ نضع : $a\perp b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2$

① بين أن : $\perp$ قانون تركيب داخلي في I . — 0,50 ن

② بين أن القانون $\perp$ تبادلي و تجميعي في I . — 0,50 ن

③ بين أن : $\perp$ يقبل عنصرا محايدا في I وجب تحديده. — 0,25 ن

(II) نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية. لتكن : $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1\end{pmatrix} \ / \ x\in\mathbb{R}^*\right\}$

① بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ — 0,50 ن

② نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & E \\ x & \to & M(x) \end{array}$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$. — 0,50 ن

ب) استنتج بنية $(E,\times)$. — 0,50 ن

ج) بين أن المجموعة : $H=\left\{\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \ / \ n\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(E,\times)$. — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0$

① أ) تحقق أن العدد $z_1=1+\frac{2}{3}i$ حل للمعادلة (E) . — 0,50 ن

ب) بين أن الحل الثاني للمعادلة هو $z_2=3z_1$ — 0,50 ن

(II) نعتبر ثلاث نقط A و B و Ω مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي : a و b و ω .

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

نضع : $P=r(A)$ و $B=r(Q)$

ليكن العدد العقدي p لحق النقطة P و العدد العقدي q لحق النقطة Q .

① أ) بين أن : $p=\omega+e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ و $q=\omega+e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$ — 0,50 ن

ب) بين أن : $\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ — 0,25 ن

www.baclive.blogspot.com

0,50 ن	ج) بين أن : $\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$
	2) نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$
0,75 ن	أ) بين أن : $APQB$ متوازي أضلاع .
0,75 ن	ب) بين أن : $arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و استنتج أن الرباعي $APQB$ مستطيل .
	التمرين الثالث : (3,0 ن)
0,25 ن	1) أ) تحقق أن : 503 عدد أولي.
0,75 ن	ب) بين أن $7^{502}\equiv 1[503]$ ثم استنتج أن $7^{2008}\equiv 1[503]$.
0,50 ن	2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)\ :\ 49x-6y=1$
	علما أن الزوج $(1;8)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل.
	3) نضع : $N=1+7+7^2+\cdots+7^{2007}$
0,25 ن	أ) بين أن الزوج $(7^{2006},N)$ حل للمعادلة (E) .
0,25 ن	ج) استنتج أن N يقبل القسمة على 2012
1,00 ن	ب) بين أن $N\equiv 0[4]$ و $N\equiv 0[503]$
	التمرين الرابع : (7,5 ن) (I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي :
	$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$$
0,50 ن	1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$
0,50 ن	2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.
	(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=e^x\ln(1+e^{-x})$
1,00 ن	1) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$
0,50 ن	2) بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=e^xg(e^{-x})$
0,50 ن	3) ضع جدول تغيرات الدالة f
1,00 ن	4) أنشئ $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f و $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $(-f)$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$
	نقبل أن $-0,7$ قيمة مقربة لأفصول نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى $(\mathscr{C})$.
0,75 ن	5) بين أن لكل x من $]-1;0[$ لدينا : $0<f'(x)<g(e)$
0,75 ن	6) بين أن المعادلة $f(x)+x=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. و أن : $-1<\alpha<0$

www.baclive.blogspot.com

⑦ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) \ ; \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

0,50 ن (أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ : \ -1 \leq u_n \leq 0$

0,50 ن (ب) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ : \ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

0,50 ن (ج) استنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ : \ |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$

0,50 ن (د) علما أن : $g(e) < 0{,}6$ أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الخامس : (2,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right) dt$

0,25 ن ① أحسب $F(1)$.

0,50 ن ② (أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و احسب $F'(x)$.

0,50 ن (ب) استنتج أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا : $F(x) = 0$

0,50 ن ③ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا :

$$F(x) = \left(Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan\,(t)}{t}\,dt$$

0,25 ن ④ بين أن : $(\forall x > 0) \ : \ Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)$

0,50 ن ⑤ استنتج أن : $(\forall x > 0) \ : \ \ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan\,(t)}{t}\,dt$

www.baclive.blogspot.com

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ (I) ①

ليكن x و y عنصرين من $[1;+\infty[$

إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

و منه : $\sqrt{x} \geq 1$ و $\sqrt{y} \geq 1$

يعني : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2 \geq 1$

إذن : $x \perp y \in [1;+\infty[$

و بالتالي : $\perp$ قانون تركيب داخلي في I .

■ (I) ②

ليكن x و y عنصرين من $[1;+\infty[$

لدينا : $x \perp y = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad x \perp y = \left(\sqrt{y}+\sqrt{x}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad x \perp y = y \perp x$

و منه $\perp$ قانون تبادلي في I .

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال I .

لدينا : $(x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x \perp y}+\sqrt{z}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1+\sqrt{z}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}-1\right)-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y \perp z}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$

إذن $\perp$ قانون تجميعي في $[1;+\infty[$.

■ (I) ③

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\perp$ في I .

$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; x \perp e = e \perp x = x$

$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; \left(\sqrt{x}+\sqrt{e}-1\right)^2 = x$

$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; \sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \pm\sqrt{x}$

في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = -\sqrt{x}$

نحصل على : $e = \left(1-2\sqrt{x}\right)^2$

لكن : $\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 \notin I$ لأنه لدينا $x \in I$

إذن : $x \geq 0$ و منه : $\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 < 1$

أما في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \sqrt{x}$

نحصل على : $e = 1 \in [1;+\infty[$

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا

إذن : 1 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في المجموعة I .

■ (II) ①

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E

لدينا : $M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (II) ② أ

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^*$

لدينا :

$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ليكن $M(y)$ عنصرا من $(E,\times)$

لنحل المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ ذات المجهول x

$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow M(x) = M(y)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad x = y$

و بالتالي : المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ و هو y

و بتعبير آخر :

$(\forall M(y) \in E)\ (\exists!\, x \in \mathbb{R}^*) \; : \; \varphi(x) = M(y)$

و منه : φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

■ (II) ② ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

نستنتج إذن بنية $(E,\times)$ انطلاقا من بنية $(\mathbb{R}^*,\times)$ عن طريق التشاكل التقابلي φ .

www.baclive.blogspot.com

لدينا : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 و كل عنصر x يقبل $\frac{1}{x}$ كمماثل.

إذن : $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$ و كل مصفوفة $M(x)$ تقبل مماثلة و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$.

و لدينا : $\varphi(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

و $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x}-1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

■ (II) ② ج

لتكن H_n مصفوفة من المجموعة $\mathcal{H}$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2(2^n-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad x = 2^n$$

إذن : $\mathcal{H} \subset E$ و لدينا : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$

إذن $\mathcal{H}$ جزء غير فارغ من E

لتكن : $\begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين من $\mathcal{H}$.

لدينا : $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{-m} & 2(2^{-m}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2^{n-m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

إذن : $(\mathcal{H},\times)$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (I) ① أ

تعويض مباشر و حساب سهل

■ (I) ① ب

نعلم أنه إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $az^2 + bz + c = 0$

فإن : $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ و $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

نستعمل العلاقة : $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

إذن : $z_1 z_2 = \left(\frac{5}{3} + 4i\right)$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = \frac{\left(\frac{5}{3}+4i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}{\left(1+\frac{2}{3}i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = \frac{9}{13}\left(\frac{13}{3}+\frac{26}{9}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3\left(1+\frac{2}{3}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3z_1$$

■ (II) ① أ

لدينا : $P = r(A)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران : $(z_P - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_A - z_\Omega)$

$$\Leftrightarrow \quad (p-\omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{p = e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)+\omega} \quad (1)$$

و بنفس الطريقة : $B = r(Q)$

$$\Leftrightarrow \quad (z_B - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_Q - z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b-\omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(q-\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad qe^{\frac{i\pi}{3}} = (b-\omega) + \omega e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{q = e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)+\omega} \quad (2)$$

■ (II) ① ب

في البداية لدينا :

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

www.baclive.blogspot.com

ننطلق إذن من الكتابة :

$$\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{\frac{-4i\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)}{\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+1\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cancel{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}+\cancel{i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}+1\right)}{\left(\cancel{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}+\cancel{i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}}$$

■ (II) ① ج

لدينا حسب العلاقتين (1) و (2) من السؤال ① أ

$$(p-a)=\omega+ae^{\frac{i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$\Leftrightarrow\quad (p-a)=\omega\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)+a\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}$$

و لدينا كذلك : $(q-b)=\omega+be^{\frac{-i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{-i\pi}{3}}-b$

$$\Leftrightarrow\quad (q-b)=\omega\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)+b\left(e^{\frac{-i\pi}{3}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(q-b)=\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)(\omega-b)}$$

و منه : $\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$

و بالتالي : $\boxed{\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}}$ (3)

■ (II) ② أ

نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

بالإستعانة بالعلاقة (3) نحصل على :

$$\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{p-a}{q-b}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{2i\pi}=1$$

إذن : $(p-a)=(q-b)$

يعني : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$

و منه حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع : $APBQ$ متوازي أضلاع.

■ (II) ② ب

لدينا حسب النتيجة (1) :

$$(p-a)=\omega+ae^{\frac{i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}\ (4)$$

و لدينا كذلك حسب افتراض السؤال ② : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

إذن : $\boxed{(\omega-b)=e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)}$ (5)

و لدينا من جهة أخرى :

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

إذن باستعمال العلاقة (5) نحصل على :

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

$$\Leftrightarrow\quad (b-a)=(\omega-a)-e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(b-a)=(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}\ (6)$$

من (4) و (6) نستنتج أن :

$$\frac{b-a}{p-a}=\frac{(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}{\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}=\frac{1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1-cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1-cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

www.baclive.blogspot.com

نضرب طرفي آخر نتيجة في العدد العقدي $(1+i\sqrt{3})$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1}{4}(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})=\boxed{i\sqrt{3}}$$

و بالتالي : $\left(\frac{b-a}{p-a}\right)=i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right)=arg(i\sqrt{3})[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad \overline{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB})}=\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$ $P\hat{A}B$ زاوية قائمة

و بما أن : $APQB$ متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة.

فإن $APQB$ مستطيل.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① أ

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 .

إذن 503 عدد أولي.

■ ① ب

بما أن 503 عدد أولي و 7 عدد أولي كذلك.

فإنه حسب $(Fermat)$: $7^{503-1}\equiv 1[503]$

يعني : $7^{502}\equiv 1[503]$

و منه : $(7^{502})^4\equiv 1^4[503]$

أي : $7^{2008}\equiv 1[503]$

■ ②

لدينا : $(1,8)$ حل خاص للمعادلة (E) .

و ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $\begin{cases}49\times 1-6\times 8=1\\ 49x-6y=1\end{cases}$

ننجز عملية الفرق بين المعادلتين طرفا بطرف نحصل على :

$$\boxed{49(x-1)=6(y-8)} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad 49\,/\,6(y-8)$$

بما أن $49\wedge 6=1$ فإنه حسب $Gauss$: نحصل على : $49\,/\,(y-8)$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=49k+8$

نعوض y بقيمته في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$49(x-1)=6(49k)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=6k+1$$

عكسيا : لدينا : $49(6k+1)-6(49k+8)=1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على شكل :

$$\boxed{\mathcal{S}=\{\ (6k+1\,;49k+8)\quad /\quad k\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

■ ③ أ

نعلم أنه إذا كانت q^n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q فإن :

$$1+q+q^2+\cdots\cdots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

لدينا 7^n متتالية هندسية أساسها 7 إذن :

$$1+7+7^2+\cdots\cdots+7^{2007}=\frac{7^{2007+1}-1}{7-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad N=\frac{7^{2008}-1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^{2008}-6N=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^2\cdot 7^{2006}-6N=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 49\cdot 7^{2006}-6N=1$$

إذن الزوج $(7^{2006},N)$ حل للمعادلة (E) .

■ ③ ب

لدينا : $\begin{cases}1\equiv 1[4]\\ 7\equiv -1[4]\end{cases}$

$\begin{cases}7^2\equiv 1[4]\\ 7^3\equiv -1[4]\end{cases}$

$\begin{cases}7^4\equiv 1[4]\\ 7^5\equiv -1[4]\end{cases}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\begin{cases}7^{2006}\equiv 1[4]\\ 7^{2007}\equiv -1[4]\end{cases}$

www.baclive.blogspot.com

نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :

$$1+7+7^2+7^3+\cdots\cdots+7^{2006}+7^{2007}\equiv 0[4]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N\equiv 0[4]}$$

لدينا حسب ①ب $7^{2008}\equiv 1[503]$ إذن : $503\,/\,(7^{2008}-1)$

و نعلم أن : $(7^{2008}-1)=6N$ إذن : $503\,/\,6N$

و بما أن 503 عدد أولي و 2×3 هو التفكيك الأولي للعدد 6 فإن : $6\wedge 503=1$

و منه حسب $(Gauss)$: $503\,/\,N$

و بالتالي : $N\equiv 0[503]$

■ ③ج

لدينا : $503\wedge 4=1$ لأن : 503 عدد أولي.

و لأن 2^2 هو التفكيك الأولي للعدد 4

و نعلم أن : $4\,/\,N$ و $503\,/\,N$

إذن : $4\times 503\,/\,N$ يعني : $2012\,/\,N$

التمرين الرابع : (7,5 ن)

■ (I)①

لدينا : $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\left(\dfrac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\right)$

$$\Leftrightarrow\quad g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$$

إذن : g' تنعدم في 0 و إشارتها موجبة على المجال $[0,+\infty[$.

و منه g دالة تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

■ (I)②

ليكن x عنصرا من $[0,+\infty[$.

إذن $x\geq 0$ و منه : $g(x)\geq g(0)=0$

و بالتالي : $\forall x\epsilon[0,+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

■ (II)①

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$$

نضع : $t=e^{-x}$ نحصل على :

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+t)-ln(1+0)}{t-0}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to-\infty}e^x ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^x ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^x\left(ln(e^x+1)-ln(e^x)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{e^x}_{\to 0^+}\,ln\left(\underbrace{e^x}_{\to 0^+}+1\right)-\underbrace{xe^x}_{\to 0^-}=0$$

■ (II)②

ليكن x عددا حقيقيا .

$$f'(x)=e^x ln(1+e^{-x})+e^x\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=e^x\left(ln(1+e^{-x})-\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad f'(x)=e^x g(e^{-x})$$

■ (II)③

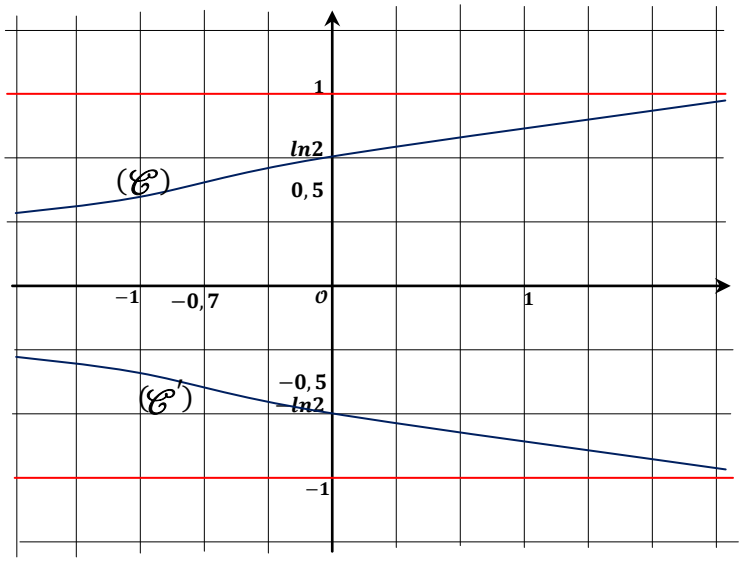
لدينا : $f'(x)=e^x g(e^{-x})$

إذن f' لا تنعدم أبدا و إشارتها موجبة دائما .

و نستنتج جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	0 ↗	1

■ (II)④



■ (II)⑤

ليكن x عنصرا من $]-1,0[$.

إذن : $-1<x<0$ و منه $e^{-x}<e$ و $e^x<1$

يعني : $g(e^{-x})<g(e)$ و $e^x<1$

إذن : $0<e^x g(e^{-x})<g(e)$ أي : $0<f'(x)<g(e)$

www.baclive.blogspot.com

■(II)⑥

نضع : $h(x) = f(x) + x$

لدينا : $h'(x) = f'(x) + 1$

بما أن : $f'(x) > 0$ حسب السؤال ⑤

فإن : $h'(x) > 1 > 0$ و منه : h دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و منه : h تقابل من أي مجال $[x,y]$ من $\mathbb{R}$ نحو صورته بالدالة h .

نختار المجال $[-1,0]$.

إذن h تقابل من $[-1,0]$ نحو $f([-1,0])$

و لدينا : $h([-1,0]) = [h(-1), h(0)] \approx \left[\frac{-1}{2}, ln2\right]$

و بما أن : $0 \in \left[\frac{-1}{2}, ln2\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالتقابل h في المجال $[-1,0]$.

و بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha \in [-1,0]\ ;\ h(\alpha) = 0$

و بما أن : $h(-1) \neq h(0) \neq 0$

فإن : $\exists!\ \alpha \in]-1,0[\ ;\ h(\alpha) = 0$

أي : $\exists!\ \alpha \in]-1,0[\ ;\ f(\alpha) + \alpha = 0$

■(II)⑦أ

من أجل $n = 0$ لدينا : $-1 \leq u_0 = 0 \leq 0$

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_n \leq 0$

حسب التمثيل المبياني للدالة f : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f(x) \geq 0$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \boxed{f(u_n) \geq 0}$ (1)

و لدينا حسب الإفتراض : $u_n \leq 0$

إذن : $f(u_n) \leq ln2$ لأن f تزايدية على $\mathbb{R}$.

و منه : $\boxed{f(u_n) \leq 1}$ (2) لأن : $ln2 \approx 0,6$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq f(u_n) \leq 1$

$\Leftrightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq -f(u_n) \leq 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_{n+1} \leq 0$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_n \leq 0}$

■(II)⑦ب

لدينا f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كله.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α و الذي سنرمز له بالرمز $\overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}$

لأننا لا ندري من الأكبر هل u_n أم α .

$$\Rightarrow\ \exists\, c \in \overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}\ ;\ \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$$

$$\Rightarrow\ \exists\, c \in \overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}\ ;\ |f(u_n) - f(\alpha)| = f'(c)|u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow\ \exists\, c \in \overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}\ ;\ |-u_{n+1} + \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow\ \exists\, c \in \overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$$

بما أن : $0 \leq f'(x) \leq g(e)$

فإن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq f'(x)|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

و منه : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|}$

■(II)⑦ج

لدينا حسب السؤال ب :

$(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

من أجل $(n-1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha| &\leq g(e)|u_{n-1} - \alpha| \\ &\leq (g(e))^2|u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq (g(e))^3|u_{n-3} - \alpha| \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\leq (g(e))^n|u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

إذن : $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n|0 - \alpha|$

و بما أن : $\alpha \in]-1,0[$ و ذلك حسب ⑥

فإن : $|0 - \alpha| = |\alpha| < 1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n}$

www.baclive.blogspot.com

■(II)7د

لدينا حسب السؤال 7ج

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le (g(e))^n$$

و نلاحظ أن $(g(e))^n$ متتالية هندسية أساسها $g(e)$ و هو عدد موجب أصغر من 1

لأن : $g(e)<0,6<1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(g(e))^n=0$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha}$

التمرين الخامس : (2,5 ن)

■1

$$F(1)=\int_1^1\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

■2أ

لدينا الدالة : $t\to\dfrac{\ln t}{1+t^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ على $]0,+\infty[$ بحيث :

$$\psi(x)-\psi(0)=\int_0^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt \quad \text{و} \quad \psi'(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$$

بما أن : $F(x)=\psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right)$

فإن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالة و مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا :

$$\begin{aligned}F'(x)&=\psi'(x)+\left(\frac{1}{x}\right)'\psi'\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)\\&=\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)=0\end{aligned}$$

■2ب

بما أن : $(\forall\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[)\ ;\ F'(x)=0$

فإن : $(\forall\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=c\,\epsilon\,\mathbb{R}$

و بما أن : $F(1)=0$ فإن $c=0$

و بالتالي : $(\forall\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=0$

■3

$$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^x\underbrace{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}_{v'}\underbrace{(\ln t)}_{u}\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\left[\left(Arctan(t)\right)(\ln t)\right]_{\frac{1}{x}}^x-\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{Arctan(t)}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\ln(x)\cdot Arctan(x)+ln\left(\frac{1}{x}\right)\cdot Arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{Arctan(t)}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{F(x)=\left(Arctan(x)-Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{Arctan(t)}{t}dt}\ (*)$$

■4

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\varphi(x)=Arctan\left(\frac{1}{x}\right)+Arctan(x)$$

لدينا φ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

و لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\left(\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2}=0\end{aligned}$$

www.baclive.blogspot.com

إذن φ دالة ثابتة على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

أو بتعبير آخر : $\begin{cases} \forall x \epsilon]-\infty,0[\ ; \ \varphi(x) = c_1 \epsilon \mathbb{R} \\ \forall x \epsilon]0,+\infty[\ ; \ \varphi(x) = c_2 \epsilon \mathbb{R} \end{cases}$

نعوض x بالقيمتين 1 و -1 و ذلك من أجل إيجاد c_1 و c_2 نحصل على :

$$\begin{cases} c_1 = \varphi(-1) = 2Arctan(-1) = 2\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ c_2 = \varphi(1) = 2Arctan(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

و بالتالي : $\boxed{\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; \ \forall x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & ; \ \forall x < 0 \end{cases}}$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو : $(\forall x > 0) \ ; \ \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x > 0) \ ; \ Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\forall x > 0) \ ; \ Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)} \quad (**)$$

■ 4

نستغل إذن النتيجتين $(*)$ و $(**)$ في الإجابة على هذا السؤال.

لدينا : $(\forall x > 0) \ ; \ F(x) = 0$

إذن :

$$\left(Arctan(x) - Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{Arctan(t)}{t} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}\ln x$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt = \ln x}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

www.baclive.blogspot.com

الأستاذ بدر الدين الفاتحي
http:/www.professeurbadr.blogspot.com
gsm/ : 06 60 34 41 36
FaceBook:/ « belfatihi@facebook.com»
Tweater:/ « ElFATIHI »
رمضان 2012

www.baclive.blogspot.com