



# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

**1** 2013  
Số 427

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

CHÚC MỪNG NĂM MỚI

*Quý Tỷ*

2013

*Happy  
New Year*





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM  
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI

Quý  
Tỷ

Chúc Mừng  
Năm Mới

2013

Hạnh Phúc  
An Khang  
Thịnh Vượng





**B**ài này đưa ra vài dạng biểu thức nguyên (tức là biểu thức chứa các số nguyên, biến số nguyên và lấy giá trị nguyên) rồi tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức đó. Dựa vào dạng của mỗi biểu thức nguyên và các điều kiện xác định giá trị của biến số nguyên mà ta phát hiện ra cách tìm GTLN hoặc GTNN của biểu thức nguyên đó.

**★ Bài toán 1.** Cho  $n$  ( $n \geq 2$ ) số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Với mỗi số tự nhiên  $t$  xét tổng

$S_t = (t - a_1)^2 + (t - a_2)^2 + \dots + (t - a_n)^2$ . Xác định các giá trị của  $t$  sao cho tổng  $S_t$  có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.** Biến đổi

$$S_t = nt^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)t + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Đặt  $b = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$  và  $R_t = nt^2 - 2bt$ . Ta thấy  $S_t$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow R_t$  nhỏ nhất.

$$\text{Ta biến đổi } R_t = nt \left( t - \frac{2b}{n} \right) = n \left( t - \frac{b}{n} \right)^2 - \frac{b^2}{n}.$$

Do  $b, n$  không đổi nên  $R_t$  lấy giá trị không dương khi  $0 \leq t \leq \frac{2b}{n}$ ; hơn nữa  $R_t$  nhỏ nhất

khi và chỉ khi  $V_t = \left| t - \frac{b}{n} \right|$  nhỏ nhất. Giả sử  $\frac{b}{n} =$

$c + u$  với  $c$  là số nguyên dương và  $0 \leq u < 1$  thì  $V_t = |t - c - u|$ .

Xét các giá trị của số nguyên  $t$  gần với số  $c$ :

- Hoặc  $t = c - k$  với số nguyên  $k \geq 0$  thì  $V_t = k + u$  nhỏ nhất khi  $k = 0$ , tức là khi  $V_1 = u$ ;

- Hoặc  $t = c + k$  với số nguyên  $k \geq 1$  thì  $V_t = k - u$  nhỏ nhất khi  $k = 1$ , tức là khi  $V_2 = 1 - u$ .

Xét các giá trị của  $V_1$  và  $V_2$  ứng với giá trị của  $u$ :

a) Với  $u = \frac{1}{2}$  thì  $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}$  nhỏ nhất, lúc đó

lấy  $t = c$  hoặc  $t = c + 1$  đều có  $R_t = -nc^2 - nc$  nhỏ nhất.

b) Với  $0 \leq u < \frac{1}{2}$  thì  $V_1 < V_2$  nên  $V_1 = u$  nhỏ nhất, lấy  $t = c$  thì  $R_t = -nc^2 - 2bc$  nhỏ nhất.

c) Với  $\frac{1}{2} < u < 1$  thì  $V_1 > V_2$  nên  $V_2 = 1 - u$  nhỏ nhất, lấy  $t = c + 1$  thì  $R_t = -n(c+1)^2 - 2b(c+1)$  nhỏ nhất.

Từ giá trị nhỏ nhất của  $R_t$  suy ra giá trị nhỏ nhất của  $S_t = R_t + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ .  $\square$

**★ Bài toán 2.** Cho  $n$  ( $n \geq 2$ ) số nguyên dương  $a_1, a_2, a_3, a_4$  và  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ . Thay đổi vị trí của  $a_1, a_2, a_3, a_4$  thành  $b_1, b_2, b_3, b_4$  và xét tổng

$$S_b = (b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_4)^2 + (b_4 - b_1)^2.$$

Hãy xác định một dãy số  $b_1, b_2, b_3, b_4$  sao cho

a) Tổng  $S_b$  có giá trị nhỏ nhất.

b) Tổng  $S_b$  có giá trị lớn nhất.

**Lời giải.** Biến đổi  $S_b = 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) - 2(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_4 + b_4b_1)$  hay

$$S_b = 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) - 2T_b \text{ trong đó } T_b = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_4 + b_4b_1.$$

Từ giả thiết  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  ta có  $(a_4 - a_1)(a_3 - a_2) > 0$  suy ra  $a_1a_2 + a_3a_4 > a_1a_3 + a_2a_4$  và từ  $(a_4 - a_3)(a_2 - a_1) > 0$  suy ra  $a_1a_3 + a_2a_4 > a_1a_4 + a_2a_3$ .

Do đó  $a_1a_2 + a_3a_4 > a_1a_3 + a_2a_4 > a_1a_4 + a_2a_3$ .

a) Tổng  $S_b$  là nhỏ nhất  $\Leftrightarrow$  tổng  $T_b$  là lớn nhất



Từ giả thiết  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  và các bất đẳng thức trên rút ra để tổng  $T_b$  là lớn nhất thì  $T_b$  phải chứa số hạng  $a_1a_2 + a_3a_4$ . Tiếp theo xét hai dãy số  $a_1, a_2, a_3, a_4$  và  $a_1, a_2, a_4, a_3$ , cũng do bất đẳng thức trên, chọn dãy  $a_1, a_2, a_4, a_3$  thì tổng  $T_b$  là lớn nhất. Vậy tổng  $S_b = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2$  là nhỏ nhất.

b) Tổng  $S_b$  là lớn nhất  $\Leftrightarrow$  tổng  $T_b$  là nhỏ nhất.

Từ giả thiết và các bất đẳng thức trên rút ra để tổng  $T_b$  là nhỏ nhất thì  $T_b$  phải chứa số hạng  $a_1a_4 + a_2a_3$ . Tiếp theo xét hai dãy số  $a_1, a_4, a_3, a_2$  và  $a_1, a_4, a_2, a_3$ , cũng do bất đẳng thức trên, chọn dãy  $a_1, a_4, a_2, a_3$  thì tổng  $T_b$  là nhỏ nhất. Vậy tổng  $S_b = (a_1 - a_4)^2 + (a_4 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2$  là lớn nhất.  $\square$

### ✪ Bài toán 3. Cho số nguyên $k$ lớn hơn 3.

Phân tích số  $k$  thành tổng  $k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  với  $n \geq 2$  và  $a_i \geq 1, (i = 1, 2, \dots, n)$ . Xét tổng

$$P_n = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_ia_{i+1} + \dots + a_{n-1}a_n.$$

Xác định một dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sao cho tổng  $P_n$  có giá trị lớn nhất.

**Lời giải.** Giả sử được rằng

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n. \text{ Ta có}$$

$$P_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_ia_{i+1} + \dots + a_{n-2}a_{n-1} + a_{n-1}a_n$$

$$\leq a_1a_n + a_2a_n + \dots + a_ia_n + \dots + a_{n-2}a_n + a_{n-1}a_n$$

$$= a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = a_n(k - a_n).$$

Giả sử có  $1 \leq a \leq b$  với  $a + b = k$ . Ta có  $4ab = (a + b)^2 - (b - a)^2 = k^2 - (b - a)^2$  (\*)

Vì số  $k$  cho trước không đổi nên hiệu  $b - a$  càng nhỏ thì tích  $ab$  càng lớn.

Xét hai trường hợp đối với  $k$  khi  $n = 2$ .

\* Nếu  $k$  chẵn,  $k = 2m = m + m, (m \geq 2)$ . Chọn  $a_1 = a_2 = m$  thì  $P_n = m^2$  là số lớn nhất.

\* Nếu  $k$  lẻ,  $k = 2m + 1 = m + m + 1 (m \geq 1)$ . Chọn  $a_1 = m$  và  $a_2 = m + 1$  thì  $P_n = m(m + 1)$  là số lớn nhất.  $\square$

**Nhận xét.** Trong hai bài toán 2, 3 thì vai trò các số trong dãy không bình đẳng nên cần sắp thứ tự dãy số đã cho rồi xét từng số hạng của

tổng, nếu gặp số hạng nào làm cho tổng chưa đạt GTLN (hoặc GTNN) thì thay số hạng đó bởi số hạng khác khiến tổng đạt được GTLN (hoặc GTNN) và cứ tiếp tục như thế cho đến khi xét hết các số hạng.

✪ **Bài toán 4.** Cho số nguyên  $k$  lớn hơn 3. Phân tích số  $k$  thành tổng  $k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  với  $n \geq 2$  và  $a_i \geq 2 (i = 1, 2, \dots, n)$ . Xét tích  $T_n = a_1 a_2 \dots a_n$ . Xác định một dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sao cho

a) Tích  $T_n$  có giá trị nhỏ nhất;

b) Tích  $T_n$  có giá trị lớn nhất.

**Lời giải.** a) Xét tích  $T_n = a_1a_2 \dots a_n$  nhỏ nhất  
\* Nếu trong tích  $T_n$  có nhiều hơn hai thừa số thì ta thay tích hai thừa số  $ab$  bởi một thừa số là  $a + b$  thì do  $(a - 1)(b - 1) \geq 1$  nên  $ab \geq a + b$ , lúc đó tích mới sẽ không lớn hơn.

\* Vậy chỉ xét tích  $T_n$  có hai thừa số. Giả sử có  $2 \leq a \leq b$  với  $a + b = k$ . Sử dụng đẳng thức (\*) ở Bài toán 3 ta thấy Tích  $ab$  càng nhỏ  $\Leftrightarrow$  Hiệu  $b - a$  càng lớn. Do  $a_i \geq 2, (i = 1, 2)$  nên khi  $k = 2 + (k - 2)$  thì được tích  $T_n$  nhỏ nhất bằng  $T_n = 2(k - 2)$ .

b) Xét tích  $T_n = a_1a_2 \dots a_n$  lớn nhất

\* Trong các số  $a_i$  không chọn số 4, vì khi thay  $4 = 2 + 2$  bởi  $2.2 = 4$  thì tích không đổi.

\* Trong các số  $a_i$  không có số  $a$  lớn hơn 4, vì khi thay  $a = 2 + (a - 2)$ , do  $2(a - 2) = 2a - 4 > a$  thì tích mới sẽ lớn hơn.

\* Trong các số  $a_i$  không có nhiều hơn hai số 2, vì nếu có ba số 2 thì thay chúng bởi hai số 3 sẽ có  $3.3 = 9 > 8 = 2.2.2$ , lúc đó tích mới sẽ lớn hơn.

Vậy trong các số  $a_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  chỉ có nhiều nhất là hai số 2, còn lại gồm toàn số 3.

- Nếu  $k = 3m, (m \geq 1)$  thì  $k = 3 + 3 + \dots + 3$  (gồm  $m$  số 3) và tích lớn nhất bằng  $T_n = 3^m$ .

- Nếu  $k = 3m + 1, (m \geq 1)$  thì  $k = 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + 3$  (gồm  $m - 1$  số 3) và tích lớn nhất bằng  $T_n = 2^2.3^{m-1}$ .

- Nếu  $k = 3m + 2, (m \geq 1)$  thì  $k = 2 + 3 + 3 + \dots + 3$  (gồm  $m$  số 3) và tích lớn nhất bằng  $T_n = 2.3^m$ .  $\square$



★ **Bài toán 5.** Cho hợp số  $k$ . Phân tích số  $k$  thành tích  $k = a_1 a_2 \dots a_n$  với  $n \geq 2$  và  $a_i \geq 2$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Xét tổng  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Xác định một dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sao cho

a) Tổng  $S_n$  có giá trị lớn nhất;

b) Tổng  $S_n$  có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải.** a) Xét tổng  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  lớn nhất

\* Nếu trong tổng  $S_n$  có nhiều hơn hai số hạng, khi ta thay tổng hai số hạng  $a + b$  bởi một số hạng  $ab$  thì  $ab \geq a + b$  do  $(a - 1)(b - 1) \geq 1$ , tổng sẽ không nhỏ hơn. Cứ làm như thế.

\* Vậy chỉ xét các tổng  $S_n$  có hai số hạng. Giả sử  $k = ab = cd$  với  $a < c \leq d < b$ .

Ta có  $d(c - a) = cd - ad = ab - ad = a(b - d) < d(b - d) \Rightarrow c - a < b - d \Rightarrow c + d < a + b$ .

Khi  $k = ab$  với  $a > 1$  là ước số nhỏ nhất của hợp số  $k$  thì tổng lớn nhất là  $S_n = a + b$ .  
Cách lập luận khác khi tổng có hai số hạng là sử dụng đẳng thức (\*) ở Bài toán 3.

b) Ta sẽ chỉ ra rằng tổng  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  là nhỏ nhất khi mọi số hạng  $a_i$  đều là số nguyên tố.

\* Nếu có số hạng là 4, khi ta thay  $4 = 2.2$  bởi tổng  $2 + 2$  thì tổng  $S_n$  không đổi.

\* Nếu tồn tại số hạng  $a_1 = ab$  là hợp số với  $a \geq 2$  và  $b \geq 3$ . Ta có  $(a - 1)(b - 1) \geq 2$  nên  $ab \geq a + b + 1$  suy ra  $ab > a + b$ , lúc đó tổng  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = ab + a_2 + \dots + a_n > a + b + a_2 + \dots + a_n = S$ . Ta thấy  $S < S_n$ . Tiếp tục như thế cho tới khi trong tổng đang xét không còn số hạng nào là hợp số nữa.

\* Như vậy khi hợp số  $k$  có sự phân tích tiêu chuẩn thành các số nguyên tố là  $k = p_1^u p_2^v \dots p_n^t$  thì tổng  $S_n$  nhỏ nhất là  $S_n = up_1 + vp_2 + \dots + tp_n$ . □

**Nhận xét.** Trong hai bài toán 4, 5 thì vai trò các số trong dãy là bình đẳng nên không cần sắp thứ tự dãy số đã cho, sau đó xét từng số hạng của tổng (hoặc từng thừa số của tích), nếu gặp số hạng nào (hoặc thừa số nào) làm

cho tổng (hoặc tích) chưa đạt GTLN (hoặc GTNN) thì thay số đó bởi số khác khiến tổng (hoặc tích) cần xét đạt được GTLN (hoặc GTNN) và cứ tiếp tục như thế cho đến khi xét hết các số hạng (hoặc các thừa số).

## BÀI TẬP

1. a) Hãy tìm các số nguyên dương  $n$  để mỗi biểu thức sau có giá trị nguyên dương nhỏ nhất, có giá trị nguyên dương lớn nhất

a)  $A = -n^2 + 9n - 8$ ;

b)  $B = -2n^2 + 23n - 38$ .

2. Xác định các số nguyên  $t$  sao cho tổng  $S_t = (t - 2)^2 + (t - 3)^2 + (t - 5)^2 + (t - 7)^2$  có giá trị nhỏ nhất.

3. Cho dãy số 2, 4, 9, 12. Xét tổng  $S_b = (b_1 - b_2)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (b_3 - b_4)^2 + (b_4 - b_1)^2$  trong đó  $b_1, b_2, b_3, b_4$  là bốn số trên. Hãy xác định dãy số  $b_1, b_2, b_3, b_4$  sao cho

a) Tổng  $S_b$  là nhỏ nhất;

b) Tổng  $S_b$  là lớn nhất.

4. a) Cho số nguyên  $k = 18$ . Phân tích số  $k$  thành tổng  $k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  với  $n \geq 2$  và  $a_i \geq 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Xét tổng  $P_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_i a_{i+1} + \dots + a_{n-1} a_n$ . Hãy xác định một dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sao cho tổng  $P_n$  có giá trị lớn nhất.

b) Hỏi như trên với số  $k = 25$ .

5. Cho số nguyên  $k > 3$ . Phân tích số  $k$  thành tổng  $k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  với  $n \geq 2$  và  $a_i \geq 2$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Xét tích  $T_n = a_1 a_2 \dots a_n$ . Xác định một dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sao cho tích  $T_n$  có giá trị lớn nhất ứng với

a)  $k = 12$ ; b)  $k = 14$ ; c)  $k = 16$ .

6. Với giả thiết như Bài tập 5, hãy xác định một dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sao cho tích  $T_n$  có giá trị nhỏ nhất ứng với  $k = 14$ .

7. Cho hợp số  $k = 360$ . Phân tích số  $k$  thành tích  $k = a_1 a_2 \dots a_n$  với  $n \geq 2$  và  $a_i \geq 2$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Xét tổng  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Hãy xác định một dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sao cho

a) Tổng  $S_n$  có giá trị lớn nhất;

b) Tổng  $S_n$  có giá trị nhỏ nhất.



# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

## TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2012 - 2013

### VÒNG 1

**Câu I. a)**  $\Delta' = (m-2)^2 + 3 > 0$  với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

b) Theo Định lý Viète ta có

$$x_1 + x_2 = 2(m-3), \quad x_1 x_2 = -2(m-1).$$

$$\text{Nên } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1 x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 \neq 0 \\ (x_1 + x_2)(1 - x_1 x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 2(m-3)(2m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**Câu II. a)** Bạn đọc tự vẽ đồ thị.

b) PT hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(D)$  là

$$\frac{x^2}{x} = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0, \text{ có nghiệm kép } x = 1,$$

nên  $(P)$  và  $(D)$  tiếp xúc nhau tại điểm  $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$ .

**Câu III. a)**  $M = \frac{x + \sqrt{xy} + y + \sqrt{xy}}{x-y} - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 1.$$

Vậy với  $x > 0, y > 0, x \neq y$  thì  $M = 1$ .

b) Gọi bán kính hình tròn tâm  $A$  là  $x$  ( $0 < x < 5$ , tính bằng mét) thì bán kính hình tròn tâm  $B$  là  $5-x$  (mét). Ta có PT

$$\pi x^2 + \pi(5-x)^2 = 13,48\pi \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5,76 = 0$$

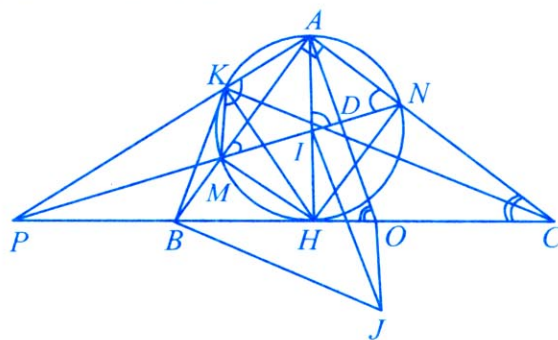
Đáp số. 3,2m và 1,8m.

c) Biến đổi HPT thành 
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y-2} + \frac{4}{x+2y} = 2 \\ \frac{1}{x+y-2} - \frac{4}{x+2y} = 0 \end{cases}$$

thì đặt  $\frac{1}{x+y-2} = u; \frac{4}{x+2y} = v$  (với  $u \neq 0, v \neq 0$ ).

Đáp số.  $(x; y) = (2; 1)$ .

**Câu IV. 1a)** Ta có  $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} = 90^\circ$ , suy ra  $AH^2 = AM \cdot AB$  và  $AH^2 = AN \cdot AC$ . Do đó  $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ .



b) Từ  $\triangle ANM \sim \triangle ABC$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{MNC} = 180^\circ$ . Vậy tứ giác  $BMNC$  nội tiếp.

2) a) Ta có  $\widehat{AIN} = 2\widehat{AMI}$ ,  $\widehat{AOH} = 2\widehat{ACO}$ , mà  $\widehat{AMI} = \widehat{ACO}$  (do tứ giác  $BMNC$  nội tiếp) nên  $\widehat{AIN} = \widehat{AOH}$ , dẫn đến  $\widehat{DIH} + \widehat{DOH} = 180^\circ$ . Vậy tứ giác  $ODIH$  nội tiếp.

b) Từ  $\triangle AID \sim \triangle AOH$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{AO}{AH}$ .

Mà  $AI = \frac{1}{2}AH$ ;  $AO = \frac{1}{2}BC$  suy ra

$$\frac{1}{AD} = \frac{BC}{AH^2} = \frac{HB+HC}{HB \cdot HC} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HC}.$$

3) Ta có  $\widehat{PKM} = \widehat{ANM} = \widehat{MBC}$  nên tứ giác  $PKMB$  nội tiếp. Suy ra  $\widehat{PKB} = \widehat{PMB} = \widehat{ACB}$ . Do đó tứ giác  $AKBC$  nội tiếp. Suy ra  $\widehat{BKC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ .

4) Ta có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = 8$ ;  

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = 4,8.$$

Gọi  $J$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BMN$  thì tứ giác  $AIGO$  là hình bình hành. Suy

ra  $OJ = \frac{AH}{2} = 2,4$ .



Tam giác vuông  $OBJ$  có

$$JB^2 = OB^2 + OJ^2 = 5^2 + 2,4^2 = \frac{769}{25} \Rightarrow JB = \frac{\sqrt{769}}{5}.$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

$$BMN \text{ là } \frac{\sqrt{769}}{5}.$$

## VÒNG 2

**Câu I.** 1) ĐK  $x \neq 0$  và  $x - \frac{1}{x} \geq 0$ . Biến đổi PT

$$\text{thành } x - \frac{1}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} - 2 = 0 \text{ rồi đặt } y = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$$

(với  $y \geq 0$ ) ta được  $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$  (do  $y \geq 0$ ). Từ đó  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ .

$$\text{Vậy tập nghiệm của PT là } S = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$2) \text{ Từ } a^3 - 3a^2 + 8a = 9 \Leftrightarrow (a-1)^3 + 5a - 8 = 0 \quad (1)$$

$$b^3 - 6b^2 + 17b = 15 \Leftrightarrow (b-2)^3 + 5b - 7 = 0 \quad (2)$$

Cộng theo vế của (1) và (2) được

$$(a-b)^3 + (b-2)^3 + 5a + 5b - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow (a+b-3)((a-1)^2 - (a-1)(b-2) + (b-2)^2 + 5) = 0$$

$\Leftrightarrow a+b-3=0$  (do biểu thức trong ngoặc thứ hai luôn dương). Vậy  $a+b=3$ .

**Câu II.** 1) Ta có  $441 = 3^{2 \cdot 7^2}$  và

$$5(m+n)^2 + mn = 5(m-n)^2 + 21mn : 441.$$

$$\text{Suy ra } 5(m-n)^2 : 3 \text{ (vì } 21mn : 3) \Rightarrow (m-n) : 3 \\ \Rightarrow 5(m-n)^2 : 3^2. \text{ Do đó } 21mn : 3^2 \Rightarrow mn : 3.$$

Ta có  $(m-n) : 3$  và  $mn : 3$  suy ra

$$m : 3, n : 3 \Rightarrow mn : 9 \quad (1)$$

$$\text{Lập luận tương tự suy ra } mn : 49 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $mn : 441$ .

2) Gọi dãy số tự nhiên liên tiếp là

$n, n+1, \dots, n+m$  ( $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$ ). Ta có

$$n + n+1 + \dots + (n+m) = 180$$

$$\Leftrightarrow (2n+m)(m+1) = 360.$$

Nhận xét  $2n+m$  và  $m+1$  khác tính chẵn lẻ,  $m+1 \geq 2$ ,  $2n+m > m+1$  (khi  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Ta có

$m+1$	3	5	8	9	15
$2n+m$	120	72	45	40	24

Dẫn đến

$m$	2	4	7	8	14
$n$	59	34	19	16	5

Có 5 dãy số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu III.** Áp dụng BĐT  $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ , ta có

$$(x+y)(1+xy) \leq \frac{(x+y)^2 + (1+xy)^2}{2} \\ = \frac{(1+x^2)(1+y^2) + 2x \cdot 2y}{2} \\ \leq \frac{(1+x^2)(1+y^2) + (1+x^2)(1+y^2)}{2} = (1+x^2)(1+y^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x = y = 1$ .

2) Ta có

$$P = \left( \frac{a^2+b^2}{ab} - 2 \right) + \left( \frac{\sqrt{ab}}{a+b} - \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{2} \\ = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \left( \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{ab} - \frac{1}{2(a+b)} \right) + \frac{5}{2}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{ab} - \frac{1}{2(a+b)} \geq \frac{4\sqrt{ab}}{ab} - \frac{1}{2(a+b)} \\ \geq \frac{8}{a+b} - \frac{1}{2(a+b)} = \frac{15}{2(a+b)} > 0.$$

Do đó  $P \geq \frac{5}{2}$ . GTNN của  $P$  là  $\frac{5}{2}$  khi  $a = b$ .

**Câu IV.** 1) Bạn đọc tự vẽ hình.

a) Vận dụng tính chất đường phân giác trong tam giác.

b) Điểm  $A$  di động trên đường tròn cố định đường kính  $ID$  (trong đó  $D$  ở ngoài đoạn  $BC$

sao cho  $\frac{DB}{DC} = 2$ ).

2) a) Hai đường tròn  $(I)$ ,  $(J)$  tiếp xúc với  $AC$  tại  $T$  và  $L$ .



# ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH THANH HÓA

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Thời gian làm bài: 150 phút)

## Câu I. (4 điểm)

Cho biểu thức

$$P = \left( \frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right).$$

1) Rút gọn  $P$ .

2) Tính giá trị của  $P$  khi

$$x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}.$$

## Câu II. (4 điểm)

Trong cùng một hệ tọa độ, cho đường thẳng  $d: y = x - 2$  và parabol  $(P): y = -x^2$ . Gọi  $A$  và  $B$  là giao điểm của  $d$  và  $(P)$ .

1) Tính độ dài  $AB$ .

2) Tìm  $m$  để đường thẳng  $d': y = -x + m$  cắt  $(P)$  tại hai điểm  $C$  và  $D$  sao cho  $CD = AB$ .

## Câu III. (4 điểm)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 2 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320.$$

## Câu IV. (6 điểm)

Cho tam giác nhọn  $ABC$  có  $AB > AC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ;  $H$  là trực tâm;  $AD, BE, CF$  là các đường cao của tam giác  $ABC$ . Kí hiệu  $(C_1)$  và  $(C_2)$  lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  và  $DKE$ , với  $K$  là giao điểm của  $EF$  và  $BC$ . Chứng minh rằng

1)  $ME$  là tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

2)  $KH \perp AM$ .

## Câu V. (2 điểm)

Với  $0 \leq x; y; z \leq 1$ . Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}.$$

THANH LOAN (Hà Nội)

(Sưu tầm và giới thiệu)

## HƯỚNG DẪN GIẢI... (Tiếp trang 5)

Ta có  $IT \parallel JK$ ,  
 $IF \parallel EJ$  nên

$$\frac{AI}{AJ} = \frac{IF}{JE} = \frac{IT}{JL}.$$

Mà  $JE = JL$   
nên  $IF = IT$ .

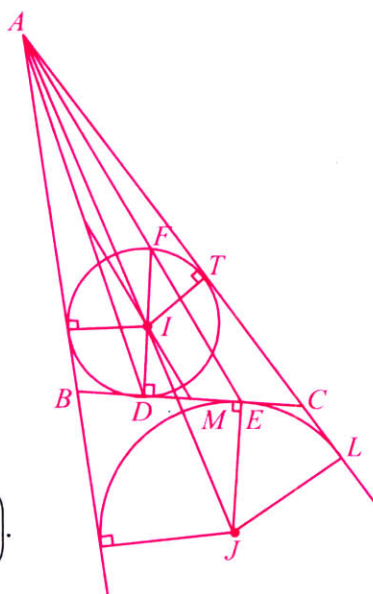
Suy ra  $F \in (I)$ .

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau có

$$BD = CE$$

$$\left( = \frac{AB + BC - AC}{2} \right).$$

Do đó  $MD = ME$ .



$$\text{Vì } \frac{MD}{ME} = \frac{ID}{IF} = 1 \text{ nên } MI \parallel EF.$$

Từ đó  $MI$  đi qua trung điểm của đoạn  $AD$ .

**Câu V.** Phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau: 310 nhóm đầu mỗi nhóm gồm 2 số có tổng bằng 625 dạng  $(a; 625 - a)$  với  $a \neq 49; a \neq 225$ ; nhóm 311 gồm 5 số chính phương là  $\{49; 225; 400; 576; 625\}$ .

Nếu trong 312 số được chọn không có số nào thuộc nhóm 311 thì theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số thuộc cùng một nhóm trong 310 nhóm đầu. Hai số này có tổng bằng 625. Mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy chắc chắn trong 312 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm 311. Số này là số chính phương. Bài toán được chứng minh.

NGUYỄN ĐỨC TÂN (TP. Hồ Chí Minh)





**Chuẩn bị  
cho kì thi  
tốt nghiệp THPT  
và thi vào  
Đại học**

# MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ ĐƯỜNG TRÒN

**NGUYỄN THANH HẢI**  
(GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hóa)

## DẠNG 1. ĐƯỜNG TRÒN VÀ TIẾP TUYẾN

- Đường tròn tâm  $I(a;b)$ , bán kính  $R$  có PT

$$(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

- Tiếp tuyến với  $(C)$  tại điểm  $M(x_0; y_0) \in (C)$  có PT là

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - R^2 = 0.$$

- Đường thẳng  $\Delta: Ax + By + C = 0$  là tiếp tuyến của  $(C) \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$ .

### ★Thí dụ 1. Cho đường tròn

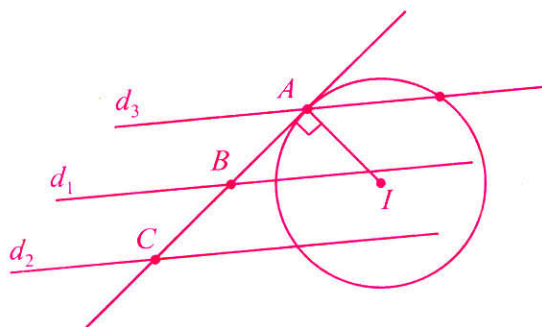
$$(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

và hai đường thẳng

$$d_1: 2x + y - 5 = 0, d_2: 2x + y = 0.$$

Lập phương trình đường thẳng tiếp xúc với  $(C)$  tại  $A$  và cắt  $d_1, d_2$  lần lượt tại  $B$  và  $C$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ .

**Lời giải** (h.1) Lấy đối xứng đường thẳng  $d_2$  qua  $d_1$  ta được đường thẳng  $d_3: 2x + y - 10 = 0$ .



Hình 1

Do  $d_1 \parallel d_2$  nên suy ra  $A \in d_3$ .

Toạ độ điểm  $A$  thoả mãn hệ PT

$$\begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, y = 2 \\ x = 6, y = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(4;2)$  hoặc  $A(6;-2)$ .

- Với  $A(4;2)$  thì PT tiếp tuyến tại  $A$  là

$$3x + 4y - 20 = 0.$$

- Với  $A(6;-2)$  thì PT tiếp tuyến tại  $A$  là

$$x - 6 = 0. \quad \square$$

### ★Thí dụ 2. Cho đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$$

và đường thẳng  $d: 2x - y + 1 = 0$ . Tìm điểm  $M \in d$  sao cho từ  $M$  kẻ được hai tiếp tuyến đến  $(C)$  các tiếp điểm là  $A, B$ ; biết rằng đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $N(2; -1)$ .

**Lời giải.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3; -1)$  và  $R = 2$ . Do  $M \in d$  nên  $M(a; 2a+1)$ , suy ra  $MI^2 = 5a^2 + 2a + 13$ . Ta có

$MA^2 = MI^2 - IA^2 = 5a^2 + 2a + 9$ . Đường tròn tâm  $M$  đi qua  $A, B$  có PT là

$$(x-a)^2 + (y-2a-1)^2 = 5a^2 + 2a + 9.$$

Mặt khác  $A, B \in (C)$  nên toạ độ điểm  $A, B$  thoả mãn hệ PT:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-2a-1)^2 = 5a^2 + 2a + 9 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

suy ra  $(6-2a)x - (4a+4)y + 2a-8 = 0$ .

PT đường thẳng  $AB$  có dạng

$$(6-2a)x - (4a+4)y + 2a-8 = 0.$$

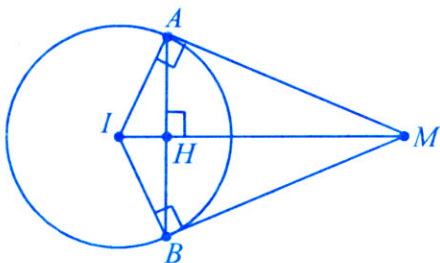
Vì  $AB$  đi qua  $N(2; -1)$  nên tìm được  $a = -4$ .

Vậy  $M(-4; -7)$ .  $\square$

★Thí dụ 3. Cho đường tròn  $(C)$  có phương trình  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$  và đường thẳng  $d: x + y + 5 = 0$ . Tìm điểm  $M \in d$  sao cho từ  $M$  kẻ được hai tiếp tuyến đến  $(C)$  với các tiếp điểm là  $A, B$  và đoạn  $AB$  có độ dài lớn nhất.



**Lời giải.** (h. 2)



Hình 2

Đường tròn (C) có tâm  $I(3;1)$  và  $R=2$ .

Do  $M \in d$  nên  $M(a; -a-5)$

$MI^2 = 2a^2 + 6a + 45$ . Gọi  $H = AB \cap MI$  ta có  $MA^2 = MI^2 - IA^2 = 2a^2 + 6a + 41$ :

$$\text{Từ } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2 + 6a + 45}{4(2a^2 + 6a + 41)}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4AH^2 = 1 + \frac{4}{2a^2 + 6a + 41}.$$

Để  $AB$  lớn nhất thì  $2a^2 + 6a + 41$  nhỏ nhất.

Khi đó  $a = -\frac{3}{2}$ . Vậy  $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ .  $\square$

## DẠNG 2. ĐƯỜNG TRÒN VÀ DÂY CUNG

• Giả sử  $H$  là trung điểm của dây cung  $AB$  thì (h.3)

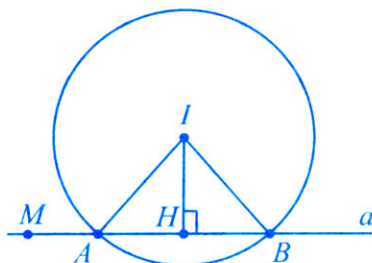
$IH \perp AB$ ,

$$d(I; a) = IH$$

$$= \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

• Phương tích:

$$\mathcal{P}_{M/(I)} = \overline{MA \cdot MB} = IM^2 - R^2. \quad \text{Hình 3}$$



★ **Thí dụ 4.** Cho đường tròn (C) có phương trình  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$  và điểm  $M(2;3)$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua M cắt (C) tại A và B sao cho  $MA^2 + MB^2 = 18$ .

**Lời giải** (h.3) Đường tròn (C) có tâm  $I(-1;2)$  và  $R=3$ . Dễ thấy M nằm ngoài đường tròn nên

$$MA \cdot MB = MI^2 - R^2 = 10 - 9 = 1.$$

Theo đề bài có

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 = 18 \\ MA \cdot MB = 1 \end{cases} \Rightarrow (MA - MB)^2 = 16 \Rightarrow AB = 4.$$

$$\text{PT } \Delta: a(x-2) + b(y-3) = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0).$$

$$\text{Từ } d(I; \Delta) = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{5}, \text{ suy ra}$$

$$\frac{|3a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ b = 2a. \end{cases}$$

PT hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $2x - y - 1 = 0$ ,  $x + 2y - 8 = 0$ .  $\square$

★ **Thí dụ 5.** Cho hai đường thẳng

$d_1: 4x - 3y + 14 = 0$ ,  $d_2: 3x + 4y + 13 = 0$  và điểm  $M(-2;2)$ . Viết phương trình đường tròn (C) đi qua M tiếp xúc  $d_1$  và cắt  $d_2$  theo dây cung  $AB = 8$ .

**Lời giải.** (h. 4)

Vì  $M \in d_1$  nên M là tiếp điểm của (C) và  $d_1$ .

Do  $d_1 \perp d_2$  nên

$$\begin{aligned} d(I; d_2) &= d(M; d_1) \\ &= \frac{|-6 + 8 + 13|}{\sqrt{9+16}} = 3. \end{aligned}$$

$$R = IA = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + IH^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Đường thẳng  $IM$  đi qua M và vuông góc với  $d_1$  có PT

$$IM: \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \Rightarrow I(-2 + 4t; 2 - 3t).$$

Ta có  $IM = 5 \Leftrightarrow \sqrt{16t^2 + 9t^2} = 5$ . Tìm được  $t=1$  hoặc  $t=-1 \Rightarrow I(2; -1)$  hoặc  $I(-6; 5)$ .

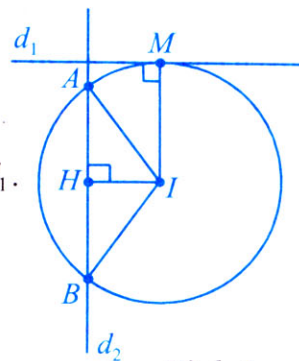
Vậy có hai đường tròn thỏa mãn với PT là

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25; \quad (x+6)^2 + (y-5)^2 = 25. \quad \square$$

★ **Thí dụ 6.** Cho đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

và đường thẳng  $d: x + y - 2 = 0$  cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm  $M \in (C)$  sao cho chu vi tam giác MAB lớn nhất.



Hình 4



**Lời giải** (h.5) Đường tròn (C) có tâm  $I(2;2)$  và bán kính  $R=2$ .

Do  $AB$  không đổi nên chu vi tam giác  $MAB$  lớn nhất khi  $MA+MB$  lớn nhất.

Mà  $MA+MB$

$$\leq \sqrt{2(MA^2+MB^2)}$$

Hình 5

nên ta đi xét tổng  $MA^2+MB^2$ .

Trước tiên ta thấy  $M$  phải thuộc cung lớn  $\widehat{AB}$ .

Lấy  $M$  bất kì thuộc cung lớn  $\widehat{AB}$  của (C).

Đặt  $\widehat{MIA}=u$ ,  $\widehat{MIB}=v$  và  $\widehat{AIB} \leq \pi$  thì

$$MA^2=IA^2+IM^2-2IA \cdot IM \cos u$$

$$\Rightarrow MA^2=8-8\cos u.$$

$$\text{Tương tự } MB^2=8-8\cos v.$$

$$MA^2+MB^2=16-8(\cos u+\cos v)$$

$$=16-16\cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$=16-16\cos \frac{2\pi-\widehat{AIB}}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$=16+16 \cdot \cos \frac{\widehat{AIB}}{2} \cdot \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\leq 16+16 \cdot \cos \frac{\widehat{AIB}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $\cos \frac{u-v}{2}=1$

$\Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow MA=MB$ , hay  $M$  là điểm chính giữa cung lớn  $\widehat{AB}$ .

Đường thẳng qua  $I(2;2)$  và vuông góc với  $d$  có PT là  $x-y=0$ .

Toạ độ điểm  $M$  cần tìm thoả mãn hệ PT

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y^2-4x-4y+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=2+\sqrt{2} \text{ (thoả mãn do } M \text{ thuộc cung lớn)} \\ x=y=2-\sqrt{2} \text{ (loại, do } M \text{ thuộc cung nhỏ)} \end{cases}$$

Vậy  $M(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ .  $\square$

### DẠNG 3. ĐƯỜNG TRÒN VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN TAM GIÁC

★**Thí dụ 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ ,  $B(1;1)$ . Đường tròn đường kính  $AB$  có phương trình (C):  $x^2+y^2-4x-2y+4=0$  cắt cạnh  $BC$  tại  $H$  sao cho  $BC=4BH$ . Tìm toạ độ đỉnh  $C$ .

**Lời giải.** (h. 6)

Đường tròn (C) có tâm  $I(2;1)$  và bán kính  $R=1$ .

Vì  $A$  và  $B$  đối xứng nhau qua  $I$  nên có  $A(3;1)$ .

Do  $AC \perp IB$  nên PT  $AC: x=3$ .

Hình 6

Gọi  $C(3;c)$  thuộc đường thẳng  $AC$ .

Từ  $\overline{BC}=4\overline{BH}$  tìm được  $H\left(\frac{3}{2};\frac{c+3}{4}\right)$ .

Do  $H \in (C)$  nên

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{c+3}{4}\right)^2-6-\frac{c+3}{2}+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=1+2\sqrt{3} \\ c=1-2\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm  $C$  thoả mãn là

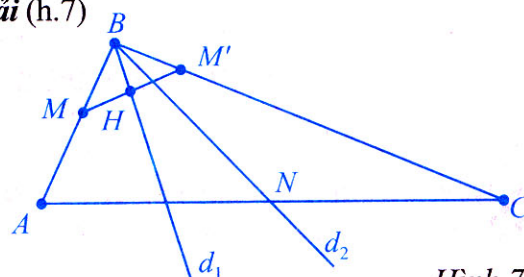
$$C_1(3;1+2\sqrt{3}), C_2(3;1-2\sqrt{3}). \square$$

★**Thí dụ 8.** Cho tam giác  $ABC$  có đường phân giác trong góc  $ABC$  và đường trung tuyến kẻ từ  $B$  lần lượt có phương trình

$$d_1: x+y-2=0; d_2: 4x+5y-9=0.$$

Biết  $M\left(2;\frac{1}{2}\right)$  thuộc cạnh  $AB$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $R=\frac{15}{6}$ . Tìm toạ độ các đỉnh  $A, B, C$ .

**Lời giải** (h.7)



Hình 7



Toạ độ đỉnh  $B$  là nghiệm của hệ PT:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 4x+5y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(1;1).$$

Gọi  $M'$  là điểm đối xứng của  $M$  qua  $d_1$ . PT  $MM'$ :  $2x-2y-3=0$ . Gọi  $H=MM' \cap d_1$ , toạ độ điểm  $H$  thỏa mãn hệ PT

$$\begin{cases} 2x-2y-3=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

Do  $H$  là trung điểm của  $MM'$  nên  $M'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ .

Đường thẳng  $AB$  đi qua  $B$  và  $M$  nên có PT là  $AB: x+2y-3=0$ .

Đường thẳng  $BC$  đi qua  $B$  và  $M'$  nên có PT là  $BC: 2x+y-3=0$ .

Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $BC$ , ta có  $\cos \alpha = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$ , suy ra

$$\sin \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5}.$$

Từ định lí sin trong tam giác  $ABC$  có

$$2R = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \Rightarrow AC = 3.$$

Do  $A \in AB, C \in BC$  nên  $A\left(a; \frac{3-a}{2}\right), C(c; 3-2c)$ .

Trung điểm của  $AC$  là  $N\left(\frac{a+c}{2}; \frac{9-a-4c}{4}\right)$ .

$$\begin{cases} N \in d_2 \\ AC = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4c+3=0 \\ (c-a)^2 + \left(\frac{a-4c+3}{2}\right)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-4c+3=0 \\ (c-a)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5, c=2 \\ a=-3, c=0. \end{cases}$$

Khi  $a=5, c=2$  ta được  $A(5;-1), C(2;-1)$  (thỏa mãn).

Khi  $a=-3, c=0$  ta được  $A(-3;3), C(0;3)$  (loại, do  $M$  nằm ngoài đoạn  $AB$ ).

Vậy  $A(5;-1), B(1;1)$ , và  $C(2;-1)$ .  $\square$

## BÀI TẬP

1. Cho đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0,$$

đường thẳng  $\Delta: x+y+5=0$  cắt  $(C)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$  tiếp xúc với  $(C)$  tại  $M$  và cắt đường thẳng  $\Delta$  tại  $N$  sao cho  $MN = AB$ .

2. Cho đường tròn  $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$  nội tiếp hình vuông  $ABCD$ . Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông, biết cạnh  $AB$  đi qua  $M(-3;-2)$  và điểm  $A$  có hoành độ dương.

3. Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(T): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5, \widehat{ABC} = 90^\circ$ ,

$A(2;0)$  và  $S_{ABC} = 4$ . Tìm toạ độ điểm  $B$ .

4. Cho đường tròn  $(T)$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có  $A(0;5), B(3;-4)$ . Trọng tâm  $G$  nằm trên đường thẳng  $d: x-y-1=0$ . Trực tâm  $H$  có hoành độ bằng 3. Tìm toạ độ điểm  $C$ , biết  $C$  có hoành độ dương. Viết phương trình đường tròn  $(T)$ .

5. Cho đường tròn  $(C): x^2 + (y+1)^2 = 2$  và đường thẳng  $d: x-2y-4=0$ . Tìm toạ độ điểm  $M \in d$  sao cho từ  $M$  kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  ( $A, B$  là tiếp điểm) tới  $(C)$  để  $S_{MAB} = 1$ .

## THÔNG BÁO

- Mời bạn đọc liên hệ thư từ, bài vở qua địa chỉ Email mới : [toanhocuoitrevietnam@gmail.com](mailto:toanhocuoitrevietnam@gmail.com)
- Các bạn đoạt giải cuộc thi giải Toán và Vật lí năm 2012 ở lớp 9 và lớp 12 xin gửi ngay địa chỉ mới để Tòa soạn gửi Bằng Chứng nhận và phần thưởng.
- Cuốn đóng tập **Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ NĂM 2012** gồm 12 số Tạp chí và 2 số đặc san 2 và 3 được phát hành vào tháng 2/2013. Giá bìa: 152 000 đồng.



# Thử sức TRƯỚC KÌ THI

## ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 180 phút)

### PHẦN CHUNG

#### Câu I (2 điểm)

Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C).

2) Tìm trên trục hoành điểm A sao cho tam giác với ba đỉnh là A và hai điểm cực trị của hàm số (C) có chu vi nhỏ nhất.

#### Câu II (2 điểm)

1) Tìm nghiệm  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  của phương trình

$$\cos 6x(1+2\sin x) + 2\cos^2 x = 1 + 2\cos 5x \sin 2x.$$

2) Giải phương trình

$$4(x-1)(\log_3(x+1) + \log_4(x+2)) = 5x - 2.$$

#### Câu III (1 điểm)

Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( \frac{1}{x^2+1} + \sin^2 x \right) dx.$

#### Câu IV (1 điểm)

Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$ . Đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại A với  $AB = a$ ,  $AC = 2a$ ,  $AC'$  tạo với mặt phẳng  $(B'C'CB)$  một góc  $\alpha$ . Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với  $B'C$  cắt  $BC$  tại H, cắt  $CC'$  tại E. Tính thể tích khối chóp  $A'HAE$ .

**Câu V.** (1 điểm) Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - 2b + 3} + \frac{2b^3}{c^3 + a^2 - 2a - 3c + 7} + \frac{3c^3}{a^4 + b^4 + a^2 - 2b^2 - 6a + 11} \leq \frac{3}{2}.$$

### PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B)

#### A. Theo chương trình Chuẩn

##### Câu VI.a (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng Oxy cho  $A(-2; 1)$ ,  $B(1; 5)$ ,  $C(4; 0)$ . Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC. Viết phương trình đường tròn đi qua A, G, H.

2) Trong không gian Oxyz cho  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 4; -1)$  và mặt phẳng (P) có phương trình  $2x + y + 2z + 9 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $M \in (P)$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất.

##### Câu VII.a (1 điểm)

Trong đợt tập quân sự, Tiểu đội 1 thuộc Trung đội 11A<sub>7</sub> có 15 chiến sĩ gồm 9 nam, 6 nữ. Theo lệnh của Trung đội trưởng, Tiểu đội 1 chạy từ chỗ nghỉ ra bãi tập và xếp ngẫu nhiên thành một hàng dọc. Tính xác suất người đứng đầu hàng và cuối hàng là nữ.

#### B. Theo chương trình Nâng cao

##### Câu VI.b (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình  $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 16 = 0$  và

đường thẳng (d) có phương trình  $x + y - 5 = 0$ . Tìm trên (d) điểm M, trên (C) điểm N sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng MN.

2) Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng  $d_1, d_2$  lần lượt có phương trình

$$d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{3}; \quad d_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với  $d_1$  và  $d_2$ .

##### Câu VII.b (1 điểm)

Xác suất sút bóng từ xa ghi bàn thắng của Đội tuyển bóng đá Quốc gia Việt Nam là 0,7. Trong trận chung kết giữa Việt Nam gặp Thái Lan, các cầu thủ Việt Nam đã 5 lần thực hiện sút xa. Tính xác suất để đội Việt Nam ghi được 3 bàn thắng trong 5 tình huống sút xa đó.

NGUYỄN QUANG MINH  
(GV THPT Trần Thủ Độ, Thái Bình)



## HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

**Câu I. 1)** Bạn đọc tự giải.

2) Giả sử tiếp tuyến  $d$  tiếp xúc với  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A(a; a^4 - 2a^2)$  và  $B(b; b^4 - 2b^2)$  với  $a \neq b$ . Ta có phương trình đường thẳng  $d$ :  $y = y'(a)(x - a) + a^4 - 2a^2$  và

$$y = y'(b)(x - b) + b^4 - 2b^2.$$

Suy ra  $y'(a) = y'(b)$  và

$$-a.y'(a) + a^4 - 2a^2 = -b.y'(b) + b^4 - 2b^2.$$

Từ đó PT tiếp tuyến cần tìm là  $y = -1$ .

**Câu II. 1)** PT  $\Leftrightarrow (2\sin 3x - 1)(\sin x - \cos 3x) = 0$ .

2) Hàm số  $f(x) = 4x^2 + \sqrt{2x+3} - 8x - 1$  liên tục trên  $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$  và

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{4}; x = \frac{5-\sqrt{21}}{4}. \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất của hàm liên tục suy ra

$$x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{4}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{4}; +\infty\right).$$

**Câu III.** Đặt  $t = \sqrt{3e^x - 2}$ . Khi đó

$$I = 2 \int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 25} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{t-5}{t+5} \right| \Big|_1^2 = \frac{1}{5} \ln \frac{9}{14}.$$

**Câu IV.**  $V_{S.ABMN} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{48}$ . Vì  $MK \parallel (APN)$

nên  $d(MK; AP) = d(M; (APN)) = ME = \frac{3\sqrt{5}a}{10}$ , trong đó  $E = MD \cap AN$ .

**Câu V.** HPT  $\Leftrightarrow \begin{cases} y(x^3 - y^3) = 7 & (1) \\ y(x + y)^2 = 9 & (2) \end{cases}$  suy ra

$x > y > 0$ . Từ (2) có  $x = \frac{3}{\sqrt{y}} - y$ . Đặt  $\sqrt{y} = t$

( $t > 0$ ), suy ra  $y = t^2$  và  $x = \frac{3}{t} - t^2$ . Thay vào

(1) ta được  $t^9 - (3 - t^3)^3 + 7t = 0$ . Hàm số  $f(t) = t^9 - (3 - t^3)^3 + 7t$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Từ đó tìm được  $x = 2; y = 1$ .

**Câu VI.a 1)** Giả sử  $M(x_0; y_0)$ , khi đó

$$2x_0 + y_0 + 10 = 0.$$

$$\text{Vì } MA^2 = MB^2 = M^2 - R^2 = (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 - 4$$

và  $M \in (C)$  nên PT đường thẳng  $AB$  là

$$(x_0 - 1)x - (2x_0 + 9)y - 3x_0 - 12 = 0.$$

Ta thấy đường thẳng  $AB$  đi qua điểm cố định

$K\left(\frac{3}{11}; -\frac{15}{11}\right)$ . Gọi  $d$  là khoảng cách từ  $O$  đến

đường thẳng  $AB$  thì  $d \leq OK$ . Vậy  $M\left(\frac{14}{3}; -\frac{58}{3}\right)$ .

**Câu VI.a 2)** Do  $A \in d_1 \Rightarrow A(1+2t; -1+t; t)$ ;

$B \in d_2 \Rightarrow B(1+m; 2+2m; m)$ . Vì  $AB$  song

song với  $(P)$  và  $AB = \sqrt{29}$  nên PT đường

thẳng  $\Delta: \frac{x-3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$  hoặc

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3}.$$

**Câu VII.a.**  $z = 4 + 3i \Rightarrow |z| + |z|^2 = 30$ .

**Câu VI.b 1)** Gọi  $A(a; b)$ ;  $A$  thuộc đường tròn

đường kính  $BC$  nên  $a^2 + (b-1)^2 = 100$  (\*)

$S_{ABC} = 3S_{ABG} = 60 \Rightarrow d(A; BC) = 6$  suy ra

$b = 7; b = -5$ . Thay vào (\*) được  $a = \pm 8$ .

Đáp số.  $A_1(-8; 7), A_2(8; 7), A_3(-8; -5), A_4(8; -5)$ .

2) Ta chọn VTCP của  $\Delta$  là

$$\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)}] = (2; -3; 1).$$

Gọi  $I$  là giao điểm của  $d$  và  $(P)$ ,  $I(1; -3; 0)$ .

Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $d$  và mặt

phẳng  $(P)$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ;  $A$  là hình chiếu của  $I$

trên  $\Delta$  và  $B$  là hình chiếu của  $A$  trên  $d$ . Ta

thấy  $AB$  chính là khoảng cách giữa hai đường

thẳng  $d$  và  $\Delta$  và  $IA = \frac{AB}{\sin \alpha} = \sqrt{42}$ . Giả sử

$A(a; b; c)$ . Từ  $A \in (P)$ ,  $IA \perp \Delta$  và  $IA = \sqrt{42}$ ,

tìm được  $A(5; -2; -5), A(-3; -4; 5)$ . Vậy

$\Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1}$  hoặc  $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1}$ .

**Câu VII. b.**  $(x; y) \in \{(\log_3 2; \log_2 3); (1; 2)\}$ .

HOÀNG ĐỨC NGUYỄN

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)





# LINH HOẠT VÀ SÁNG TẠO TRONG GIẢI TOÁN

NGUYỄN DUY LIÊN  
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Trong các kì thi chọn học sinh giỏi cấp THCS, THPT và kì thi vào Đại học, Cao đẳng ta thường gặp bài toán giải phương trình, hệ phương trình vô tỉ. Ngoài phương pháp giải chung, ở từng bài cụ thể ta có thể tìm ra cách giải riêng linh hoạt và sáng tạo phù hợp với nó. Ta hãy xét những bài toán sau đây.

## ★ Bài toán 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2. \end{cases}$$

(Đại học An Ninh khối A, năm 2000)

**Cách giải thông thường.** Cộng theo vế hai PT trên của hệ ta được

$$\sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10 \quad (1)$$

Thế vào PT đầu ta được  $x+y=8$  (2)

Thế (2) vào (1) được  $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10$  (3)

Đặt  $t=x-4$  thì  $x=4+t$  và  $y=4-t$  thế vào PT (3) ta được

$$\sqrt{t^2+8t+25}+\sqrt{t^2-8t+25}=10 \quad (4)$$

Bình phương hai vế của PT (4) và rút gọn được

$$\sqrt{(t^2+25)^2-64t^2}=25-t^2 \quad (\text{ĐK } t^2 \leq 25)$$

$$\Leftrightarrow t^4+50t^2+625-64t^2=625-50t^2+t^4$$

$$\Leftrightarrow 36t^2=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow x=y=4.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x;y)=(4;4)$ .

**Cách giải sáng tạo.** Hệ PT đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10 \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \quad (*) \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \vec{u}=(x;3) \\ \vec{v}=(y;3) \\ \vec{u}+\vec{v}=(8;6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|=\sqrt{x^2+9} \\ |\vec{v}|=\sqrt{y^2+9} \\ |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{8^2+6^2}=10. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9} \geq 10 \quad (**)$$

Từ (\*) và (\*\*) ta thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai vector  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương, tức là

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4. \end{cases} \quad \square$$

**Bài luyện tập.** Giải các hệ phương trình sau

$$1) \begin{cases} \sqrt{3x}+\sqrt{3y}=6 \\ \sqrt{3x+7}+\sqrt{3y+7}=8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=4 \\ \sqrt{x+6}+\sqrt{y+4}=6; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x+24}+\sqrt{y+24}=14. \end{cases}$$

## ★ Bài toán 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4. \end{cases}$$

(Đại học, Cao đẳng khối A, năm 2006)

**Cách giải thông thường.** ĐK  $xy \geq 0, x \geq -1, y \geq -1$ . Đặt  $t=\sqrt{xy} \geq 0$  (với  $t \geq 0$ ).

Bình phương hai vế của PT thứ hai của hệ ta được PT tương đương

$$x+y+2+2\sqrt{xy+x+y+1}=16 \quad (1)$$

Thay  $xy=t^2, x+y=3+\sqrt{xy}=3+t$  vào (1)

ta được  $2\sqrt{t^2+t+4}=11-t$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 4(t^2 + t + 4) = 121 - 22t + t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

Suy ra  $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (3; 3).$

**Cách giải sáng tạo.** ĐK  $xy \geq 0, x \geq -1, y \geq -1.$

Từ PT thứ nhất kết hợp với điều kiện suy ra  $x \geq 0, y \geq 0.$  Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$x + y = \sqrt{xy} + 3 \leq \frac{x+y}{2} + 3 \Rightarrow x + y \leq 6 \quad (*)$$

Từ PT thứ hai ta có

$$4 = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \leq \sqrt{2((x+1) + (y+1))} \\ = \sqrt{2(x+y+2)} \leq \sqrt{2(6+2)} = 4 \quad (\text{do } *)$$

Suy ra  $\begin{cases} x+y=6 \\ \sqrt{x+1}=\sqrt{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3. \square$

**Bài luyện tập.** Giải các hệ phương trình sau

$$1) \begin{cases} 3(x+y) - 2\sqrt{xy} = 8 \\ \sqrt{x+7} + \sqrt{y+7} = 6; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (2x+3)\sqrt{4x-1} + (2y+3)\sqrt{4y-1} = 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} \\ x+y=4xy; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \sqrt{4-x^2} + \sqrt{1-4y^2} + \sqrt{25-9z^2} = 4\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = 2y^3 - 6y - 2 \\ y = -x^3 + 3x + 4. \end{cases}$$

### 🔴 Bài toán 3. Giải phương trình

$$3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\frac{x+7}{3}}.$$

(Thi HSG lớp 10 Vĩnh Phúc năm 2012)

**Cách giải thông thường.** ĐK  $x \geq -7.$

Đặt  $t = \sqrt{\frac{x+7}{3}} \geq 0.$  Ta được hệ PT

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x - 3 = t^2 \\ 3t^2 - 7 = x \end{cases} \quad (I)$$

Đặt  $y = x + 1,$  hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} 3y^2 - 6 = t \\ 3t^2 - 6 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 6 = t \\ (y-t)(3y+3t+1) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}$$

Từ (\*\*) ta được  $\begin{cases} t = y \\ 3t = -1 - 3y. \end{cases}$

• Nếu  $t = y$  thay vào PT (\*) được  $y = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{2},$  kết hợp với ĐK  $t \geq 0$  ta được

nghiệm  $x = \frac{-5 + \sqrt{73}}{6}.$

• Nếu  $3t = -3y - 1$  thay vào PT (\*) được  $y = \frac{-1 \pm \sqrt{69}}{6},$  kết hợp với ĐK  $t \geq 0$  ta được

nghiệm  $x = \frac{-7 - \sqrt{69}}{6}.$

Vậy tập nghiệm của PT đã cho là

$$\left\{ \frac{-5 + \sqrt{73}}{6}; \frac{-7 - \sqrt{69}}{6} \right\}.$$

**Cách giải sáng tạo.** ĐK  $x \geq -7.$  Khi đó PT

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\frac{3x+21}{9}} \Leftrightarrow 9x^2 + 18x - 9 = \sqrt{3x+21}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 21x + \frac{49}{4} = 3x + 21 + \sqrt{3x+21} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(3x + \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+21} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+21} + \frac{1}{2} = 3x + \frac{7}{2} \\ \sqrt{3x+21} + \frac{1}{2} = -\left(3x + \frac{7}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+21} = 3x + 3 \quad (*) \\ \sqrt{3x+21} = -3x - 4 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 + 5x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-5 + \sqrt{73}}{6} \quad (t/m ĐK).$$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{4}{3} \\ 9x^2 + 21x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-7 - \sqrt{69}}{6}$$

(t/m ĐK).

Vậy tập nghiệm của PT đã cho là

$$\left\{ \frac{-5 + \sqrt{73}}{6}; \frac{-7 - \sqrt{69}}{6} \right\}. \square$$

**Bài luyện tập.** Giải các phương trình sau

$$1) 7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}; \quad 2) 2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}};$$

$$3) 27x^2 + 18x = \sqrt{x + \frac{4}{3}}.$$





## DI SẢN VĂN HÓA PHI VẬT THỂ CỦA NHÂN LOẠI TẠI VIỆT NAM

Từ năm 2001 Tổ chức Giáo dục, Khoa học và Văn hóa của Liên Hiệp Quốc (UNESCO) đã bắt đầu xét Di sản văn hóa của các nước để công nhận là *Kiệt tác truyền khẩu và Di sản phi vật thể của Nhân loại*. Hội nghị UNESCO họp tại Istanbul, Thổ Nhĩ Kỳ năm 2008 đã đưa ra hai danh sách về Di sản văn hóa phi vật thể của Nhân loại là:

- 1) *Di sản văn hóa phi vật thể đại diện của Nhân loại*;
- 2) *Di sản văn hóa phi vật thể của Nhân loại cần được bảo vệ khẩn cấp*.

Các *Kiệt tác truyền khẩu và Di sản phi vật thể của Nhân loại* đã được công nhận trước đây thì chuyển thành *Di sản văn hóa phi vật thể đại diện của Nhân loại*. Cho tới cuối năm 2012 bảy Di sản văn hóa phi vật thể tại Việt Nam đã được UNESCO công nhận là Di sản văn hóa phi vật thể thuộc loại 1 hoặc loại 2 nêu trên. Bạn hãy sắp xếp các tư liệu dưới đây cho đúng nhé!

### A. Tên Di sản văn hoá

- A1. Ca trù
- A2. Dân ca quan họ
- A3. Hát xoan
- A4. Hội Gióng
- A5. Không gian văn hóa công chiêng
- A6. Nhã nhạc cung đình Huế
- A7. Tín ngưỡng thờ cúng Hùng Vương

### B. Địa phương

- B1. Bắc Giang và Bắc Ninh
- B2. Đồng bằng Bắc bộ và Bắc Trung bộ

- B3. Đèn Sóc và Đèn Phù Đồng, Hà Nội
- B4. Phú Thọ
- B5. Phú Thọ
- B6. Tây Nguyên (Gia Lai, Kon Tum, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng)
- B7. Thừa Thiên - Huế
- C. Năm được công nhận
- C1. 7/11/2003
- C2. 25/11/2005
- C3. 30/9/2009, loại 1
- C4. 1/10/2009, loại 2
- C5. 16/11/2010, loại 1
- C6. 24/11/2011, loại 2
- C7. 6/12/2012, loại 1

VÂN KHANH

## Giải đáp

### DI SẢN THẾ GIỚI TẠI VIỆT NAM

(Đề đăng trên THPT số 424, tháng 10 năm 2012)

- |    |    |              |
|----|----|--------------|
| A1 | B2 | C8           |
| A2 | B4 | C3 (hoặc C3) |
| A3 | B1 | C7           |
| A4 | B5 | C4 (hoặc C3) |
| A5 | B8 | C1           |
| A6 | B7 | C9           |
| A7 | B6 | C2, C5       |
| A8 | B3 | C6           |

Các bạn sau có lời giải đúng và gửi bài sớm được nhận tặng phẩm:

- 1) Nguyễn Hồng Nhung, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**;
- 2) Phan Xuân Phúc, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghe An**;
- 3) Phan Xuân Đức, 11C4, THPT Nam Đàn 2, Nam Đàn, **Nghe An**;
- 4) Nguyễn Hoàng Duy Thành, 12 Lí, THPT chuyên Quảng Bình, **Quảng Bình**;
- 5) Nguyễn Hữu Chánh, 35 SPTA-A, Trường CDSP Vĩnh Long, **Vĩnh Long**;
- 6) Ngô Nhật Huy, 11/3, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, **Bến Tre**.

AN MINH





## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/427. (Lớp 6)** Cho  $a = 123456789$ .  
Hãy so sánh  $2012^{9^{9^a}}$  và  $2013^{a^{a^9}}$ .

NGUYỄN NGỌC HÂN  
(Hà Nội)

**Bài T2/427. (Lớp 7)** Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC$ ),  
với hai đường cao  $BD$ ,  $CE$ . Đặt  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  
 $BD = h_b$ ,  $CE = h_c$ . Chứng minh rằng  
 $c^n + h_c^n < b^n + h_b^n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

NGUYỄN ĐỨC TẤN  
(TP. Hồ Chí Minh)

**Bài T3/427.** Tìm các số nguyên dương  $n$  sao  
cho  $A = \left\lfloor \frac{n^2 + n - 5}{2} \right\rfloor$  là một số nguyên tố,  
trong đó kí hiệu  $[a]$  là số nguyên lớn nhất  
không vượt quá  $a$ .

BÙI HẢI QUANG  
(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

**Bài T4/427.** Tìm nghiệm nguyên dương của  
phương trình

$$\sqrt{x+y} - \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2 = 0.$$

NGUYỄN VĂN TIẾN  
(GV THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

**Bài T5/427.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ .  
Hai đường phân giác  $BD$  và  $CE$  cắt nhau ở  $O$ .  
Biết số đo diện tích tam giác  $BOC$  bằng  $a$ .  
Tính tích  $BD \cdot CE$  theo  $a$ .

PHẠM TUẤN KHẢI  
(Hà Nội)

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/427.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt[4]{\frac{x^4}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}|y| \\ 2\sqrt[4]{\frac{y^4}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}|x|. \end{cases}$$

TRẦN VĂN THƯỜNG  
(GV THPT Phú Mỹ, Bà Rịa - Vũng Tàu)

**Bài T7/427.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 9$ ,  
 $BC = \sqrt{39}$ ,  $CA = \sqrt{201}$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  
đường tròn  $(C; \sqrt{3})$  sao cho tổng  $MA + MB$   
lớn nhất.

LÊ HOÀI BẮC  
(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Bà Rịa - Vũng Tàu)

**Bài T8/427.** Chứng minh rằng với mọi tam  
giác  $ABC$  ta luôn có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}\right)\left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}\right)} \\ & + \sqrt{\left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}\right)\left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2}\right)} \\ & + \sqrt{\left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2}\right)\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}\right)} \\ & \leq 2(\cot A + \cot B + \cot C). \end{aligned}$$

HUỖNH TẤN CHÂU  
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T9/427.** Cho  $N = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{4023}$ .  
Tìm chữ số thứ 2013 sau dấu phẩy ở số thập  
phân của  $\sqrt{N}$  viết trong hệ cơ số 10.

NGUYỄN TUẤN NGỌC  
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

**Bài T10/427.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất  
của biểu thức  $P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$ , trong  
đó  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  
điều kiện  $\min\{a, b, c\} \geq \frac{1}{4} \max\{a, b, c\}$ .

TRẦN TUẤN ANH  
(TP. Hồ Chí Minh)



**Bài T11/427.** Cho dãy hàm số  $\{S_n(x)\}$  được xác định bởi

$$S_n(x) = \cos^3 x - \frac{1}{3} \cos^3 3x + \frac{1}{3^2} \cos^3 3^2 x$$

$$- \dots + \left(\frac{-1}{3}\right)^n \cos^3 3^n x.$$

Tìm tất cả các số thực  $x$  sao cho

$$\lim S_n(x) = \frac{3-3x}{4}.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(Thôn Việt Yên, xã Đông Cứu, huyện Gia Bình, Bắc Ninh)

**Bài T12/427.** Cho tứ giác  $ABCD$  không nội tiếp. Gọi  $A', B', C', D'$  theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Gọi  $A'', B'', C'', D''$  theo thứ tự là tâm các đường tròn Euler của các tam giác  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Chứng minh rằng các tứ giác  $A'B'C'D', A''B''C''D''$  lồi và đồng dạng ngược hướng.

TRẦN VIỆT HÙNG

(Sở GD-ĐT Sóc Trăng)

## CÁC ĐỀ VẬT LÝ

**Bài L1/427.** Một con lắc lò xo (độ cứng của lò xo  $k = 50 \text{ N/m}$ ) dao động điều hòa trên trục  $Ox$  xung quanh vị trí cân bằng  $O$ . Cứ sau  $0,05 \text{ s}$  thì vật nặng của con lắc lại cách vị trí

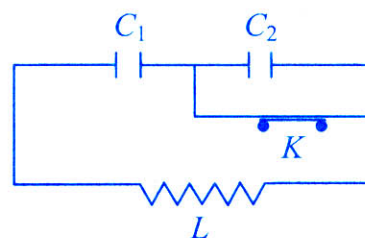
cân bằng  $O$  một khoảng như cũ. Lấy  $\pi^2 = 10$ . Hãy xác định khối lượng của vật nặng đó.

NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

**Bài L2/427.** Cho mạch dao động điện từ lí tưởng (hình vẽ): cuộn cảm thuần có hệ số tự cảm  $L$ ; hai tụ điện có điện dung là  $C_1$  và  $C_2$  (với  $C_1 < C_2$ ). Ban đầu khóa  $K$  đang đóng, trong mạch có một dao động điện từ tự do. Tại thời điểm điện áp giữa hai bản của tụ điện  $C_1$  đạt cực đại bằng  $U_0$  thì ngắt khóa  $K$ .

a) Tìm tỉ số giữa cường độ dòng điện cực đại qua mạch trước và sau khi ngắt khóa  $K$ .



b) Tại một thời điểm sau khi đã ngắt khóa  $K$ , khi mà cường độ dòng điện qua mạch có độ

lớn là  $|i| = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}$  thì điện tích của

tụ điện  $C_1$  có độ lớn bằng bao nhiêu?

c) Sau khi ngắt khóa  $K$ , tìm độ lớn cường độ dòng điện tại thời điểm điện áp giữa hai bản của tụ điện  $C_1$  bằng  $0$ .

NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/427. (For 6<sup>th</sup> grade).** Let  $a = 123456789$ . Which number is greater  $2012^{99a}$  or  $2013^{a^{99}}$ ?

**T2/427. (For 7<sup>th</sup> grade).** Let  $ABC$  ( $AB < AC$ ) be a triangle, with two altitudes  $BD, CE$  and  $AB = c, AC = b, BD = h_b, CE = h_c$ . Prove that  $c^n + h_c^n < b^n + h_b^n$  for all  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**T3/427.** Find all positive integers  $n$  such that

$$A = \left[ \frac{n^2 + n - 5}{2} \right]$$

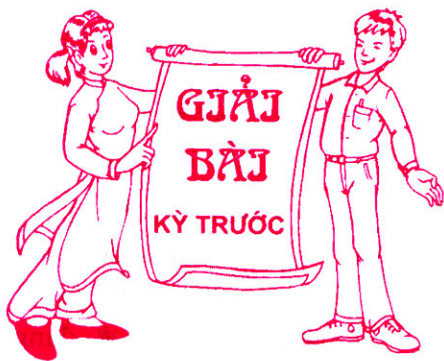
is a prime number, where  $[a]$  is the largest integer not exceeding  $a$ .

**T4/427.** Find all positive integer solutions of the equation  $\sqrt{x+y} - \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2 = 0$ .

**T5/427.** Let  $ABC$  be a right triangle, right angle at  $A$ . The bisectors  $BD$  and  $CE$  intersect at  $O$ . The area of  $BOC$  is  $a$ . Determine the product  $BD \cdot CE$  in terms of  $a$ .

(Xem tiếp trang 27)





★ **Bài T1/423.** *Tìm số có năm chữ số khác nhau  $\overline{abcde}$ , biết rằng  $\overline{abcd} = (5e+1)^2$ .*

**Lời giải.** Ta có  $(5.6+1)^2 = 31^2 = 961$ , do đó với chữ số  $e \leq 6$  thì  $(5e+1)^2 < 1000$ , không thỏa mãn đề bài.

- Với  $e = 7$  thì  $(5.7+1)^2 = 1296$ , lúc đó  $\overline{abcde} = 12967$  thỏa mãn đề bài.
- Với  $e = 8$  thì  $(5.8+1)^2 = 1681$ , không thỏa mãn vì có hai chữ số 1.
- Với  $e = 9$  thì  $(5.9+1)^2 = 2116$ , không thỏa mãn vì có hai chữ số 1.

Vậy bài toán có một nghiệm là  $\overline{abcde} = 12967$ . □

➤ **Nhận xét.** 1) Một số bạn lập luận chưa đầy đủ khi chỉ xét  $e = 6$  mà không xét  $e \leq 6$ .

2) Các bạn sau có lời giải đúng, đầy đủ:

**Phú Thọ:** Lê Nguyễn Quỳnh Trang, 6C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Nguyễn Kiên Chung, 6A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, Trần Thị Vân Anh, Nguyễn Tạ Kiều Trinh, Nguyễn Thị Nhân, Nguyễn Thị Thủy Lan, Ngô Minh Hương, Đặng Thùy Trang, 6A12, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Tạ Thị Minh, Nguyễn Quang Sáng, Trần Thị Mai Quỳnh, Phạm Minh Trang, Trần Quang Đức, 6A1, Nguyễn Xuân Chiến, 6A3, Phạm Việt Linh, Doãn Thị Lan Anh, Nguyễn Minh Hiếu, Nguyễn Gia Huân, Trần Thanh Tùng, Trần Đức Duy, Bùi Thị Liễu Dương, Nguyễn Kim Đức, 6A5, Đỗ Minh Trung, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Hà Nội:** Tạ Lê Ngọc Sáng, 6E, THPT chuyên Hà Nội Amsterdam; **Nghệ An:** Vương Trần Lực, Vũ Thị Cẩm Nhung, Nguyễn Thị Phương Anh, Nguyễn Thu Giang, Đậu Thị Huyền Linh, Nguyễn Văn Mạnh, Nguyễn Thị Như Quỳnh A, Trịnh Thị Kim Chi, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:**

Nguyễn Thị Hạnh, Nguyễn Thủy Phương, Võ Quang Phú Thời, 6A, Nguyễn Hiếu Ngân, 6B, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/423.** *Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x+3=2^y$  và  $3x+1=4^z$ .*

**Lời giải.** Cách 1. Do  $x$  là số nguyên dương nên  $3x+1 \geq x+3 \Rightarrow 4^z = 2^{2z} \geq 2^y$ .

Suy ra  $4^z : 2^y$ , hay  $3x+1 = 3(x+3) - 8 : x+3$ .

Từ đó, có  $x+3 \in U(8)$ . Mà

$x+3 \geq 4$  ( $x \in \mathbb{Z}^+$ ) nên  $x+3 \in \{4; 8\} \Rightarrow x \in \{1; 5\}$ .

Với  $x = 1$  thì tìm được  $y = 2$  và  $z = 1$ .

Với  $x = 5$  thì tìm được  $y = 3$  và  $z = 2$ .

Vậy  $(x; y; z) = (1; 2; 1), (x; y; z) = (5; 3; 2)$ .

Cách 2. Vì  $3x+1 = 3(x+3) - 8$  và do  $x, y, z$  là các số nguyên dương nên ta có

$$\begin{cases} 4^z = 3.2^y - 8 \\ 4^z = 3x+1 \geq 2^y = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.2^y - 2^{2z} = 8 \\ 2^{2z} \geq 2^y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3.2^y > 2^{2z} \\ 2z \geq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2z-y} < 3 \\ 2z - y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2z - y \in \{0; 1\}.$$

Từ đó cũng tìm được

$(x; y; z) = (1; 2; 1), (x; y; z) = (5; 3; 2)$ . □

➤ **Nhận xét.** Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Ngoài hai cách trên, một số bạn giải bằng cách nhận xét “Do  $x$  nguyên dương nên luôn có  $y \geq 2$ , từ đó tìm được  $y = 2$  và  $y = 3$ . Sau đó chứng minh  $y \geq 3$  không thỏa mãn yêu cầu đề bài”. Xin tuyên dương các bạn sau có lời giải chặt chẽ, trình bày đẹp và gửi bài đến tòa soạn sớm hơn cả:

**Vĩnh Phúc:** Nguyễn Hồng Anh, Nguyễn Thị Thủy Hòa, Nguyễn Thị Linh, Phạm Hoàng Ly, Đỗ Thị Thu Phương, Đỗ Thị Thủy, Nguyễn Thị Thùy Trang, 7A1, Phạm Thị Minh Châu, Nguyễn Thị Hương, Nguyễn Thu Hà, Phạm Thị Thủy Nga, Nguyễn Hương Quỳnh, Tạ Minh Thu, 7A2, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Trần Minh Hiếu, 6C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Nguyễn Thị Mai Anh, Dương Gia Huy, Lê Quốc Khánh, Nguyễn

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCD PHONG TRẢO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẬP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí



Tiến Long, Hoàng Sơn, Bùi Ngọc Sơn, 7A1, Tạ Phương Thủy, 7A3, THCS Lâm Thao; **Thái Nguyên:** Nguyễn Thị Huyền Trang, 7A, THCS Nguyễn Du; **Thanh Hóa:** Trịnh Thị Lan Trinh, 7D, THCS Chu Văn An, T.Tr Nga Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Thanh Lâm, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Mỹ Chi, Phan Kiều Chinh, Nguyễn Thị Hạnh, Phạm Thị Mỹ Hằng, Võ Trần Thùy Hương, Võ Quang Phú Thời, Nguyễn Hạ Vy, 7A, THCS Hành Phước, Nguyễn Đại Dương, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, Phạm Quốc Trung, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh:** Tô Yên Khanh, 7<sup>2</sup>, THCS Bạch Đằng, Phường 14, Quận 3.

NGUYỄN THỊ THANH

★ **Bài T3/423.** Tìm chữ số tận cùng của

$$S = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n + \dots + 2012^{2012}.$$

**Lời giải.** Chia tổng  $S$  thành 202 tổng, trong đó mỗi tổng trong 201 tổng đầu có 10 số hạng, tổng thứ 202 có 2 số hạng:

$$\begin{aligned} S &= (1^1 + 2^2 + \dots + 10^{10}) + (11^{11} + 12^{12} + \dots + 20^{20}) + \dots \\ &+ (2001^{2001} + 2002^{2002} + \dots + 2010^{2010}) + \\ &+ (2011^{2011} + 2012^{2012}). \end{aligned}$$

Để chứng minh được với  $k, n \in \mathbb{N}^*$  thì  $n$  và  $n^{4k+1}$  có cùng chữ số tận cùng;  $3^{4k}$  và  $7^{4k}$  có chữ số tận cùng là 1;  $2^{4k}$  có chữ số tận cùng là 6.

Do đó trong 201 tổng đầu, mỗi tổng đều có các chữ số tận cùng của các số hạng là: 0, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 9. Vậy chữ số tận cùng của mỗi tổng này là 7.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } 2011^{2011} &= 2011^{4 \cdot 502 + 1} \cdot 2011^{12}; \\ 2012^{2012} &= 2012^{4 \cdot 502} \cdot 2012^3; \end{aligned}$$

do đó  $2011^{2011}$  có chữ số tận cùng là 1;  $2012^{2012}$  có chữ số tận cùng là 6. Suy ra chữ số tận cùng của tổng  $S$  là chữ số tận cùng của tổng  $A = 201 \cdot 7 + 1 + 6$ . Do  $A$  có chữ số tận cùng là 4, nên  $S$  có chữ số tận cùng là 4. □

➤ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn tham gia giải bài này. Đa số các bạn có lời giải đúng, các cách giải là khá phong phú. Tuy nhiên lời giải của một số bạn còn dài, một số lời giải sai, lập luận không chính xác, chẳng hạn: khi chữ số tận cùng của  $n$  là 2 thì  $n$  và  $n^n$  có cùng chữ số tận cùng là 2, điều này không đúng vì với  $n = 12$  thì  $12^{12}$  có chữ số tận cùng là 6.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

**Phú Thọ:** Nguyễn Đức Thuận, 8A3, THCS Lâm Thao; **Quảng Ngãi:** Vũ Thị Thi, Nguyễn Thúy Phương, 8A,

THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, Trần Thị Mỹ Ninh, 9A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Nghệ An:** Hồ Xuân Hùng, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T4/423.** Cho hàm số  $f$  thỏa mãn

$$f\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{x}\right) = \frac{(1 + 2011)x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x + 2}{x^2},$$

xác định với mọi  $x$  khác 0.

Tính  $f(\sqrt{2012} - \sqrt{2011})$ .

**Lời giải.** Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} f\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{x}\right) &= 1 + \sqrt{2011} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{x} + \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2 + \sqrt{2011}. \end{aligned}$$

Đặt  $1 + \frac{\sqrt{2}}{x} = y$  thì  $f(y) = y^2 + \sqrt{2011}$ . Vậy

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2012} - \sqrt{2011}) &= (\sqrt{2012} - \sqrt{2011})^2 + \sqrt{2011} \\ &= 2012 - \sqrt{2011} + \sqrt{2011} = 2012. \end{aligned}$$

Cách 2. Đặt  $1 + \frac{\sqrt{2}}{x} = y$  thì  $x = \frac{\sqrt{2}}{y-1}$  (với  $y \neq 1$ ).

Khi đó từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} f(y) &= 1 + \sqrt{2011} + \left(2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{y-1} + 2\right) : \left(\frac{\sqrt{2}}{y-1}\right)^2 \\ &= 1 + \sqrt{2011} + \frac{2(y+1)}{y-1} \cdot \frac{\sqrt{(y-1)^2}}{2} = y^2 + \sqrt{2011}. \end{aligned}$$

Phân tích toán làm như cách 1. □

➤ **Nhận xét.** 1) Đề bài đã được chỉnh sửa ở số 424, tuy nhiên nhiều bạn không theo dõi nên vẫn gửi lời giải theo đề bài chưa chỉnh sửa, do đó cho kết quả chưa gọn.

Bạn Hoàng Đức Mạnh, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm, Hà Nam đã phát biểu được bài toán tương tự như sau:

$$\text{Cho hàm số } f\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \frac{(1 + \sqrt{2011})x^3 + 3ax(a+x) + a^3}{x^3}$$

( $a$  là hằng số), xác định với mọi  $x$  khác 0. Tính

$$f(\sqrt[3]{2012} - \sqrt{2011}). \text{ Kết quả cũng bằng } 2012.$$



2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

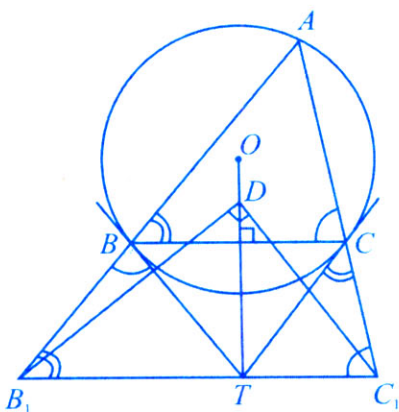
**Hà Nội:** Tạ Mai Anh, 7A, THCS Tam Hưng, Thanh Oai; **Phú Thọ:** Đinh Minh Hà, 8A1, Nguyễn Đức Thuận, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** Nguyễn Thảo Nguyên, Nguyễn Anh Dũng, Vũ Thị Thu Hiền, 8A3, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Khánh Huyền, 9A, THCS Yên Lạc, Lương Kim Hải, 9B, THCS Liên Bảo, Vĩnh Yên; **Hà Nam:** Ngô Trung Kiên, 8A21, THCS Trần Phú, Phù Lý, Hoàng Đức Mạnh, 9A, THCS Đình Công Tráng, Thanh Liêm; **Thanh Hóa:** Mai Quỳnh Chi, 8E, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An:** Phạm Quang Toàn, 8C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Bảo Trân, 8T, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Phú Yên:** Trần Đỗ Bảo Huân, 9B, THCS Nguyễn Thị Định, Tây Hòa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/423.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $T$ . Đường thẳng qua  $T$  và song song với  $BC$  cắt  $AB$  và  $AC$  tương ứng tại  $B_1$  và  $C_1$ . Chứng minh rằng  $\widehat{B_1OC_1}$  là góc nhọn.

**Lời giải.** Do tiếp tuyến tại  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $T$  suy ra  $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$ .

Ta xét trường hợp  $\widehat{BAC} < 90^\circ$ , trường hợp  $\widehat{BAC} > 90^\circ$ , cách chứng minh hoàn toàn tương tự.



Ta có  $\widehat{TBB_1} = \widehat{ACB}$  (cùng chắn  $\widehat{AB}$ ) và  $\widehat{ACB} = \widehat{CC_1T}$  (đồng vị), suy ra

$$\widehat{TBB_1} = \widehat{CC_1T} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \widehat{TB_1B} = \widehat{TCC_1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\triangle TBB_1 \sim \triangle TC_1C$  (g.g),  
nên  $\frac{TB}{TB_1} = \frac{TC_1}{TC}$  hay  $TB_1 \cdot TC_1 = TB \cdot TC$ , mà  $TB = TC$   
(tính chất tiếp tuyến) suy ra  $TB_1 \cdot TC_1 = TB^2$  (3)

Do  $\widehat{OBT} = 90^\circ$  nên  $BT < OT$ , suy ra tồn tại điểm  $D$  nằm trong đoạn  $OT$  sao cho  $TD = TB$ .  
Từ (3) suy ra  $TB_1 \cdot TC_1 = TD^2$  (4)

Ta có  $OT \perp BC$  và  $BC \parallel B_1C_1$  nên  $OT \perp B_1C_1$ .  
Từ (4) suy ra  $\triangle DB_1C_1$  vuông tại  $D$ . Ta lại có  $\widehat{B_1OT} < \widehat{B_1DT}$ ,  $\widehat{C_1OT} < \widehat{C_1DT}$  (tính chất góc ngoài của tam giác), suy ra

$$\widehat{B_1OT} + \widehat{C_1OT} < \widehat{B_1DT} + \widehat{C_1DT} \text{ hay } \widehat{B_1OC_1} < 90^\circ.$$

Vậy  $\widehat{B_1OC_1}$  là góc nhọn.  $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán có nguồn gốc từ bài thi Olympic Toán Quốc tế năm 1998. Tất cả các bạn tham gia giải đều có lời giải đúng. Đó là các bạn sau:

**Vĩnh Phúc:** Trương Thị Hoài Thu, 9A, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** Lê Quang Dũng, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Thanh Phương, Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, Phan Bùi Hưng, Võ Phan Minh Hiếu, Trần Thị Hồng Ngọc, Trang Vĩ Hùng, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ **Bài T6/423.** Dựng ra phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  và dựng vào phía trong tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABC_2$ ,  $BCA_2$ ,  $CAB_2$ . Gọi  $G_1, G_2, G_3$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  và gọi  $G_4, G_5, G_6$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC_2$ ,  $BCA_2$  và  $CAB_2$ . Chứng minh rằng trọng tâm tam giác  $G_1G_2G_3$  trùng với trọng tâm tam giác  $G_4G_5G_6$ .

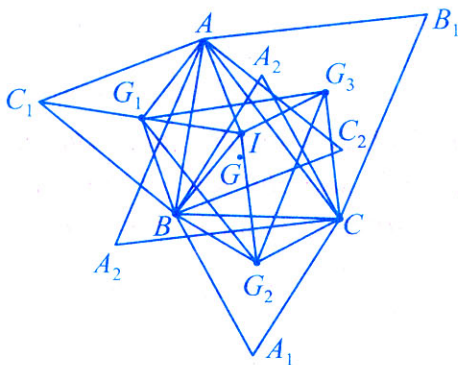
**Lời giải.** Giả sử  $G'$  và  $G$  theo thứ tự là trọng tâm tam giác  $ABC$  và tam giác  $G_1G_2G_3$ . Khi đó  $\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$ .

$$\text{Suy ra } 3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \vec{0} \quad (1)$$

Qua  $A$  kẻ đường thẳng song song với  $BG_1$  cắt  $C_1G_1$  tại  $I$ . Do  $ABC_1$  là tam giác đều nên

$$AG_1 = AI = BI = BG_1 = \frac{2}{3} AB \cdot \cos 30^\circ.$$





Từ đó  $\frac{BI}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Mặt khác,  $\frac{BG_2}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Do

đó  $\triangle ABC \sim \triangle IBG_2$  (c.g.c), suy ra  $\frac{IG_2}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Lại vì  $\frac{CG_3}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  nên  $IG_2 = CG_3$ . Chứng

minh tương tự, ta cũng có  $IG_3 = CG_2$ . Do vậy tứ giác  $IG_3CG_2$  là hình bình hành, dẫn đến  $\overline{IG_2} = -\overline{CG_3}$ . Do tứ giác  $AIBG_1$  là hình thoi, nên  $\overline{AG_1} + \overline{BG_2} = \overline{IB} + \overline{BG_2} = \overline{IG_2}$ . Vậy

$$\overline{AG_1} + \overline{BG_2} + \overline{CG_3} = \overline{IG_2} + \overline{CG_3} = \vec{0} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\overline{GG'} = \vec{0}$ , hay  $G \equiv G'$ . Do đó trọng tâm tam giác  $G_1G_2G_3$  trùng với trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tương tự, trọng tâm tam giác  $G_4G_5G_6$  trùng với trọng tâm tam giác  $ABC$ . Vậy trọng tâm tam giác  $G_1G_2G_3$  trùng với trọng tâm tam giác  $G_4G_5G_6$  (đpcm).  $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn giải đúng bài toán này. Hầu hết các bạn đều sử dụng *Định lý Con nhím* (chẳng hạn xem cuốn *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ*, Quyển 3, trang 173) để chứng minh kết quả của đề bài.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn hơn cả:

**Hà Nội:** Mạc Phương Anh, 10A1 Tin, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; Bùi Tuấn Nam, 10 Tin, THPT chuyên ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, Trương Trung Quyết, Trịnh Thị Thùy Dương, 11 Toán 1, THPT chuyên Thái Bình, Bùi Đình Hiếu, 12A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phú; **Nam Định:** Vũ Hoàng Diệu, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Lê Thế Sơn, 11B8, THPT Bim Sơn; **Nghệ An:** Lê Phi Anh, 10T2, THPT Đô Lương I, Hoàng Xuân Khánh, 10A1, Lê Kim Nhã, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Lương Thị Mai Hương, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Chu Tự Tài, 12A12, THPT Diễn Châu 2, Trần Trung Hiếu, 12A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** Ngô Khánh Huyền, 10T2, Nguyễn Thùy Linh, 10 Toán 1,

THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Đặng Ngọc Tuấn, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Quốc Hùng, 11T1, THPT Quốc học Huế; **Quảng Ngãi:** Tống Thành Nguyễn, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Lê Khắc Nhuận, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** Dương Minh Chánh, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long; **Hậu Giang:** Mã Kim Phụng, 10T, THPT chuyên Vị Thanh; **Bến Tre:** Từ Nhật Quang, 10 Toán, Lê Thị Minh Thảo, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh:** Trần Dương Yến Linh, 10A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đồng Nai:** Nguyễn Thị Quỳnh Mai, 10T02, Phạm Công Danh, 11T0, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

HỒ QUANG VINH

### ★ Bài T7/423. Giải phương trình

$$3^{3^x} + 3^x = \log_3(2^x + x) + 2^x + 3^{2^x+x}.$$

**Lời giải.** PT đã cho tương đương với

$$3^{3^x} + 3^x + \log_3(3^x) = 3^{2^x+x} + 2^x + x + \log_3(2^x + x).$$

Xét hàm số  $f(t) = 3^t + t + \log_3 t$ , với  $t > 0$ , ta có

$$f'(t) = 3^t \ln 3 + \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0.$$

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ . Vậy

PT đã cho tương đương với  $f(3^x) = f(2^x + 2)$

$$\Leftrightarrow 3^x = 2^x + 2 \Leftrightarrow 3^x - 2^x - 2 = 0 \quad (1)$$

Xét hàm số  $g(x) = 3^x - 2^x - x$ , có

$$g'(x) = 3^x \ln 3 - 2^x \ln 2 - 1, \text{ suy ra}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = \ln 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0.$$

Nhận thấy  $h(x)$  là hàm số liên tục và đồng biến trên  $\mathbb{R}$  nên PT  $h(x) = 0$  có tối đa một nghiệm, suy ra PT (1) có tối đa hai nghiệm.

Dễ thấy  $x = 0$ ;  $x = 1$  là các nghiệm của PT (1). Vậy tập nghiệm của PT đã cho là  $S = \{0; 1\}$   $\square$

◀ **Nhận xét.** Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và đa số cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đắk Lắk:** Nguyễn Tiến Mạnh, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du; **Phú Thọ:** Nguyễn Tiến Thịnh, 12 C, THPT Hạ Hoà; **Nghệ An:** Lương Thị Mai Hương, 12A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Trương Công Phú, Lê Hồng Đức, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Đặng Văn Phúc, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hà Nội:** Vũ Thị Thu Hiền, 12T1, THPT chuyên ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN THANH HỒNG



★ **Bài T8/423.** Giả sử  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{\cos A \cos B}{\cos C}} + \sqrt{\frac{\cos B \cos C}{\cos A}} + \sqrt{\frac{\cos C \cos A}{\cos B}} > 2.$$

**Lời giải.** Ta có

$$\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$\Rightarrow \tan C \cos C = \cos A \cos B (\tan A + \tan B)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A \cos B}{\cos C} = \frac{\tan C}{\tan A + \tan B}. \text{ Tương tự}$$

$$\frac{\cos B \cos C}{\cos A} = \frac{\tan A}{\tan B + \tan C};$$

$$\frac{\cos C \cos A}{\cos B} = \frac{\tan B}{\tan C + \tan A}.$$

Đặt  $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$ , với  $x, y, z > 0$ .

Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2.$$

Từ BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} = \frac{2x}{2\sqrt{x(y+z)}} \geq \frac{2x}{x+y+z}. \text{ Tương tự}$$

$$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z}; \quad \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z}. \text{ Vậy}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = z + x \Leftrightarrow x = y = z = 0 \\ z = x + y \end{cases}$$

(không thỏa mãn điều kiện).

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2. \quad \square$$

➤ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Nguyễn Văn Cao, 11A1, THPT Sáng Sơn, Sông Lô; **Nghệ An:** Lê Hoàng Hiệp, 12A1, THPT Thái Hòa, TX Thái Hòa; Lê Kim Nhã, Lê Hồng Đức, Trường Công Phú, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** Dương Hoài Nam, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Nai:** Phạm Văn Minh, 12 Toán, THPT

chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa; **Long An:** Chu Thị Thu Hiền, 11T, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T9/423.** Tìm số nguyên dương  $n$  lớn nhất ( $n \geq 3$ ) sao cho tồn tại một dãy các số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn điều kiện

$$a_{k+1} + 1 = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1}, \quad k \in \{2, 3, \dots, n-1\} \quad (1)$$

**Lời giải.** (Theo đa số các bạn)

Ta chứng minh  $n \leq 4$ . Thật vậy, nếu tồn tại một dãy các số nguyên dương  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  thỏa mãn điều kiện (1) thì

$$\begin{cases} a_2^2 + 1 = (a_1 + 1)(a_3 + 1) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3^2 + 1 = (a_2 + 1)(a_4 + 1) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4^2 + 1 = (a_3 + 1)(a_5 + 1) & (4) \end{cases}$$

Ta chứng minh các số  $a_1, a_2, a_3$  đều chẵn. Thật vậy, nếu  $a_1$  lẻ thì  $a_2$  lẻ và  $a_2^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$  nên từ (2) suy ra  $a_2$  chẵn, mâu thuẫn với (3). Vậy  $a_1$  chẵn. Tương tự, ta cũng có  $a_2$  chẵn. Khi đó, từ (2) suy ra  $a_3$  chẵn. Tương tự, cũng có  $a_4, a_5$  chẵn.

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \begin{cases} a_3^2 + 1 : a_2 + 1 & (5) \\ a_2^2 + 1 : a_3 + 1 & (6) \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} a_2^2 + a_3^2 = (a_3^2 + 1) + (a_2^2 - 1) : a_2 + 1 & (5') \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2^2 + a_3^2 = (a_2^2 + 1) + (a_3^2 - 1) : a_3 + 1 & (6') \end{cases}$$

Ta chứng minh rằng không tồn tại cặp số chẵn  $(a_2, a_3)$  thỏa mãn (5)-(6) (hay (5')-(6')). Nếu  $d$  là ƯCLN của  $a_2 + 1$  và  $a_3 + 1$  thì  $d$  lẻ và là ước của  $a_3^2 + 1 + a_2^2 + 1 - (a_2^2 + a_3^2) = 2$  nên  $d = 1$ . Suy ra  $a_2^2 + a_3^2$  chia hết cho  $(a_2 + 1)(a_3 + 1)$  nên tồn tại  $k \in \mathbb{N}^*$  để

$$a_2^2 + a_3^2 = k(a_2 + 1)(a_3 + 1) \quad (7)$$

Gọi  $\hat{a}_2, \hat{a}_3$  là cặp số chẵn thỏa mãn (7) với  $\hat{a}_2 \geq \hat{a}_3$  và  $\hat{a}_2 + \hat{a}_3$  nhỏ nhất. Khi đó PT

$$x^2 - k(\hat{a}_3 + 1)x + \hat{a}_2^2 - k(\hat{a}_3 + 1) = 0$$

có hai nghiệm  $\hat{a}_2, \hat{a}'_2$ . Vì  $\hat{a}_2^2 - k(\hat{a}_3 + 1) \neq 0$  nên  $\hat{a}'_2 \neq 0$ . Từ hệ thức



$(\hat{a}_2 + 1)(\hat{a}'_2 + 1) = \hat{a}_2 \hat{a}'_2 + \hat{a}_2 + \hat{a}'_2 + 1 = \hat{a}_3^2 + 1$   
 nên suy ra  $\hat{a}'_2$  chẵn và dương. Vậy cặp  $(\hat{a}'_2, \hat{a}_3)$  cũng là số chẵn thỏa mãn (7).

Theo định lý Viète, ta có

$$\hat{a}'_2 + 1 = \frac{\hat{a}_3^2 + 1}{\hat{a}_2 + 1} \leq \frac{\hat{a}_3^2 + 1}{\hat{a}_3 + 1} \leq \hat{a}'_2 \leq \hat{a}_2 \Rightarrow \hat{a}'_2 < \hat{a}_2,$$

điều này dẫn đến  $\hat{a}_3 + \hat{a}'_2 < \hat{a}_3 + \hat{a}_2$ , mâu thuẫn với  $\hat{a}_2 + \hat{a}_3$  nhỏ nhất. Vậy  $n \leq 4$ .

Với  $n = 4$ , ta chọn bộ số  $a_1 = 4, a_2 = 33, a_3 = 217$  và  $a_4 = 1384$  thỏa mãn điều kiện bài ra.

➤ **Nhận xét.** Nhiều bạn đã biết sử dụng phương pháp trên (thường gọi là phương pháp "gen") để giải. Đa số giải theo cách đã trình bày. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** Nguyễn Mậu Thành, 12T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Quốc Hùng, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Nam Định:** Trần Đại Tân, 11A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** Lê Hồng Đức, Lê Kim Nhã, Nguyễn Văn Sơn, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Lê Hoàng Hiệp,** 12A1, THPT Thái Hoà; **Phú Yên:** Lê Nhật Thăng, 12T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Đỗ Kiên, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T10/423.** Cho  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3,  $n$  là số nguyên dương sao cho các số  $p-1, p, n, n+1$  từng đôi một không có ước số chung lớn hơn 2. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương  $x, y$

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 2 = y^{n+1} \quad (1)$$

**Lời giải.** **Phản chứng.** Giả sử tồn tại các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn phương trình (1).

**Trường hợp 1.** Với  $x = 1$ . Từ (1)  $\Rightarrow p+1 = y^{n+1}$

$$\Rightarrow p = y^{n+1} - 1 = (y-1)(y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1)$$

$$\Rightarrow y-1 = 1; y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 = p, \text{ vì } p \text{ là số nguyên tố và } y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 > 1.$$

$$\text{Suy ra } y = 2 \text{ và } p = 2^{n+1} - 1 \quad (2)$$

Kí hiệu  $h \in \mathbb{N}^*$  là số nhỏ nhất thỏa mãn  $2^h - 1 \vdots p$ . Vì  $p > 3$  suy ra  $h \geq 3$ . Chú ý  $\forall m \in \mathbb{N}^*, 2^m - 1 \vdots p \Leftrightarrow m \vdots h$ . Từ (2) suy ra  $n+1 \vdots h$ . Theo Định lý nhỏ Fermat  $2^{p-1} - 1 \vdots p$

$\Rightarrow p-1 \vdots h$ . Do đó  $(n+1, p-1) \vdots h$ , với  $h \geq 3$ . Mâu thuẫn với giả thiết  $(n+1, p-1) \leq 2$ .

**Trường hợp 2.** Xét  $x > 1$ . Từ (1) suy ra

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = y^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{p-1}}{x-1} = (y-1)(y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1) \quad (3)$$

Xét  $q$  là ước số nguyên tố bất kì của

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

thì  $x \not\vdots q \Rightarrow x^{q-1} - 1 \vdots q$  (theo Định lý nhỏ Fermat). Kết hợp với  $x^p - 1 \vdots q$ ,  $p$  là số nguyên tố, ta suy ra hoặc  $q-1 \vdots p$  hoặc  $x-1 \vdots q$ . (Kí hiệu  $k$  là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn  $x^k - 1 \vdots q \Rightarrow p \vdots k \Rightarrow$  hoặc  $k = p$  hoặc  $k = 1$  và ta cũng có  $q-1 \vdots k$ ).

Nếu  $x-1 \vdots q$  thì  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 \equiv p \pmod{q}$   
 $\Rightarrow p \vdots q \Rightarrow p = q$ . Tóm lại, với tất cả các ước

số nguyên tố  $q$  của  $\frac{x^p - 1}{x - 1}$  thì hoặc  $q = p$  hoặc

$$q \equiv 1 \pmod{p}.$$

Do đó kết hợp với (3) ta có cả hai số  $y-1, y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1$  hoặc chia hết cho  $p$  hoặc đồng dư với 1 (mod  $p$ ).

**Trường hợp 2. a)**  $y-1 \vdots p \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{p}$

$$\Rightarrow y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 \equiv n+1 \pmod{p};$$

$$n+1 \not\vdots p \text{ vì theo giả thiết } (n+1, p) \leq 2;$$

$$n+1 \not\equiv 1 \pmod{p} \text{ vì theo giả thiết } (n, p) \leq 2.$$

Như vậy trường hợp này không xảy ra.

**Trường hợp 2 b)**  $y-1 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow y \equiv 2 \pmod{p}$

$$\Rightarrow y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 \equiv 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2 + 1$$

$$= 2^{n+1} - 1 \pmod{p}.$$

Ta có •)  $2^{n+1} - 1 \not\vdots p$  vì  $2^{p-1} - 1 \vdots p$  và  $(n+1, p-1) \leq 2$ .

$$\bullet) 2^{n+1} - 1 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1) \vdots p$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 \vdots p. \text{ Khẳng định này không xảy ra, vì } (n, p-1) \leq 2. \text{ Bởi vậy giả sử phản chứng về}$$

sự tồn tại  $x, y \in \mathbb{N}^*$  thỏa mãn phương trình (1) là sai. Khẳng định của bài toán đã được

chứng minh.  $\square$



► **Nhận xét.** Đây là bài toán số học hay, khó, có nhiều lý luận cơ bản của số học. (Do sơ xuất, đề bài cũ có một số chỗ không chính xác. Tòa soạn thành thật xin lỗi bạn đọc).

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/423.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2} = 3(x + y) \\ \sqrt{2x + y + 1} + 2\sqrt{7x + 12y + 8} = 2xy + y + 5. \end{cases}$$

**Lời giải.** Với mọi  $x, y$  ta có

$$5x^2 + 2xy + 2y^2 = (2x + y)^2 + (x - y)^2 \geq 0 \text{ và}$$

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 = (x + 2y)^2 + (x - y)^2 \geq 0.$$

Vậy điều kiện để hệ PT trên xác định là  $2x + y + 1 \geq 0$ .

Viết lại PT thứ nhất của hệ và đánh giá như sau

$$\begin{aligned} & \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2} \\ &= \sqrt{(2x + y)^2 + (x - y)^2} + \sqrt{(x + 2y)^2 + (x - y)^2} \\ &\geq |2x + y| + |x + 2y| \geq |3x + 3y| \geq 3(x + y). \end{aligned}$$

PT thứ nhất của hệ chỉ có thể được thỏa mãn nếu

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y \geq 0 \Leftrightarrow x = y \geq 0. \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

Thế vào PT thứ hai của hệ ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x + 1} + 2\sqrt{19x + 8} = 2x^2 + x + 5 \\ & \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + ((x + 1) - \sqrt{3x - 1}) + 2((x + 2) - \sqrt{19x - 8}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 2(x^2 - x) + \frac{x^2 - x}{x + 1 + \sqrt{3x + 1}} \\ & + \frac{(2x + 14)(x^2 - x)}{(x + 2)^2 + (x + 2)\sqrt{19x + 8} + \sqrt{(19x + 8)^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$\begin{aligned} & (\text{vì } x \geq 0 \text{ nên } 2 + \frac{1}{x + 1 + \sqrt{3x + 1}} \\ & + \frac{2x + 14}{(x + 2)^2 + (x + 2)\sqrt{19x + 8} + \sqrt{(19x + 8)^2}} > 0). \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = 0, x = 1.$$

Từ đó  $(x; y) = (0; 0)$  hoặc  $(1; 1)$  là nghiệm của hệ PT đã cho. □

► **Nhận xét.** Tòa soạn đã nhận được 160 bài giải cho bài toán này và 159 bạn tìm ra được hai nghiệm như lời giải trên. Xin nêu tên một số bạn có lời giải ngắn gọn và tốt hơn cả:

**Hòa Bình:** Đặng Hữu Hiếu, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Thanh, 11A15, THPT Quê Võ Số 1; **Hưng Yên:** Nguyễn Ngọc Đại, Trần Mai Anh, Nguyễn Thị Việt Hà, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** Quân Đức Bình, 8A1, Phạm Minh Hải, Nguyễn Tiến Dũng, Ngô Linh Chi, 9A3, THCS Lâm Thao; **Thái Nguyên:** Tạ Văn Tuấn, 11A1, THPT Lương Phú; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Cao, 11A1, THPT Sáng Sơn; Hoàng Đỗ Kiên, 12A1 chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** Nguyễn Hải Linh Chi, Trịnh Thị Thủy Dương, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Hà Nam:** Trịnh Ngọc Tú, 10 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Thanh Hóa:** Lê Thế Sơn, 11B8, THPT Bim Sơn; Nguyễn Quốc Trí, 11C1, THPT Hoàng Hóa IV; **Nghệ An:** Trương Công Phú, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Phan Văn Trung, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Nai:** Phạm Công Danh, 11T0, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 12 Toán 1, THPT chuyên Thăng Long; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** Phùng Thanh Dũng, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** Lai Minh Thành, 9A1, THPT Trần Đại Nghĩa; **Long An:** Chu Thị Thu Hiền, 11T, THPT chuyên Long An; **Cà Mau:** Lưu Giang Nam, Lê Minh Phương, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền.

TẠ NGỌC TRÍ

★ **Bài T12/423.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp. AI, BI, CI theo thứ tự cắt lại đường tròn (O) tại A', B', C'; A'C', A'B' theo thứ tự cắt BC tại M, N; B'A', B'C' theo thứ tự cắt CA tại P, Q; C'B', C'A' theo thứ tự cắt AB tại R, S. Chứng

$$\text{minh rằng } \frac{2}{3} S_{ABC} \leq S_{MNPQRS} \leq \frac{2}{3} S_{A'B'C'}.$$

**Lời giải.** Kí hiệu  $a, b, c$  theo thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB và A, B, C theo thứ tự là số đo các góc  $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$ .

Để cho đơn giản, ta dùng các kí hiệu  $\sum a, \sum a^2, \sum x, \sum x^2 \dots$  để chỉ các tổng  $a + b + c; a^2 + b^2 + c^2; x + y + z; x^2 + y^2 + z^2$  và các

kí hiệu  $\sum \tan \frac{A}{2}; \prod \cot \frac{A}{2}$  để chỉ

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}; \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

**Bổ đề 1.** Với mọi tam giác ABC, ta có

$$\sum \tan \frac{A}{2} \geq \sqrt{3} \text{ và } \prod \cot \frac{A}{2} \leq 3\sqrt{3}.$$

**Bổ đề 2.** Với các kí hiệu có trong bài toán

$$\text{trên, thì } \frac{MN}{BC} = \frac{a}{\sum a}; \frac{NP}{CA} = \frac{b}{\sum a}; \frac{PM}{AB} = \frac{c}{\sum a}.$$



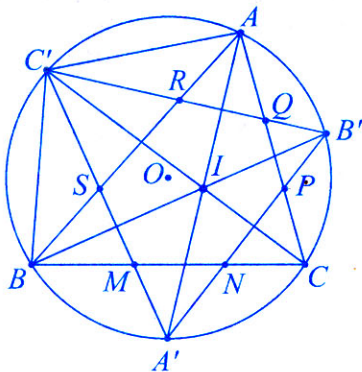
**Bổ đề 3.** Với mọi  $x, y, z$  thì  $\sum x^2 \geq \frac{1}{3}(\sum x)^2$ .

**Bổ đề 4.** Với mọi tam giác  $ABC$ , ta có

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{4}.$$

(Bạn đọc tự chứng minh các bổ đề trên).

Trở lại giải bài toán **T12/423** (hình vẽ).



**Phần 1.** Chứng minh  $S_{MNPQRS} \geq \frac{2}{3}S_{ABC}$ .

Dễ thấy  $\frac{AR}{BR} = \frac{S_{C'AR}}{S_{C'BR}} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \left( A + \frac{B}{2} \right)}.$

$$\frac{AR}{AB} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \left( A + \frac{B}{2} \right) + \sin \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}.$$

Tương tự  $\frac{AQ}{AC} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}}.$

Từ đó ta có

$$\frac{AR}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{4} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{A}{2} \right).$$

Vậy, chú ý rằng  $\sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$ , ta có

$$\frac{2}{3}S_{ABC} \leq S_{MNPQRS}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S_{ABC} \geq S_{ARQ}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{S_{ARQ}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sum \frac{AR}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC} \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{A}{2} \right) \geq \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sum \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \prod \tan \frac{A}{2} \sum \tan \frac{A}{2} \geq \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \prod \tan \frac{A}{2} \sum \tan \frac{A}{2} \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum \tan \frac{A}{2} \geq \prod \cot \frac{A}{2}. \quad (1)$$

Theo Bổ đề 1, bất đẳng thức (1) đúng.

$$\text{Do đó } S_{MNPQRS} \geq \frac{2}{3}S_{ABC}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều.

**Phần 2.** Chứng minh  $S_{MNPQRS} \leq \frac{2}{3}S_{A'B'C'}$ .

Dễ thấy  $\Delta A'MN \sim \Delta A'B'C'$ . Từ đó, theo Bổ đề 2 và định lý sin, suy ra

$$\begin{aligned} \frac{S_{A'MN}}{S_{A'B'C'}} &= \frac{MN^2}{B'C'^2} = \frac{MN^2}{BC^2} \cdot \frac{BC^2}{B'C'^2} \\ &= \frac{a^2}{(\sum a)^2} \cdot \frac{\sin^2 A}{\sin^2 \frac{B+C}{2}} = \frac{a^2}{(\sum a)^2} \cdot 4 \sin^2 \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{2}{3}S_{A'B'C'} \geq S_{MNPQRS}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S_{A'B'C'} \leq \sum S_{A'MN} \Leftrightarrow \sum \frac{S_{A'MN}}{S_{A'B'C'}} \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sum a^2 \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{1}{12}(\sum a)^2 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ .

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \geq \sin \frac{C}{2}.$$

Sử dụng BĐT Chebyshev, chú ý tới các Bổ đề 3 và 4, suy ra (2) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác  $ABC$  đều.  $\square$

**➤ Nhận xét.** 1) Bài toán này khá khó, số bạn tham gia giải không nhiều, một số bạn trình bày lời giải quá dài, có bạn phải sử dụng đạo hàm để chứng minh các BĐT lượng giác.



2) Không sử dụng lượng giác, vẫn có thể chứng minh được bất đẳng thức  $S_{MNPQRS} \geq \frac{2}{3}S_{ABC}$  (xem THPT số 176, trang 8).

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

**Thái Bình:** Trương Văn Cường, Trương Trung Quyết, Nguyễn Hải Linh Chi, Trịnh Thị Thuỳ Dương, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Nam Định:** Đinh Trung Kiên, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình:** Đặng Ngọc Tuấn, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; **Lâm Đồng:** Nguyễn Vũ Trung Quân, 12T1, THPT chuyên Thăng Long; **Long An:** Chu Thị Thu Hiền, Trần Thành Phát, 11T, THPT chuyên Long An; **Bến Tre:** Lê Thị Minh Thảo, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/423.** Điện năng từ một trạm phát điện được đưa đến một khu tái định cư bằng đường dây truyền tải một pha. Cho biết nếu điện áp tại đầu truyền đi tăng từ  $U$  lên  $2U$  thì số hộ dân được trạm cung cấp đủ điện năng từ 120 lên 144. Cho rằng chỉ tính đến hao phí trên đường dây, công suất tiêu thụ điện của các hộ dân đều như nhau, công suất của trạm phát không đổi và hệ số công suất trong các trường hợp đều bằng nhau. Nếu điện áp truyền đi là  $4U$  thì trạm phát này cung cấp đủ điện năng cho bao nhiêu hộ dân?

**Lời giải.** Gọi  $P_0$  là công suất tiêu thụ trung bình của một hộ dân,  $P$  là công suất của nguồn phát,  $n$  là số hộ dân mà trạm phát có thể cung cấp điện khi điện áp ở trạm phát bằng  $4U$ .

Ta có công thức tính công suất hao phí  $\frac{P.R}{U^2 \cos^2 \varphi}$ . Khi điện áp là  $U$ , ta có

$$P = 120P_0 + \frac{P.R}{U^2 \cos^2 \varphi} \quad (1)$$

Khi điện áp là  $2U$ , ta có

$$P = 144P_0 + \frac{P.R}{(2U)^2 \cos^2 \varphi} \quad (2)$$

$$\text{Khi điện áp là } 4U: P = nP_0 + \frac{P.R}{(4U)^2 \cos^2 \varphi} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta tìm được  $n = 150$ . □

➤ **Nhận xét.** Đây là một câu trắc nghiệm trong Đề thi Đại học, Cao đẳng năm 2012. Rất nhiều bạn tham gia giải và hầu hết có lời giải đúng.

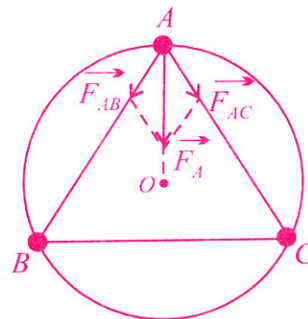
Các bạn sau có lời giải đúng và ngắn gọn:

**Hưng Yên:** Bùi Xuân Cường, 12T2, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Nguyễn Hải Hậu, 11A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **Trần Trung Hiếu,** 12A1, THPT Thái Hòa; **Hà Nội:** Nguyễn Duy Khánh 12A1 THPT Ba Vì; **Thái Bình:** Bùi Đình Hiếu 12A1, THPT Quỳnh Côi. Quỳnh Phụ; **Bắc Ninh:** Nguyễn Quang Huy, 10 Lí, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** Hoàng Huy Hiệu, 11A1, THPT Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Thuỳ Linh, 10A1, THPT Hương Khê.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài L2/423.** Ba ngôi sao giống nhau, có cùng khối lượng  $M$  đặt ở ba đỉnh của một tam giác đều, cạnh  $d$ . Hỏi chúng phải chuyển động với tốc độ bằng bao nhiêu để cả ba cùng quay do tác dụng của các lực hấp dẫn lẫn nhau, trên một quỹ đạo tròn ngoại tiếp với tam giác mà vẫn giữ cho tam giác được đều?

**Lời giải.** Mỗi ngôi sao chịu tác dụng của các lực hấp dẫn do hai ngôi sao kia (xem hình vẽ).



Xét ngôi sao  $A$ . Ngôi sao  $B$  tác dụng lên ngôi sao  $A$  lực  $\vec{F}_{AB}$ , về độ lớn  $F_{AB} = \frac{GM^2}{d^2}$ .

Ngôi sao  $C$  tác dụng lên ngôi sao  $A$  lực  $\vec{F}_{AC}$ , về độ lớn  $F_{AC} = \frac{GM^2}{d^2} = F_{AB}$ .

Lực tổng hợp mà ngôi sao  $A$  phải chịu là  $\vec{F}_A = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC}$ . Về độ lớn, ta thấy rằng

$$F_A = F_{AB} \cdot \sqrt{3} = \frac{GM^2 \sqrt{3}}{d^2}$$

và  $\vec{F}_A$  có phương  $AO$  và chiều hướng vào tâm  $O$ .



Vậy ngôi sao  $A$  chuyển động tròn đều với gia tốc hướng tâm  $a_{ht}$  bằng

$$a_{ht} = \frac{F_A}{M} = \frac{GM^2\sqrt{3}}{d^2M} = \frac{GM\sqrt{3}}{d^2}.$$

Mặt khác  $a_{ht} = \frac{v_A^2}{R}$ , ở đây  $R = \frac{d}{\sqrt{3}}$ .

Do đó, ta tìm được tốc độ của ngôi sao  $A$  bằng  $v_A = \sqrt{\frac{GM}{d}}$ .

Vì lí do đối xứng và cũng lập luận tương tự như trên, ta thấy  $v_C = v_B = v_A = \sqrt{\frac{GM}{d}}$ .

Do hệ ba ngôi sao chuyển động với cùng tốc độ trên đường tròn nên dạng của tam giác  $ABC$  không thay đổi, nghĩa là tam giác  $ABC$  luôn luôn là tam giác đều. Chú ý rằng, các ngôi sao quay theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ là tùy thuộc vào trạng thái ban đầu của chúng.  $\square$

► **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Quảng Ngãi:** Nguyễn Nhật Hân, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Tiền Giang:** Võ Việt Tân, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Tháp:** Huỳnh Thanh Dư, 12 Lí, THPT Nguyễn Quang Diêu; **Thái Nguyên:** Tạ Văn Tuấn, 11A1, THPT Lương Phú; **Nam Định:** Trần Thị Thu Hương, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN VĂN THUẬN

## PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/427.** Solve the system of equations

$$\begin{cases} 2^4\sqrt{\frac{x^4}{3}+4} = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}|y| \\ 2^4\sqrt{\frac{y^4}{3}+4} = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}|x|. \end{cases}$$

**T7/427.** The side lengths of a triangle  $ABC$  are  $AB = 9$ ,  $BC = \sqrt{39}$ ,  $CA = \sqrt{201}$ . Find a point  $M$  on the circle  $(C; \sqrt{3})$  such that the sum  $MA + MB$  is the maximum.

**T8/427.** Prove that in any triangle  $ABC$ ,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)} \\ & + \sqrt{\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)\left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\right)} \\ & + \sqrt{\left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\right)\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)} \\ & \leq 2(\cot A + \cot B + \cot C). \end{aligned}$$

### TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

**T9/427.** Let  $N = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{4023}$ . Find the 2013-th digit after the decimal comma of  $\sqrt{N}$ .

**T10/427.** Find the maximum and minimum values of the expression  $P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$ , where  $a, b, c$  are positive real numbers satisfying the condition  $\min\{a, b, c\} \geq \frac{1}{4} \max\{a, b, c\}$ .

**T11/427.** Let  $\{S_n(x)\}$  be a sequence of real-valued functions defined by

$$\begin{aligned} S_n(x) = & \cos^3 x - \frac{1}{3}\cos^3 3x + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2x \\ & - \dots + \left(\frac{-1}{3}\right)^n \cos^3 3^n x. \end{aligned}$$

Find all real values of  $x$  such that

$$\lim S_n(x) = \frac{3-3x}{4}.$$

**T12/427.** In a non-cyclic quadrilateral  $ABCD$ , let  $A', B', C', D'$  be the circumcenters of triangles  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  and  $ABC$  respectively. Let  $A'', B'', C'', D''$  be the centers of the Euler circles of triangles  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  respectively. Prove that the two quadrilaterals  $A'B'C'D'$ ,  $A''B''C''D''$  are both convex and inversely similar.

Translated by LE MINH HA





# PHƯƠNG PHÁP TÌM NGÀY CAN CHI TƯƠNG ỨNG VỚI NGÀY DƯƠNG LỊCH TRONG MUỖI THẾ KỈ

NGUYỄN VĂN THANG  
(Hà Nội)

Hệ Can Chi là một hệ đếm định vị thời gian (năm, tháng, ngày, giờ) từ xưa ở Á Đông, do ghép 10 Can (cột bên trái Bảng I) với 12 Chi (hàng trên Bảng I) được 60 tên Can Chi. Trong Bảng I theo thứ tự ta cho mỗi tên Can Chi tương ứng với một mã số  $C$  ( $1 \leq C \leq 60$ ) nằm ở giao của hàng Can với cột Chi; chẳng hạn Bính Ngọ tương ứng với mã số  $C = 43$ .

Tiếp sau Quý Hợi ( $C = 60$ ) là Giáp Tý ( $C = 1$ ) nên nếu ta gặp mã số Can Chi lớn hơn 60 thì cần trừ đi 60 để có  $1 \leq C \leq 60$ .

Trong *Lịch Vạn niên* người ta ghi mỗi ngày Dương lịch tương ứng với tên Can Chi của ngày đó, như thế một năm không nhuận ghi 365 ngày, 1000 năm ghi hơn 365000 ngày. Tuy nhiên, nếu sử dụng các bảng trong bài viết này cùng với vài phép tính cộng trừ đơn

giản ta có thể tìm được ngày Can Chi tương ứng với ngày Dương lịch (Lịch Gregorius) trong mười thế kỉ, từ 1600 đến 2599.

Để làm điều đó cho mỗi năm  $n$  (từ 1600 đến 2599) ứng với một mã số  $Y_n$  trong Bảng II và cho mỗi tháng  $t$  (từ 1 đến 12) ứng với một mã số  $M_t$  trong Bảng III.

Chẳng hạn để tìm mã số  $Y_{2009}$  của năm 2009 ta xem Bảng II ở cột bên trái tìm số 09 (để cho gọn ở Bảng II trong một thế kỉ chỉ ghi hai chữ số cuối cùng của năm) rồi dóng theo hàng ngang sang phải tới cột 2000 thấy  $Y_{2009} = 42$ . Mã số 42 ứng với Ất Tỵ (theo Bảng I). Chú ý rằng mã số  $Y_n$  của năm  $n$  chính là mã số Can Chi của ngày cuối cùng năm liền trước đó, chẳng hạn Ất Tỵ là tên Can Chi của ngày 31/12/2008.

**Bảng I. Mã số Can Chi  $C$**

	I Tý	III Dần	V Thìn	VII Ngọ	IX Thân	XI Tuất
	II Sửu	IV Mão	VI Tỵ	VIII Mùi	X Dậu	XII Hợi
1. Giáp	1	51	41	31	21	11
2. Ất	2	52	42	32	22	12
3. Bính	13	3	53	43	33	23
4. Đinh	14	4	54	44	34	24
5. Mậu	25	15	5	55	45	35
6. Kỷ	26	16	6	56	46	36
7. Canh	37	27	17	7	57	47
8. Tân	38	28	18	8	58	48
9. Nhâm	49	39	29	19	9	59
10. Quý	50	40	30	20	10	60



**Bảng II. Mã số  $Y_n$  của năm  $n$**

Hai chữ số cuối năm $n$		1600 1699	1700 1799	1800 1899	1900 1999	2000 2099	2100 2199	2200 2299	2300 2399	2400 2499	2500 2599
00	Nhuận	57				54				51	
00	Thường		42	26	10		39	23	7		36
01	81	3	47	31	15	60	44	28	12	57	41
05	85	24	8	52	36	21	5	49	33	18	2
09	89	45	29	13	57	42	26	10	54	39	23
13	93	6	50	34	18	3	47	31	15	60	44
17	97	27	11	55	39	24	8	52	36	21	5
21		48	32	16	60	45	29	13	57	42	26
25		9	53	37	21	6	50	34	18	3	47
29		30	14	58	42	27	11	55	39	24	8
33		51	35	19	3	48	32	16	60	45	29
37		12	56	40	24	9	53	37	21	6	50
41		33	17	1	45	30	14	58	42	27	11
45		54	38	22	6	51	35	19	3	48	32
49		15	59	43	27	12	56	40	24	9	53
53		36	20	4	48	33	17	1	45	30	14
57		57	41	25	9	54	38	22	6	51	35
61		18	2	46	30	15	59	43	27	12	56
65		39	23	7	51	36	20	4	48	33	17
69		60	44	28	12	57	41	25	9	54	38
73		21	5	49	33	18	2	46	30	15	59
77		42	26	10	54	39	23	7	51	36	20

Theo Lịch Gregorius năm chia hết cho 4 là năm nhuận, trừ ra năm chia hết cho 100 nhưng không chia hết cho 400 là năm không nhuận. Chẳng hạn trong các năm chia hết cho 100, từ năm 1600 đến năm 2600 thì các năm nhuận là 1600, 2000, 2400, còn các năm không nhuận là 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300, 2500, 2600.

Mã số  $Y_n$  của các năm Dương lịch tuân theo quy luật sau đây. Trong ba năm không nhuận liên tiếp và năm thứ tư là năm nhuận thì mã số  $Y_n$  sau mỗi năm tăng thêm 5, chẳng hạn năm thứ nhất 2009 có  $Y_{2009}=42$  thì  $Y_{2010}=47$ ,

$Y_{2011}=52$ ,  $Y_{2012}=57$ . Do mỗi năm không nhuận có 365 ngày mà 6 lần của 60 (tên Can Chi) là 360 nên phải cộng thêm 5 vào  $Y_n$  để được  $Y_{n+1}$ . Vì thế để cho gọn trong Bảng II chỉ ghi mã số của năm thứ nhất trong bốn năm liên tiếp. Vì năm thứ tư là năm nhuận (thêm một ngày) nên năm thứ năm có mã số tăng thêm 6 so với năm thứ tư. Chẳng hạn  $Y_{2013}=57+6-60=3$ . Tổng quát ta thấy: Nếu các năm  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$  không nhuận, còn năm  $n+3$  là năm nhuận thì  $Y_{n+1}=Y_n+5$ ,  $Y_{n+2}=Y_n+10$ ,  $Y_{n+3}=Y_n+15$  và  $Y_{n+4}=Y_n+21$  (nếu mã số vượt quá 60 thì trừ đi 60).

**Bảng III. Mã số  $M_t$  của tháng  $t$**

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$M_t$ năm thường	0	31	-1	30	0	31	1	32	3	33	4	34
$M_t$ năm nhuận			0	31	1	32	2	33	4	34	5	35



Muốn tìm mã số  $M_t$  của tháng  $t$  Dương lịch của Bảng III, ta xét xem nếu là năm không nhuận thì mã số  $M_t$  tính theo hàng trên, còn với năm nhuận (thêm 1 ngày) thì mã số  $M_t$  ở hàng dưới (chính là mã số của năm không nhuận cộng thêm 1 tính từ tháng 3 đến tháng 12). Chú ý rằng mã số  $M_t$  của tháng  $t$  là mã số của ngày Can Chi cuối cùng của tháng liền trước đó, bắt đầu tính từ tháng 1 có  $M_1 = 0$  (coi là mã số 60 ứng với Quý Hợi), còn tháng 3 năm không nhuận có  $M_3 = -1$  (coi là mã số 59 ứng với Nhâm Tuất).

Mã số Can Chi  $C$  của ngày  $d$  tháng  $t$  năm  $n$  Dương lịch được tính theo công thức

$$C = Y_n + M_t + d - 60k$$

trong đó  $k$  lấy giá trị 0 hoặc 1 hoặc 2 sao cho  $1 \leq C \leq 60$ .

Như vậy nếu biết ngày  $d$  tháng  $t$  năm  $n$  Dương lịch ta tính được  $C$  rồi xem Bảng I thì tìm được tên Can Chi của ngày đó.

**Thí dụ.** Hãy xác định tên Can Chi của ngày 20 tháng 11 năm 2012.

**Giải đáp.** Ta có  $d = 20$ ,  $t = 11$ ,  $n = 2012$ .

Xem Bảng II thấy  $Y_{2009} = 42$  nên  $Y_{2012} = 42 + 15 = 57$ .

Xem Bảng III thấy  $M_{11} = 5$  (năm 2012 là năm nhuận). Tính được  $C = 57 + 5 + 20 - 60 = 22$ .

Xem Bảng I mã số 22 ứng với Ất Dậu. Vậy ngày 20/11/2012 có tên Can Chi là ngày Ất Dậu.

Tương tự như trên bạn có thể lập tiếp Bảng II (mã số  $Y_n$ ) cho các năm khác để tính được ngày Can Chi ứng với ngày Dương lịch cho các năm đó.

# VỊNH CON RẮN

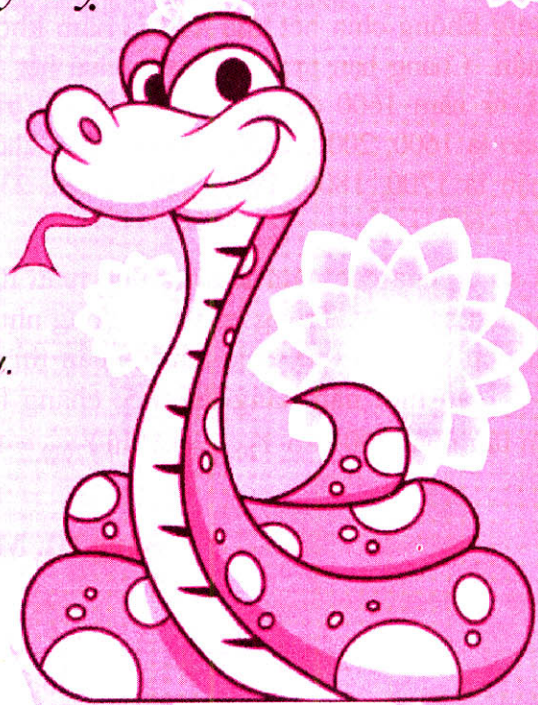
Xuân Quý Tỵ

## BÀI XƯƠNG

*Thân mềm bạn hiểu rắn từ đâu?  
Rắn tự trong tim rắn tại đâu.  
Vốn khúc hình sin vòng bốn biển,  
Tìm đường thẳng tiến vượt năm châu.  
Giá được hóa Rồng thêm tí sống,  
Bằng không cứ rắn kém chi giàu.  
Rắn biển, rắn đồng cùng rắn núi  
Hòa chung một khối nặng tình sâu.*

**ĐÀO TAM.**

(Khoa Toán - Đại học Vinh).





# HỘI NGHỊ HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP, CỘNG TÁC VIÊN CỦA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 2012

Ngày 7/12/2012 tại Khu Du lịch Sinh thái Cửu Thác - Tú Sơn, Hòa Bình đã diễn ra Hội nghị Hội đồng Biên tập, Cộng tác viên và phát thưởng cho các em học sinh đoạt giải cao các tỉnh phía Bắc của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm 2012.

Đến dự Hội nghị có PGS. TS *Phan Doãn Thoại*, Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam; ThS *Nguyễn Thế Thạch*, Vụ

Giáo dục Trung học, Bộ giáo dục và Đào tạo, PGS. TS *Tạ Duy Phương*, Viện Toán học Việt Nam; ThS *Nguyễn Bá Đăng*, Hội Toán học Hà Nội; Ông *Ngô Văn Tấu*, Giám đốc Công ty RunSystem, Hà Nội; Ông *Nguyễn Minh Tân*, Giám đốc Công ty Sách và Thiết bị Giáo dục Hòa Bình; ThS *Vũ Kim Thủy*, Tổng biên tập Tạp chí Toán Tuổi thơ; Trưởng phó các phòng ban Cơ quan Văn phòng NXBGD Việt Nam; các Ủy viên Hội đồng biên tập; Ban Giám đốc Xí nghiệp In Bản đồ 1, Bộ Quốc Phòng; Đại diện Công ty Sách và Thiết bị Giáo dục Hải Dương; Đại diện Tạp chí Văn học và Tuổi trẻ; Đại diện Ban Giám hiệu Trường THPT chuyên Hưng Yên; Trường THPT Thái Hòa, Nghệ An; Trường THPT Thuận Thành Số 1, Bắc Ninh; Trường THPT chuyên Hà Tĩnh; các cộng tác viên thân thiết; các thầy cô giáo và các em học sinh đoạt giải cao Khu vực phía Bắc trong *Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2011 - 2012 trên Tạp chí TH&TT*.

Sau lời phát biểu đề dẫn, TS. *Phạm Thị Bạch Ngọc*, Tổng biên tập Tạp chí TH&TT đã báo cáo tổng kết hoạt động biên tập, xuất bản, phát hành của Tạp chí năm 2012 và định hướng kế hoạch hoạt động năm 2013. Thay mặt NXBGD Việt Nam, PGS. TS *Phan Doãn Thoại*, Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam phát biểu chào mừng những thành tích đã đạt được của Tạp chí trong



thời gian qua, đồng thời giao nhiệm vụ cho Tạp chí càng phải cải tiến hơn nữa về nội dung và hình thức để đáp ứng nhu cầu ngày càng cao của bạn đọc. Tiếp theo chương trình Hội nghị, ThS *Hồ Quang Vinh*, Thư ký Tòa soạn Tạp chí TH&TT đọc báo cáo tổng kết trao giải *Cuộc thi giải Toán và Vật lý trên Tạp chí TH&TT năm học 2011-2012*. PGS. TS *Phan Doãn Thoại*, TS *Phạm Thị Bạch Ngọc*, Ông *Ngô Văn Tấu*, đã trao **Bằng Chứng nhận** của Tạp chí và phần thưởng cho các em học sinh đoạt Giải Nhất và Giải Nhì trong cuộc thi. Thay mặt các bạn đoạt giải, em *Đinh Ngọc Hải*, lớp 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam (hiện là Sinh viên lớp Kỹ sư tài năng ĐHBK Hà Nội) phát biểu dành nhiều tình cảm sâu sắc đối với tờ Tạp chí TH&TT. Buổi chiều cùng ngày, các đại biểu đã có cuộc tham quan thú vị dưới không khí se lạnh tại Khu Du lịch Sinh thái Cửu Thác - Tú Sơn, Hòa Bình. Hội nghị đã thành công tốt đẹp, để lại nhiều ấn tượng cho các đại biểu tham dự ngày hôm ấy.

Nhân dịp này, Tạp chí TH&TT xin chân thành cảm ơn NXBGD Việt Nam, Xí nghiệp In Bản đồ 1 Bộ Quốc phòng đã tặng quà, lãng hoa chúc mừng đến Tạp chí. Đặc biệt, xin cảm ơn NXBGD tại TP. Hà Nội và Công ty RunSystem Hà Nội đã tặng sách giáo khoa và hỗ trợ kinh phí cho những học sinh đoạt giải cao đến tham dự Hội nghị.

QUANG PHÚC





### **BAN CỐ VẤN KHOA HỌC**

**GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN**

**GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG**

**TS. NGUYỄN VĂN VỌNG**

**GS. ĐOÀN QUỲNH**

**PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO**

### **CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN**

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm  
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

**NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI**

Tổng biên tập kiêm

Phó Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

**TS. NGUYỄN QUÝ THAO**

### **HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**

**Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH**

**TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.**

## **TRONG SỐ NÀY**

#### **1 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**

*Nguyễn Việt Hải* - Một số bài toán tìm cực trị của biểu thức nguyên.

#### **4 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013.**

#### **6 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 Tỉnh Thanh Hoá, năm học 2011–2012.**

#### **7 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**

*Nguyễn Thanh Hải* - Một số dạng toán về đường tròn.

#### **11 Thử sức trước kì thi - Đề số 4.**

#### **12 Hướng dẫn giải Đề số 3.**

#### **13 Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions**

*Nguyễn Duy Liên* - Linh hoạt và sáng tạo trong giải toán.

#### **15 Câu lạc bộ – Math Club**

#### **16 Đề ra kì này – Problems in This Issue**

#### **18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**

#### **28 Toán học và đời sống**

*Nguyễn Văn Thang* - Phương pháp tìm ngày Can Chi tương ứng với ngày Dương lịch trong mười thế kỉ.

#### **30 Đào Tam - Vịnh con Rắn.**

#### **31 Tin tức: Hội nghị Hội đồng biên tập, cộng tác viên của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm 2012.**





# TRƯỜNG CAO ĐẲNG TUYÊN QUANG

## HƠN NỬA THẾ KỈ XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

**T**rường Cao đẳng Tuyên Quang (tiền thân là Trường Sơ cấp Sư phạm Tuyên Quang) được thành lập năm 1959 nhằm đáp ứng nhu cầu đào tạo giáo viên trong Tỉnh. Trong quá trình phát triển, nhà trường đã nhiều lần thay đổi địa điểm, tên gọi và là sự hợp nhất của nhiều trường Sư phạm khác nhau như: Trường Sư phạm cấp I, Trường Sư phạm cấp II, Trường Sơ cấp nuôi dạy trẻ, Trường Sơ cấp Sư phạm Mầm non, Trường Cán bộ Quản lý Giáo dục.

Hơn nửa thế kỉ xây dựng, trưởng thành và không ngừng lớn mạnh, nhà trường đã trở thành một trong những cơ sở đào tạo có uy tín và chất lượng trong khối các trường Đại học, Cao đẳng cụm trung du miền núi phía Bắc nói chung, các trường Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp trên địa bàn tỉnh Tuyên Quang nói riêng.

Hiện tại nhà trường được xây dựng trong một khuôn viên rộng rãi thoáng mát. Với tổng diện tích đất được quy hoạch là 52,26 ha trong đó trên 10 ha dành cho khu Trung tâm thực hành, thực nghiệm và chuyển giao công nghệ. Hệ thống cơ sở vật chất đảm bảo đáp ứng nhu cầu học tập, với các trang thiết bị hiện đại và các phòng thí nghiệm Lí, Hóa, Sinh, phòng nuôi cấy mô được triển khai theo quy trình công nghệ tiên tiến. Trường có 6 khoa (Tự nhiên - Kỹ thuật - Công nghệ, Khoa học Xã hội & Nhân văn, Tiểu học - Mầm Non, Ngoại ngữ, Nông - Lâm - Ngư nghiệp, Kinh tế - Quản trị Kinh doanh), 2 bộ môn (Tâm lý-Giáo dục và Lí luận Chính trị), 7 phòng ban và 4 Trung tâm (Tin học - Ngoại ngữ, Thông tin - Thư viện, Thể dục Thể thao, Thực hành - Thực nghiệm và Chuyển giao KHCN). Về đội ngũ, nhà trường quản lý 240 cán bộ giáo viên trong đó: Giảng viên, Giảng viên chính: 120; Tiến sĩ: 04; Thạc sĩ: 78; đang học Nghiên cứu sinh: 20, Cao học 57. Nhà trường đang thực hiện đào tạo 30 mã ngành trong đó 22 mã ngành sư phạm và 8 mã ngành ngoài sư phạm ở các hệ Trung cấp,

Cao đẳng chính quy, tại chức, vừa học vừa làm. Ngoài ra nhà trường còn liên kết đào tạo trình độ đại học tất cả các ngành theo nhu cầu xã hội. Về quy mô trung bình hàng năm nhà trường tuyển sinh từ 2000 - 3000 sinh viên, năm học 2012-2013 tổng số sinh viên, học viên gần 6000 người đến từ 30 tỉnh thành trong cả nước.

Là một đơn vị mạnh nhất trong Tỉnh về đội ngũ có trình độ cao, nhà trường đã có nhiều đóng góp trong công tác nghiên cứu khoa học của Tỉnh. Bằng giải pháp tham gia tích cực các công trình nghiên cứu cấp Bộ, Tỉnh, các dự án của trung ương và địa phương, những năm gần đây nhà trường đã cho ra đời nhiều sản phẩm khoa học phong phú, đa dạng và có giá trị. Một số giao trình, sách chuyên khảo và tham khảo được đánh giá cao. Các hoạt động Hội nghị, Hội thảo mang tầm quốc gia được tổ chức tại trường đã để lại những ấn tượng tốt đẹp đối với các nhà khoa học trong cả nước.

Trong lộ trình, nhà trường đang phấn đấu và chuẩn bị mọi điều kiện để nâng cấp thành trường đại học mang tên Tân Trào - một trong những trường đại học đầu tiên của quê hương cách mạng - Thủ đô khu giải phóng, đáp ứng nhu cầu học tập của con em nhân dân các dân tộc Tỉnh Tuyên Quang và các tỉnh thành khác trong cả nước, đặc biệt là các tỉnh miền núi phía Bắc. Phấn đấu đến năm 2015 đạt trên 90% CBGV có trình độ Thạc sĩ trở lên trong đó có 15 % có trình độ Tiến sĩ.



**TS. Nguyễn Bá Đức**  
Hiệu trưởng nhà trường



**TRƯỜNG CAO ĐẲNG TUYÊN QUANG**  
Đ/c Km6 Trung Môn - Yên Sơn, Tuyên Quang  
Website: [www.caodangtuyenquang.edu.vn](http://www.caodangtuyenquang.edu.vn)