

ANALISIS MATEMATICO

Optimización de funciones

■ Problema típico de optimización

Se debe construir una caja de 3 litros de capacidad, con base cuadrada. Sabemos que el material de la tapa tiene un costo 5 veces mayor que el resto del material utilizado. Por razones de embalaje, la base cuadrada no puede tener una medida inferior a los 5cm de lado ni superior a los 30cm. Hallar las dimensiones de la caja más económica.

Antes de atacar este problema, vamos a dar la demostración que tenemos pendiente del Teorema sobre funciones continuas en intervalos cerrados. La demostración que aquí presentamos usa un recurso importante, llamado *encaje de intervalos*, razón por la cual sugerimos al lector le ponga la atención debida.

Teorema

Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

La función f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en algún punto del intervalo. Es decir, existen $x_m, x_M \in [a,b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \text{ para todo } a \leq x \leq b$$

Demostración (en tres tiempos)

Nos iremos acercando al resultado en cada paso

Primer Paso (ya dado) Si $x_0 \in (a,b)$ entonces f es localmente acotada. Es decir, existe $\delta > 0$ y constantes $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Demostración

Esta demostración la dimos como una propiedad de las funciones continuas. Consultar la clase sobre *Continuidad*.

Segundo Paso Teorema de Weierstrasse. Encaje de intervalos

La función f está acotada en todo el intervalo $[a,b]$. Es decir existen constantes $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ si $x \in [a,b]$

Demostración

La idea de la demostración es suponer que no está acotada y “atrapar” un punto del intervalo donde no esté localmente acotada, contradiciendo lo que dice el primer paso.

Supongamos pues que f no está acotada.

Se divide el intervalo $[a,b]$ en dos partes iguales. En uno de los dos intervalos resultantes (ver esquema), digamos $[a_1, b_1]$, la función f no está acotada. Se tiene que:

$$[a_1, b_1] \subset [a, b] \quad , \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

f no está acotada en $[a_1, b_1]$

Repetimos el razonamiento: dividir el intervalo $[a_1, b_1]$ en dos partes iguales y elegir uno de los intervalos, el $[a_2, b_2]$ donde f no está acotada. Se tiene que

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \quad , \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{4}$$

f no está acotada en $[a_2, b_2]$

y así siguiendo.

Obtenemos una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ “encajados” unos en otros cada vez más pequeños, donde f no está acotada. Más precisamente

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \dots \subset [a, b] \quad , \quad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

f no está acotada en $[a_n, b_n]$ para todo n

Los extremos izquierdos de los intervalos forman una sucesión creciente: $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \dots$ y la sucesión de los extremos derechos, una sucesión decreciente: $b \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$. Entonces ambas tienen límite. Además

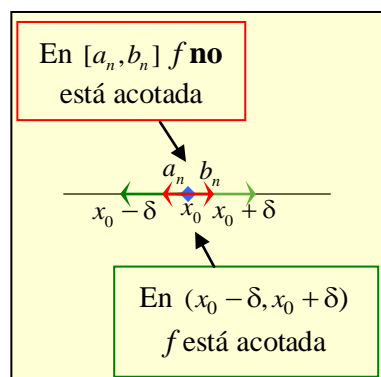
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^n} = 0$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0 \in [a, b]$.

Tenemos entonces que $x_0 \in [a_n, b_n]$ para todo n y que en esos intervalos f no está acotada.

Pero x_0 es un punto de continuidad de f entonces, allí es localmente acotada. Es decir existe $\delta > 0$ y constantes $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pero, por otra parte, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0 \in [a, b]$

Estamos suponiendo que $x_0 \in (a, b)$. Si tuviéramos la desgracia de que justo es uno de los puntos del borde del intervalo, el argumento se arregla fácilmente



Entonces mientras que en $[a_n, b_n]$ f no está acotada, en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ f está acotada, lo cual es imposible. La contradicción se genera al suponer que f no está acotada en $[a, b]$.

Por lo tanto, f está acotada en $[a, b]$. ■

Tercer Paso

La función f alcanza su máximo y su mínimo

Demostración (de que alcanza su máximo)

El Teorema de Weierstrasse que acabamos de demostrar nos asegura que existe

$$M = \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

Queremos probar que existe $x_M \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(x_M) = M$ para $x \in [a, b]$

Supongamos que no existe tal punto en $[a, b]$. Entonces $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces la función

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

es continua en el intervalo $[a, b]$ y por lo tanto, acotada en dicho intervalo (*Segundo paso*). Es decir, existe un número $K > 0$ tal que $g(x) \leq K$. Esto nos lleva a una contradicción, a saber:

$$g(x) \leq K \Leftrightarrow \frac{1}{M - f(x)} \leq K \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{K} < M$$

ya que M no es la menor de las cotas superiores, siendo el supremo.

La contradicción proviene de suponer que f no alcanza su máximo.

Entonces, existe $x_M \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(x_M) = M$ ■

▪ Receta para optimizar una función en un intervalo cerrado

La combinación del teorema precedente y el Teorema de Fermat nos da un camino para hallar los extremos de una función continua y derivable en un intervalo cerrado. Escribimos una vez más los dos resultados informalmente:

Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces

- f alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo.
- Si alcanza un extremo en un punto interior $x_0 \in (a, b)$ entonces $f'(x_0) = 0$.

Los **puntos críticos** entre los estarán los que realizan el máximo y el mínimo son de tres tipos:

- 1) Los bordes $x = a$, $x = b$
- 2) Los ceros de la derivada: $\{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$
- 3) Los puntos del intervalo donde f no sea derivable.

▪ Problema de la caja

Volvemos a enunciar el problema de la caja que presentamos al comienzo de esta clase:

Se debe construir una caja de 3 litros de capacidad, con base cuadrada. Sabemos que el material de la tapa tiene un costo 5 veces mayor que el resto del material utilizado. Por razones de embalaje, la base cuadrada no puede tener una medida inferior a los 5cm de lado ni superior a los 30cm. Hallar las dimensiones de la caja más económica.

Solución

La base de la caja es un cuadrado de x cm de lado.

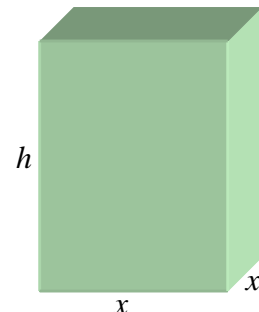
La altura de la caja mide h centímetros.

El volumen de la caja es $V = x^2 h \text{ cm}^3$

Los 3 litros de capacidad equivalen a 3000 cm^3

Por lo tanto

$$x^2 h = 3000 \quad (*)$$



Supongamos que cada centímetro cuadrado cuesta una unidad monetaria (u.m.)

Entonces el costo de cada una de las cuatro caras de la caja es xh u.m.

El costo del piso de la caja es x^2 u.m.

El costo de la tapa es 5 veces la del piso: $5x^2$ u.m.

Entonces el costo total C de la caja es

$$C = 6x^2 + 4xh$$

De (*) se despeja una de las dos variables: $h = \frac{3000}{x^2}$

Entonces el costo se puede expresar en función de x como

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12000}{x}$$

El enunciado del problema restringe los valores de x : $5 \leq x \leq 30$.

Tenemos una función $C: [5, 30] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable, de la cual nos interesa conocer su valor mínimo.

El Teorema que demostramos hoy nos asegura que tal mínimo se alcanza en el intervalo y que el punto donde se alcanza está entre sus puntos críticos.

Buscamos los ceros de la derivada:

$$C'(x) = 12x - \frac{12000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10 \in [5, 30]$$

Entonces el mínimo se alcanza en alguno de los siguientes tres puntos:

$$x = 5, x = 30, x = 10$$

Evaluamos C en cada uno de estos tres puntos críticos:

$$C(5) = 6 \cdot 25 + \frac{12000}{5} = 2550$$

$$C(30) = 6 \cdot 900 + \frac{12000}{30} = 5800$$

$$C(10) = 6 \cdot 100 + \frac{12000}{10} = 1800$$

El valor mínimo se alcanza en $x = 10$ y es igual a 1800 u.m.

La altura de la caja se obtiene de (*): $h = 30$ cm.

De modo que las cajas que minimizan el costo tienen que tener la base de 10 cm de lado y la altura de 30 cm.

■ Problema. Reflexión

Se quiere ir del punto $A = (0, 2)$ hasta el punto $B = (4, 4)$ visitando previamente el segmento $[0, 4]$ del eje x . De todos los caminos posibles, hallar el de longitud mínima.

Solución

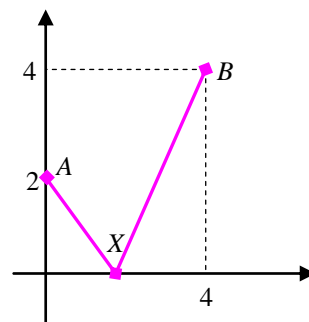
Sea $X = (x, 0)$ con $0 \leq x \leq 4$ el punto de visita al eje x .

La distancia desde A hasta X es igual a $\sqrt{x^2 + 4}$.

La distancia desde X hasta B es igual a

$$\sqrt{(4-x)^2 + 16}$$

Entonces un camino de A hasta B pasando por X



tiene una longitud igual a

$$D(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(4-x)^2 + 16} \text{ con } 0 \leq x \leq 4$$

Buscamos los ceros de la derivada:

$$D'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{-(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2 + 16}}$$

$$D'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2 + 16}}$$

Como $0 \leq x \leq 4$ ambos miembros son positivos. Elevamos al cuadrado y se obtiene

$$\frac{x^2}{x^2 + 4} = \frac{(4-x)^2}{(4-x)^2 + 16} \Leftrightarrow x^2(4-x)^2 + 16x^2 = x^2(4-x)^2 + 4(4-x)^2$$

Entonces

$$\frac{x^2}{(4-x)^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{4-x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

Son puntos críticos $x = 0$, $x = 4$, $x = \frac{8}{3}$.

Veamos cual es el mínimo.

$$D(0) = 2 + \sqrt{32} \simeq 7,66$$

$$D(4) = \sqrt{20} + 4 \simeq 8,47$$

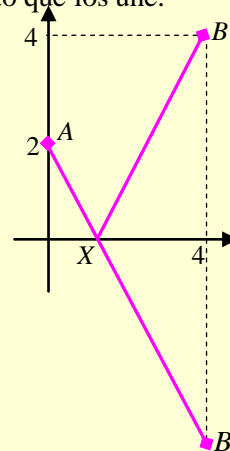
$$D\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{\frac{64}{9} + 4} + \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \frac{10}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{10} \simeq 7,55$$

Entonces el mínimo se alcanza en $x = \frac{8}{3}$ y la distancia recorrida es aproximadamente 7,55

La solución de Herón

Herón de Alejandría, dio una solución muy linda que no necesita cálculo.

Se marca el punto B' , simétrico de B con respecto a al eje x . El camino más corto entre A y B' es el segmento que los une.



Problema. Cuando no existe la derivada

Hallar el valor máximo y el valor mínimo de $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x$ para $x \in [-8, 27]$

Solución

La función es continua. Por lo tanto el máximo y el mínimo se alcanzan en el intervalo.

Buscamos los ceros de la derivada:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{-2/3} - \frac{1}{3} \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$$

Esta expresión de la derivada está definida en todo el intervalo, salvo en $x = 0$. En ese punto la función no es derivable porque no existe el límite del cociente incremental.

Entonces $x=0$ también es un punto crítico a estudiar.

Los puntos críticos entre los que se encuentra el máximo y el mínimo son:

- $x=-8, x=27$: bordes del intervalo
- $x=-1, x=1$: ceros de la derivada
- $x=0$: f no es derivable

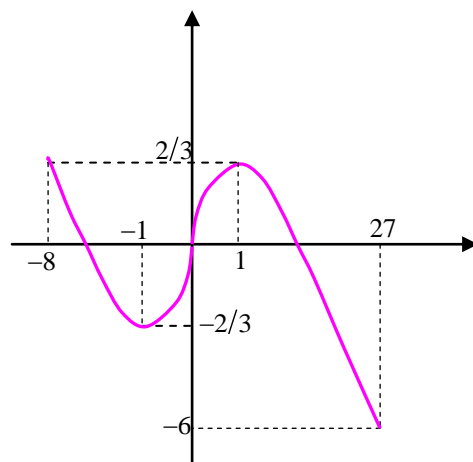
Evaluamos la función f en cada uno de esos puntos

- $f(-8) = \sqrt[3]{-8} - \frac{1}{3}(-8) = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,67$
- $f(27) = \sqrt[3]{27} - \frac{1}{3} \cdot 27 = 3 - 9 = -6$
- $f(-1) = \sqrt[3]{-1} - \frac{1}{3}(-1) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \approx -0,67$
- $f(1) = \sqrt[3]{1} - \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,67$
- $f(0) = \sqrt[3]{0} - \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$

Entonces:

El mínimo se alcanza en $x=27$ y es igual a -6 .

El máximo se alcanza en $x=-8$ y en $x=1$ y es igual a $\frac{2}{3}$



▪ **Problema. Cuando el intervalo no es cerrado**

Sea $f(x) = xe^{-2x}$. Considere los triángulos de vértices $A=(0,0)$, $B=(x,0)$ y $C=(x,f(x))$, con $x>0$. Hallar las dimensiones del de área máxima.

Solución

El área del triángulo es:

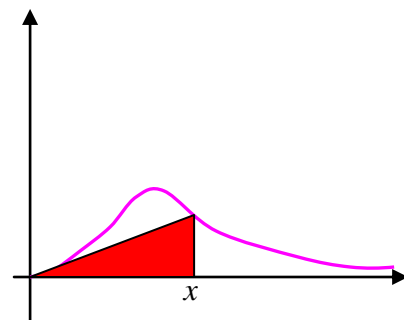
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{xf(x)}{2} = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}, \quad x \in [0, +\infty)$$

La función A es continua y derivable pero el intervalo es infinito.

Observemos que

$$A(0)=0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x)=0 \quad \text{y} \quad A(x)>0$$

Esto alcanza para afirmar que A alcanza un máximo absoluto en $(0, +\infty)$ y que además en ese punto la derivada de A se anula.



Otro argumento

$A'(x) > 0$ si $0 < x < 1$: A crece.

$A'(x) < 0$ si $1 < x < +\infty$: A

decrece $\Rightarrow x=1$ es máximo absoluto

$$A'(x) = xe^{-2x} - x^2e^{-2x} = x(1-x)e^{-2x} = 0 \Rightarrow x=1$$

Entonces en $x=1$ se alcanza un máximo que resulta absoluto. El área del triángulo es igual

$$A(1) = \frac{1}{2e^2}$$