

# ESTRUCTURAS DE ACERO

## ANÁLISIS Y DISEÑO

JUGEL BERMUDEZ LARTE



El Bordon Building, Columbus, Ohio.

**STANLEY W. CRAWLEY, M. Arch.**

Arquitecto e Ingeniero en Estructuras,  
Profesor de Arquitectura de la  
Universidad de Utah

**ROBERT M. DILLON, M. A. Arch.; AIA, M. Asce,**

Miembro profesional de AISC

El capítulo 12 y los apéndices C, D y E  
se escribieron en colaboración con:

**WINFRED O. CARTER, Ph. D.**

Ingeniero Profesional y Profesor de Ingeniería  
Civil de la Universidad de Utah

*Juan Jose Lopez Aguilar*

**EDITORIAL  
LIMUSA**

**GRUPO NORIEGA  
EDITORES**

MEXICO  
ESPAÑA  
VENEZUELA  
ARGENTINA  
COLOMBIA  
PUERTO RICO

Versión autorizada en español  
de la obra publicada en inglés por  
John Wiley & Sons, con el título  
STEEL BUILDINGS, Analysis and Design, Tercera Edición  
© 1984 by John Wiley & Sons, Inc.  
ISBN-0-471-86414-5

Versión en español:

LUIS CARLOS EMERICH ZAZUETA

Revisión:

JOSÉ DE LA CERA A.

Ingeniero Civil de la Universidad Nacional Autónoma de México.  
Diplom-Ingenieur de la Universidad Técnica de Munich, Alemania Federal.  
Profesor de Tiempo Completo e Investigador del Departamento de Materiales de  
la Universidad Autónoma Metropolitana.

Elaboración: SISTEMAS EDITORIALES TÉCNICOS, S.A. de C.V.

La presentación y disposición en conjunto de  
ESTRUCTURAS DE ACERO  
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra  
puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema  
o método, electrónico o mecánico (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO,  
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento  
de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 1992, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.  
Balderas 95, C.P. 06040, México, D.F.  
Teléfono 521-50-98  
Fax 512-29-03  
Télex 1762410 ELIME

Miembro de la Cámara Nacional de la  
Industria Editorial Mexicana. Registro número 121

Primera edición: 1992  
Impreso en México  
(5309)

ISBN 968-18-4070-4

## Prólogo

El objetivo de este libro es presentar los principios generales del análisis estructural y su aplicación en el diseño de los tipos más comunes de marcos de edificios de baja y mediana altura. Esta traducción al español se basa en la tercera edición en inglés, la cual conserva el campo de aplicación y el método de presentación de las primeras dos, pero con material que se ha actualizado completamente.

Aunque se sigue suponiendo que el lector conoce los principios elementales de estática y resistencia de materiales, gran parte del material sobre estos temas se organizó de nuevo como un estudio preliminar al diseño. Aquí tampoco se incluyen tablas completas de las propiedades de formas estructurales o el texto de reglamentos, normas y especificaciones pertinentes. No obstante, se incluye suficiente información y datos de este tipo para que el lector pueda seguir sin dificultad la presentación, aunque éste no sea el caso en la mayoría de los problemas. Aun cuando no es práctico suministrar información y datos adicionales de esta clase, es importante que el lector se familiarice tan pronto como sea posible con los diversos textos de referencia que se usan en la práctica.

Junto con este libro se recomienda usar *The Manual of Steel Construction* (del American Institute of Steel Construction). En la mayoría de las explicaciones y ejemplos, así como en las soluciones a los problemas, se toma como referencia la octava edición del Manual de 1980, y las Especificaciones del AISC del 10. de noviembre de 1978 contenida en aquél, así como los principales reglamentos de construcción como los de la ANSI, ASTM (American National Standards Institute y American Society for Testing and Materials, respectivamente) y el de los Steel Joist Institute y AISI (American Iron and Steel Institute), cuando sus requisitos o procedimientos parecen adecuados. Aunque se ha tratado de incluir la información más reciente, es de esperar que se sigan haciendo cambios en reglamentos, normas y especificaciones, ya que estas organizaciones procuran mantenerse al tanto del conocimiento y la experiencia más recientes. Por supuesto, estas nuevas referencias se tienen que investigar, evaluar y usar. Nuestra inten-

ción es actualizar otra vez este texto cuando se disponga de nueva información, cuando se necesite hacer un cambio importante y cuando sea necesario incorporar otras técnicas analíticas o de diseño más eficientes.

El material y el método de presentación de este libro han permanecido básicamente sin cambios. Al igual que en la primera y segunda ediciones, nuestro objetivo es cubrir la brecha existente entre el trabajo académico y la práctica profesional, es decir, llevar el análisis y el diseño más allá de la aplicación a elementos y componentes específicos, para abarcar todos los marcos de la estructura.

En la carátula se ha incluido el nombre del Dr. Winfred O. Carter junto a los nuestros, debido a su considerable contribución en el renglón del diseño efectuado por computadora del capítulo 12 y de los apéndices de apoyo de la segunda edición en inglés, y por haber revisado estos materiales para la presente. Los dos programas que se incluyen en los apéndices D y E tienen amplia aplicación y se pueden transferir a tarjetas perforadas para usarlos de inmediato; o bien si se prefiere se pueden adquirir directamente a través de los autores. Expresamos de nuevo nuestro reconocimiento al Dr. Carter y a los lectores de la segunda edición en inglés que han contribuido con sus valiosas sugerencias. A instancias de John Wiley & Sons, damos las gracias a quienes revisaron la segunda edición en inglés con la finalidad de sugerir mejoras en la tercera edición también en inglés, profesores Carrol D. Claycamp, Texas A & University; Anthony J. Dasta, University of Florida; John M. McCormick, Columbia University; Charles M. Milne, Montana State University; y Edward P. Reidy, Wentworth Institute of Technology. También agradecemos a quienes revisaron el manuscrito para la tercera edición: profesor Anthony J. Dasta, de nuevo; profesores Matthew W. Fuchs, Milwaukee School of Engineering; Achintya Haldar, Georgia Institute of Technology; John H. McMillan, Mohawk Valley Community College, y William P. Ross, Kent State University; y Charles N. Timbie, ingeniero en estructuras.



## VI / PRÓLOGO

Expresamos nuestro agradecimiento al American Institute of Steel Construction, al American Iron and Steel Institute, al Steel Joist Institute, al American National Standards Institute y a la International Conference of Building Officials, por su constante colaboración al permitir la inclusión

de materiales de referencia.

STANLEY W. CRAWLEY  
ROBERT M. DILLON

Washington, D. C.

## Contenido

1

### Consideraciones generales 1

- 1.1 Introducción 1
- 1.2 Procedimiento de diseño 2
- 1.3 Cargas de diseño 3
- 1.4 Esfuerzos de trabajo 6
- 1.5 Factor de seguridad 7
- 1.6 Aceros estructurales 7

2

### Reacciones, fuerza cortante y momento flexionante 11

- 2.1 Introducción 11
- 2.2 Cargas 13
- 2.3 Reacciones 13
- 2.4 Determinación de reacciones 14
- 2.5 Fuerza cortante 16
- 2.6 Diagramas de fuerza cortante 18
- 2.7 Diagramas de fuerza cortante-cargas concentradas 18
- 2.8 Diagramas de fuerza cortante-cargas distribuidas 19
- 2.9 Momento flexionante 22
- 2.10 Diagramas de momento flexionante 23
- 2.11 Diagramas de momento flexionante-cargas concentradas 24
- 2.12 Diagramas de momento flexionante-cargas distribuidas 25
- 2.13 Relación entre el diagrama de fuerza cortante y el diagrama de momento flexionante 26
- 2.14 Diagramas de vigas comunes 29
- 2.15 Análisis de diagramas de vigas 29
- 2.16 Ecuaciones de momento flexionante 35

3

### Vigas, flexión y cortante 39

- 3.1 Momento resistente 39
- 3.2 Teoría de la flexión 39
- 3.3 Posición del eje neutro 41

- 3.4 La fórmula de flexión de vigas 42
- 3.5 Módulo de sección 43
- 3.6 Secciones de vigas 43
- 3.7 Uso de la fórmula de flexión de vigas 45
- 3.8 Procedimiento del diseño 49
- 3.9 Efecto del peso de la viga 50
- 3.10 Resistencia al cortante 52
- 3.11 Relación entre el cortante horizontal y el vertical 52
- 3.12 Intensidad del esfuerzo cortante 53
- 3.13 Distribución de esfuerzos cortantes 54
- 3.14 Diseño por el esfuerzo cortante 56
- 3.15 Uso de la fórmula del esfuerzo cortante unitario 56

4

### Vigas de flexión 59

- 4.1 Consideraciones generales 59

#### MÉTODO ÁREA-MOMENTO 60

- 4.2 Principios del método área-momento; derivación 60
- 4.3 Aplicación del método área-momento 63
- 4.4 Momento de área: simetría 65
- 4.5 Momento de área: cargas asimétricas 67

#### MÉTODO DE LA CURVA ELÁSTICA 69

- 4.6 Ecuación de la curva elástica-derivación 69
- 4.7 Aplicación de la curva elástica. Doble integración 70
- 4.8 Doble integración-uso de la simetría 72
- 4.9 Fórmulas de deflexión 75

5

### Vigas: procedimientos de diseño 79

- 5.1 Aspectos generales 79



5.2	Limitaciones de la deflexión	79
5.3	Uso de fórmulas de deflexión en el diseño	81
5.4	Aplicación del procedimiento de diseño	82
5.5	Pandeo lateral	85
5.6	Vigas: apoyadas lateralmente	87
5.7	Vigas: sin apoyo lateral	99
5.8	Pandeo local	105
5.9	Tablas de diseño de vigas	109
5.10	Gráficas de vigas	115
5.11	Secciones asimétricas	118
5.12	Dinteles	119
5.13	Secciones compuestas	121
5.14	Trabes armadas	124
5.15	Flexión respecto a dos ejes	125
5.16	Placas de apoyo para vigas	128
5.17	Sistemas de piso	131
5.18	Vigas de alma abierta	132
5.19	Torsión	136
<b>6</b>	<b>Columnas y puntales</b>	<b>141</b>
6.1	Introducción	141
6.2	Esfuerzos de pandeo	142
6.3	Formas de columnas	142
6.4	Radio de giro y relación de esbeltez	143
6.5	Fórmulas de columnas	145
6.6	Investigación de columnas	147
6.7	Secciones compuestas	149
6.8	Altura no arriostrada	149
6.9	Diseño de columnas	153
6.10	Resumen: procedimiento de diseño de columnas	153
6.11	Diseño e investigación de puntales	153
6.12	Cargas sobre columnas	154
6.13	Empalmes de columnas	156
6.14	Tablas de cargas admisibles, columnas y puntales	157
6.15	Columnas con cargas excéntricas	161
6.16	Momentos inducidos en columnas	163
6.17	Diseño de columnas con cargas excéntricas	164
6.18	Método de la carga concéntrica equivalente	175

6.19	Placas de base de columna	177
6.20	Cimentación de emparrillado	179

**7****Conexiones 181**

7.1	Introducción	181
7.2	Tipos de conectores	181
7.3	Tipos de construcción en acero	184
7.4	Conexiones comunes	187

**CONEXIONES CON SUJETADORES 190**

7.5	Clases de cargas en el sujetador	190
7.6	Orificios para sujetadores	191
7.7	Sujetadores tipo aplastamiento	192
7.8	Sujetadores tipo fricción	192
7.9	Fallas de juntas con sujetadores	193
7.10	Resistencia de un sujetador al cortante	194
7.11	Resistencia de un sujetador al aplastamiento y al cortante en extremo	195
7.12	Sección bruta y neta	200
7.13	Diseño y cálculo de conexiones traslapadas con sujetadores	203
7.14	Ángulos de conexión-fijados con sujetadores	209
7.15	Conexiones de placa extrema por cortante	211
7.16	Asientos flexibles para vigas	213
7.17	Conexiones excéntricas de sujetador	215
7.18	Carga en el plano cortante del sujetador	216
7.19	Carga fuera del plano de cortante del sujetador	218
7.20	Conexiones resistentes al momento a base de sujetadores	221

**CONEXIONES SOLDADAS 222**

7.21	Consideraciones generales	222
7.22	Procesos de soldado	223
7.23	Tipos y resistencias de soldaduras	226
7.24	Clasificación de soldaduras	228

7.25	Tamaños máximo y mínimo de soldaduras	230
7.26	Diseño de conexiones traslapadas soldadas	231
7.27	Conexiones excéntricas soldadas	234
7.28	Carga en el plano de las soldaduras	234
7.29	Carga fuera del plano de soldaduras	237
7.30	Conexiones flexibles soldadas para vigas	240
7.31	Conexiones soldadas resistentes a momento	244
7.32	Conexiones dúctiles resistentes al momento	249

**8****Cargas laterales 251**

8.1	Introducción	251
8.2	Aplicación de cargas laterales	252
8.3	Diafragmas	259
8.4	Viento; introducción	270
8.5	Velocidad del viento	271
8.6	Presión del viento	275
8.7	Reglamentos y coeficientes de viento	276
8.8	Sismos; introducción	295
8.9	Procedimientos y reglamentos de diseño	296
8.10	Carga lateral equivalente o fuerza cortante en la base	298
8.11	Factores de fuerza sísmica	300
8.12	Distribución de fuerza en edificios de un solo piso	313
8.13	Distribución de fuerzas en edificios de varios pisos	317

**9****Edificios de baja altura y tipo industrial 325**

9.1	Introducción	325
9.2	Cargas sobre elementos externos de edificios; consideraciones generales	325
9.3	Cargas de nieve y lluvia	326
9.4	Cargas combinadas	329
9.5	Armaduras de techo	329

9.6	Tipos de armaduras de techo	330
9.7	Espaciamiento de armaduras	330
9.8	Aplicación de cargas; consideraciones generales	331
9.9	Cargas de tablero	332
9.10	Supuestos en el análisis de armaduras	335
9.11	Notación de Bow	336
9.12	Análisis gráfico de vectores	336
9.13	Análisis de las fuerzas de una armadura	338
9.14	Procedimiento para el diseño de un sistema de techo	341
9.15	Esquema de la armadura (Paso 1)	342
9.16	Carga muerta de diseño (Paso 2)	342
9.17	Diseño de la carga de nieve (Paso 3)	342
9.18	Diseño de largueros (Paso 4)	343
9.19	Cargas de puntos de tablero para cargas muertas y de nieve (Paso 5)	344
9.20	Cargas de viento en puntos de tablero (Paso 6)	345
9.21	Análisis de fuerza por carga muerta (Paso 7)	345
9.22	Análisis por carga de viento (Paso 8)	346
9.23	Tabla para el análisis de fuerzas (Paso 9)	347
9.24	Tabla de diseño (Paso 10)	348
9.25	Selección de miembros a compresión (Paso 11)	349
9.26	Diseño de miembros a tensión (Paso 12)	350
9.27	Diseño de juntas (Paso 13)	351
9.28	Soporte extremo y anclaje (Paso 14)	354
9.29	Diseño del arriostramiento (Paso 15)	355
9.30	Dibujo del diseño (Paso 16)	356
9.31	Armaduras con cargas entre puntos de tablero	356
9.32	Momentos flexionantes para miembros continuos	357
9.33	Flexión y tensión directa combinadas	358
9.34	Compresión y flexión combinadas	359
9.35	Armaduras de cuerdas paralelas	361
9.36	Construcción de cubiertas de techo	361
9.37	Construcción de marcos arriostrados de un solo piso; consideraciones generales	362
9.38	Marcos arriostrados-tipos	363



## X / CONTENIDO

- 9.39 Marco arriostrado, análisis de componentes 365
- 9.40 Portales 366
- 9.41 Portales múltiples 369
- 9.42 Marco transversal 374
- 9.43 Método del portal: construcción de varios pisos y vanos múltiples 379
- 9.44 Construcción de techos de claro grande 381

## 10

### Vigas continuas y marcos 383

- 10.1 Introducción 383
- 10.2 Método de la deformación compatible o consistente 385
- 10.3 Momentos de extremo fijo o de empotramiento 387
- 10.4 Convención acerca de signos 391
- 10.5 Distribución de momentos-procedimiento matemático 392
- 10.6 Factores de rigidez y transporte 397
- 10.7 Distribución de momentos-teoría 398
- 10.8 Tratamiento simplificado del extremo articulado 401
- 10.9 Movimiento de apoyos 403
- 10.10 Marcos de edificios 406
- 10.11 Análisis de marcos rígidos 412
- 10.12 Análisis y diseño de marcos de un solo piso 414
- 10.13 Diseño de marco rígido: desplazamiento lateral 417
- 10.14 Marcos a dos aguas 422
- 10.15 Marcos rígidos, conclusión 427

## 11

### Resistencia última y diseño plástico 431

- 11.1 Introducción 431
- 11.2 Teoría plástica 433
- 11.3 Aplicación de la teoría plástica 436
- 11.4 Vigas de extremos fijos 439
- 11.5 El voladizo apuntalado 441
- 11.6 Vigas continuas 447
- 11.7 Marcos 454

- 11.8 Conexiones dúctiles resistentes al momento 463

## 12

### Análisis y diseño computarizados 469

- 12.1 Introducción 469
- 12.2 Teoría estructural 470
- 12.3 Conceptos básicos 473
- 12.4 Introducción al método de la flexibilidad 475
- 12.5 Introducción al método de la rigidez 478
- 12.6 Sistemas estructurales generales 485
- 12.7 Matriz de rigidez de elemento de armadura 487
- 12.8 Matriz de rigidez de elemento de marco 489
- 12.9 Matriz de rotación 494
- 12.10 Matriz de rigidez de elemento transformada 497
- 12.11 Descripción analítica de un sistema estructural 500
- 12.12 Formulación de ecuaciones de equilibrio de la estructura 502
- 12.13 Ecuaciones de restricción 509
- 12.14 Proceso de solución 512
- 12.15 Cargas sobre el elemento 522
- 12.16 Utilización de computadoras 525
- 12.17 Programas de computadora para el análisis y el diseño estructural 533

## 13

### Proyecto de diseño de un edificio 537

- 13.1 Introducción 537
- 13.2 Problema de diseño 538
- 13.3 Cargas de pisos 548
- 13.4 Cargas de muros 549
- 13.5 Peso de la estructura de piso 549
- 13.6 Elección de secciones 550
- 13.7 Sistema estructural; consideraciones generales 551
- 13.8 Planta estructural 551
- 13.9 Diseño en función del viento; consideraciones generales 553

- 13.10 Cargas de viento sobre tableros 554
- 13.11 Fuerzas cortantes en columnas 556
- 13.12 Esfuerzo directo en vigas y trabes 556
- 13.13 Momento flexionante en columnas 557
- 13.14 Momento flexionante en vigas y trabes 557
- 13.15 Fuerzas cortantes en vigas y trabes 557
- 13.16 Esfuerzo directo en columnas 558

### DISEÑO DE LOS MIEMBROS 558

- 13.17 Miembros típicos; primer piso 558
- 13.18 Vigas intermedias típicas; segundo y tercer pisos (figuras 13.17 y 13.18) 560
- 13.19 Vigas intermedias típicas; techo (figura 13.19) 562
- 13.20 Estructura de escalera 562
- 13.21 Vigas transversales y trabes típicas; segundo y tercer pisos y techos (figuras 13.17, 13.18 y 13.19) 562
- 13.22 Diseño de trabes y vigas transversales del segundo y tercer pisos y el techo, solamente por carga de gravedad 566
- 13.23 Diseño de vigas y trabes de fachada para el segundo y tercer pisos y el techo 573
- 13.24 Columna interior típica ⑩ carga de gravedad 576

- 13.25 Columna ⑨ exterior típica-carga de gravedad 581
- 13.26 Revisión por carga de viento; miembros horizontales típicos 586
- 13.27 Revisión por carga de viento; columnas típicas 587
- 13.28 Selecciones finales en contraste con supuestos 593
- 13.29 Planos de marcos y programa de columnas 593
- 13.30 Conexiones típicas 594
- 13.31 Conclusión 596

### Apéndices

- A Esfuerzo y deformación 599
- B Diagramas de vigas suplementarios 601
- C Fundamentos de álgebra matricial 609
- D Programa de armadura plana 631
- E Programa de marco plano 647
- F Tablas de cargas en vigas de acero 671
- G Respuestas a los problemas 689

### Índice 697

# 1

## Consideraciones generales

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Los edificios modernos se construyen de diversas maneras. Sin embargo, cuando se habla de edificios en un sentido estructural, la mayoría se puede clasificar como apoyados en muros de carga, en marcos estructurales o en una combinación de ambos. En la construcción con muros de carga, los pisos y los techos se sustentan sobre muros de carga; el grosor de los muros está determinado en gran medida por el número de pisos y la magnitud de las cargas que deberán sustentarse. En la construcción a base de marcos, los muros así como los pisos y el techo se apoyan en un conjunto estructural de vigas, trabes, columnas y miembros similares.

Hace algunos años la construcción con muros de carga dejó de ser, en general, económica y práctica en los Estados Unidos, excepto en edificios de poca altura. De hecho, fueron las limitaciones prácticas y económicas de esta construcción aplicada en edificios de mediana y gran altura las que propiciaron el desarrollo de la construcción a base de marcos. Hoy, no obstante, con el surgimiento de unidades de mampostería de alta resistencia y, particularmente, de morteros de alta adhesividad, ha resurgido el interés en la construcción de gran altura con muros de carga. También existe un gran interés en una diversidad de otros tipos de construcción que no requieren, o requieren sólo en parte, apoyarse en marcos, por ejemplo, soluciones a base de muros de carga, de paneles y de módulos volumétricos para edificios de poca altura, e incluso para edificios de altura considerable. Además, se puede predecir que en los próximos años se dará mayor atención a tipos de construcción basados en "subsistemas" dimensional y funcionalmente coordinados, por ejemplo, muro exterior, piso-plafón, cancelos y elementos similares de edificios que se pueden ensamblar para crear edificios de una gran variedad de tamaños y tipos. La integración estructural se volverá sumamente importante y se puede esperar que el marco estructural desempeñe un papel importante.

Por lo tanto, es muy probable que los marcos estructurales sigan siendo tan importantes en el fu-



turo como lo son en la construcción de hoy. Debido a que a los muros exteriores en la construcción estructural de marcos se les ha relevado de su función de soporte de cargas, sirven esencialmente como una cobertura de control ambiental envolvente, es decir, para controlar luz, temperatura, sonido, humedad, etc. El hecho de liberar a los muros exteriores de una función estructural esencial permite tener mayores posibilidades de elección de materiales y métodos de fabricación. El marco estructural también puede relevar a los muros y divisiones interiores de una función estructural primaria, y al hacerlo se obtiene mucha mayor flexibilidad en la planeación arquitectónica, incluyendo la posibilidad de planear un espacio interior cambiante. El marco estructural también ofrece ventajas en términos de facilidad de fabricación y transporte, velocidad de erección y coordinación de ramos de la construcción. Todas estas características tienen un gran valor para el cumplimiento de los completos requisitos de la construcción actual.

Aunque el marco estructural para cualquier edificio se desarrolla a partir de su idoneidad y economía estructurales, las localizaciones y espaciamiento de columnas usualmente estarán determinados por consideraciones arquitectónicas planteadas por requisitos de ocupación o uso del espacio predeterminados, así como inmediatos. Es importante recordar que al igual que generalmente hay más de un esquema arquitectónico que cubrirá los requisitos de ocupación, así también habrá varias soluciones estructurales satisfactorias. Los esquemas arquitectónico y estructural deben ser compatibles, es decir, deben armonizar bien sin recurrir a indebidas distribuciones estructurales complejas y extravagantes. (Véase también el Art. 13.1).

En edificios de muchos pisos construidos a base de marcos, el espaciamiento más económico entre ejes de columnas para cargas promedio es del orden de 22 a 28 pies. Los espaciamientos menores de 20 pies raras veces son costeables desde el punto de vista estructural, y los de 30 pies o más, incluso en un solo sentido, usualmente sólo se justifican cuando las consideraciones de ocupación exigen la mayor área de piso sin obstrucciones que estos claros pueden proporcionar. Estas guías no se aplican necesariamente a los edificios de gran altura, ya que

éstos plantean a menudo problemas estructurales únicos.

Aun cuando los principios desarrollados en este texto son aplicables en general a todos los tipos de construcción con marco de acero, como se mencionó en el prólogo, se hace énfasis en el diseño estructural más común, como el empleado en los edificios comerciales e industriales, edificios departamentales, escuelas, hospitales y estructuras similares.

## 1.2 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO

Desde la concepción del proyecto, es sumamente importante que el diseño estructural de un edificio esté coordinado tanto con el esquema arquitectónico como con los requisitos eléctricos y mecánicos. La distribución general de los marcos de piso y especialmente la localización de columnas se deben tener presentes durante el desarrollo del esquema arquitectónico. Se deben hacer planos preliminares de los marcos y hacer una estimación aproximada de las dimensiones de las columnas antes de adoptar el esquema final. Esto es necesario debido a que el tamaño de las columnas y los claros requeridos, sobre todo en los pisos inferiores, pueden afectar materialmente la distribución arquitectónica. Una vez determinada la distribución de los marcos de pisos, se pueden diseñar las vigas y trabes, y luego hacer el diseño final de columnas y cimientos. Durante el desarrollo del diseño estructural, los planos arquitectónicos, estructurales, de instalación eléctrica y mecánica se deben estar cotejando constantemente entre sí para asegurarse de la exactitud y eficiencia de conjunto del diseño y la construcción y la operación final del edificio.

Aunque algunas veces el marco estructural para edificios pequeños se presenta directamente sobre los planos arquitectónicos, esta práctica no es recomendable. En proyectos de un tamaño considerable, es esencial hacer un juego por separado de los planos estructurales para registrar y anotar claramente la localización, el tamaño y las juntas de los miembros estructurales, y para no confundirlos con otra información. En todos los proyectos, excepto en los pequeños, bien vale la pena el tiempo y el

trabajo invertidos en la elaboración de planos estructurales separados. El carácter general de los planos estructurales y su relación con los planos arquitectónicos se verá claramente en el breve estudio de un juego de planos de trabajo del edificio que se presenta en el capítulo 13.

## 1.3 CARGAS DE DISEÑO

Las cargas para las cuales se diseña un edificio se clasifican como cargas muertas, cargas vivas y cargas ambientales. Antes, las cargas ambientales se consideraban a menudo como parte de las cargas vivas, es decir, aquellas debidas al viento, la nieve, la lluvia, las fuerzas sísmicas y las presiones del suelo e hidrostáticas (estas últimas dos actuando horizontalmente sobre muros bajo el nivel del terreno). Sin embargo, en la práctica actual se tiende a separarlas en tres clasificaciones distintas.

**Cargas muertas.** Estas son las cargas debidas al peso de las partes permanentes del edificio, como pisos, vigas, trabes, muros, techo, columnas, escaleras, divisiones fijas, etc., e incluyen equipo de servicio fijo como los componentes del sistema eléctrico y mecánico, tanques de agua y elementos similares apoyados en la estructura. Los pesos de los diferentes materiales de los edificios que se usarán en la determinación de cargas muertas están especificados en los reglamentos locales de construcción. Cuando estos datos están incompletos, o en las localidades en que el reglamento no es operativo, el lector debe consultar las listas dadas en los reglamentos de construcción modelo o en *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures* (Cargas mínimas de diseño para edificios y otras estructuras) del American National Standards Institute, ANSI A58.1-1982.<sup>1</sup> Por ejemplo, en la tabla 1.1 se da una lista de pesos por pie cúbico de materiales básicos representativos para edificios, recomendados en su mayoría por esa publicación. También se clasifica como parte de la carga muerta el efecto neto del preesforzado de miembros.

<sup>1</sup> Se puede obtener en ANSI, 1430 Broadway, Nueva York, N. Y. 10018.

**Cargas vivas.** Estas representan las cargas probables sobre la estructura del edificio debidas a la ocupación y el uso, y generalmente se consideran como uniformemente distribuidas sobre el área del piso. El valor establecido, expresado en libras por pie cuadrado (lb/pie<sup>2</sup>), es suficiente para abarcar el efecto de las concentraciones ordinarias que puedan ocurrir. Se incluyen todas las cargas verticales (excepto las muertas), por ejemplo, el peso de los ocupantes, muebles, equipo móvil y materiales almacenados. En las superficies de techo se concede una tolerancia para trabajadores y equipo de mantenimiento, objetos móviles y gente. Por supuesto, los edificios que contarán con maquinaria pesada o concentraciones grandes similares de carga viva se deben diseñar específicamente para tales concentraciones.

Sigue habiendo una falta de uniformidad entre los diversos reglamentos de construcción en cuanto a las cargas vivas adecuadas para diversos tipos de ocupación; sin embargo, la mayoría de las organizaciones han incrementado sus esfuerzos para lograr un mayor grado de uniformidad.<sup>2</sup> En la tabla 1.2 se presentan cargas vivas típicas sugeridas para di-

<sup>2</sup> Algunas de éstas son: la Conferencia Norteamericana de Funcionarios de la Construcción (Conference of American Building Officials, CABO), incluyendo la Conferencia Internacional de Funcionarios de la Construcción (International Conference of Building Officials, ICBO), Funcionarios de la Construcción y Administradores de Reglamentos, Internacional (Building Officials and Code Administrators, International, BOCA), y Congreso Internacional del Reglamento de Construcción del Sur (Southern Building Code Congress, International, SBCC); y el Instituto Nacional Norteamericano de Normas (American National Standards Institute, ANSI). Además, el Congreso de los Estados Unidos, como parte del Acta de Desarrollo Comunitario y Habitacional de 1974, autorizó la creación del Instituto Nacional de Ciencias de la Construcción (National Institute of Building Sciences, NIBS) actualmente en funciones, que es privado y no gubernamental. Uno de los principales objetivos del NIBS es lograr una razonable uniformidad en códigos y reglamentos. Actualmente, ICBO, instalada en California, ha logrado que gobiernos locales y estatales acepten su reglamento, sobre todo en el oeste; el SBCC, principalmente en el sur y el suroeste, y BOCA principalmente en el centro norte y el noreste. Sin embargo, existe una considerable duplicación de esfuerzos.



#### 4 / CONSIDERACIONES GENERALES

Tabla 1.1 Pesos de materiales de construcción típicos.

Materiales	Libras por pie cúbico	Materiales	Libras por pie cúbico
Mampostería de piedra labrada (cemento, piedra, arena)	144	Mampostería con piedra bruta:	
Relleno de grava volcánica	57	Granito	153
Concreto solo:		Piedra caliza, cristalina	147
Grava volcánica	108	Piedra caliza, oolítica	138
Agregado de escoria expandida	100	Mármol	156
Haydite (agregado de arcilla quemada)	90	Piedra arenisca	137
Escoria	132	Metales	
Piedra (incluyendo grava)	144	Aluminio	165
Agregado de vermiculita y perlita, elemento no soportante	25-50	Bronce	710
Otros agregados ligeros, elementos soportantes	70-105	Plomo	710
Concreto reforzado:		Acero	490
Grava volcánica	111	Terracota, arquitectónica:	
Escoria	138	Huecos rellenos	120
Piedra (incluyendo grava)	150	Huecos sin relleno	72
Tierra	80-120	Madera seca:	
Mampostería, cantería:		Fresno blanco comercial	41
Granito	165	Ciprés del sur	32
Piedra caliza, cristalina	165	Abeto Douglas, región costera	34
Piedra caliza, oolítica	135	Roble, rojos y blancos comerciales	45
Mármol	173	Pino amarillo del sur	39
Piedra arenisca	144	Pino rojo	28
Mampostería, ladrillo:		Abeto rojo, blanco y sitka	28
Dura (baja absorción)	130		
Mediana (absorción mediana)	115		
Suave (alta absorción)	100		

versas ocupaciones resumidas del reglamento de construcción de Chicago y varios reglamentos y normas modelo bien conocidos. Se permite usualmente una reducción de estas cargas vivas en grandes áreas.

En algunos reglamentos se exige que se tomen en consideración en las cargas vivas de edificios de

oficinas y almacenes, el efecto de divisiones, las cuales pueden ser móviles o no localizadas hasta haber construido el edificio. Cuando éste es el caso, con frecuencia se especifica una carga de 20 lb/pie<sup>2</sup> de área de piso. Además, usualmente los reglamentos estipulan cargas vivas mínimas concentradas.

<sup>1</sup> Excepto dormitorios y áticos de almacenamiento, donde la carga especificada es de 30 lb/pie<sup>2</sup>.  
<sup>2</sup> Requisitos para cargas rodantes máximas y/o cargas concentradas o especiales.  
<sup>3</sup> Por aprobar por el funcionario de construcción.

<sup>4</sup> Áticos habitables y áreas de dormitorio, 30 lb/pie<sup>2</sup>; para otras áreas, 40 lb/pie<sup>2</sup>.

*Nota:* En la mayoría de los reglamentos hay clases adicionales o subclases de ocupación; asimismo, en muchos casos, hay calificadores adicionales que se podría mostrar. Los documentos reales deben consultarse.

#### CARGAS DE DISEÑO / 5

Tabla 1.2 Requisitos mínimos típicos de carga viva.

	Cargas vivas mínimas por pie cuadrado de área de piso					
	Ciudad de Chicago 1977	Reglamento Nacional de Construcción 1967 <sup>a</sup>	Reglamento de Construcción Estándar 1976 <sup>b</sup>	Reglamento Básico de Construcción 1979 <sup>c</sup>	Reglamento de Construcción Uniforme 1982 <sup>d</sup>	Cargas mínimas de diseño de American National Standards 1982 <sup>e</sup>
<i>Clases de ocupación</i>						
Sala de juntas						
Asientos fijos	60	60	50	60	50	60
Asientos móviles	100	100	100	100	100	100
Habitación	40		40 <sup>f</sup>		40	
Primer piso	—	40	—	40	—	40 <sup>i</sup>
Segundo piso habitable	—	30	—	30	—	30 <sup>i</sup>
Cocheras						
Coche particular	50-100	50	120 <sup>g</sup>	50	50 <sup>g</sup>	50
Otros	—	150-200	—	— <sup>g</sup>	100 <sup>g</sup>	— <sup>g</sup>
Hospitales						
Cuartos privados	40	40	40	40	40	40
Salas de operación	40	60	— <sup>h</sup>	60	— <sup>g</sup>	60
Sala de rayos X	—	100	— <sup>h</sup>	—	— <sup>g</sup>	—
Hoteles						
Cuartos de huéspedes	40	40	40	40	40	40
Fabricación	100					
Ligera	—	125	100	125	75 <sup>g</sup>	125
Pesada (fábricas)	—	125	150	250	125 <sup>g</sup>	250 <sup>g</sup>
Espacio para oficinas						
Oficinas típicas	50	80	50	50	50	50
Escuelas						
Aulas	40	40	40	40	40	40
Aceras						
Áreas de circulación, etc.	—	— <sup>g</sup>	200 <sup>g</sup>	250	250 <sup>g</sup>	250
Tiendas	100					
Menudeo	—	100	75	75-100	75 <sup>g</sup>	75-100
Mayoreo	—	125	100	125	100 <sup>g</sup>	125
Almacenes	100	125-250	125-250	—	125-250	125-250

<sup>a</sup> American Insurance Association (Asociación Norteamericana de Aseguradoras). (Nota: los derechos de este reglamento fueron adquiridos por la Conferencia Nacional Estatal sobre Reglamentos y Normas de Construcción (NCSBCS) en 1980, y luego por BOCA en 1982).

<sup>b</sup> Congreso Internacional de Reglamentos de Construcción del Sur (SBCC).

<sup>c</sup> Funcionarios de la Construcción y Administradores de Reglamentos, Internacional (BOCA).

<sup>d</sup> Conferencia Internacional de Funcionarios de la Construcción (ICBO).

<sup>e</sup> Instituto Nacional Norteamericano de Normas (ANSI): *Minimum Design Loads for Building and Other Structures* (Cargas mínimas de diseño para edificios y otras estructuras), A58.1-1982.



También se deben tomar en consideración las cargas de impacto, como las causadas por la operación de elevadores. Por ejemplo, es práctica común considerar este efecto de impacto en el diseño de vigas, trabes y la primera hilera de columnas que soportan maquinaria de elevadores, mediante el incremento de un porcentaje especificado de las cargas reales, es decir, 100 por ciento. Asimismo, usualmente se requiere que los miembros de fácil acceso que soportan el techo se diseñen para soportar una carga concentrada de más o menos 2000 libras que puede estar suspendida de éstos.

**Cargas ambientales.** En esta reciente clasificación de cargas se incluyen las ya mencionadas, viento, nieve, lluvia, fuerzas sísmicas, presiones de suelo e hidrostáticas y fuerzas auto-restrictivas como las causadas por la temperatura y la humedad.

Por lo general, los reglamentos de construcción especifican presiones mínimas de viento que se deben incluir en el diseño del edificio. En el capítulo 8 se presenta el diseño de edificios considerando las fuerzas del viento.

La carga por nieve es un elemento esencial de la carga sobre techos en muchas áreas geográficas. En ANSI A58.1-1982 se incluyen mapas que indican las cargas por nieve sobre el suelo expresadas en libras de fuerza por pie cuadrado en diversas partes de los Estados Unidos. En el capítulo 9 se tratan detalladamente las cargas por nieve y sus cálculos. Las cargas por lluvia, por encharcamiento de agua en techos y los efectos de la lluvia sobre la nieve también se examinan en el capítulo 9.

En muchos lugares, la resistencia a los sismos es un factor crítico, y los reglamentos de construcción en estas áreas generalmente requieren que se haga un diseño resistente a sismos y/o de detalles especiales. En el oeste de los Estados Unidos es bien conocida esta consideración de los efectos sísmicos. En el capítulo 8<sup>3</sup> se estudian con cierto detalle las cargas resultantes de los sismos.

<sup>3</sup> En 1979 se creó una nueva organización, el Consejo de Seguridad Sísmica de Edificios (Building Seismic Safety Council, BSSC), bajo los auspicios del Instituto Nacional de Ciencias de la Construcción (NIBS), con el objeto de reunir las diversas organizaciones comunitarias de cons-

## 1.4 ESFUERZOS DE TRABAJO

Los reglamentos de construcción coinciden más respecto a los valores permisibles para los esfuerzos de trabajo en acero estructural. El término *esfuerzo de trabajo* proviene de los antiguos procedimientos de diseño y se puede definir en términos generales como el esfuerzo unitario al que estará sometido el acero en el uso real (basado en el comportamiento elástico de la estructura). El esfuerzo de trabajo *permisible* es considerablemente menor que la resistencia a la ruptura del acero. Esta mejor concordancia en los reglamentos se debe en gran medida a la continua actividad realizada durante muchos años por sociedades técnicas y profesionales y asociaciones del ramo. Los esfuerzos de trabajo permisibles recomendados por el Instituto Norteamericano de Construcción en Acero (AISC) se aceptan hoy ampliamente en todos los Estados Unidos. Estos niveles de esfuerzo se listan en "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Buildings"<sup>4</sup> de 1978 del AISC.

En la Especificación del AISC de 1978, el esfuerzo de trabajo permisible se lista como un porcentaje<sup>5</sup> del esfuerzo de fluencia que varía con cada tipo y grado de acero. Como el esfuerzo de fluencia está estrechamente relacionado con el punto en que comienza la deformación permanente, es una propiedad física básica e importante del material y una guía para su resistencia de diseño (apéndice B). Además, el esfuerzo de trabajo permisible depende

de la construcción de EE. UU. para fomentar el desarrollo y la adopción de mejores medidas de seguridad sísmica en el diseño y reglamentación de la construcción en todos los Estados Unidos. En el contenido de la Norma A58.1 de 1982 es ya evidente este trabajo y el de la Oficina Nacional de Normas (National Bureau of Standards), que participó en el trabajo de BSSC y proporcionó el secretariado para la A58.1 de ANSI.

<sup>4</sup> Contenida en el Manual de Construcción en Acero (*Manual of Steel Construction*) del Instituto Norteamericano de Construcción en Acero (American Institute of Steel Construction), octava edición, que se puede obtener por separado en AISC, 400 North Michigan Avenue, Chicago, Illinois 60611.

<sup>5</sup> En ciertas circunstancias, el esfuerzo de trabajo se lista como una función del módulo de elasticidad.

del tipo de esfuerzo que esté en consideración, es decir, tensión axial, flexión, fuerza cortante, etc. Por ejemplo, excepto en el caso de placas de más de 8 pulg de espesor, un acero con la designación A36 (Art. 1.6) tiene un esfuerzo de fluencia de 36,000 lb por pulg cuadrada y, en ciertas circunstancias, tendría un esfuerzo de trabajo permisible a la flexión del 60 por ciento de 36,000 lb/pulg<sup>2</sup>, o sea 21,600 lb/pulg<sup>2</sup>, lo cual se redondea a 22,000 lb/pulg<sup>2</sup>. Es importante observar que la resistencia a la ruptura a tensión de este mismo acero está entre 58,000 y 80,000 lb/pulg<sup>2</sup>.

Aunque en este texto no se estudia específicamente el diseño de miembros de acero de pared delgada (excepto las vigas de celosía en el capítulo 5), se recomiendan al lector las siguientes especificaciones aplicables:

*Standard Specifications for Open Web Steel Joists* (Especificaciones estándar para vigas de celosía de alma abierta), publicado por el Instituto de Vigas de Acero de Celosía (Steel Joist Institute).

*Specification for the Design of Light Gage Cold-formed Steel Structural Members* (Especificación para el diseño de miembros estructurales de acero de pared delgada forjados en frío) y *Specification for the Design of Light Gage Cold-formed Stainless Steel Structural Members* (Especificación para el diseño de miembros estructurales de acero inoxidable de pared delgada forjados en frío), ambas publicadas por el Instituto Norteamericano del Hierro y el Acero (American Iron and Steel Institute).

La especificación de 1978 de AISC es aún muy reciente; por lo tanto, el diseñador puede aún encontrar reglamentos de construcción local donde no se aceptan sus valores para los esfuerzos permisibles. En el trabajo del diseño real siempre se debe consultar el reglamento de construcción local.

## 1.5 FACTOR DE SEGURIDAD

Nunca se diseña un miembro estructural de un edificio para soportar una carga que requerirá toda la resistencia límite en condiciones normales de servicio. Existen demasiados elementos de incerti-

dumbre, tanto respecto a cargas como a uniformidad en la calidad de los materiales y la construcción, para que se permita tal grado de precisión en el diseño estructural. En consecuencia, se debe considerar cierto margen de seguridad, y éste se obtiene estableciendo esfuerzos de trabajo permisibles a valores muy por debajo de la resistencia límite. La relación entre resistencia límite y esfuerzo de trabajo se ha definido como el *factor de seguridad*. No obstante, esta definición no es completamente satisfactoria, puesto que la falla de un miembro estructural en un edificio empieza realmente cuando el esfuerzo sobrepasa el esfuerzo de fluencia (o más precisamente, el límite elástico). Esto se debe al hecho de que las deformaciones producidas por esfuerzos superiores a este valor son *permanentes* y, por tanto, cambian la forma de la estructura, aun cuando no haya daño o colapso. Por lo tanto, aunque no hay un acuerdo general sobre la definición exacta del *factor de seguridad*, la explicación anterior servirá para indicar el concepto. En el Apéndice A y en el capítulo 11 se revisan brevemente las relaciones entre la resistencia última, el límite elástico, esfuerzo de fluencia y deformación bajo esfuerzo.

## 1.6 ACEROS ESTRUCTURALES

Actualmente los diseñadores disponen de una amplia variedad de aceros estructurales. Esto no sucedía hace unos 15 años. Se han hecho importantes mejoras en su resistencia, ductilidad y resistencia a la corrosión. Como se dijo en el Artículo 1.4, el esfuerzo de fluencia se convierte en el índice para resistencia estructural y, por muchos años, el esfuerzo de fluencia para el acero estructural estaba efectivamente limitado a 33,000 lb/pulg<sup>2</sup>. Hoy se obtiene fácilmente acero estructural con esfuerzo de fluencia desde 32,000 hasta 130,000 lb/pulg<sup>2</sup> y, en un futuro próximo, se esperan obtener esfuerzos de fluencia de 160,000 hasta de 200,000 lb/pulg<sup>2</sup>.

La ductilidad es la capacidad de un material para fluir plásticamente con un esfuerzo constante (o casi constante) y mantener aun su resistencia. Entre mayor sea la ductilidad, mayor será la capacidad de una estructura para ajustarse a resultantes



$$^{\circ}F = \frac{9}{5} ^{\circ}C + 32$$

$$^{\circ}F = \frac{5}{9} [F - 32]$$

$$\frac{5}{9} ^{\circ}F = 32 = ^{\circ}C \quad ^{\circ}C = \frac{(5)(600)}{9} - 32 = 301.33$$

## 8 / CONSIDERACIONES GENERALES

de esfuerzo pico, proporcionando así más resistencia de reserva. Esta característica constituye la base para el diseño plástico, el cual se presenta en el capítulo 11. Sin embargo, debe señalarse que exceptuando ciertas especificaciones sísmicas, actualmente no existe un requisito de ductilidad mínima para estructuras de acero.

Los aceros resistentes a la corrosión y las nuevas técnicas para hacer incombustibles los miembros de acero han modificado significativamente la apariencia de los edificios de acero en los años recientes. Los aceros que no son resistentes a la corrosión no se pueden dejar expuestos a la intemperie si no se pintan y se les da mantenimiento; no sólo se corroerán y se verán feos sino que también perderán resistencia debido a la acción corrosiva. Sin embargo, cuando se usan los nuevos aceros resistentes a la corrosión o para intemperie, se forma rápidamente una capa de óxido natural sobre las superficies expuestas, protegiendo al acero casi del mismo modo que la pintura. No obstante, se debe tener cuidado con el detallado arquitectónico para asegurarse de que la humedad sobre estas superficies de acero se drene adecuadamente, para no estriar ventanas o manchar el concreto y otras superficies.

Además, siempre se debe recordar que el acero empieza a perder su capacidad de carga cuando su temperatura alcanza los 600°F y que le quedará escasa resistencia a 1200°F. Por lo tanto, se debe proteger el acero estructural que se podría exponer a estas temperaturas en caso de incendio. En el pasado, el logro de esta protección siempre implicó el aislamiento de los miembros de acero por medio de recubrimiento con materiales como el concreto (como se muestra en los ejemplos en este texto) y yeso en la forma de bloques, láminas o aplanados. Se deben considerar tanto la seguridad de las personas como la protección de sus propiedades. El sentido de este esfuerzo será hacia enfoques de diseño en que se traten variables como cargas por fuego, fuentes de combustión, generación y propagación de flama y humo, supresión del fuego, y aislamiento y protección de las personas como de la estructura. Obviamente, la integridad estructural de un edificio debe ser tal que no haya peligro para la vida en el interior ni en el exterior; y la protección de los miembros estructurales debe ser proporcional al

riesgo de tal daño, ya que la reparación y reemplazo de los miembros estructurales dañados por el fuego pueden ser difíciles y costosos. Sin embargo, en el futuro próximo, los requisitos de protección y recubrimiento reglamentarios basados en la experiencia en casos de incendio, más que en procedimientos de diseño, seguirán sin duda rigiendo la protección contra el fuego de los miembros de acero estructural. Están surgiendo nuevas técnicas como el aislamiento de los miembros de acero fuera de los edificios donde no hay peligro de daño por exposición al fuego de estructuras adyacentes y el fluido de líquidos refrigerantes dentro de elementos estructurales expuestos al fuego dentro de los edificios; no obstante, aún falta mucho por hacer en este aspecto de la seguridad de los edificios y la protección contra el fuego.

Es práctica común asignar nombres a los diversos tipos de acero de acuerdo con la designación correspondiente dada por la American Society for Testing and Materials (ASTM). Por ejemplo, todos los aceros cubiertos por "Specification for Structural Carbon Steel" A36 de ASTM se denominan acero A36. Comúnmente, el acero de uso más frecuente para aplicaciones estructurales es el acero A36; por lo tanto, se puede considerar como estándar. Como se señaló en el Artículo 1.4, el acero A36 en todas las formas estructurales y en placas hasta de 8 pulgadas de espesor, tiene un esfuerzo de fluencia de 36,000 lb/pulg<sup>2</sup> (36 k/pulg<sup>2</sup>). En la tabla 1.3 se listan seis tipos de acero de uso frecuente en la construcción de edificios, junto con sus esfuerzos de fluencia y otros datos pertinentes.

En la tabla 1.3 se observará que los aceros A242 y A588 tienen resistencia inherente a la corrosión. El acero A514 es el más fuerte y comúnmente se obtiene sólo en forma de placa; también se puede obtener en grados resistentes a la corrosión. Otro aspecto común a todos los aceros, excepto el A36, es que los más altos grados de esfuerzo se aplican a los espesores más pequeños. Por ejemplo, A441 y A242 tienen un esfuerzo de fluencia de 50 k/pulg<sup>2</sup> sólo si la parte más gruesa de la pieza estructural no tiene más de 3/4 pulg; el esfuerzo de fluencia se reduce a 42 k/pulg<sup>2</sup> cuando el espesor es mayor que 1 1/2 pulg, pero no mayor de 4 pulgadas.

## ACEROS ESTRUCTURALES / 9

Tabla 1.3 Aceros estructurales para edificios.

Designación del ASTM <sup>a</sup>	Resistencia		Formas disponibles (grupos de formas roladas <sup>c</sup> y placas <sup>d</sup> ASTM)	
	Esfuerzo mínimo de fluencia (k/pulg <sup>2</sup> )	Esfuerzo último de tensión (k/pulg <sup>2</sup> )		
A36	36	58-80 <sup>e</sup>	Todas las formas, placas, barras	
	40	60	No hay formas	Placas de más de 4 hasta 8
	42	63	Grupos de formas 4, 5	Placas de más de 1 1/2 hasta 4
A441	46	67	Grupo de formas 3	Placas de más de 3/4 hasta 1 1/2
	50	70	Grupos de formas 1, 2	Placas hasta de 3/4
A242	42	63	Grupos de formas 4, 5	Placas de más de 1 1/2 hasta 4
	46	67	Grupo de formas 3	Placas de más de 3/4 hasta 1 1/2
	50	70	Grupos de formas 1, 2	Placas hasta de 3/4
A588	42	63	No hay formas	Placas de más de 5 hasta 8
	46	67	No hay formas	Placas de más de 4 hasta 5
	50	70	Todas las formas	Placas hasta de 4
A572 <sup>f</sup>	42	60	Todas las formas	Placas de más de 1/2 hasta 6
	50	65	Todas las formas	Placas hasta de 2
	60	75	Grupos de formas 1, 2	Placas hasta de 1 1/4
A514	90	100-130	No hay formas	Placas de más de 2 1/2 hasta 6
	100	110-130	No hay formas	Placas hasta de 2 1/2

<sup>a</sup> Debe observarse que ya no se produce el acero A440, el cual no era recomendable para soldarse.

<sup>b</sup> Mínimo excepto cuando se dé un intervalo.

<sup>c</sup> Los grupos de formas están de acuerdo con ASTM A6 (Artículo 3.6).

<sup>d</sup> Todos los espesores están en pulgadas.

<sup>e</sup> Un mínimo de 58 k/pulg<sup>2</sup> para formas de más de 426 lb por pie.

<sup>f</sup> También disponible en grado de esfuerzo.



## 10 / CONSIDERACIONES GENERALES

Por supuesto, los aceros de alta resistencia son más costosos; sin embargo, esto no significa que el costo general de una estructura sea necesariamente mayor si se usan estos aceros. Los precios del acero se establecen sobre una base por libra de peso, y cuando se usan aceros de alta resistencia, el peso resultante del acero requerido bien puede ser menor. A continuación se da una lista de aceros seleccionados y su precio promedio de fábrica en Chicago (a fines de 1980):

A36	18.9 ¢ por lb, formas roladas
	20.7 ¢ por lb, placas hasta de $1\frac{1}{2}$ pulg.
A572 (GR 50)	21.7 ¢ por libra, formas roladas
(GR 65)	23.2 ¢ por libra, formas roladas
	22.9 ¢ por libra, placas hasta de $1\frac{1}{4}$ pulg.
A 588 (GR 50)	24.6 ¢ por libra, formas roladas
	29.6 ¢ por libra, placas

No obstante, se ve que algunos de los aceros de alta resistencia también son más costosos sobre una base de peso; por lo tanto, no solamente es la reducción del peso del acero la que se debe considerar en cualquier decisión para usar los aceros de alta resistencia. Si los aceros de alta resistencia se pudieran usar de tal manera que cada uno permitiera desarrollar el mismo porcentaje de su esfuerzo de fluencia, entonces, por ejemplo, se necesitaría menos acero A572 que acero A36. La cantidad real dependería del tipo de esfuerzo crítico implícito. Con toda honradez, se debe señalar que sólo en casos especiales la aplicación de las especificaciones más restrictivas a los aceros de alta resistencia permitirán el desarrollo del mismo porcentaje de esfuerzo de fluencia, como en el caso del acero A36.

El costo promedio de los aceros resistentes a la corrosión es de un 13 por ciento o más que el de aceros de igual resistencia y 30 por ciento o más que el acero A36. Por lo tanto, si se buscan estas calidades de acero, en el análisis de costo-utilidad se necesitaría incluir otros factores, como los costos de mantenimiento por ciclo de vida. En cualquier caso, el precio básico del acero nunca puede constituir la única base para decidir la elección; la parte menos costosa de una estructura de acero es el ma-

terial mismo. A estos precios básicos se deben agregar los costos de flete del fabricante, la fabricación misma, el transporte al lugar del edificio y, finalmente, la erección. A menudo se pasa por alto el hecho de que algunos aceros de alta resistencia son más costosos de fabricar que el acero A36.

Una cifra más útil en la estimación de los costos finales sería el precio por libra (o tonelada) del acero erigido. La fabricación y la erección fácilmente pueden ser el triple del precio inicial del material del productor de acero, incrementándose el costo puesto en obra entre 57 ¢ y \$1.14 por libra. Una medida aún más exacta podría ser el costo por pie cuadrado del acero erigido. La cantidad de acero en estructuras de altura y tamaño promedio<sup>6</sup> puede fluctuar de 4 a 12 lb/pie<sup>2</sup> haciendo que el costo de 2.28 a 13.68 dólares por pie cuadrado sea una medida más significativa. Finalmente, factores como la disponibilidad y la cantidad del material usado, la localización de la obra, la simplicidad y repetición de detalles, los costos de mano de obra, equipo y el tiempo programado de construcción pueden tener una influencia decisiva en los costos finales.

Para el tipo y altura de los edificios que se tratarán en este texto, generalmente el acero A36 será la elección más económica. Sin embargo, puede haber casos en que resulte más conveniente un menor peralte de sección, por ejemplo, en columnas o para mantener grandes alturas libres, entonces es probable que la mejor elección sea el acero A572. En el caso de columnas, esto será especialmente cierto cuando haya cargas transmitidas inusualmente altas; en este último caso, se podría decir lo mismo, en tanto una deflexión adicional no plantee un problema. Y, por supuesto, puede haber razones estéticas o de otro tipo para seleccionar los aceros resistentes a la corrosión. No obstante, como regla general los aceros de alta resistencia tendrán mayor aplicabilidad en edificios altos y en casos especiales como los edificios de acero prefabricados.

En el análisis final, cada uno se debe evaluar conforme a sus propios méritos.

<sup>6</sup> Se excluyen los edificios altos, por ejemplo, la estructura de acero de la torre Sears en Chicago que pesa 33 lb/pie<sup>2</sup>.

## 2

# Reacciones, fuerza cortante y momento flexionante

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Una viga es un miembro estructural que es sometido a cargas transversales y las distribuye en una o dos direcciones. Como tal, se considera parte de un sistema lineal.<sup>1</sup> Por lo general las vigas se sitúan horizontalmente y las cargas se les aplican verticalmente. Para que trabaje la viga según su definición tradicional, la longitud del claro debe ser varias veces mayor que el peralte del miembro (figura 2.1a). Puede haber un escaso trabajo de la viga en las condiciones que se muestran en la figura 2.1b, ya que las proporciones son tales que las cargas se transferirían a los apoyos por una acción de arco. Además, para flexión solamente, el ancho de la sección transversal de la viga en relación con su peralte debe ser tal que proporcione suficiente rigidez para prevenir la falla debida al pandeo o a la torsión, y las cargas que provocan la flexión deben estar en un plano que coincida con el eje longitudinal central de la viga (figura 2.1c). Estos pre-requisitos para la flexión pura y simple no siempre se cumplen en un sentido estricto. Esto no significa que un miembro que no cumpla con estas exigentes condiciones no se pueda clasificar como viga; sin embargo, si no se dan estas condiciones, es responsabilidad del diseñador hacer las correcciones y ajustes necesarios durante el diseño. En la sección 5.5 se estudian con mayor detalle la torsión y el pandeo; en las secciones 5.15 y 5.19 se presentan métodos de diseño para el caso en que el plano de las cargas no coincide con el eje longitudinal central.

A la vez, las vigas se pueden clasificar de acuerdo con la manera en que están apoyadas. Si una viga descansa en dos apoyos (figura 2.2a), se denomina *viga simple*. Si uno o ambos extremos de una viga apoyada de ese modo tiene salientes más allá del apoyo (figura 2.2b), se denomina *viga con vo-*

<sup>1</sup> Los elementos estructurales no lineales sobre los que actúan fuerzas flexionantes pero distribuidas transversalmente en tres o más sentidos se denominan comúnmente placas o retículas.



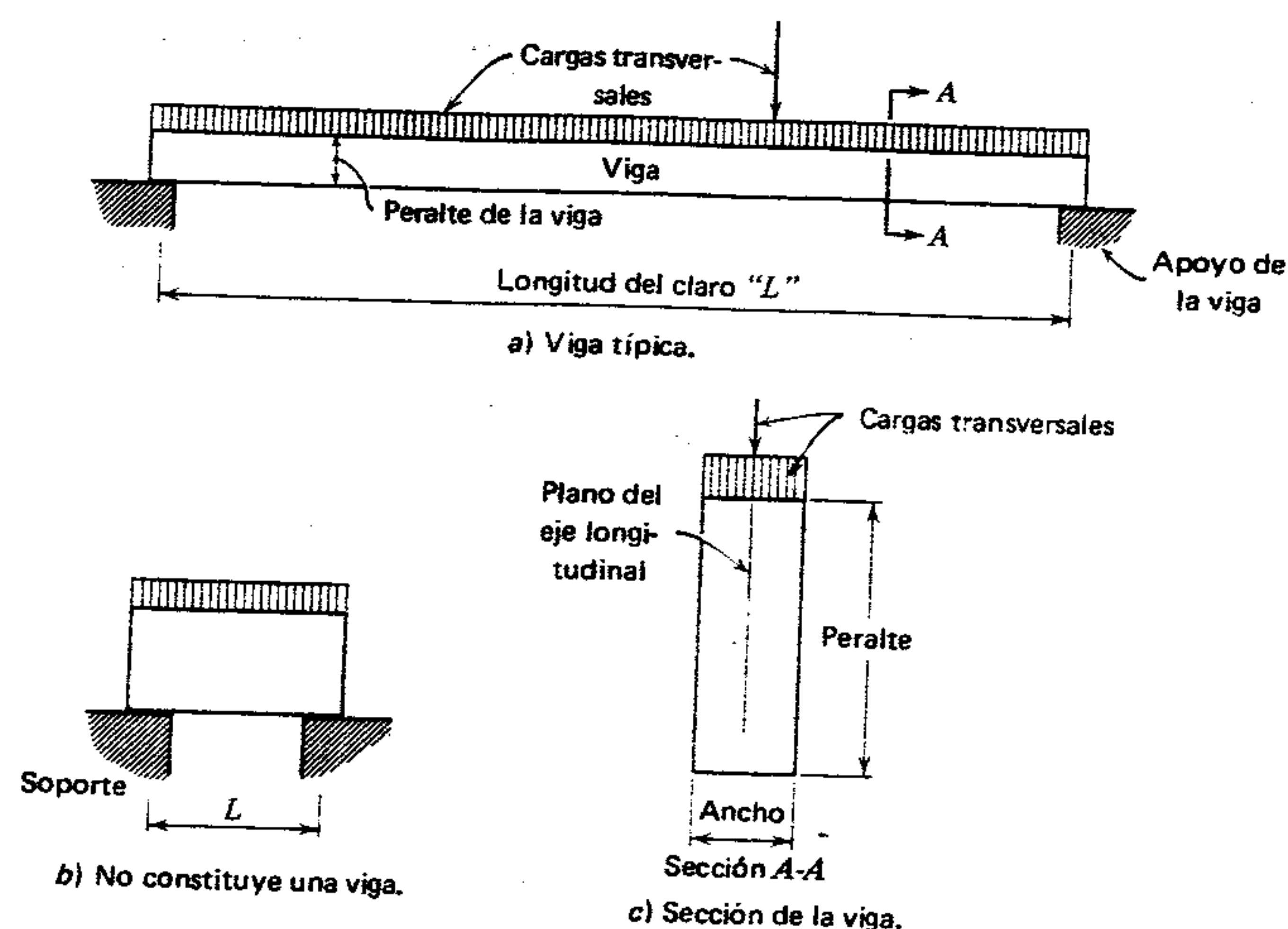


Figura 2.1 Requisitos para una viga.

*ladizo*. Cuando se proyecta a partir de un solo apoyo, como sería el caso en que se empotra en un muro (figura 2.3b), se denomina *viga cantiléver*.

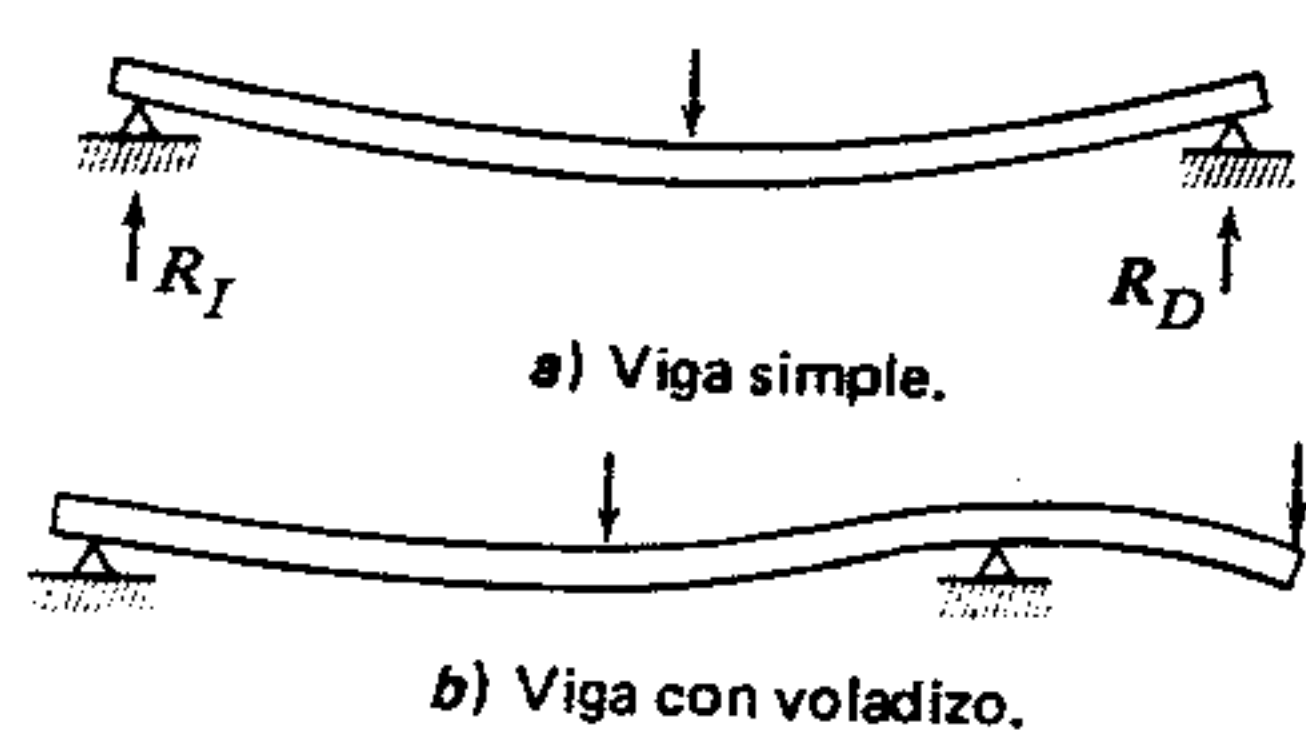


Figura 2.2 Vigas sobre apoyos simples.

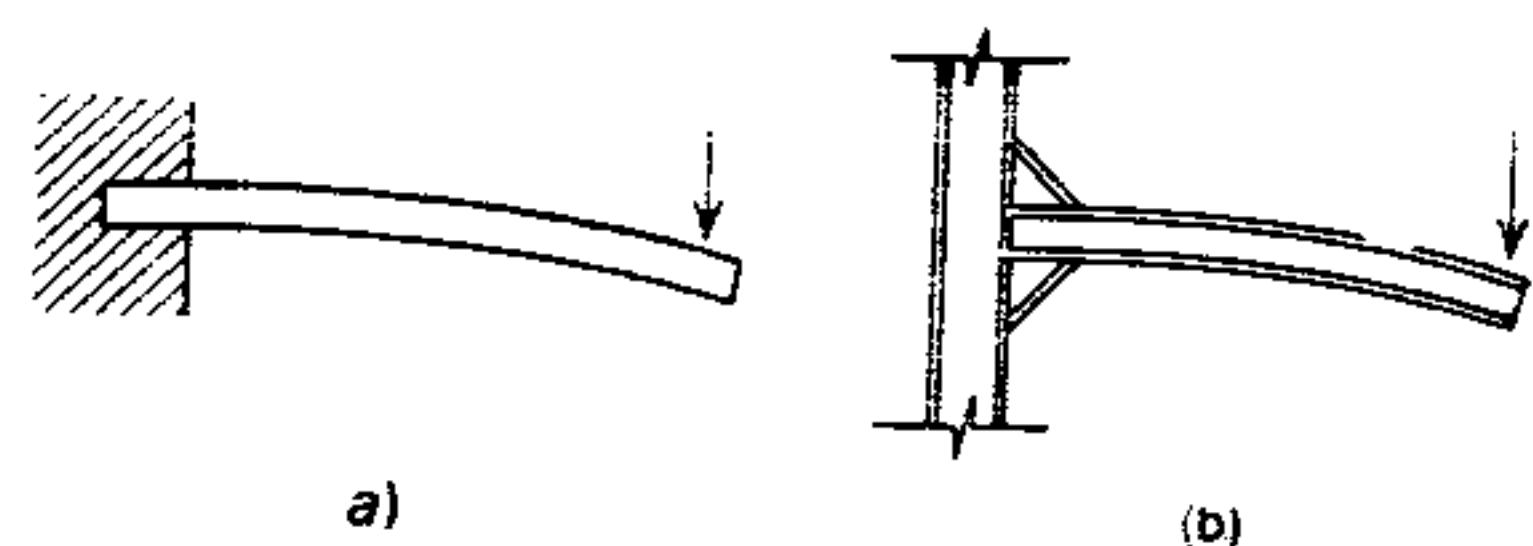


Figura 2.3 Vigas cantiléver.

Sin embargo, la viga cantiléver se debe sujetar a su apoyo de tal manera que el extremo fijo no pueda girar o inclinarse, a pesar de la tendencia a hacerlo, inducida por las fuerzas que actúan sobre ella. Si una viga tiene dos apoyos, ambos empotrados (figura 2.4a), se dice que es una *viga empotrada* o restringida. Y una viga que tiene más de dos apoyos (figura 2.4b) se llama *viga continua*. Las vigas continuas y empotradas no se pueden analizar con el método usual de estática y, por lo tanto, se denominan "estáticamente indeterminadas".

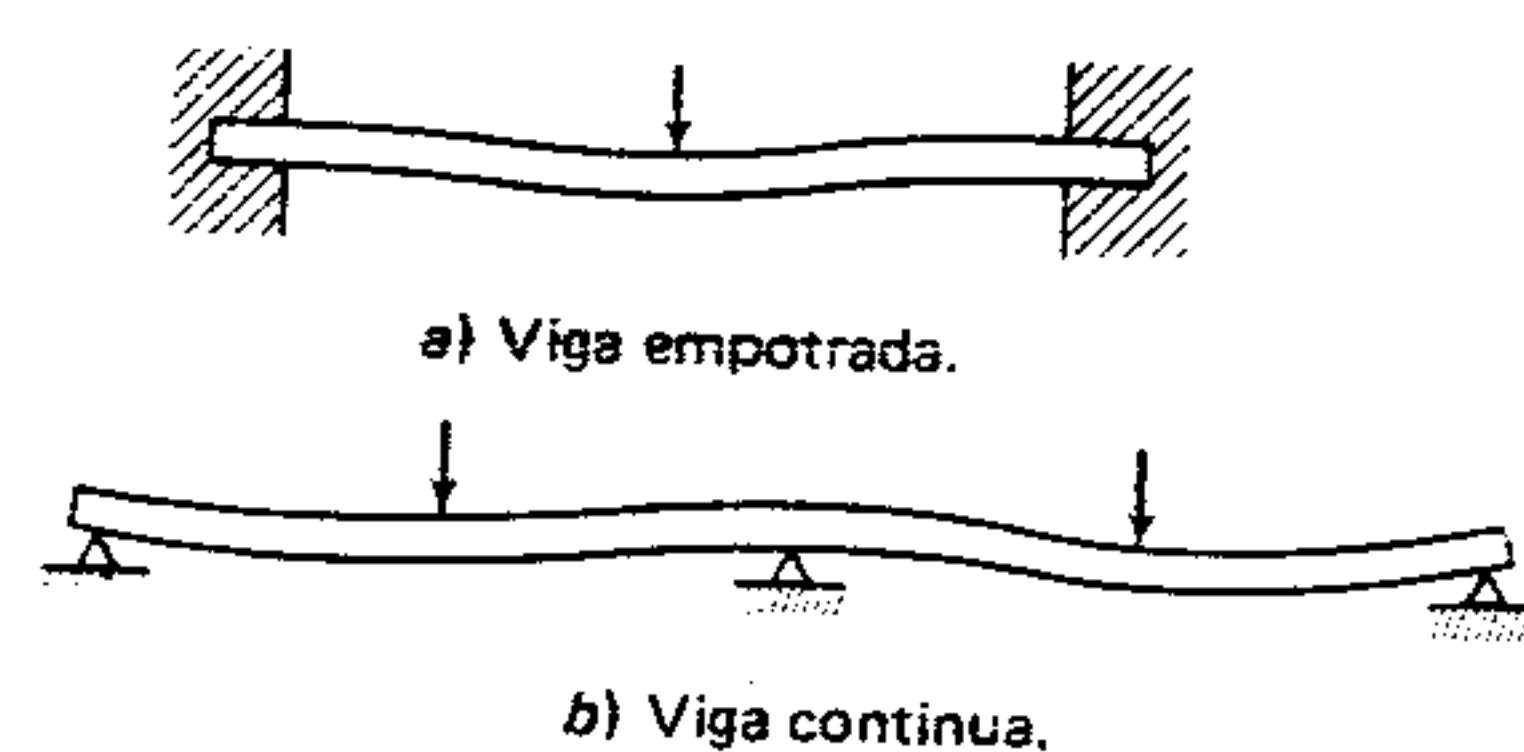


Figura 2.4 Vigas estáticamente indeterminadas.

das". En el capítulo 10 se presentan métodos para el análisis de vigas indeterminadas.

## 2.2 CARGAS

Las cargas sobre vigas se clasifican como concentradas o distribuidas. Una carga concentrada es la que se aplica sobre un área tan pequeña que se puede suponer que actúa en un solo punto. Por ejemplo, en la figura 2.2a se muestra una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada en el centro del claro. Otro ejemplo es una trabe en un edificio; ésta recibe cargas concentradas en los puntos en que las vigas del piso se conectan a ella.

Una carga distribuida es la que se extiende sobre una parte importante o sobre toda la longitud de una viga. Puede estar uniformemente distribuida (figura 2.5a) o variar uniformemente (figura 2.5b). A menudo las cargas que varían uniformemente se denominan triangulares o trapezoidales. El peso propio de la viga es un buen ejemplo de una carga distribuida uniformemente, suponiendo que la viga tiene una sección transversal constante. Otro ejemplo serían las vigas paralelas en un edificio que soportan una losa de piso; el peso de la losa produciría una carga uniformemente distribuida sobre toda la longitud de la viga. Si las vigas no son paralelas, la carga distribuida podría variar de manera uniforme.

Usualmente las cargas concentradas se expresan en libras, kips o toneladas. El término kip o kilolibras denota mil libras (1000). Por otra parte, las

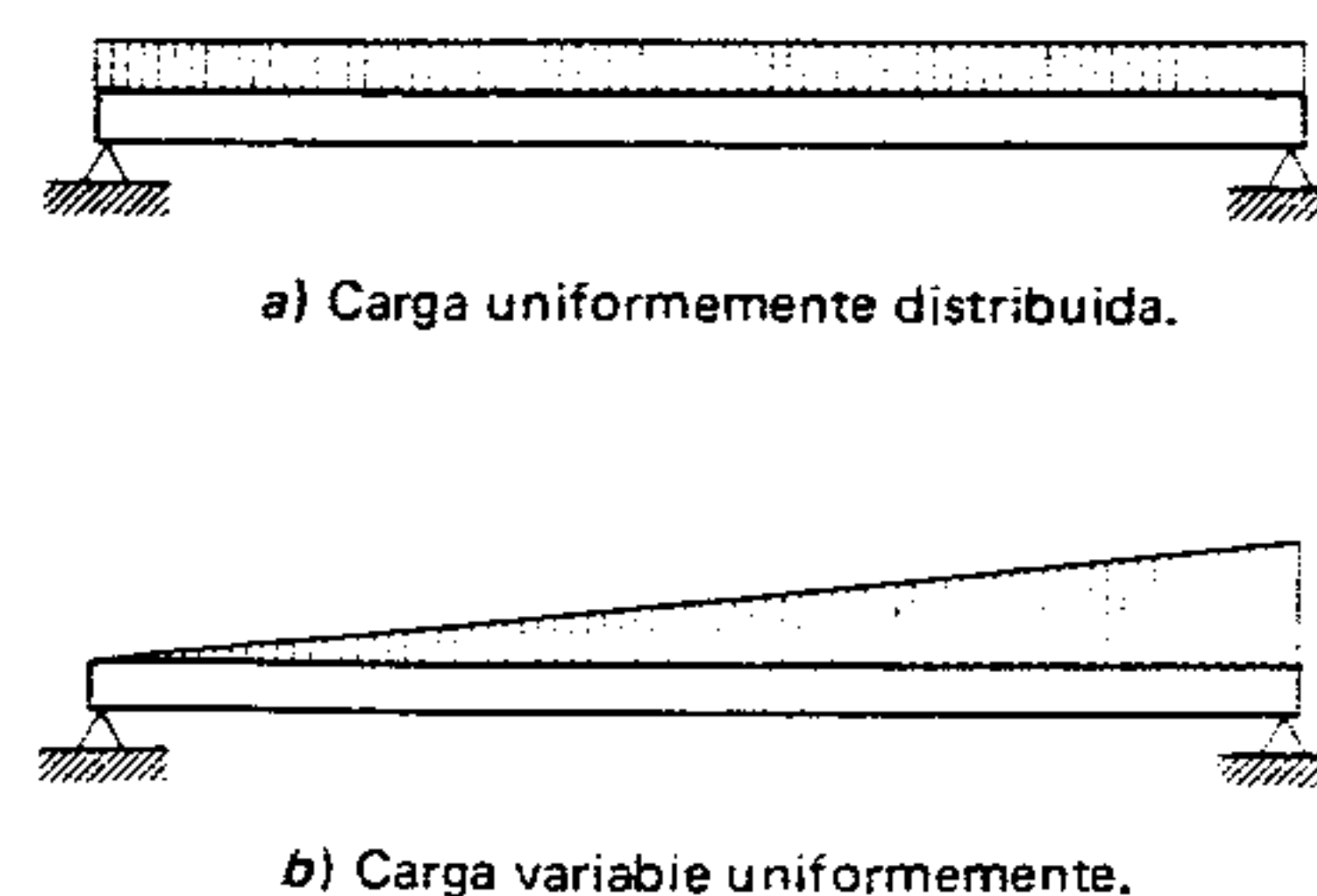


Figura 2.5 Cargas sobre vigas.

cargas distribuidas se expresan en términos de peso por unidad de longitud de la viga, usualmente en libras o kips por pie.

## 2.3 REACCIONES

Las cargas que se vieron en el artículo anterior se denominan fuerzas externas que actúan sobre la viga. Para que una viga pueda permanecer en equilibrio estático, también debe haber fuerzas externas equilibradoras. Los apoyos que desarrollan estas fuerzas equilibradoras se llaman *reacciones*.

En la figura 2.2a, la reacción izquierda se ha designado como  $R_1$ , y la derecha como  $R_2$ . Usualmente las reacciones se consideran cargas concentradas. Por supuesto, esto no siempre es cierto, como se puede ver en el caso de una viga que se apoya sobre un muro de mampostería (figura 2.6). La viga se extiende a una distancia dada después de la cara del muro; así la reacción está distribuida sobre el área de contacto entre la viga y el muro. Sin embargo, esta área por lo general, es lo suficientemente pequeña, de modo que no se comete un error apreciable si se considera que la reacción trabaja en el centro del área de apoyo. El *claro* de una viga simple es la distancia que hay entre sus reacciones.

En una típica construcción a base de marcos compuesta de vigas, trabes y columnas, por regla general el claro se considera conservadoramente como la distancia entre ejes centrales de los miembros horizontales. En la figura 2.7a se ilustra una planta de piso rectangular (véase también el Artículo 5.17). Los claros del miembro se han designado como  $L_1$  (viga) y  $L_2$  (trabe) y se toman como las distancias a ejes centrales entre columnas. Si se supone que el piso está compuesto por una cubierta de piso de un solo sentido con claros entre vigas (figura 2.7a), entonces la cubierta llevará una carga

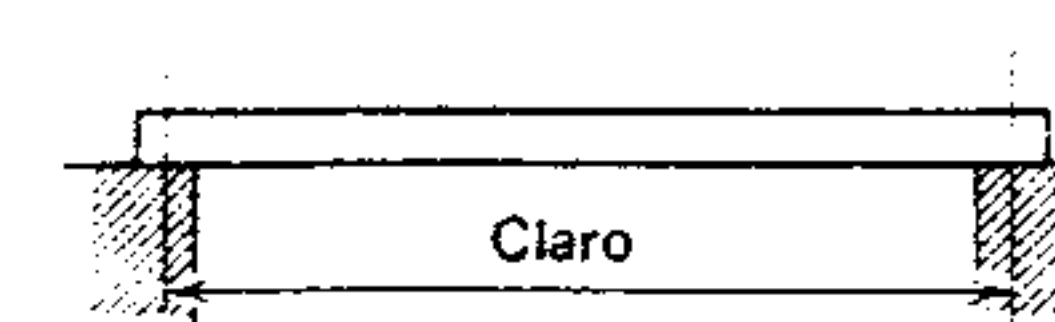
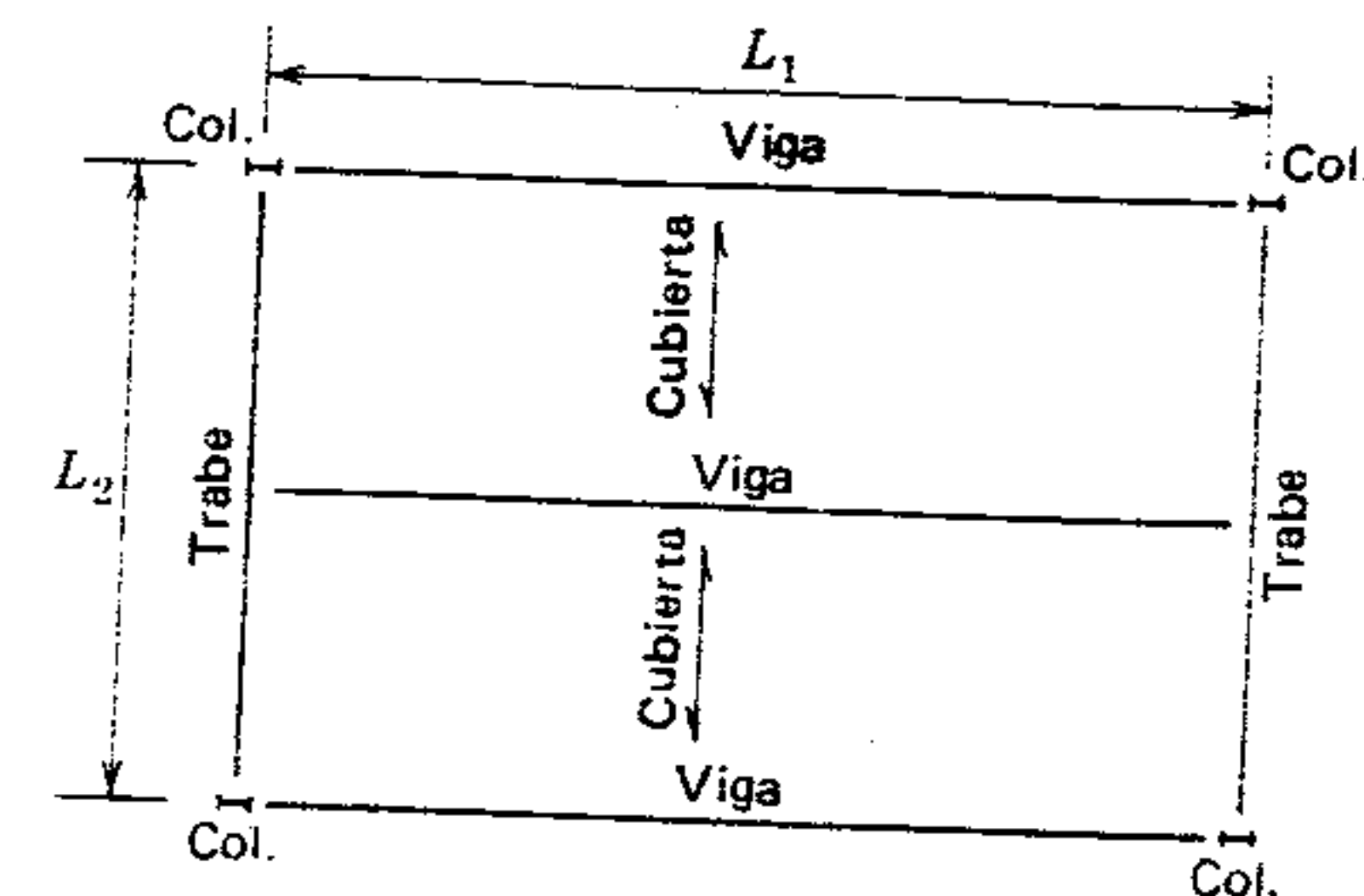
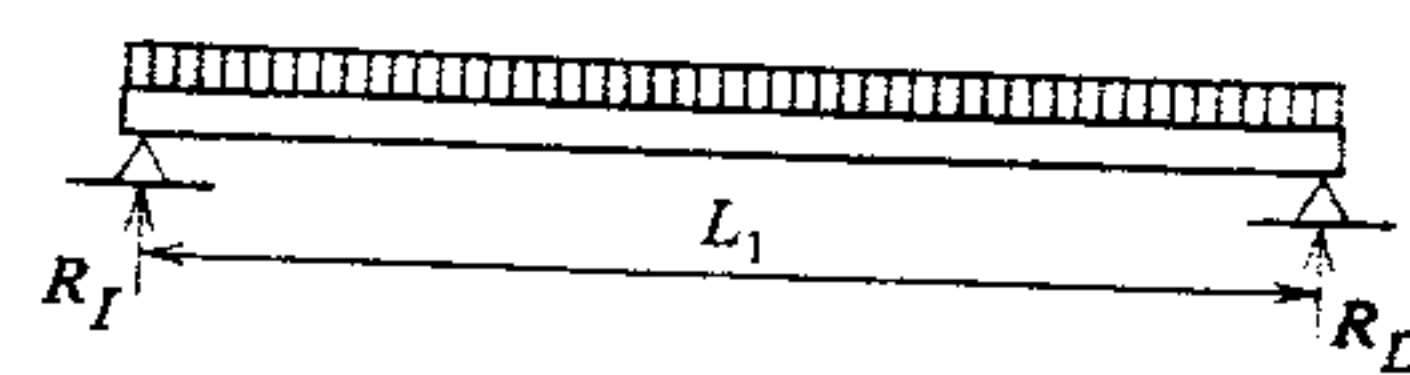


Figura 2.6 Claro de una viga.

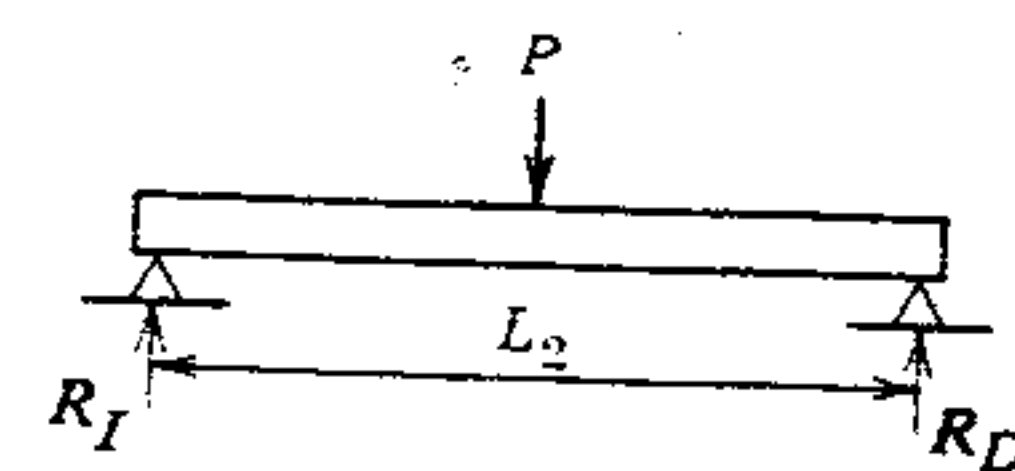




a) Planta estructural.



b) Carga sobre la viga.



c) Carga sobre la trabe.

Figura 2.7 Cargas sobre vigas y trabes.

uniforme a las vigas (figura 2.7b). Las dos vigas que cubren el claro entre columnas llevarán su carga directamente a las columnas. La viga que cubre el claro entre las trabes llevará su carga a cada trabe en forma de una carga concentrada (figura 2.7c), y las trabes, a su vez, llevarán su carga a las columnas. Nótese que cada reacción de la viga central (figura 2.7b) viene a ser la carga concentrada de la trabe (figura 2.7c).<sup>2</sup>

Las características de la reacción en el extremo fijo de una viga cantiliver (figura 2.3) y en los ex-

<sup>2</sup> La distribución de carga que se muestra en la figura 2.7 está basada en conexiones flexibles, las cuales se tratan en el capítulo 7.

tremos de una viga empotrada (figura 2.4a) son más complicadas que las de los tipos simplemente apoyados de la figura 2.2a y b. Esto se debe al hecho de que se desarrollan fuerzas dentro del apoyo, que evitan la libre rotación de los extremos de la viga. En capítulos subsecuentes se tratará esto con más detalle.

## 2.4 DETERMINACIÓN DE REACCIONES

Una vez determinadas la naturaleza y magnitud de las cargas y establecidos el claro y el tipo de apoyo, el siguiente paso en el diseño de una viga es el cálculo de las reacciones. Esto se hace mediante la obtención del equilibrio estático, para lo cual se requiere que: 1) La suma de las componentes en cualquier dirección de todas las fuerzas sea cero, y 2) la suma de todos los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier eje o centro de rotación sea igual a cero.

Por lo general, en el análisis estructural, las componentes de las fuerzas se refieren a los ejes horizontal y vertical de las coordenadas cartesianas. Entonces, la reformulación de las condiciones de equilibrio se puede hacer como sigue: 1) La suma algebraica de las componentes horizontales de todas las fuerzas actuantes sobre un cuerpo es igual a cero; 2) la suma algebraica de los componentes verticales de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a cero, y 3) la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, usando cualquier punto en el plano de las fuerzas como un centro de momentos, es igual a cero. Estas condiciones se pueden expresar como sigue:<sup>3</sup>

$$\Sigma H = 0, \quad \Sigma V = 0, \quad \Sigma M = 0$$

Es evidente que con una viga horizontal que sólo soporta cargas verticales, no habrá componentes

<sup>3</sup> La letra griega  $\Sigma$  (sigma) indica suma, es decir, una adición algebraica de todos los términos similares comprendidos en el problema.

horizontales y por tanto tampoco componentes horizontales en las reacciones. Por lo tanto, las reacciones serán verticales y es necesario considerar solamente  $\Sigma V = 0$  y  $\Sigma M = 0$ .

En una viga simple se plantean tres ecuaciones: 1) La suma de momentos con la reacción izquierda como centro de momentos; 2) la suma de momentos con la reacción derecha como centro de momentos; y 3) la suma de cargas y reacciones verticales. Para resolver las ecuaciones se debe usar cuando menos una ecuación de momentos. Esto dará el valor de una reacción; la otra reacción se puede encontrar por la suma de fuerzas verticales, o tomando momentos respecto a la reacción que ya se conoce. Hasta no acostumbrarse al manejo de estas ecuaciones, es mejor resolver las reacciones usando ecuaciones de dos momentos y luego comprobar mediante  $\Sigma V = 0$ .

### Ejemplo 1

Calcular las reacciones de la viga de la figura 2.8. No considerar el peso propio de la viga.

### Solución

Tomando momentos respecto a la reacción izquierda ( $\Sigma M_I = 0$ ) y considerando positivos los momentos en el sentido antihorario

$$12R_R - 2400(4) = 0$$

$$12R_R = 9600$$

$$R_R = 800 \text{ lb}$$

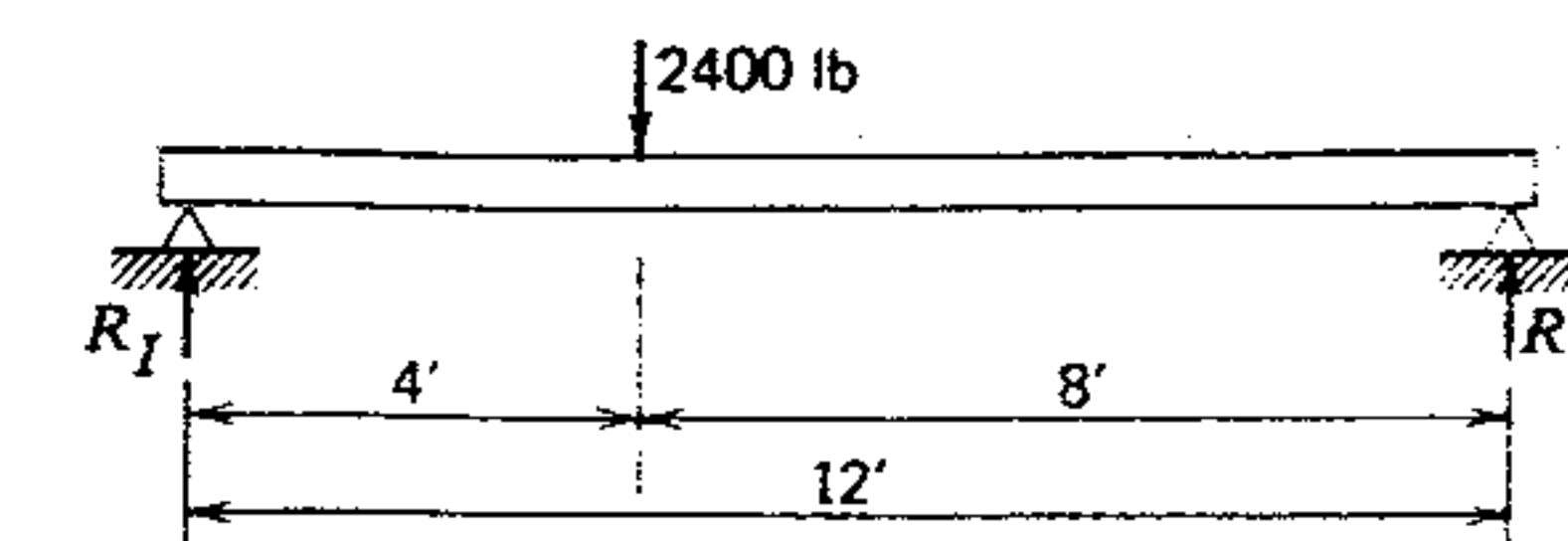


Figura 2.8

Usando  $\Sigma M_D = 0$  (tomando momentos respecto a la reacción derecha y considerando positivos los horarios)

$$12R_L - 2400(8) = 0$$

$$12R_L = 19,200$$

$$R_L = 1600 \text{ lb}$$

Usando  $\Sigma V = 0$  como comprobación, la suma de las cargas debe ser igual a la suma de las reacciones.

$$R_L + R_R = 1600 + 800 = 2400 \text{ lb}$$

### Ejemplo 2

Calcular las reacciones de la viga de la figura 2.9. La viga pesa 40 lb por pie.

*Nota:* Al calcular las reacciones, se puede considerar una carga distribuida actuando en su centro de gravedad.

### Solución

$\Sigma M_B = 0$  (tomando B como centro de momentos y positivos los horarios)

$$16R_A - [5000(20)] - [4000(2)] - [100(14)(7 + 2)] - [40(20)10] = 0$$

$$16R_A = 100,000 + 8000 + 12,600 + 8000$$

$$16R_A = 128,600$$

$$R_A = 8037.5 \text{ lb}$$

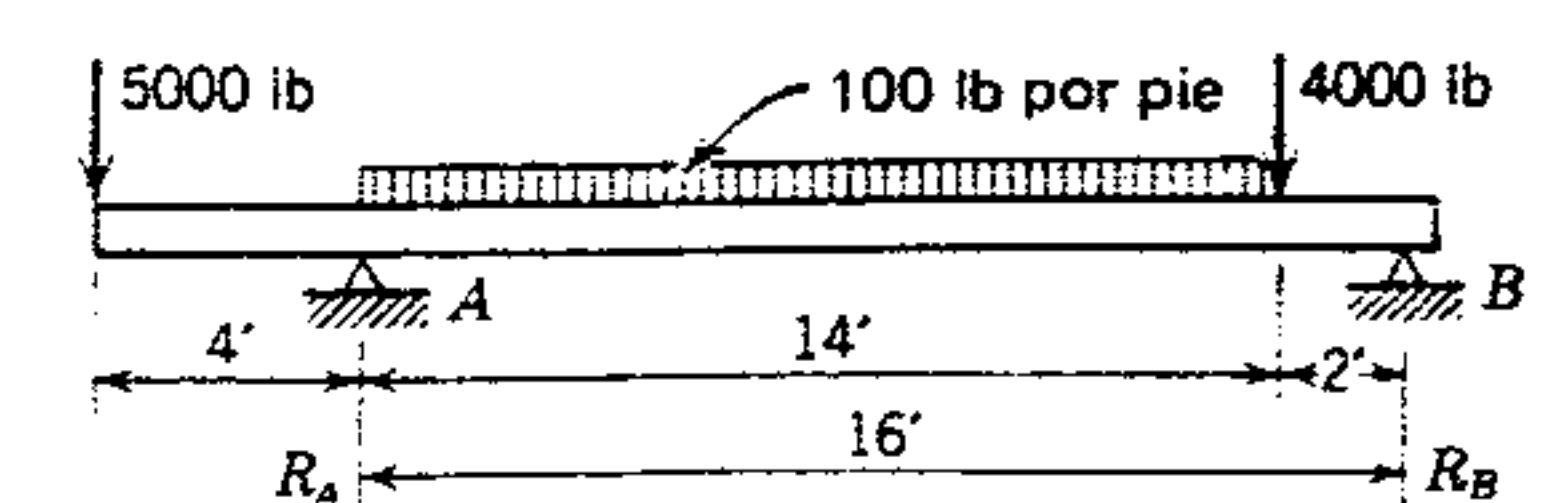


Figura 2.9



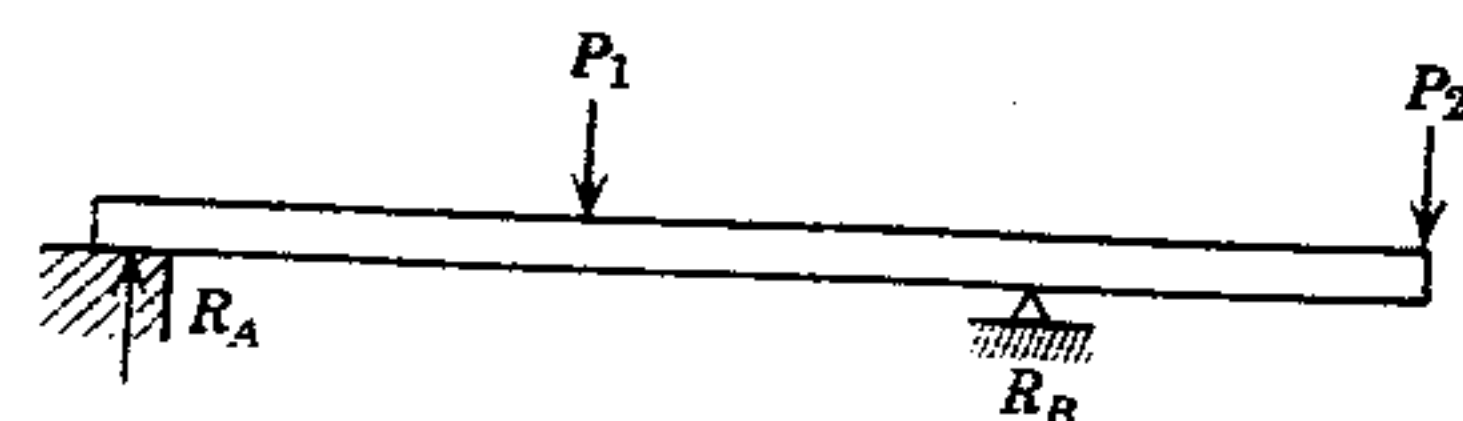


Figura 2.10 Viga con voladizo.

$\Sigma M_A = 0$  (tomando A como centro de momentos y positivos los antihorarios)

$$16R_B + [5000(4)] + [40(4)2] - [4000(14)] - [100(14)7] - [40(16)8] = 0$$

$$16R_B = -20,000 - 320 + 56,000 + 9800 + 5120$$

$$16R_B = -20,320 + 70,920 = 50,600$$

$$R_B = 3162.5 \text{ lb}$$

*Nota:* Al escribir la ecuación  $\Sigma M_A$ , a los momentos producidos por las cargas a la izquierda de  $R_A$  se les dio el mismo signo que el momento producido por  $R_B$  porque tienden a girar la viga en la misma dirección.

Usando  $\Sigma V = 0$  para comprobar, la suma de las cargas debe ser igual a la suma de las reacciones.<sup>4</sup>

$$\text{Cargas: } 5000 + 4000 + 1400 + [40(20)] = 11,200 \text{ lb}$$

Reacciones:

$$R_A + R_B = 8037.5 + 3162.5 = 11,200 \text{ lb}$$

<sup>4</sup> No es necesario ni conveniente redondear los valores de las reacciones a la más próxima unidad entera. Tres cifras significativas producirán un grado de exactitud consistente con los supuestos de la teoría estructural y las condiciones que se encuentran en la práctica. Sobre esta base,  $R_A$  y  $R_B$  del ejemplo 2 tendrían valores de 8040 lb y 3160 lb, respectivamente. En este texto las cifras se han ampliado, como en este caso, sólo cuando estas ampliaciones de los números contribuyen a aclarar la explicación del problema.

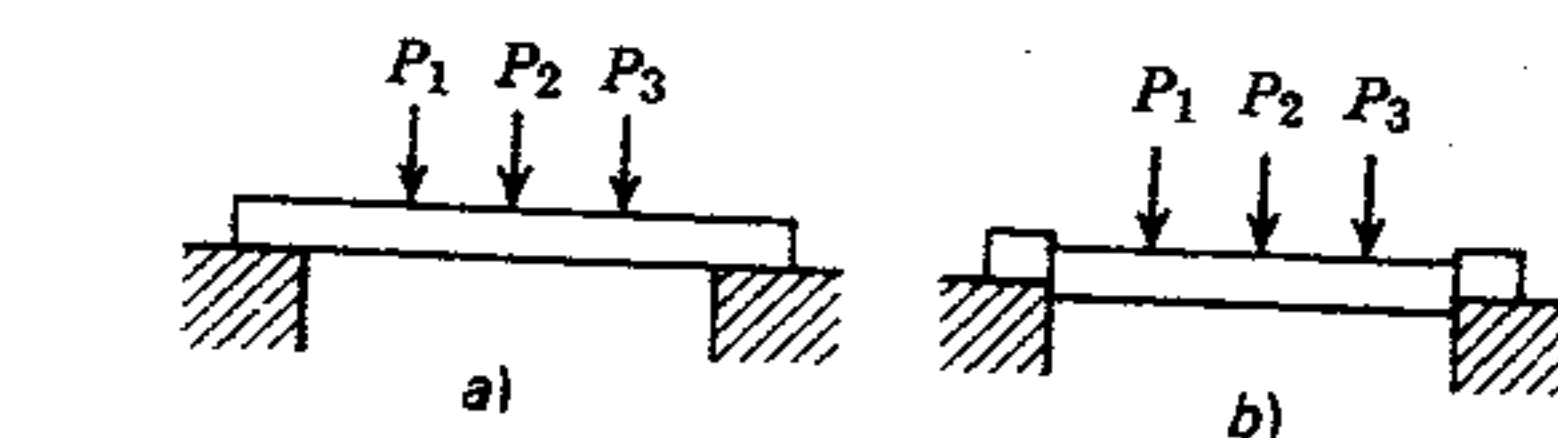


Figura 2.11 Falla por fuerza cortante.

En el análisis de una viga con voladizo como la de la figura 2.10, con frecuencia es imposible determinar la dirección de  $R_A$  mediante inspección. Si la carga  $P_2$  es mucho más grande que  $P_1$ , puede ser que  $R_A$  actúe hacia abajo. Un método de solución satisfactorio es suponer que  $R_A$  actúa hacia arriba y resolver el problema de la manera usual. Si el valor de  $R_A$  resulta positivo (+), la suposición era correcta. Si  $R_A$  resulta negativa (-), el supuesto estaba equivocado y la reacción actúa en el sentido opuesto. Sin embargo, el valor numérico estará correcto.

## 2.5 FUERZA CORTANTE

En la figura 2.11a se representa una viga que soporta un sistema de cargas concentradas. En el diagrama es evidente que la viga puede fallar desplomándose simplemente entre los muros soportantes, como se ve en la figura 2.11b. Este tipo de falla se llama falla al cortante. Es probable que la viga fallaría de alguna otra manera antes de cortarse verticalmente, sin embargo, la tendencia a fallar de esta manera estaría siempre presente. La fuerza que mide esta tendencia se denomina fuerza cortante vertical o simplemente cortante y se designa con el símbolo  $V$ .

Como se indica en la figura 2.12, las vigas se consideran compuestas de un número infinito de segmentos verticales, aunque por propósitos prácticos se muestra un número finito. La magnitud de la fuerza cortante  $V$  en cualquier sección recta<sup>5</sup> es la cantidad necesaria para producir el equilibrio estático cuando la parte hacia la derecha o

<sup>5</sup> Una sección transversal es una sección perpendicular al eje longitudinal de la viga.

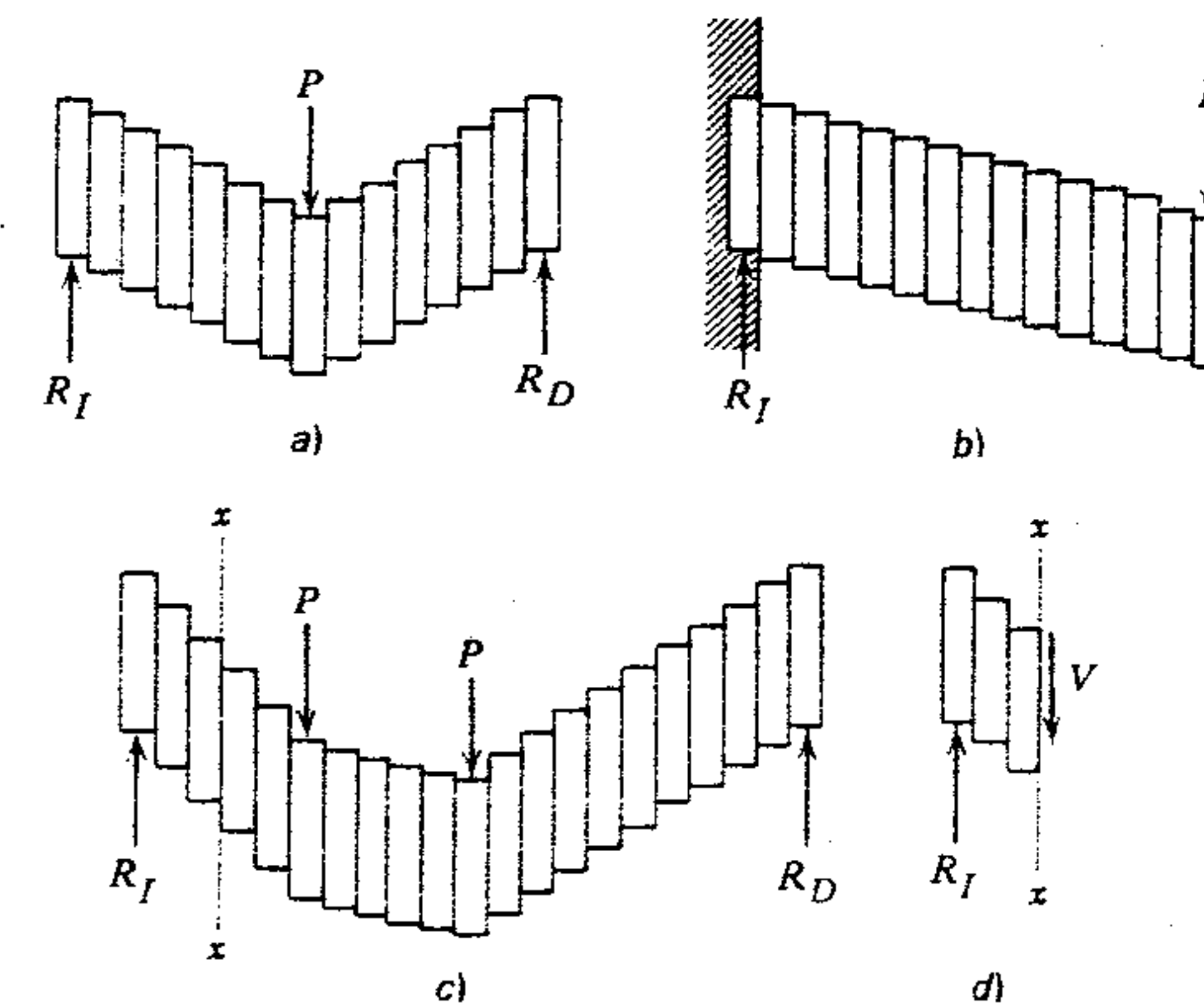


Figura 2.12 Variación de la fuerza cortante.

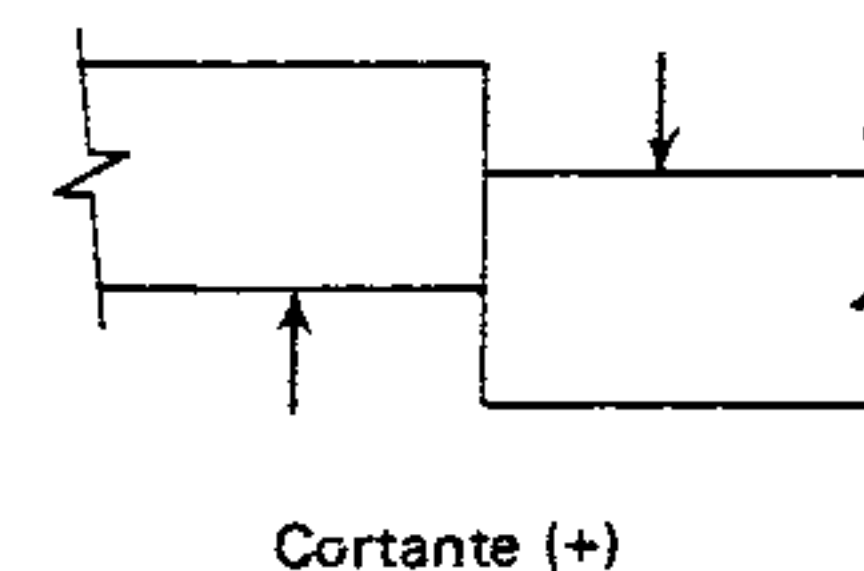
hacia la izquierda de la sección se aísla y trata como cuerpo libre.<sup>6</sup> Esta fuerza cortante está determinada por la ecuación general  $\Sigma V = 0$ .

La parte de la viga hacia la izquierda de la sección x-x de la figura 2.12c se muestra como cuerpo libre en la figura 2.12d. Este debe estar en equilibrio si la viga entera está en equilibrio. Por lo tanto, también debe haber una fuerza actuando en la cara cortada; esta fuerza es el cortante interno. En la fi-

gura 2.12d, éste se expresa con  $V$  y es igual a la magnitud de  $R_I$ , pero en sentido contrario. De la explicación anterior se puede formular la siguiente definición:

*La fuerza cortante en cualquier sección recta de una viga es la suma algebraica de todas las fuerzas transversales de un lado de la sección.*

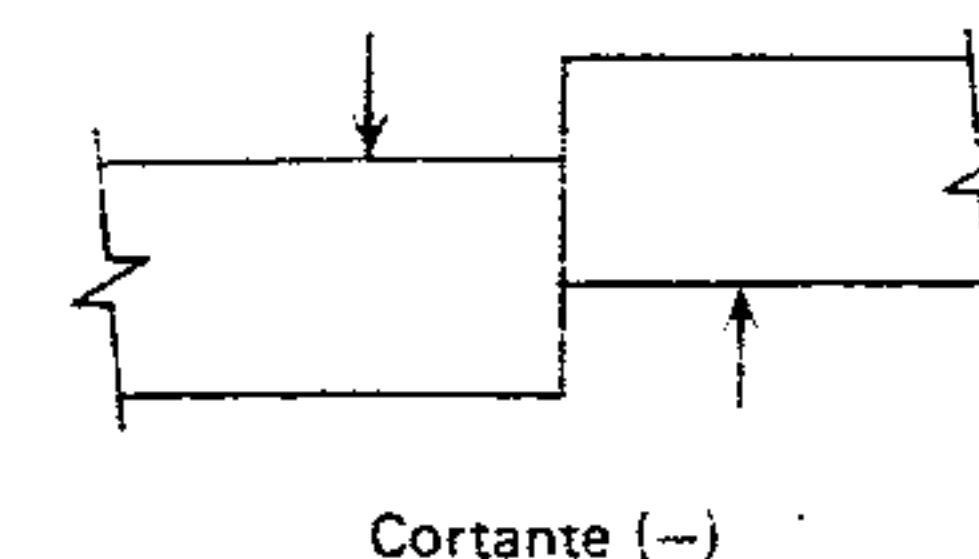
Por lo tanto, las cargas sobre una viga tienden a hacer que la parte a la derecha de la sección descienda y que la parte de la izquierda ascienda (figura 2.13), o viceversa (figura 2.14). El primer caso se designa arbitrariamente cortante positivo (+) y el segundo cortante negativo (-).



Cortante (+)

Figura 2.13 Fuerza cortante positiva.

<sup>6</sup> Existe un cuerpo libre cuando toda la estructura o alguna parte de ella se considera separada de sus partes circundantes. Cuando toda la estructura está en equilibrio, cada parte de ella (cada cuerpo libre) también debe estar en equilibrio. Se deben mostrar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre.



Cortante (-)

Figura 2.14 Fuerza cortante negativa.



Además, debido al hecho de que la fuerza cortante puede variar a lo largo de la viga, usualmente es necesario durante el diseño conocer cómo variará y localizar y calcular su valor máximo.

## 2.6 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE

El diagrama de fuerza cortante es un instrumento apropiado para representar gráficamente variaciones del cortante a lo largo de la viga.

Se dibuja primero una línea horizontal a cualquier escala convencional equivalente a la longitud del claro de la viga. Esta línea es un eje de coordenadas cartesianas y se puede ver como el eje longitudinal de la viga cargada. La magnitud del cortante positivo se traza sobre la línea y el negativo abajo de ésta. El diagrama resultante se puede considerar como una representación gráfica de la ecuación de cortante.

## 2.7 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE - CARGAS CONCENTRADAS

En la figura 2.15 se muestra una viga con cargas concentradas iguales en las cuartas partes de su claro. El peso de la viga se ha omitido. Por la simetría de las cargas es evidente que las reacciones son iguales y tienen un valor de  $3P/2$ . A una dis-

tancia conveniente abajo del espacio del diagrama, se ha trazado una línea que representa el cortante igual a cero.

Si se toma una sección de la viga justo a la derecha de la reacción izquierda, la suma de todas las fuerzas que actúan hacia arriba a la izquierda de la sección (cortante +) es  $3P/2$ . Por tanto, según la definición de fuerza cortante, en el apoyo ésta es igual a  $+3P/2$ . (Recuérdese que en este ejemplo se ha omitido el peso de la viga). Esto se llama cortante extremo y en este caso es igual a la reacción. Ahora, este valor se traza a alguna escala mediante una línea vertical que represente la línea de acción de la reacción izquierda.

Si se toma otra sección de la viga en A-A, según la definición de fuerza cortante, la suma de todas las fuerzas que actúan hacia arriba a la izquierda de la sección (cortante +) es también  $3P/2$ . Por lo tanto, el cortante en la sección A-A también es  $+3P/2$ . (Debe tenerse presente que en este ejemplo no se ha considerado el peso de la viga). La sección A-A podría ser cualquier sección entre la reacción izquierda y la carga  $P_1$ . Por tanto, es evidente que el cortante es constante entre estas dos cargas y que la línea de cortante es horizontal.

Si se toma otra sección justo a la derecha de la carga  $P_1$ , el cortante en esa sección será  $+3P/2 - P = P/2$ . Este valor está trazado sobre la línea que se extiende hacia abajo de  $P_1$ . El cortante entre  $P_1$  y  $P_2$  es constante y, por lo tanto, la línea de cortante entre estas cargas también es horizontal. Este proceso continúa a través de la viga. El hecho de

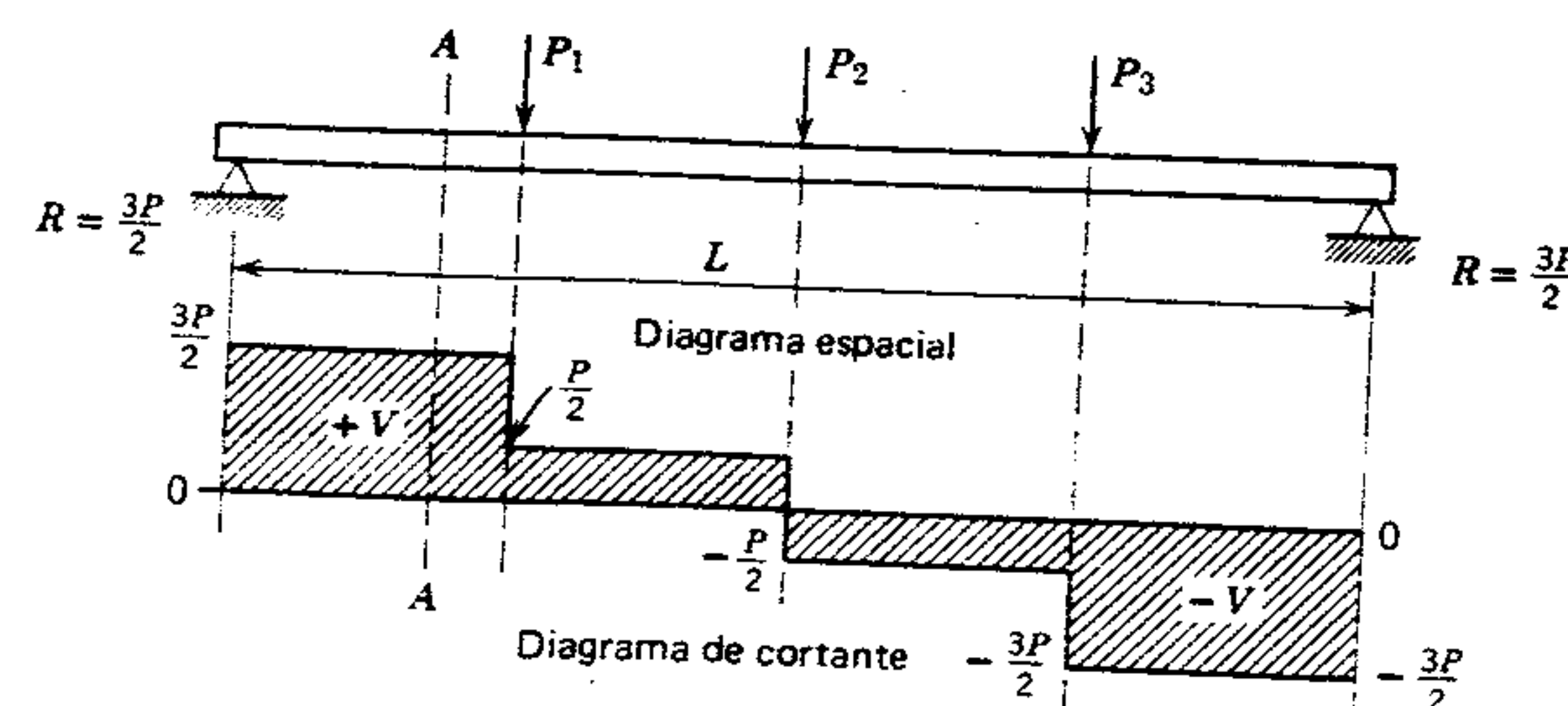


Figura 2.15 Diagrama de fuerza cortante, cargas concentradas.

que el valor numérico del cortante en el extremo derecho de la viga sea igual a la reacción derecha servirá como comprobación.

## 2.8 DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE - CARGAS DISTRIBUIDAS

La figura 2.16 es el diagrama de fuerza cortante para una viga simple que soporta una carga uniformemente distribuida sobre todo su claro. La carga total sobre la viga es  $wL$  y cada reacción es igual a  $wL/2$ .

Como en el caso anterior, el cortante extremo es igual a la reacción. Esto se traza a escala igual que antes. Si la siguiente sección se toma en el centro del claro, el cortante será  $wL/2 - wL/2 = 0$ .

Si se toma otra sección como la y-y a la cuarta parte del claro, el cortante será  $wL/2 - wL/4 = +wL/4$ . En un punto a las tres cuartas partes de la longitud del claro a partir de la reacción izquierda, el cortante es  $+wL/2 - 3wL/4 = -wL/4$ . Debe observarse que bajo una carga uniforme, el cortante varía como una línea recta inclinada. Esto también es evidente en la ecuación que expresa la magnitud de la fuerza cortante en términos de una variable del claro. Sea  $x$  cualquier distancia a partir de la reacción izquierda; en la figura 2.16 se ve que

el valor de la fuerza cortante a  $x$  pies a la derecha de la reacción izquierda es

$$V = \frac{wL}{2} - wx$$

Como la única variable de la ecuación es  $x$ , y está a la primera potencia, resulta la ecuación de una línea recta. El punto de cortante cero se puede calcular igualando a cero la ecuación anterior.

$$\frac{wL}{2} - wx = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

En la explicación sobre las cargas actuando hacia abajo es evidente que la fuerza cortante máxima para una viga simple o en cantilíver es adyacente a la reacción. Sin embargo, en el ejemplo 3 se verá que no siempre es igual a la reacción en el caso de vigas con voladizo.

### Ejemplo 1

Dibujar el diagrama de fuerza cortante para la viga de la figura 2.17. No considerar el peso de la viga.

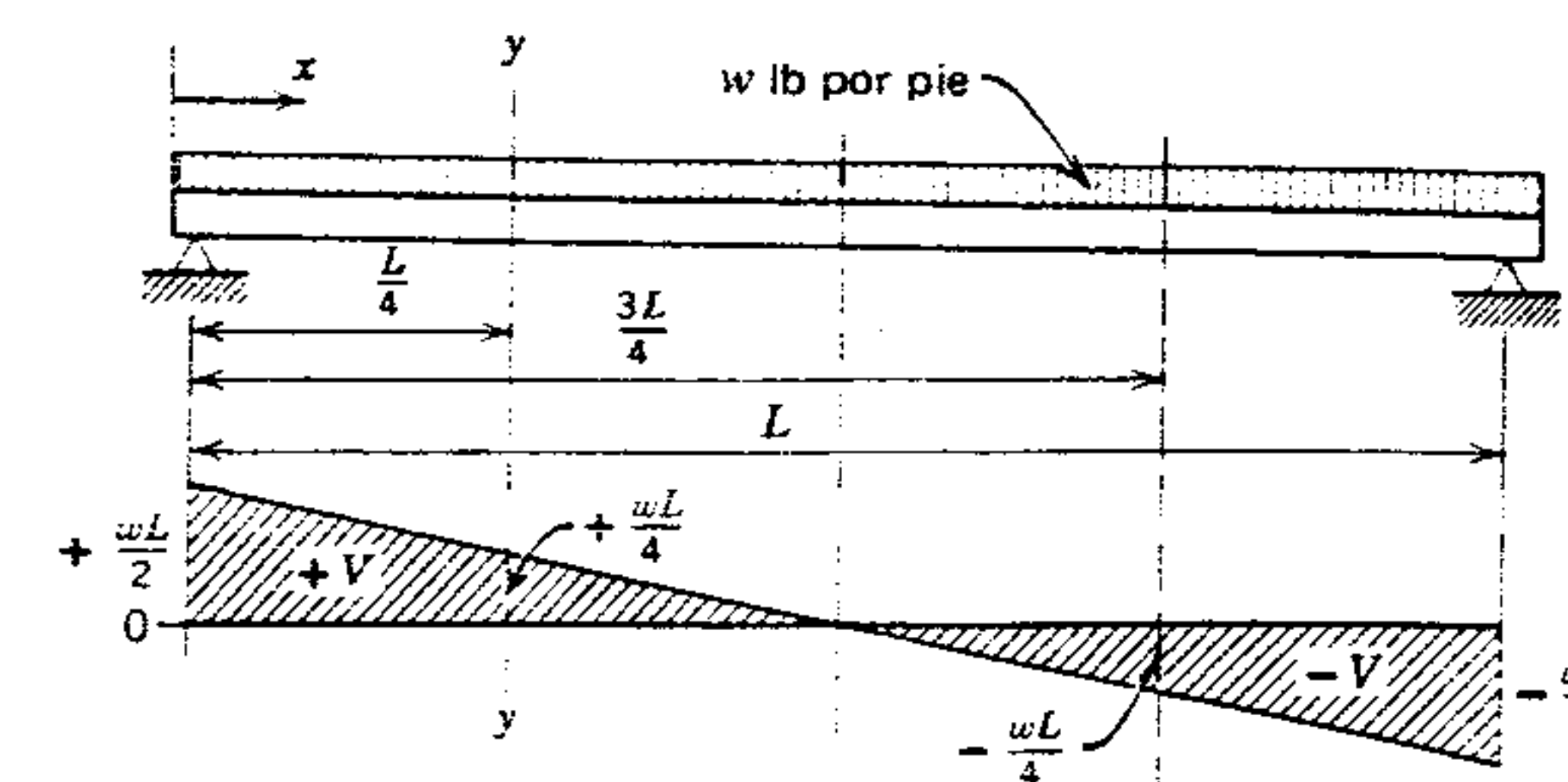


Figura 2.16 Diagrama de fuerza cortante, cargas distribuidas.



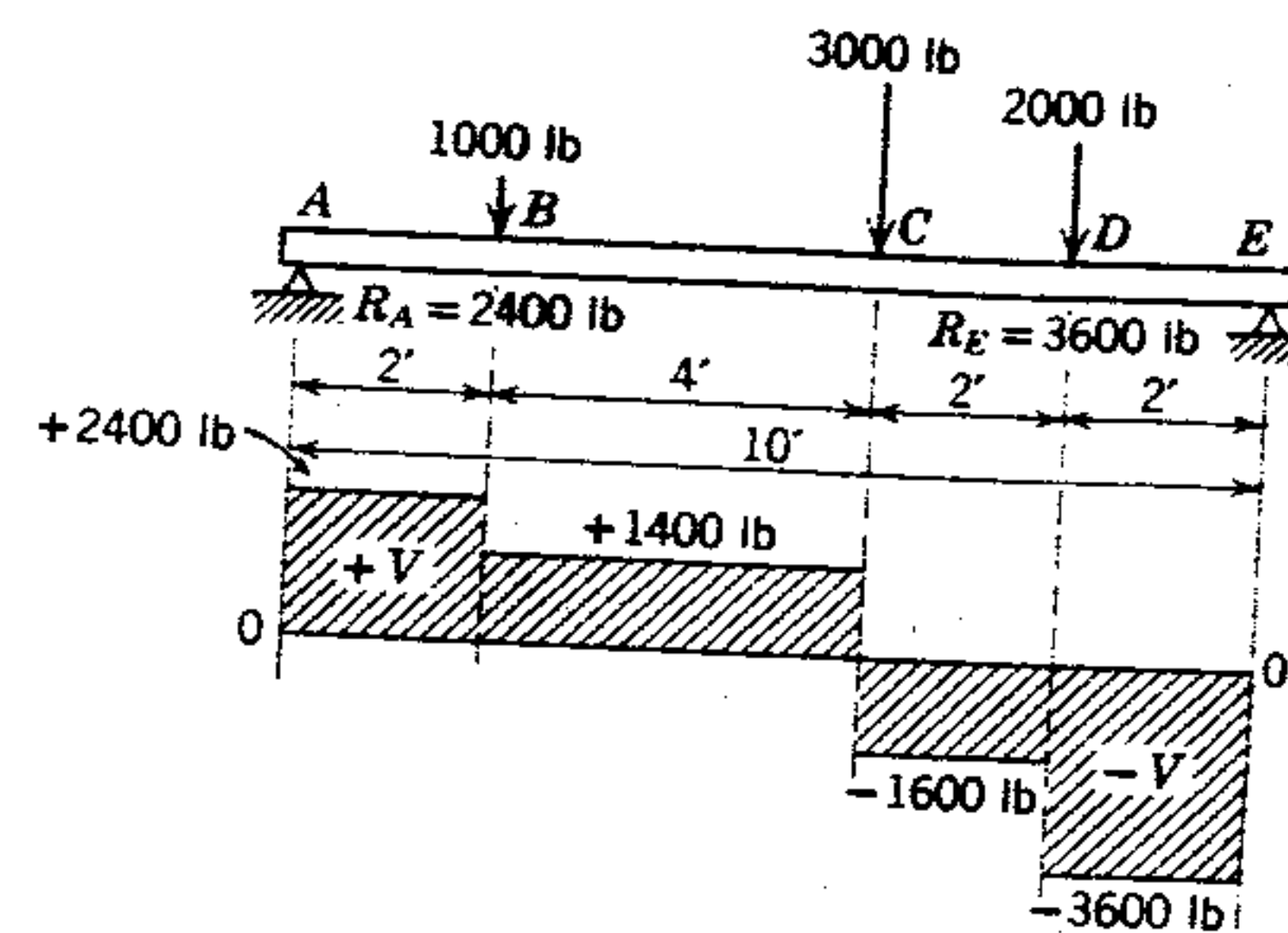


Figura 2.17

### Solución

Resolviendo las reacciones,  $\Sigma M_E = 0$  (tomando E como centro de momentos)

$$10R_A - [1000(8)] - [3000(4)] - [2000(2)] = 0$$

$$10R_A = 8000 + 12,000 + 4000 = 24,000$$

$$R_A = 2400 \text{ lb}$$

$\Sigma M_A = 0$  (tomando A como centro de momentos)

$$10R_E - [2000(8)] - [3000(6)] - [1000(2)] = 0$$

$$10R_E = 16,000 + 18,000 + 2000 = 36,000$$

$$R_E = 3600 \text{ lb}$$

Usando  $\Sigma V = 0$  como comprobación, la suma de las cargas debe ser igual a la suma de las reacciones:

$$\text{Cargas: } 1000 + 3000 + 2000 = 6000 \text{ lb}$$

$$\text{Reacciones: } 2400 + 3600 = 6000 \text{ lb}$$

Estas reacciones se han registrado en el diagrama. El cortante extremo en A es +2400 lb. No hay cargas entre A y B; por lo tanto, en cualquier sección entre estos puntos, la única fuerza a la izquierda de la sección es 2400 lb actuando hacia arriba. Así, el cortante para todas las secciones

entre A y B es 2400 lb y es positivo. El cortante para todas las secciones entre B y C es  $2400 - 1000 = 1400$  lb; para todas las secciones entre C y D,  $2400 - 1000 - 3000 = -1600$  lb; y para todas las secciones entre D y E,  $2400 - 6000 = -3600$  lb. Determinados estos valores se puede trazar el diagrama que se ilustra.

### Ejemplo 2

Trazar el diagrama de fuerza cortante para la viga de la figura 2.18, sin considerar el peso de la viga.

### Solución

Cada una de las reacciones, y por tanto los cortantes extremos, es igual a 8000 lb.

El cortante en el centro es

$$8000 - [1000(8)] = 0$$

El cortante a 4 pies a partir de la reacción izquierda es

$$8000 - [1000(4)] = 4000 \text{ lb}$$

Con estos valores se puede construir el diagrama de fuerza cortante. Debe observarse que para vigas cargadas como la de la figura 2.18, la línea de cortante se puede trazar conectando simplemente las ordenadas de los cortantes de los extremos. La línea de cortante debe cruzar la línea base en el centro del claro.

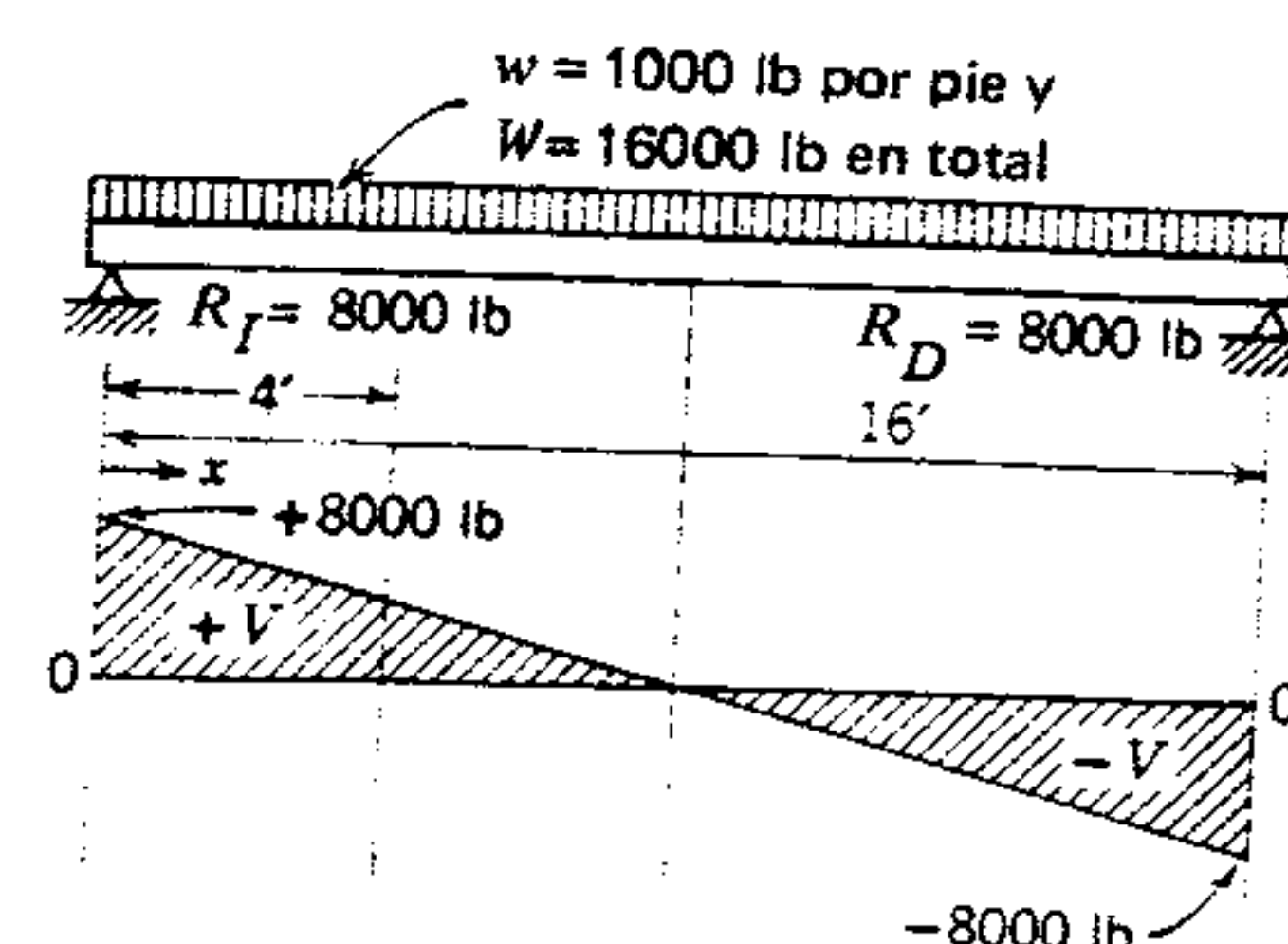


Figura 2.18

El análisis también se puede hacer como sigue: Como la intensidad de la carga no cambia a lo largo del claro, y no hay cargas concentradas, se necesita una sola ecuación para toda la viga. Usando la reacción izquierda como origen para medir x, la ecuación para el cortante en cualquier punto viene a ser

$$V = 8000 - 1000x$$

cuando  $x = 0$ ,  $V = +8000$  lb

cuando  $x = 16$ ,  $V = -8000$  lb

De nuevo, la ecuación es la de una línea recta, de la cual se han determinado dos puntos, y ahora se puede ilustrar en el diagrama de cortante.

### Ejemplo 3

Construir el diagrama de fuerza cortante para la viga de la figura 2.19. No considerar el peso de la viga.

### Solución

Resolviendo las reacciones,

$\Sigma M_D = 0$  (tomando D como centro de momentos)

$$16R_B - [2000(20)] - [4000(4)] - [1200(6 + 4)] = 0$$

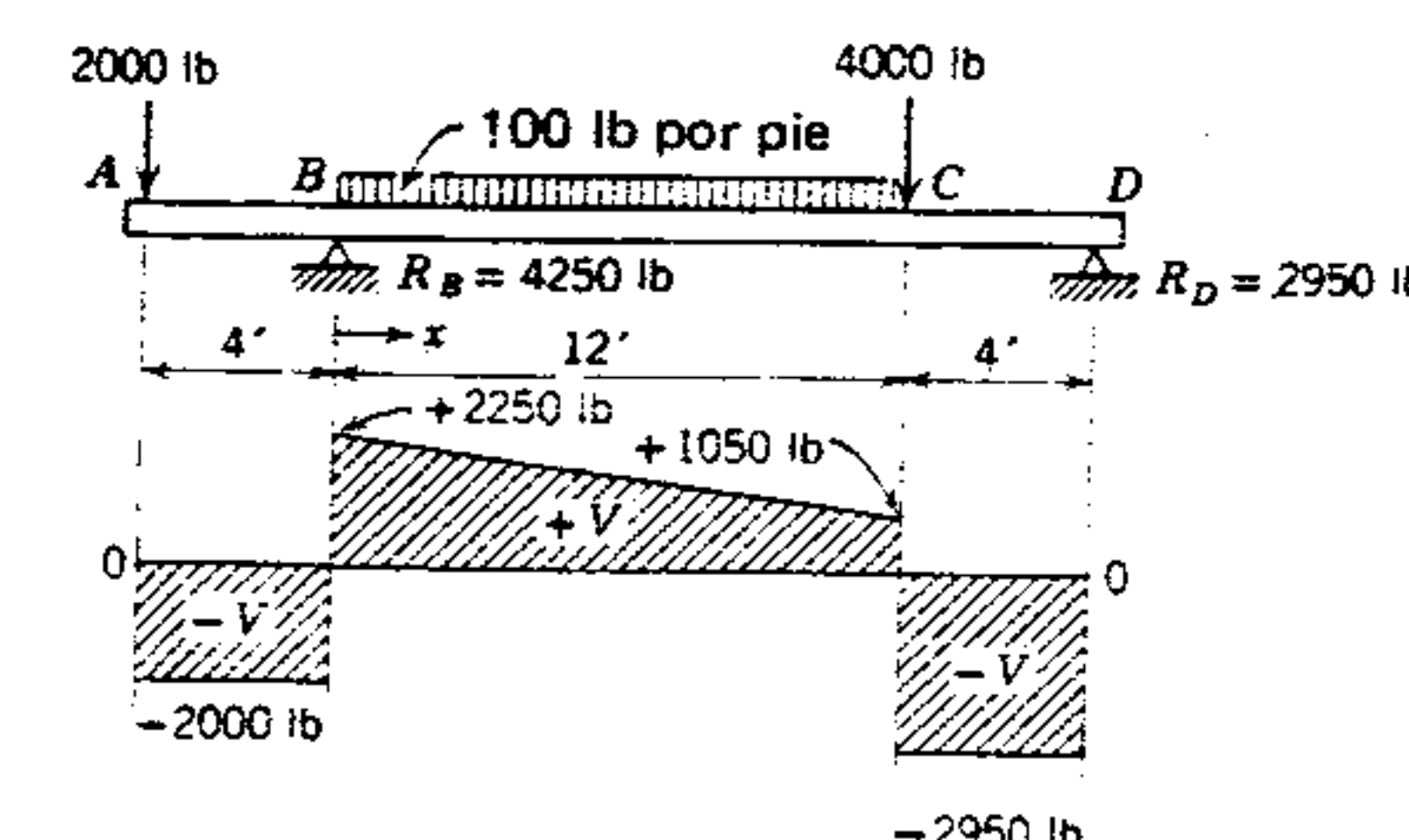


Figura 2.19

$$16R_B = 40,000 + 16,000 + 12,000 = 68,000$$

$$R_B = 4250 \text{ lb}$$

La suma de las cargas es  $2000 + 4000 + 1200 = 7200$  lb. Por lo tanto,  $R_D = 7200 - 4250 = 2950$  lb. Esta reacción se debe comprobar usando B como centro de momentos.

El cortante extremo en A es -2000 lb (véase la figura 2.19). Como no hay cargas entre A y B, el cortante para cualquier sección en este panel es -2000 lb. En la sección justo a la derecha de B, el cortante es  $-2000 + 4250 = +2250$  lb. En la sección justo a la izquierda de C, el cortante es  $-2000 + 4250 - 1200 = +1050$  lb. La carga entre B y C es una carga uniforme; así la línea de cortante es recta que se inclina hacia abajo, de izquierda a derecha. En la sección justo a la derecha de C, el cortante es  $-2000 + 4250 - 1200 - 4000 = -2950$  lb. Este también es el cortante para cualquier sección entre C y D. Por lo tanto, el cortante en D = -2950 lb. Este valor coincide con el de la reacción.

La ecuación de cortante para la parte de la viga que está directamente abajo de la carga distribuida es

$$V = -2000 + 4250 - 100x$$

$$V = 2250 - 100x$$

cuando el origen de x está en la reacción izquierda.

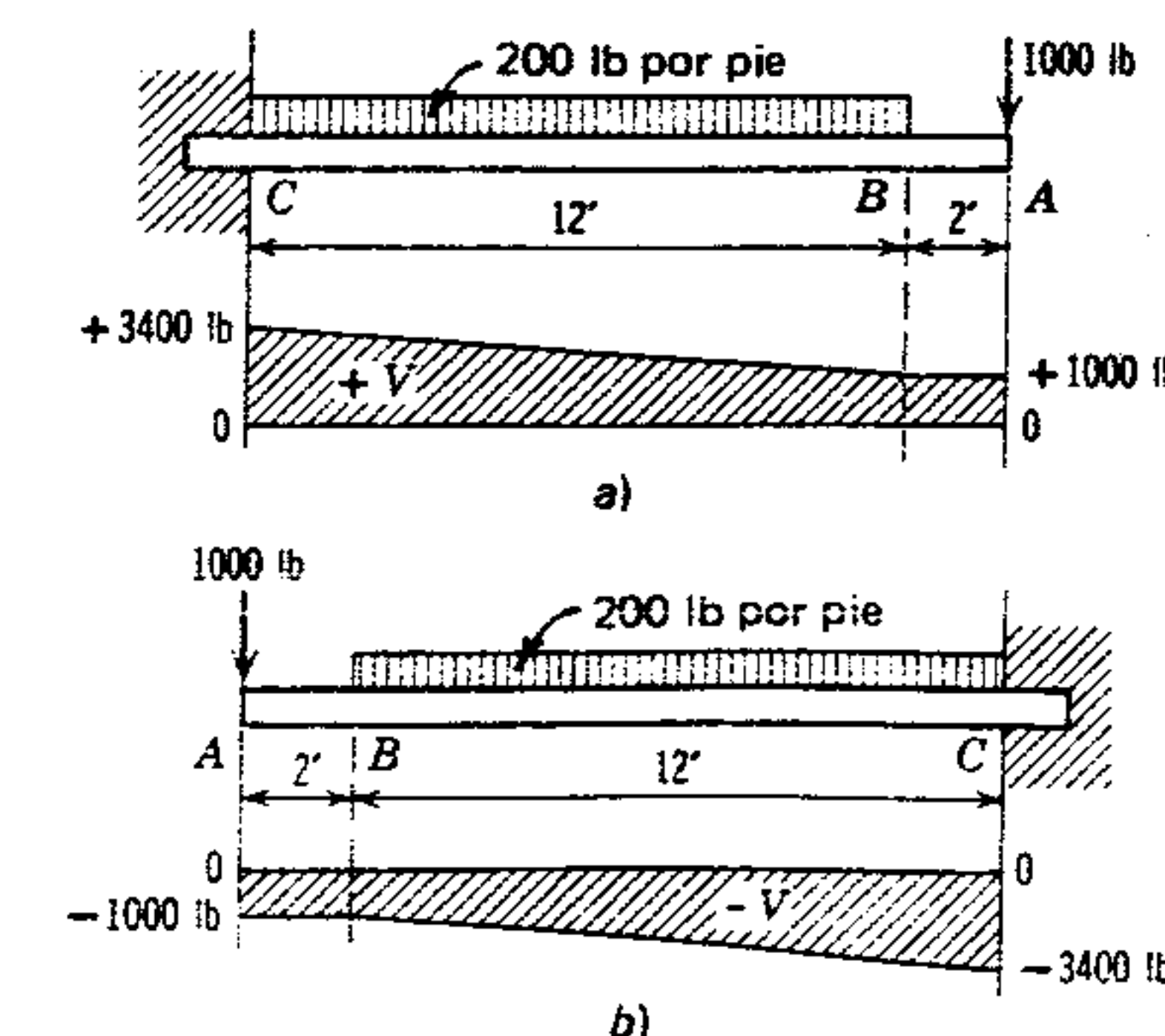


Figura 2.20



**Ejemplo 4**

Una viga cantiliver tiene un voladizo de 14 pies a partir de la cara de un muro. Soporta una carga uniforme de 200 lb por pie, y se extiende desde el extremo empotrado hasta 2 pies antes del extremo libre, y una carga concentrada de 1000 lb aplicada en el extremo libre. Trazar el diagrama de cortante. No considerar el peso de la viga.

Se puede suponer que el extremo empotrado está a la izquierda, como se ve en la figura 2.20a, o a la derecha, como se ve en la figura 2.20b.

**Solución (1)**

Suponiendo que el extremo empotrado está a la izquierda, como en la figura 2.20a, el cortante para todas las secciones entre A y B será de 1000 lb. Si se toma una sección inmediatamente a la izquierda de A, el segmento derecho de la viga tenderá a moverse hacia abajo en relación con el segmento izquierdo. Por lo tanto, el cortante en el panel AB es positivo (figura 2.13). Bajo la carga distribuida, el cortante aumentará uniformemente y el cortante en C será  $1000 + [200(12)] = 3400$  lb. La construcción del diagrama es como se ilustra.

**Solución (2)**

Suponiendo que el extremo empotrado es a la derecha, como en la figura 2.20b, el cortante en el panel AB será 1000 lb. Si se toma una sección inmediatamente a la derecha de A, el segmento izquierdo tenderá a moverse hacia abajo en relación al segmento derecho. Por lo tanto, el cortante en el panel es negativo (figura 2.14). Bajo la carga distribuida, el cortante aumenta uniformemente, y el cortante en C es  $-3400$  lb. El diagrama será como el que se ilustra.

Aunque el signo del cortante en cualquier sección de la viga es (+) para la solución 1 y (-) para la solución 2, el valor numérico es el mismo. Como en el diseño de vigas es el valor numérico del cortante el que se usa, esta ambigüedad de signo no constituye una dificultad.

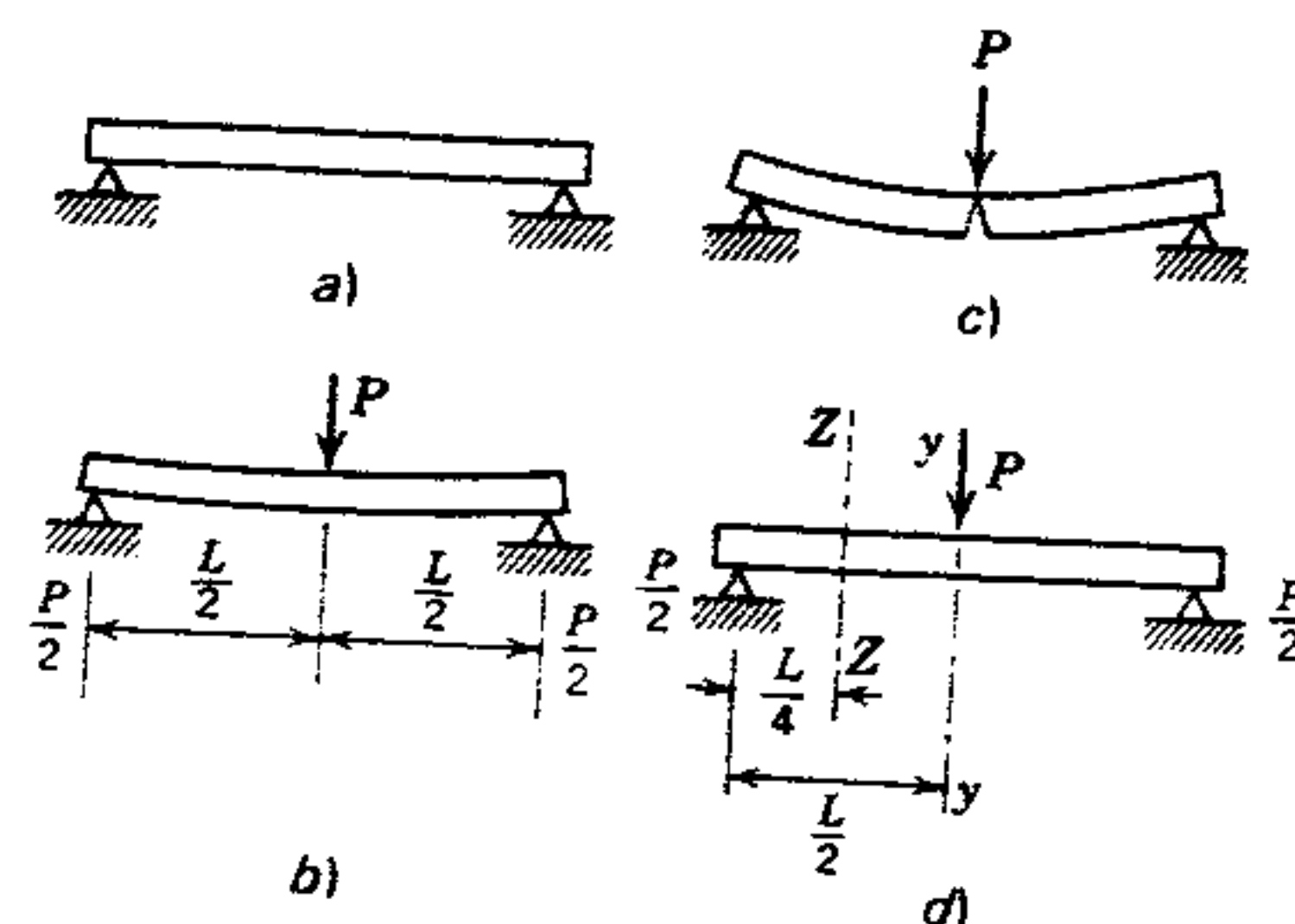


Figura 2.21 Falla por momento flexionante.

**2.9 MOMENTO FLEXIONANTE**

Las fuerzas externas que actúan sobre una viga, es decir, las cargas y las reacciones, deforman la viga flexionándola. Cada fuerza externa produce un momento específico en cualquier punto dado a lo largo de la viga.

Por ejemplo, si la viga de la figura 2.21a tiene una carga concentrada  $P$  aplicada en el centro, se deflexionará como se ilustra en la figura 2.21b.<sup>7</sup> Si la carga fuera lo suficientemente grande, se puede pensar que el flexionamiento continuaría hasta hacer fallar la viga, como se indica en la figura 2.21c.

La tendencia de la viga a fallar de esta manera se mide por medio del momento de la reacción respecto a la sección  $y-y$  (figura 2.21d), a través del punto de aplicación de la carga. En la figura 2.21b, este momento es  $P/2(L/2) = PL/4$  y se denomina *momento flexionante* en la sección  $y-y$ .

La tendencia de la viga a fallar por flexión está presente en todos los puntos de su longitud; por lo tanto, para cualquier sección que se pueda tomar a lo largo de la viga existe un valor definido para el momento flexionante. Por ejemplo, considérese cualquier sección a la derecha de la viga anterior, por ejemplo, la sección  $Z-Z$ . Usando el segmento izquierdo, el momento flexionante en  $Z-Z$  es

<sup>7</sup> En la mayoría de las vigas de acero o concreto esta deflexión no es visible a simple vista, sin embargo, existe y se podría observar si se usaran instrumentos suficientemente sensibles.

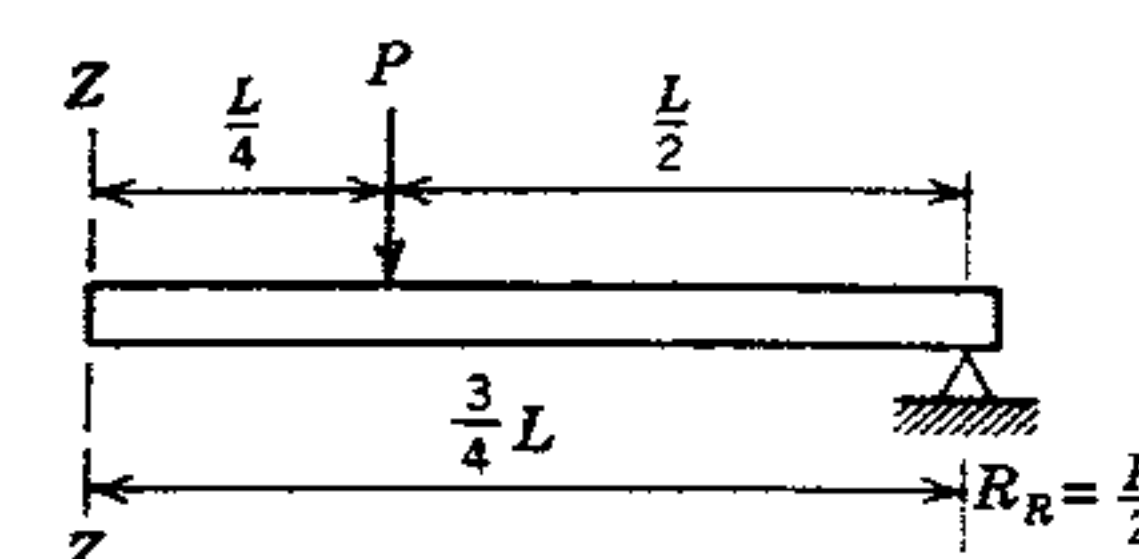


Figura 2.22 Momento flexionante en Z.

$P/2(L/4) = PL/8$ . En la figura 2.22 se ve el segmento derecho de la misma viga. El producto de cada fuerza externa y su distancia a la sección cortada (brazo de momento) causa un momento ya sea en el sentido horario o antihorario. Así, en la figura 2.22, el momento flexionante en la sección  $Z-Z$  es

$$M = \left[ \frac{P}{2} \left( \frac{3L}{4} \right) \right] - \left[ P \left( \frac{L}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{3PL}{8} - \frac{PL}{4} = \frac{PL}{8}$$

donde  $M$  = momento flexionante;  $P/2(3L/4)$  es el producto de la reacción derecha  $R_D$  por su distancia de la sección  $Z-Z$ , y  $P(L/4)$  es el producto de la carga  $P$  por su distancia a  $Z-Z$ . Al término " $P(L/4)$ " se le da el signo opuesto al término precedente, debido a que el momento causado por éste tiende a contrarrestar el efecto de la reacción derecha.

Cuando se usó el segmento izquierdo de la viga, la única fuerza que actuaba era la reacción izquierda y su brazo de momento es  $L/4$ . Así, el momento flexionante calculado anteriormente,

$$\frac{P}{2} \left( \frac{L}{4} \right) = \frac{PL}{8}$$

es el mismo que se determinó usando el segmento derecho. Esto conduce hacia la generalización de que el valor del momento flexionante en cualquier sección dada es el mismo, sin importar si se calcula usando el segmento izquierdo o derecho de la viga.

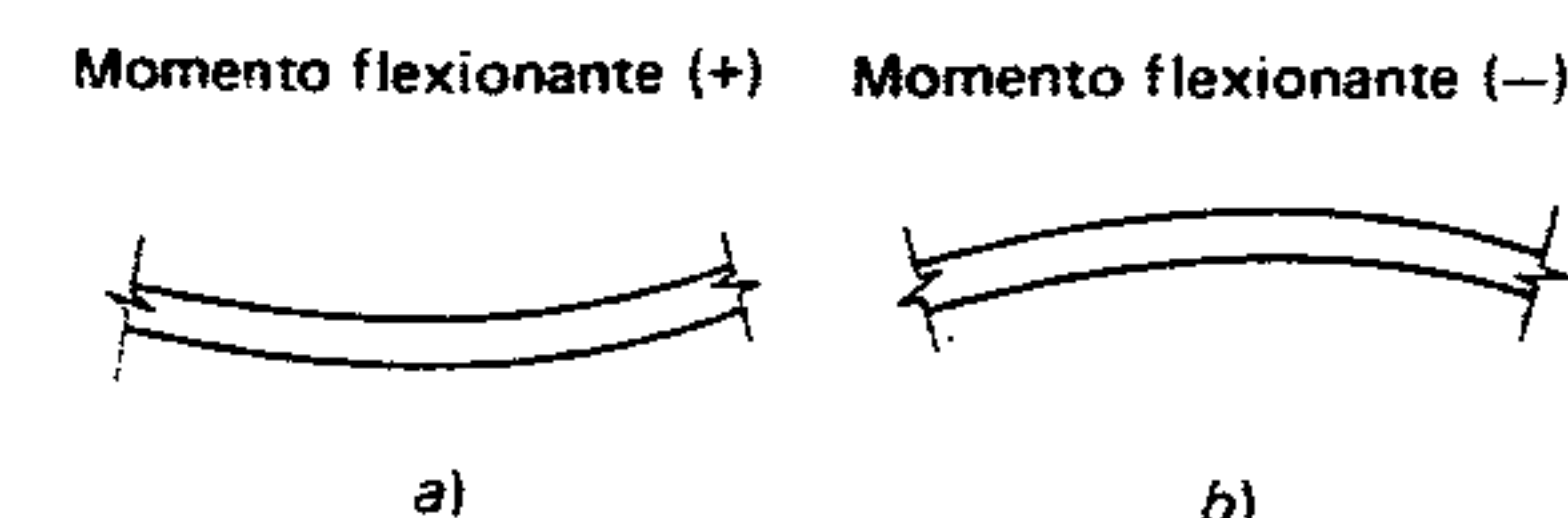


Figura 2.23 Signos convencionales para el momento flexionante.

Para evaluar el momento en cualquier sección se puede usar la siguiente definición:

*El momento flexionante en cualquier sección transversal de una viga es la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas a un lado de esta sección.*

En esta definición se supone que la viga es horizontal y que todas las fuerzas están en un plano vertical. Se pueden adoptar signos convencionales para definir mejor el tipo de momento flexionante que se produce en cualquier sección. Si la viga tiende a ser cóncava hacia arriba en la sección que se está considerando (figura 2.23a), se dice que el momento flexionante es positivo (+). Si la viga tiende a hacerse cóncava hacia abajo en la sección (figura 2.23b), el momento flexionante es negativo (-).

Un método que da el signo correcto para el momento flexionante consiste en considerar positivos todos los momentos de las fuerzas hacia arriba y negativos todos los de las fuerzas hacia abajo. Este sistema permite trabajar a partir de cualquier extremo de la viga.

**2.10 DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE**

La variación del momento flexionante de una sección a otra de una viga a todo lo largo se puede representar por medio de diagramas similares a los usados para la fuerza cortante.



### 2.11 DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE - CARGAS CONCENTRADAS

En la figura 2.24 se representa una viga con cargas concentradas iguales a cada cuarta parte de su claro. Se ha despreciado el peso propio de la viga. Por la simetría de las cargas es evidente que las reacciones son iguales y tienen un valor de  $3P/2$ . Se traza una línea base que represente el valor de cero del momento flexionante, a una distancia conveniente abajo del diagrama de cargas.

Si se toma una sección en  $A$ , la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas a la izquierda de la sección es cero, puesto que no hay fuerzas a la izquierda. Por lo tanto, el momento flexionante en  $A$  es igual a cero.

Si se toma una sección en  $B$  directamente abajo de la carga, la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas a la izquierda de la sección es  $+(3P/2)(L/4)$  o sea  $3PL/8$ . Este valor se grafica a una escala conveniente sobre la línea que representa la sección en  $B$ .

Si se traza el momento flexionante en cualquier otra sección entre  $A$  y  $B$ , se encontrará que está sobre una línea recta que conecta  $A'$  y  $B'$ . Así, para una sección a la mitad entre  $A$  y  $B$ , el momento flexionante es  $+(3P/2)(L/8) = 3PL/16$ . Este valor es exactamente la mitad del valor en  $B$ . Entonces, puede observarse que para un sistema de cargas concentradas, el momento flexionante entre

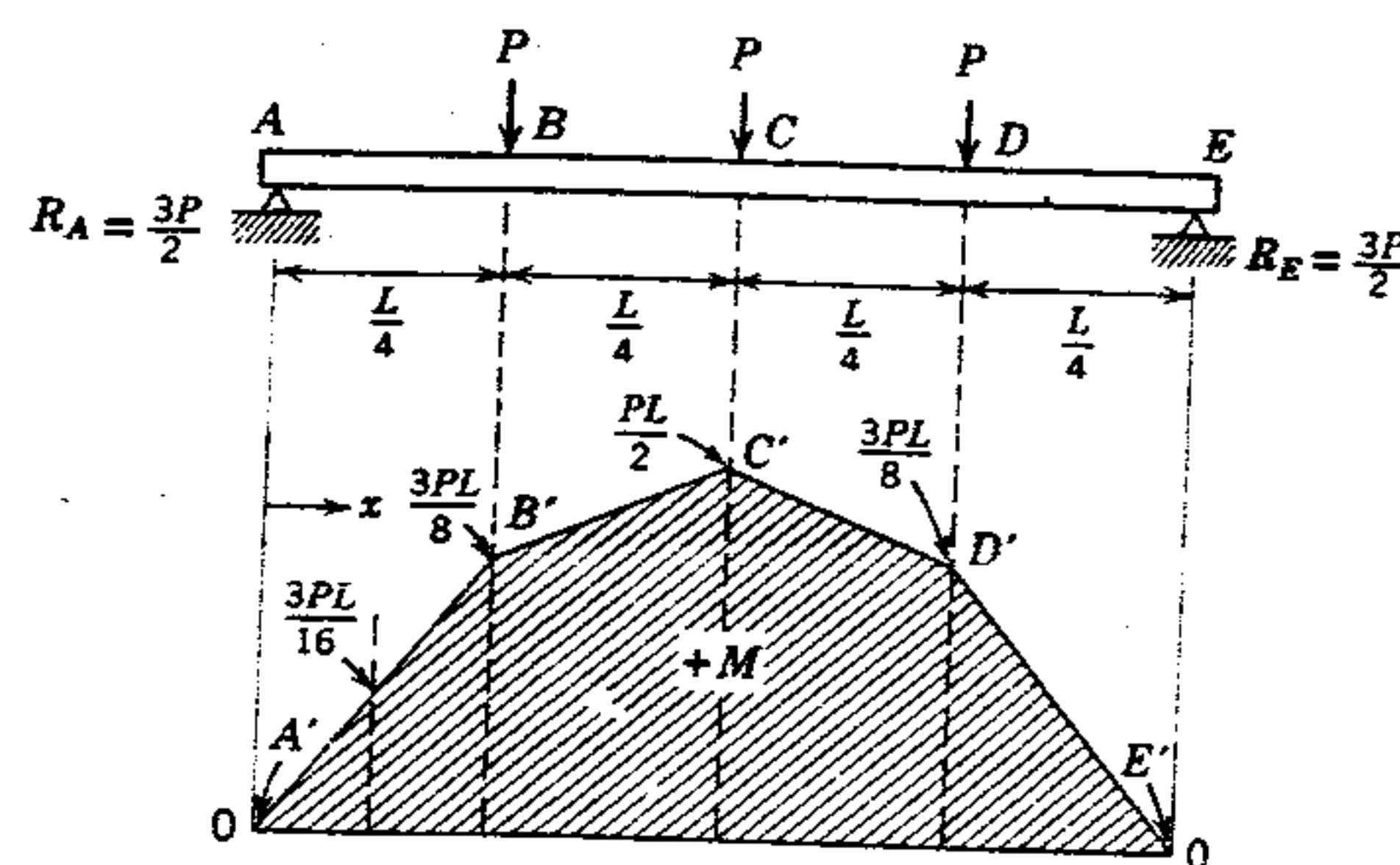


Figura 2.24 Diagrama de momento flexionante, carga concentrada.

cargas varía en forma de línea recta. Esta puede ser inclinada.

Refiriéndose de nuevo a su definición, el momento flexionante en  $C$  es  $+(3P/2)(L/2) - [P(L/4)] = 3PL/4 - PL/4 = 2PL/4$  o sea  $PL/2$ . Este valor se traza sobre la línea que representa la sección en  $C$ .

De manera similar, los momentos flexionantes en  $D$  y  $E$  se pueden calcular y trazar gráficamente. En la figura se ilustra el diagrama completo.

También se pueden plantear ecuaciones para determinar el momento flexionante en cualquier punto de la viga. La presencia de las tres cargas concentradas en la figura 2.24 plantea la necesidad de cuatro ecuaciones distintas, una para cada uno de los cuatro segmentos. Para cada ecuación considérese  $x$  igual a cero en la reacción izquierda. Entonces, para cualquier punto entre  $A$  y  $B$ , el momento será

$$M_{A-B} = \frac{3P}{2} x$$

De modo similar, entre  $B$  y  $C$

$$M_{B-C} = \frac{3P}{2} x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) = \frac{Px}{2} + \frac{PL}{4}$$

Cada ecuación es la de una línea recta; por lo tanto, el valor del momento flexionante entre  $A$  y  $B$ ,

o  $B$  y  $C$ , se puede obtener sustituyendo el valor apropiado para  $x$  en la ecuación apropiada.

### 2.12 DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE - CARGAS DISTRIBUIDAS

En la figura 2.25 se ilustra una viga sometida a una carga uniformemente distribuida en todo su claro. La carga total sobre la viga es  $wL$  y cada reacción igual a  $wL/2$ .

Si se toma una sección en el centro del claro, la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas a la izquierda de la sección es

$$\begin{aligned} M &= +\left[\frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\right] - \left[w\left(\frac{L}{2}\right)\frac{L}{4}\right] \\ &= \frac{wL^2}{4} - \frac{wL^2}{8} = \frac{wL^2}{8} \end{aligned}$$

donde  $M$  es el momento flexionante;  $wL/2(L/2)$  es la reacción izquierda por su distancia a la sección que se está considerando; y  $w(L/2)L/4$  es la carga por pie por la longitud de viga cubierta, por la distancia al centro de gravedad de la carga a la sección. Esto se indica más claramente en la figura 2.26, donde se muestra solamente el segmento izquierdo.

Si las distancias se expresan en pies y las cargas en libras, el momento flexionante se expresa en pies-libras.<sup>8</sup>

De un modo similar se podría encontrar el momento flexionante en cualquier otra sección. Si se toma otra sección de la viga a una distancia de un cuarto de la longitud del claro a partir de la reacción izquierda (figura 2.27), la ecuación sería

<sup>8</sup> En muchos libros de texto sobre mecánica, esta unidad de medición se designa como libra-pie. Aunque libra-pie es un término más preciso desde el punto de vista de la mecánica teórica, en este texto se ha usado pie-libra debido a su amplia aceptación entre los arquitectos e ingenieros profesionales.

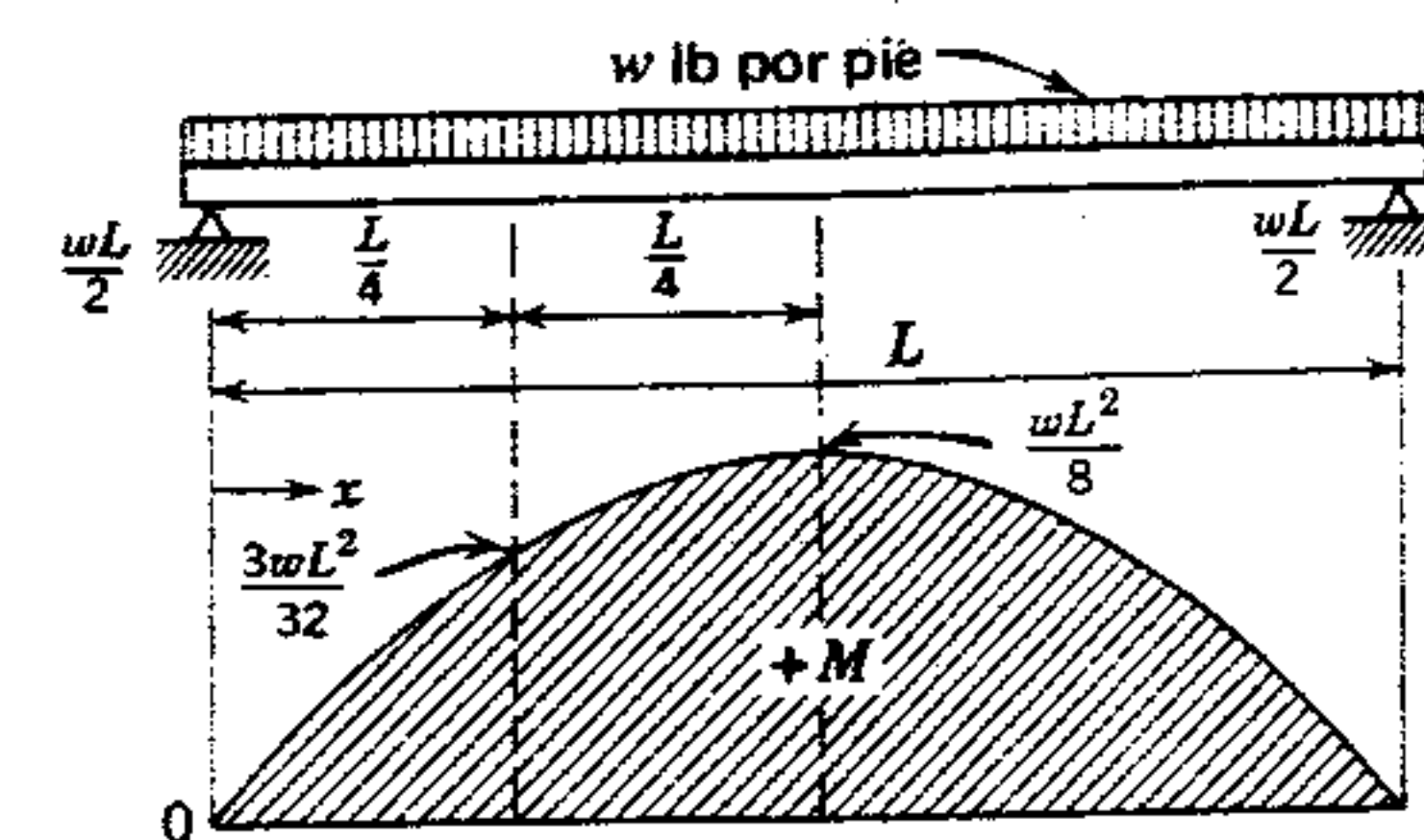


Figura 2.25 Diagrama de momento flexionante, cargas distribuidas.

$$\begin{aligned} M &= +\left[\frac{wL}{2}\left(\frac{L}{4}\right)\right] - \left[w\left(\frac{L}{4}\right)\frac{L}{8}\right] \\ M &= \frac{wL^2}{8} - \frac{wL^2}{32} = \frac{4wL^2}{32} - \frac{wL^2}{32} \\ M &= \frac{3wL^2}{32} \end{aligned}$$

Si se calcularan los momentos flexionantes en otros puntos, se encontraría que siguen una curva parabólica cuyo vértice está en el centro del claro. Por lo tanto, puede verse que bajo una carga uni-

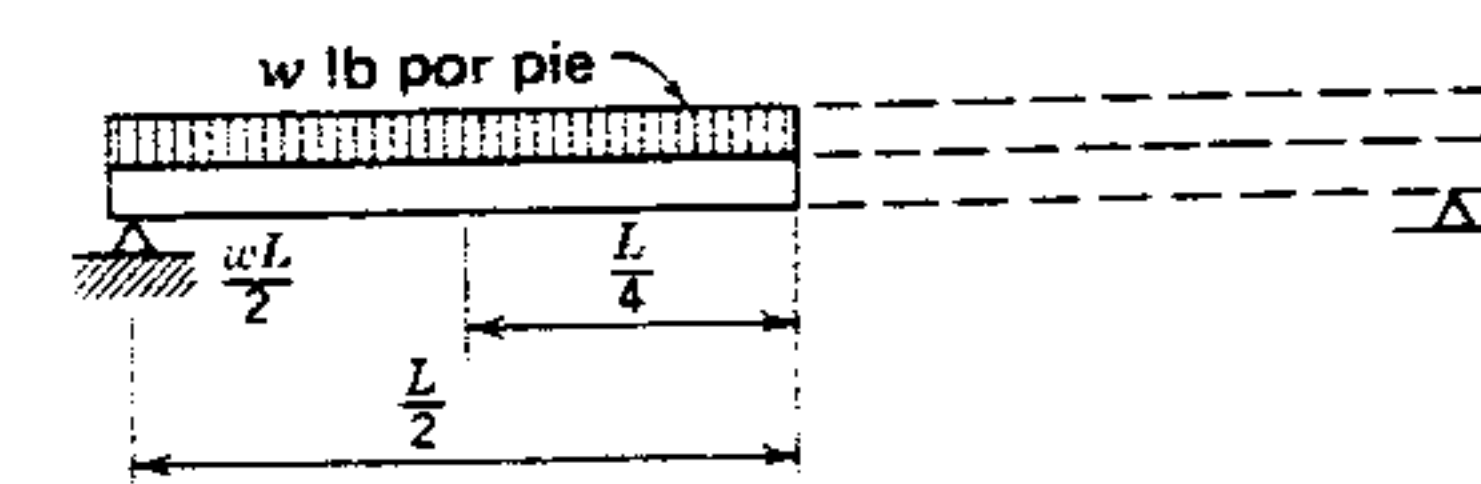


Figura 2.26 Momento flexionante en el centro del claro.

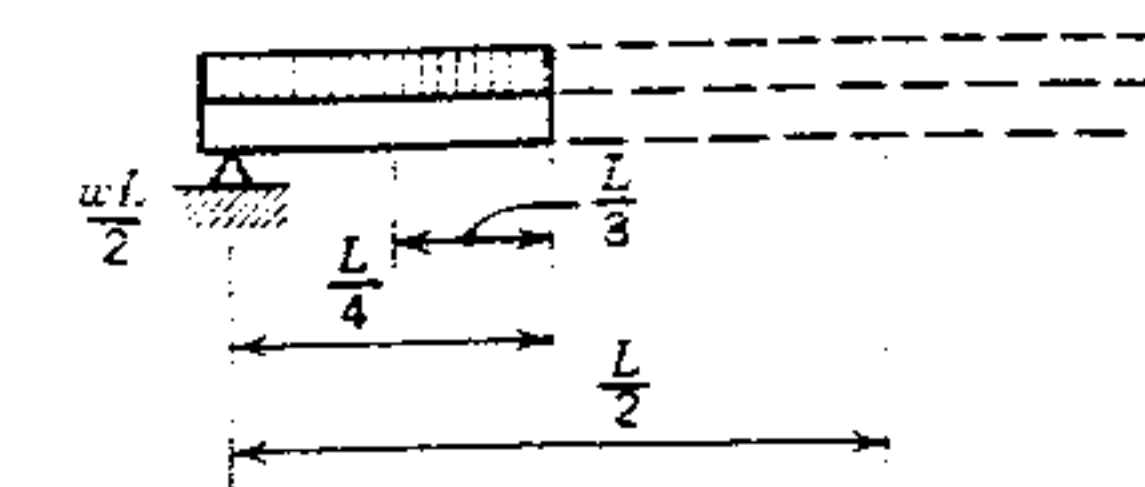


Figura 2.27 Momento flexionante en un cuarto del claro.



forme, la curva del momento flexionante es una parábola. Para trazar la gráfica del momento flexionante para una viga sometida a carga uniforme, es necesario calcular el momento a intervalos iguales de, por ejemplo, 1 ó 2 pies a lo largo del claro, o bien, construir la parábola por métodos gráficos después de determinar la ordenada máxima.

Un método alternativo para establecer el diagrama del momento flexionante sería desarrollar una ecuación para representar el momento flexionante en cualquier punto. En este caso se necesita sólo una ecuación ya que la carga está uniformemente distribuida en toda la longitud y no hay cargas concentradas (aparte de las reacciones). Considérese que  $x$  es igual a cero en la reacción izquierda; entonces el momento flexionante a cualquier distancia  $x$ , medida hacia la derecha de esa reacción, será

$$M = \frac{wL}{2}x - wx\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

Esta es la ecuación de una parábola, y la curva de esta ecuación trazada gráficamente es el diagrama de momento flexionante para la viga.

### 2.13 RELACIÓN ENTRE EL DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE Y EL DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE

En el Artículo 2.7 se construyó el diagrama de fuerza cortante para una viga sometida a cargas concentradas iguales en las cuartas partes de su longitud, y en el Artículo 2.11 se trazó el diagrama de momento flexionante para la misma viga. Estos diagramas se han combinado en la figura 2.28a.

En la figura 2.28b se combina el diagrama de cortante de la figura 2.16 y el momento flexionante de la figura 2.25, ambos para una viga sometida a una carga uniforme.

En la figura 2.28 es evidente que:

1. Sobre cualquier parte de la viga en que no hay cargas, el cortante se puede representar

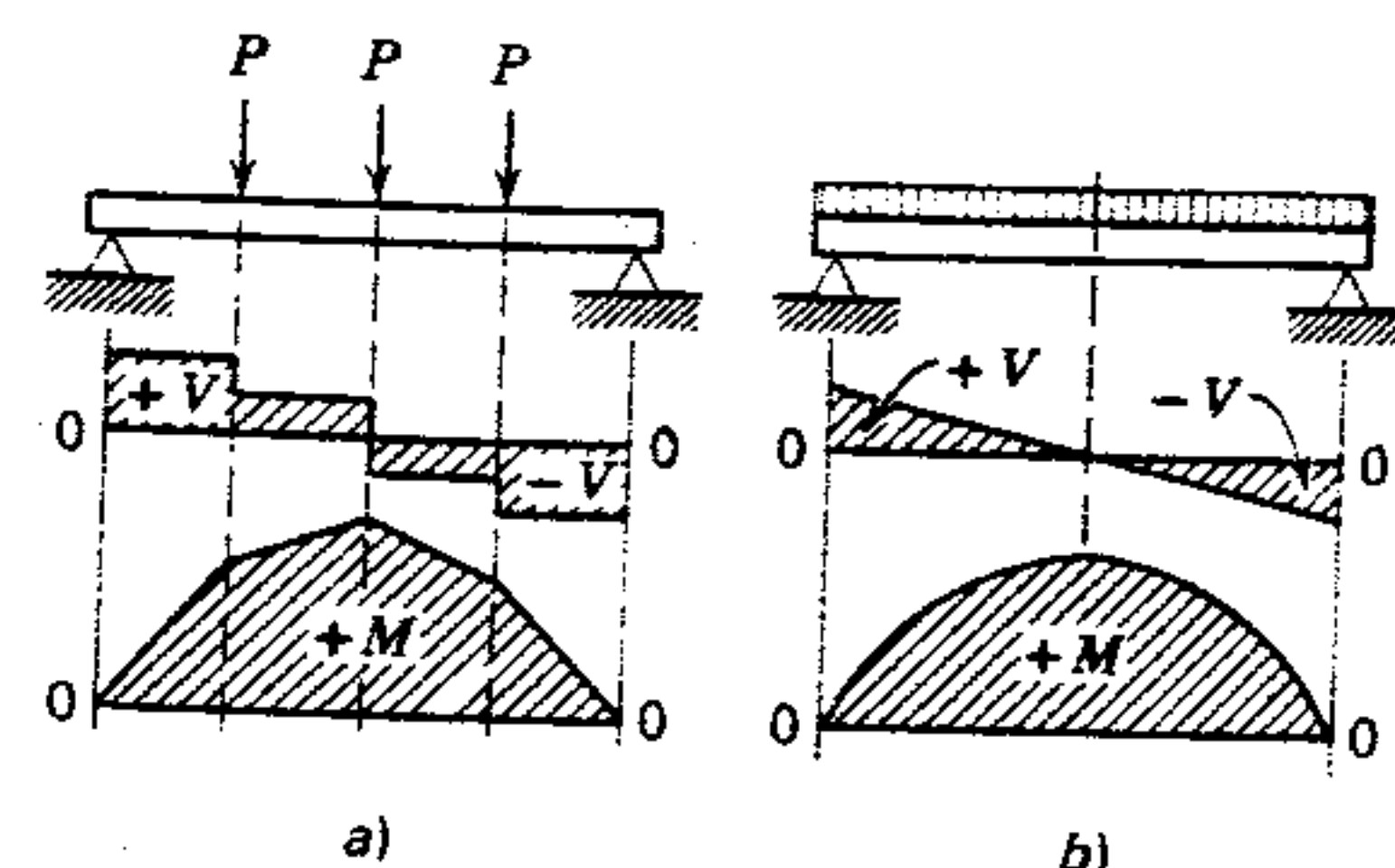


Figura 2.28 Relación entre fuerza cortante y momento flexionante.

por una línea horizontal recta y el momento flexionante por una línea recta (variable uniformemente).

2. Sobre cualquier parte de una viga sometida a una carga uniformemente distribuida, el cortante se puede representar por una línea recta inclinada y el momento por una curva parabólica.
3. En cualquier punto en que la línea que representa el cortante pasa por cero, hay una ordenada máxima del diagrama del momento flexionante.

Una cuarta relación, planteada por la figura 2.29, es que si el cortante es cero para cualquier distancia, el momento flexionante es constante para esa distancia y, por tanto, está representado por una línea recta horizontal.

Estas cuatro afirmaciones se relacionan con las condiciones específicas ilustradas. En el Artículo 2.15 se presenta un tratamiento más general de

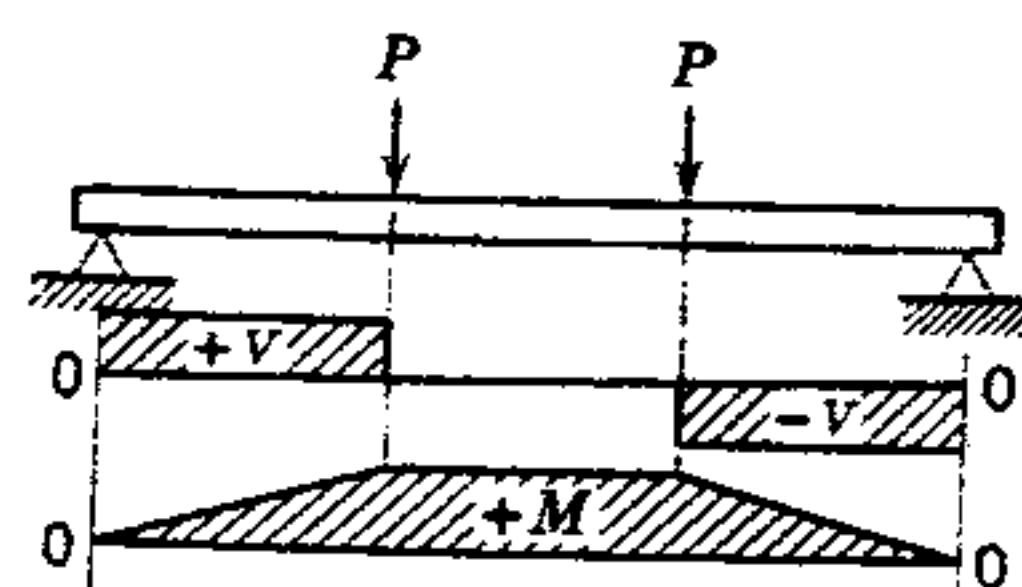


Figura 2.29 Relación entre fuerza cortante y momento.

diagramas de vigas,<sup>9</sup> y se muestra matemáticamente que las relaciones anteriores se verifican para cualquier viga bajo cualquier sistema de cargas verticales. En el Artículo 2.15 también se demuestra el uso de las ecuaciones que representan los diagramas.

En el Artículo 2.14, en el Apéndice B y en el Manual AISC se presentan diagramas y fórmulas de vigas para los tipos más comunes de cargas.<sup>10</sup> El lector debe comprobar un número representativo de estas fórmulas haciendo su derivación.

En los siguientes ejemplos las cargas y claros son los mismos que se usan para los ejemplos designados por números correspondientes del Artículo 2.8. Se han reproducido los diagramas de cortante para mostrar la relación entre cortante y momento flexionante y para ayudar en la construcción de los diagramas de momento flexionante.

#### Ejemplo 1

Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga ilustrada en la figura 2.30. No considerar el peso propio de la viga.

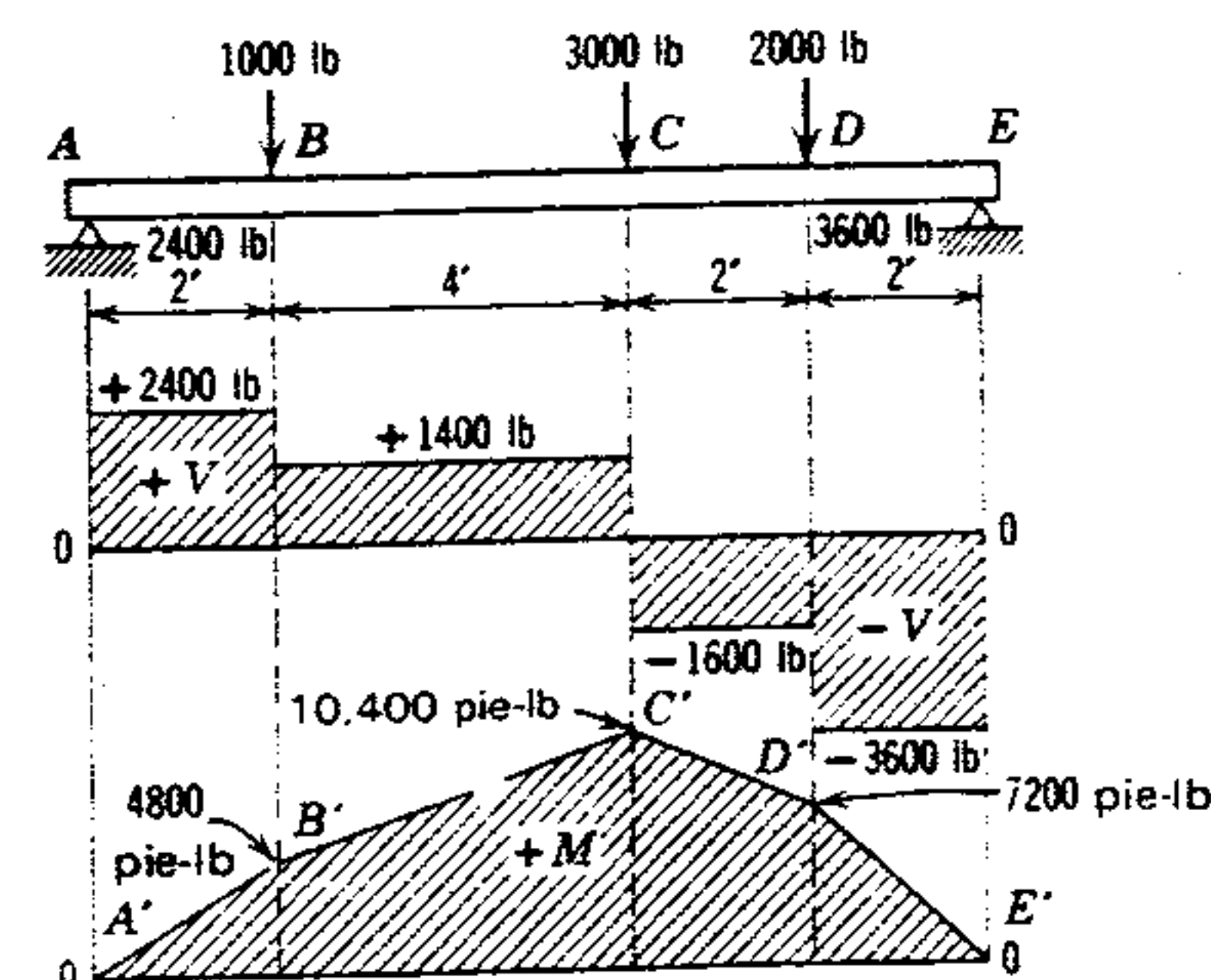


Figura 2.30 Ejemplo 1.

<sup>9</sup> Diagramas de viga es un término abreviado para comprender diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante para cualquier viga.

<sup>10</sup> Véase el Manual of Steel Construction, octava edición, American Institute of Steel Construction, Chicago, 1980.

#### Solución

Véase el ejemplo 1 del Artículo 2.8 para el cálculo de reacciones y la construcción del diagrama de fuerza cortante.

Partiendo de la izquierda, los momentos flexionantes son

$$M_A = 0$$

$$M_B = +2400(2) = 4800 \text{ ft-lb}$$

$$M_C = +[2400(6)] - [1000(4)] = 14,400 - 4000 = 10,400 \text{ ft-lb}$$

$$M_D = +[2400(8)] - [1000(6)] - [3000(2)] = 7200 \text{ pies-lb}$$

$$M_E = 0$$

#### Ejemplo 2

Dibujar los diagramas de cortante y momento flexionante para la viga de la figura 2.31. No considerar el peso propio de la viga.

#### Solución

Véase el ejemplo 2 después del Artículo 2.8 para el cálculo de reacciones y la construcción del diagrama de fuerza cortante.

El momento flexionante máximo ocurre en el centro y es

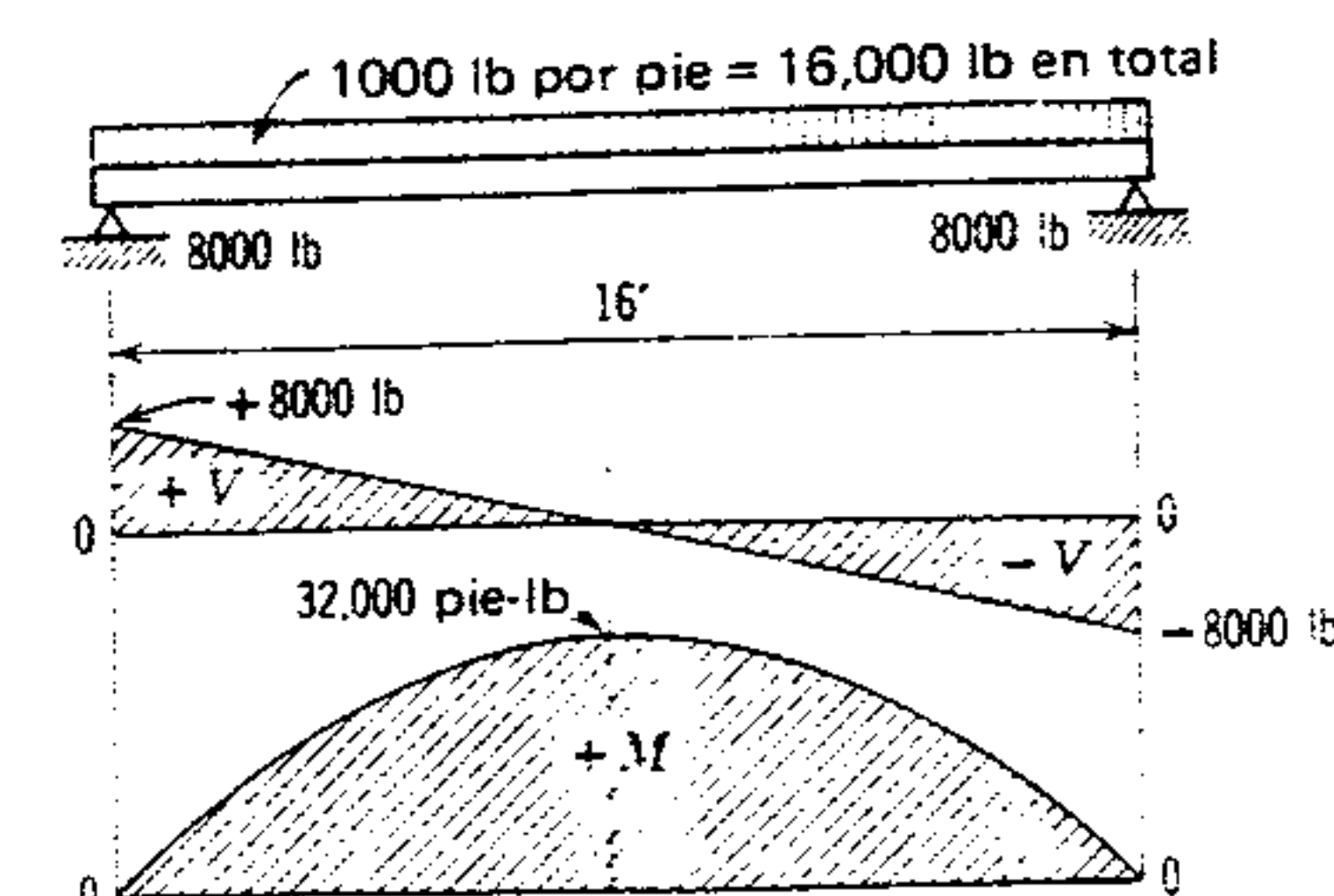


Figura 2.31 Ejemplo 2.



$$M = +[8000(8)] - [1000(8)4] \\ = 64,000 - 32,000 = 32,000 \text{ pies-lb}$$

Los momentos a intervalos de 1 ó 2 pies a lo largo del claro se calculan de una manera similar y se dibuja una curva a través de los puntos trazados.

### Ejemplo 3

Dibujar los diagramas de cortante y momento flexionante de la viga de la figura 2.32. No considerar el peso de la viga.

### Solución

Véase el ejemplo 3 del Artículo 2.8 para el cálculo de reacciones y la construcción del diagrama de fuerza cortante.

Partiendo de la izquierda, los momentos flexionantes son

$$M_A = 0$$

$$M_B = -[2000(4)] = -8000 \text{ pies-lb}$$

Véase la figura 2.23a y b para la determinación del signo.

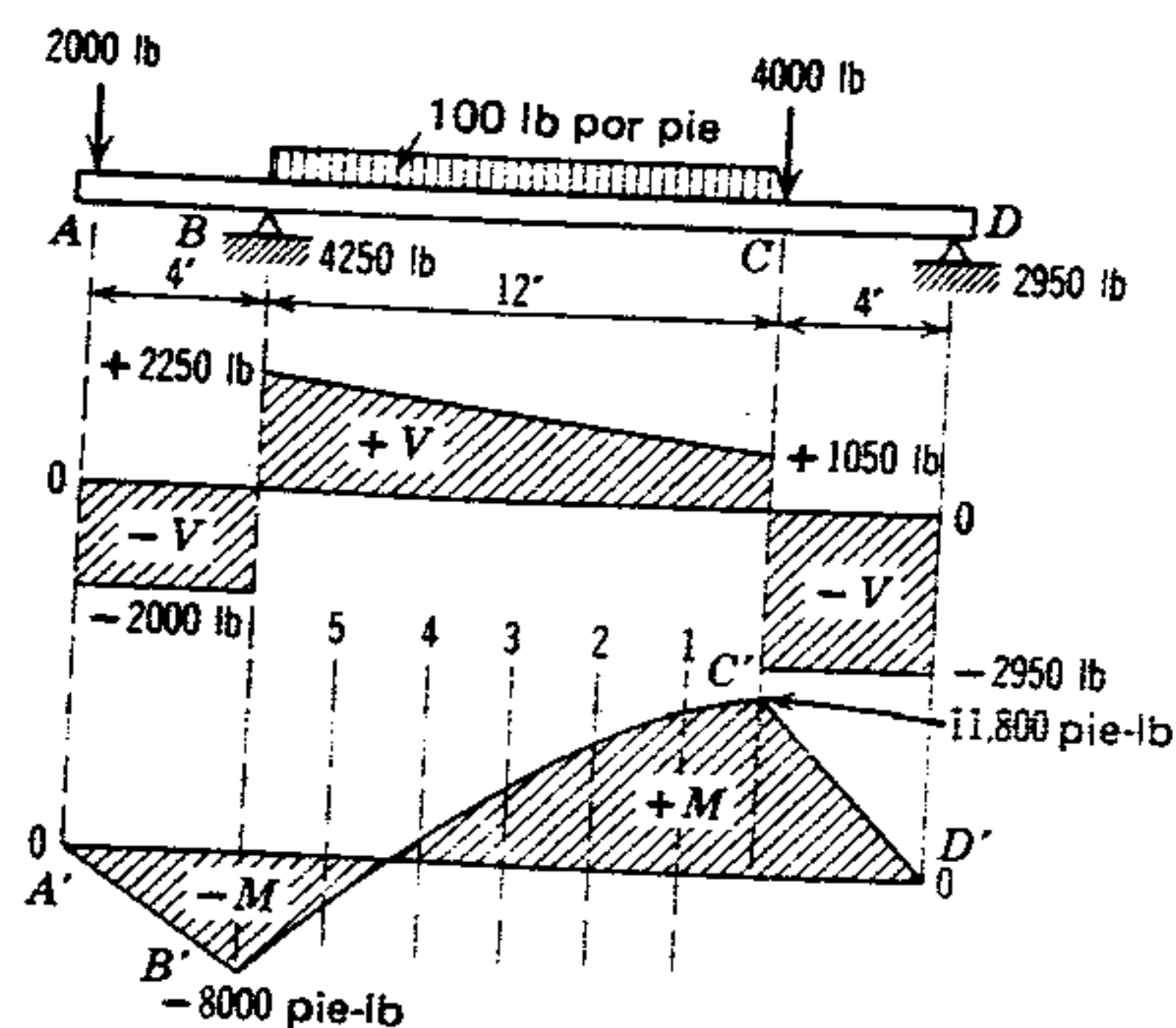


Figura 2.32 Ejemplo 3.

Partiendo de la derecha

$$M_C = +[2950(4)] = +11,800 \text{ pies-lb}$$

Resolviendo el momento flexionante a intervalos de 2 pies entre C y B

$$M_1 = +[2950(6)] - [4000(2)] \\ - [100(2)1] = 9500 \text{ pies-lb}$$

$$M_2 = +[2950(8)] - [4000(4)] \\ - [100(4)2] = 6800 \text{ pies-lb}$$

$$M_3 = +[2950(10)] - [4000(6)] \\ - [100(6)3] = 3700 \text{ pies-lb}$$

$$M_4 = +[2950(12)] - [4000(8)] \\ - [100(8)4] = 200 \text{ pies-lb}$$

$$M_5 = +[2950(14)] - [4000(10)] \\ - [100(10)5] = -3700 \text{ pies-lb}$$

### Ejemplo 4

Una viga cantiléver tiene un voladizo de 14 pies a partir de la cara de un muro. Soporta una carga uniforme de 200 lb por pie que se extiende desde el extremo empotrado hasta 2 pies antes del extremo libre, y una carga concentrada de 1000 lb aplicada en el extremo libre. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. No considerar el peso de la viga.

### Solución (1)

La viga está empotrada en su extremo izquierdo, como en la figura 2.33a. Para el trazo del diagrama de cortante, véase el ejemplo 4 del Artículo 2.8. Partiendo del extremo libre, los momentos flexionantes son

$$M_A = 0$$

$$M_B = -[1000(2)] = -2000 \text{ pies-lb}$$

(Véase la figura 2.23a y b para la determinación del signo).

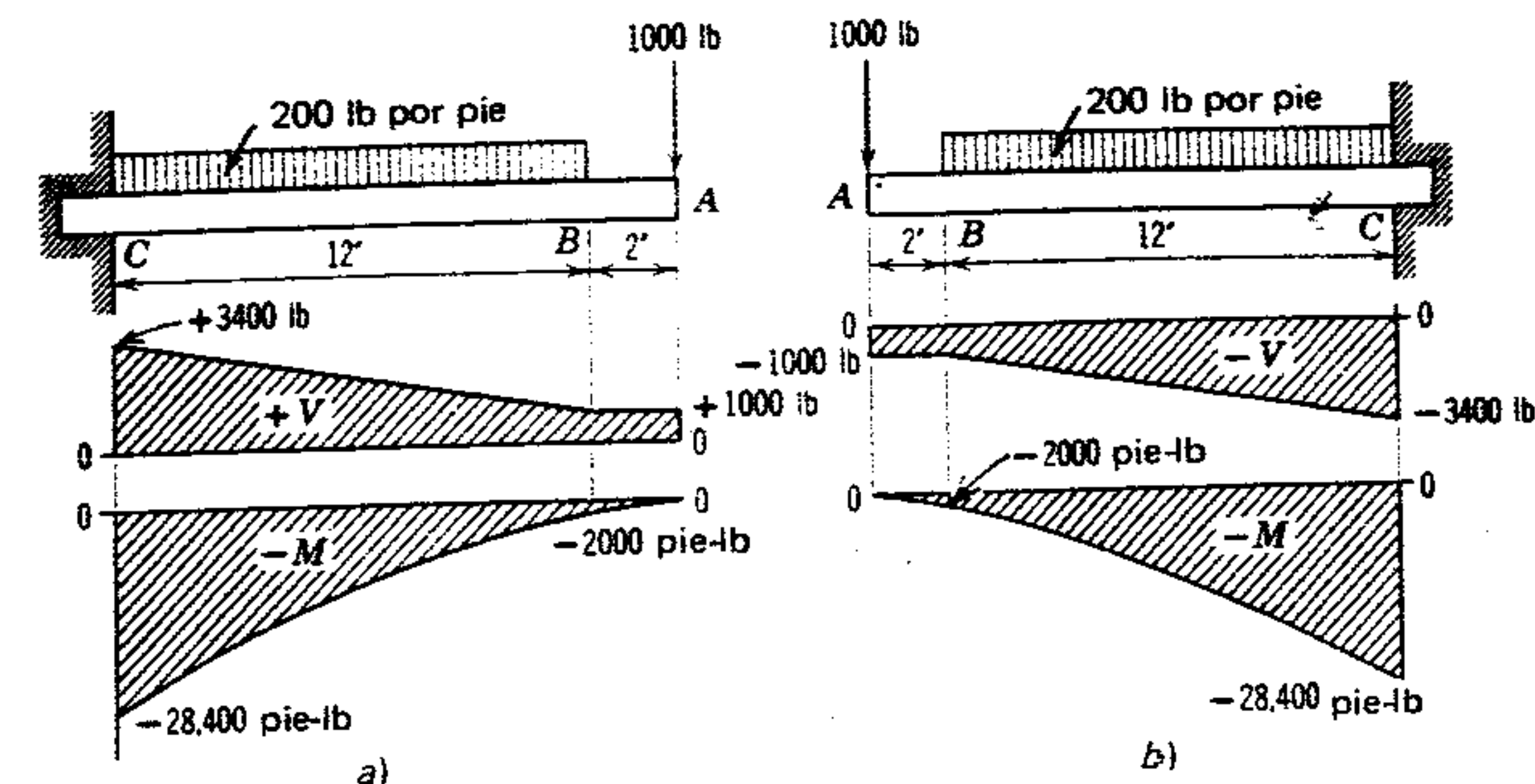


Figura 2.33 Ejemplo 4.

$$M_C = -[1000(14)] - [200(12)6] \\ = -28,400 \text{ pies-lb}$$

El momento en el punto central entre C y d es

$$M = -[1000(8)] - [200(6)3] \\ = -11,600 \text{ pies-lb}$$

Los momentos en otros puntos entre C y d se calculan de una manera similar.

### Solución (2)

La viga está empotrada por su extremo derecho, como en la figura 2.33b.

La curva del momento será como se ilustra. La comprobación de ésta se deja al lector. En la figura 2.23a y b se verá que el signo del momento flexionante en una viga con voladizo es el mismo si la viga está empotrada a la izquierda o a la derecha.

## 2.14 DIAGRAMAS DE VIGAS COMUNES

Se puede economizar mediante la simplificación y repetición de los patrones y detalles de los marcos estructurales. Cuando el patrón de marcos seleccionado es sencillo y repetitivo, el diseñador puede ahorrar mediante la tipificación de los diagramas

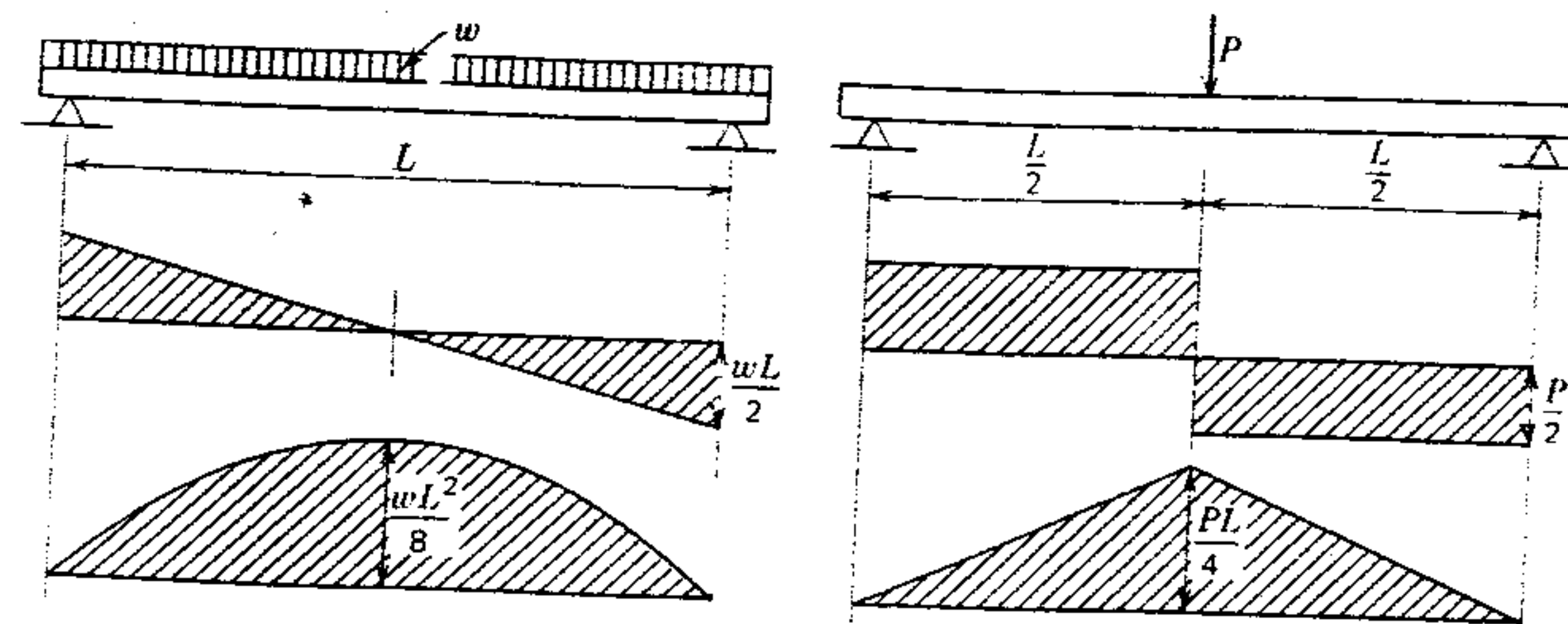
de cargas en miembros y las fórmulas que contienen para obtener valores máximos en el diseño. En la figura 2.34 se ilustran cuatro diagramas de éstos, junto con fórmulas para cortante y momento máximos. Como se señaló en el Artículo 2.13, sería conveniente que el lector derivara estos valores, en este caso, los que aparecen en la figura 2.34c y d.

Mientras el material de la viga permanezca dentro de su límite elástico (Apéndice A), las reglas de superposición se pueden aplicar a los diagramas de vigas, es decir, valores de cortante o momento derivados de una carga dada en cualquier punto a lo largo de una viga se pueden agregar directamente a los valores de cortante o momento correspondientes derivados de otras cargas en ese mismo punto. Esto permite la determinación de valores de cortante y momento debidos a cargas combinadas, calculando cada uno por separado y luego agregando los valores en un punto dado para llegar a valores agregados. Un ejemplo al respecto se muestra en la figura 2.35. Una viga simple con una carga uniforme (figura 2.35a) y una carga concentrada en el centro del claro (figura 2.35b) daría un diagrama combinado como el de la figura 2.35c.

## 2.15 ANÁLISIS DE DIAGRAMAS DE VIGAS

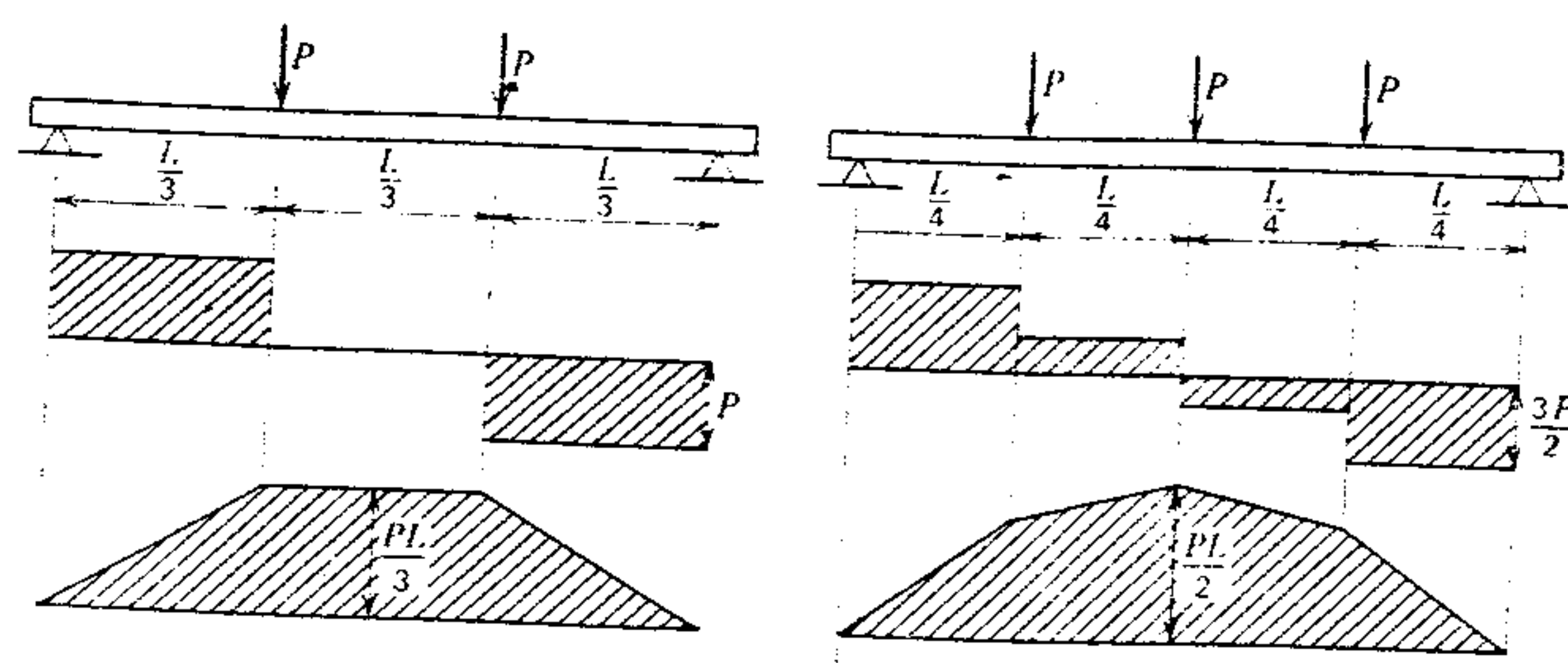
En este artículo se presenta un análisis más general de la relación entre fuerza cortante y momento fle-





a) Carga uniforme.

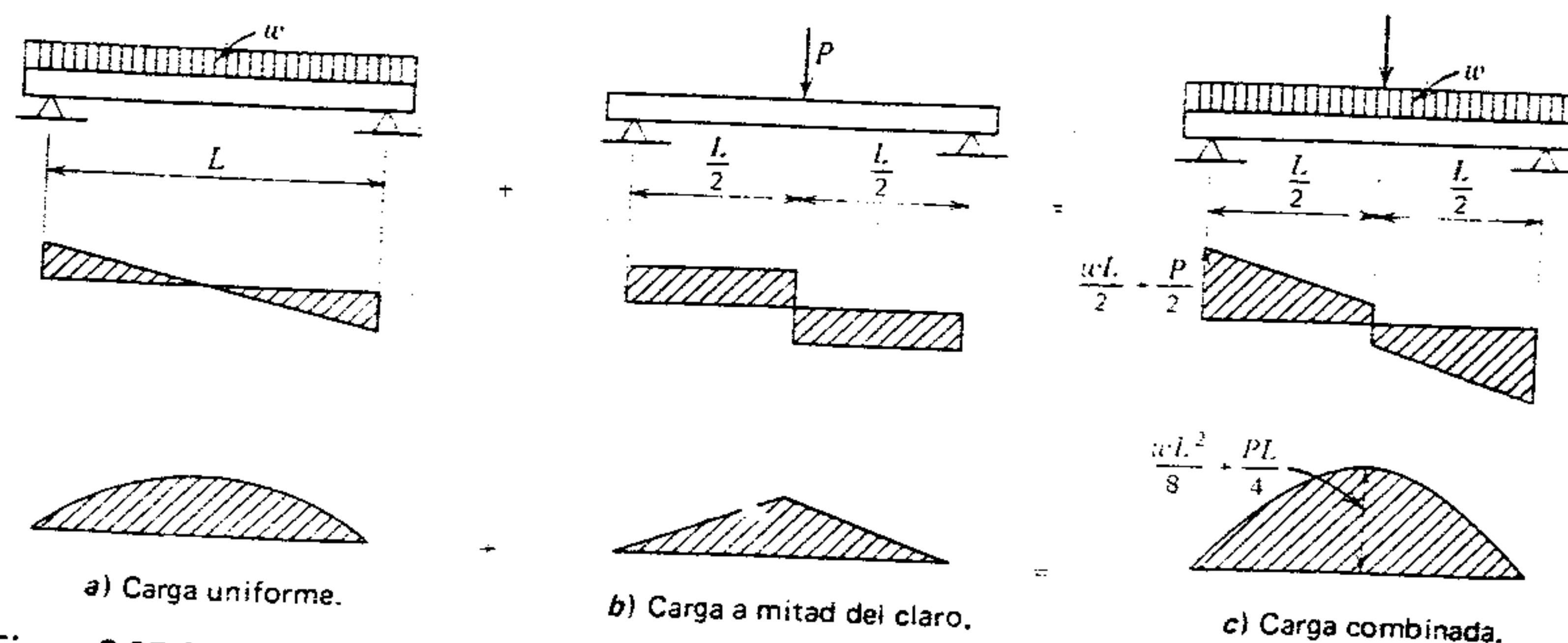
b) Carga a la mitad del claro.



c) Carga en los tercios del claro.

d) Carga en las cuartas partes del claro.

Figura 2.34 Diagramas de viga común.



a) Carga uniforme.

b) Carga a mitad del claro.

c) Carga combinada.

Figura 2.35 Diagramas sobrepuestos.

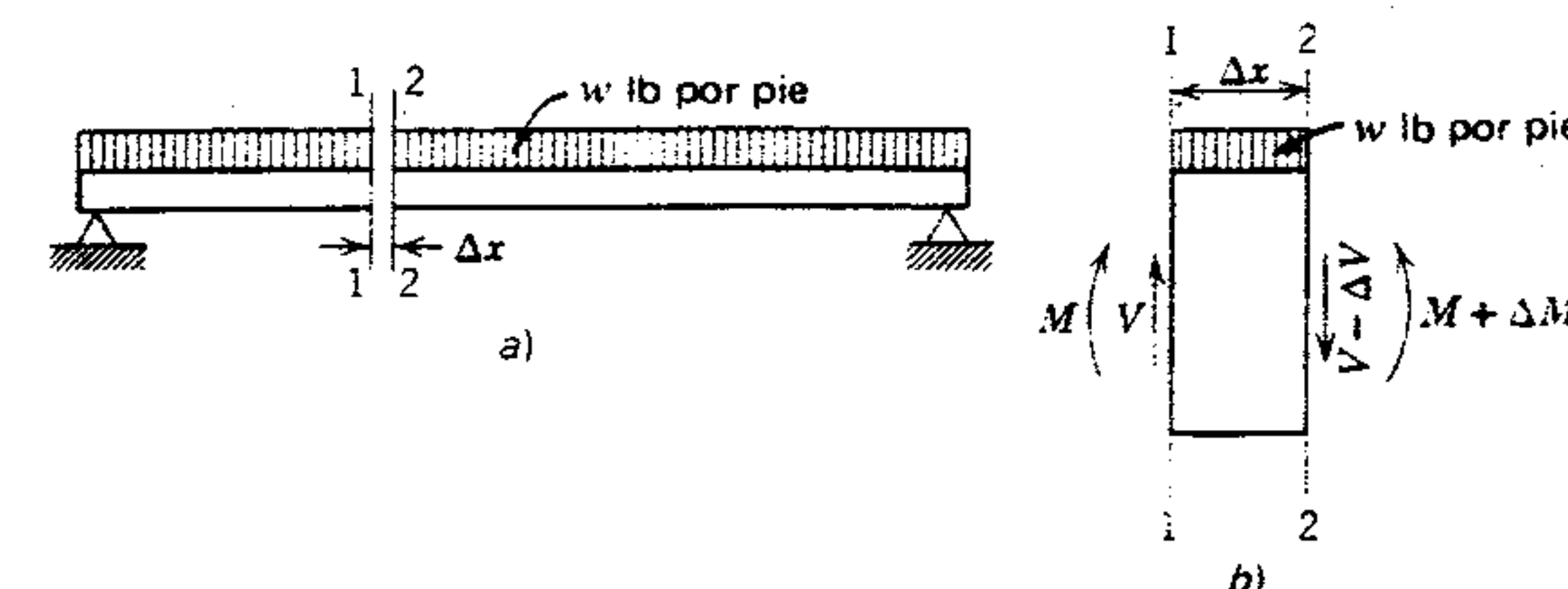


Figura 2.36 Análisis de diagramas.

xionante que el desarrollado en el Artículo 2.13. Aunque algunos de los pasos comprendidos pueden no ser claros para quienes no están familiarizados con el cálculo, se deben estudiar con cuidado las conclusiones a que se llega y los diagramas explicativos.

En la figura 2.36a se presenta una viga a la que se le eliminó una parte entre dos secciones transversales (1-1 y 2-2). En la figura 2.36b se muestra un diagrama de cuerpo libre a mayor escala de este arreglo. Se supone que las dos secciones están muy cercanas entre sí, y la distancia entre ellas se ha designado como  $\Delta x$ . Las cantidades  $\Delta M$  y  $\Delta V$  representan, respectivamente, los incrementos en el momento flexionante y el cortante entre las dos secciones. Como el cuerpo libre está en equilibrio, la suma de momentos en la sección 1-1 es cero. Por lo tanto

$$M - (M + \Delta M) + [(V - \Delta V)\Delta x] + \left[ w(\Delta x) \frac{\Delta x}{2} \right] = 0$$

y

$$\Delta M = V\Delta x - \Delta V\Delta x + w\left(\frac{\Delta x^2}{2}\right)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por  $\Delta x$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = V - \Delta V + w\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Ahora, el límite de  $\Delta M/\Delta x$ , a medida que  $\Delta x$  se aproxima a cero, es la derivada de  $dM/dx$ , y en el límite, las cantidades  $\Delta V$  y  $w(\Delta x/2)$  se vuelve cero. En consecuencia,

$$\frac{dM}{dx} = V$$

y, como la derivada mide la tasa de cambio de una función (la pendiente), se puede concluir que el cortante en cualquier sección de una viga mide la tasa de cambio del momento flexionante en esa sección (figura 2.37).

Refiriéndose de nuevo a la figura 2.36b y aplicando la condición de que  $\Sigma V = 0$ , se puede mostrar de manera similar que

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

(la  $w$  hacia abajo se considera negativa)

Esto significa que la intensidad de la carga en cualquier punto sobre una viga determina la pendiente del diagrama de fuerza cortante en ese punto.

La primera regla básica de las relaciones del diagrama de vigas se puede establecer como sigue:

*La pendiente del diagrama de momento flexionante en cualquier punto es igual a la ordenada del diagrama de fuerza cortante correspondiente en ese mismo punto; y la pendiente del dia-*



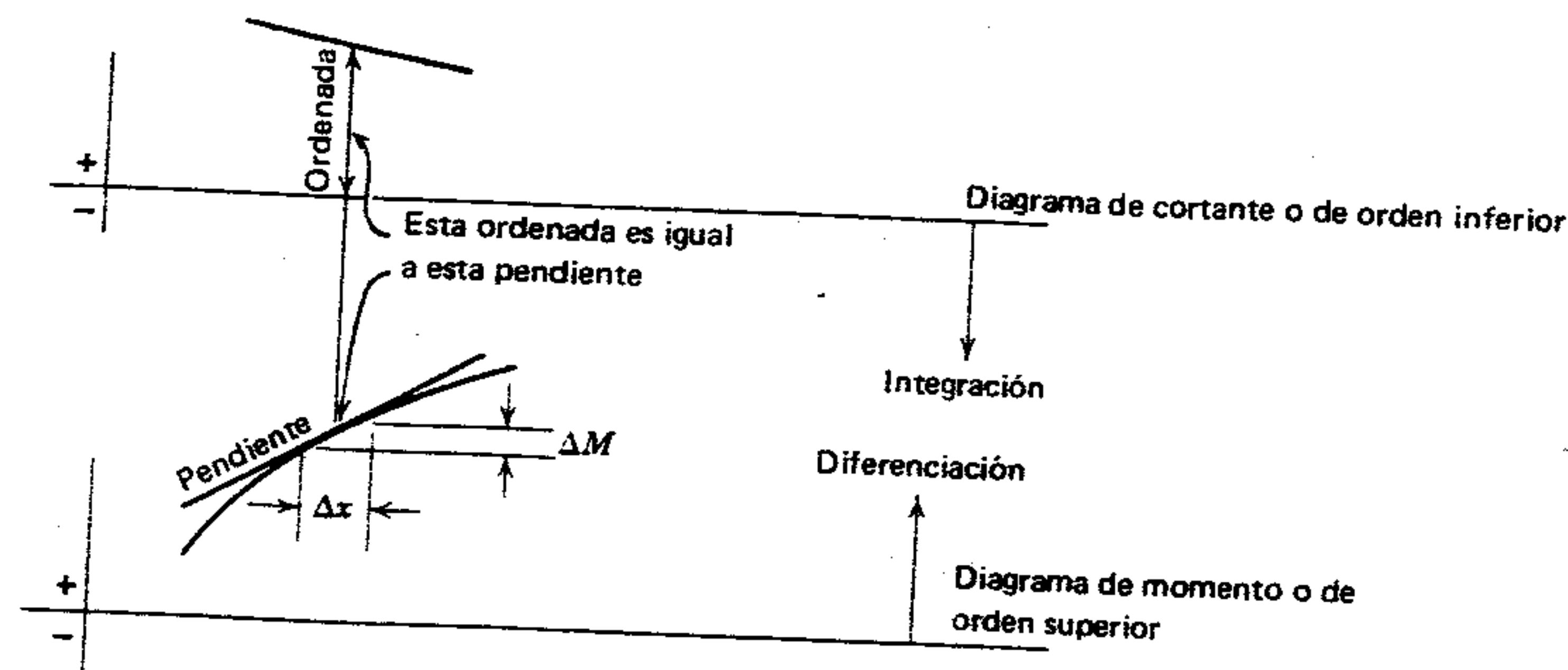


Figura 2.37 Relación entre pendiente y ordenada.

*grama de cortante en cualquier punto es igual a la ordenada del diagrama de cargas correspondiente<sup>11</sup> en el mismo punto.*

De la explicación precedente se ve que una curva o diagrama de cortante se puede derivar el diagrama de momento flexionante correspondiente, por medio del proceso de diferenciación. Esta operación va desde un diagrama de "orden superior" a uno de "orden inferior", es decir, de los diagramas de momento flexionante, fuerza cortante y de cargas, el de momento flexionante es el de orden más alto de los tres, y el de cargas, el más bajo (figura 2.37).

La construcción matemática del siguiente diagrama de orden superior a partir de un diagrama dado comprende el proceso de integración, es decir, para obtener el diagrama de momento flexionante del diagrama de fuerza cortante es necesario integrar la curva de cortante. La construcción de las curvas de fuerza cortante y momento flexionante por medio de integración se presenta en el ejemplo dado al final de este artículo.

<sup>11</sup> Un diagrama de cargas es simplemente una representación gráfica de la variación de la intensidad de la carga (carga unitaria) sobre la viga. Las cargas que actúan hacia abajo tienen signo negativo.

La segunda regla básica de las relaciones de diagramas de vigas se deriva de la explicación anterior y se puede establecer como sigue:

*El cambio en el momento flexionante entre dos puntos cualesquiera es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre los mismos dos puntos; y el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera es igual al área del diagrama de carga entre los dos mismos puntos.*

Esta relación entre la fuerza cortante y el momento flexionante se muestra en la figura 2.38.

Una de las conclusiones del Artículo 2.13 fue que en cualquier punto en que la línea de cortante pasa por cero, hay una ordenada máxima de la curva de momento flexionante. Esto también es evidente en el estudio de la primera regla básica dada en el Artículo anterior, puesto que la tangente a la curva de momento flexionante puede ser horizontal (pendiente cero) sólo donde el valor del cortante ( $dM/dx$ ) es igual a cero. En la figura 2.39 se ilustra este punto, así como otras consideraciones sobre la pendiente.

### Ejemplo

Una viga simplemente apoyada, con un claro de 20 pies, soporta una carga uniformemente distribuida

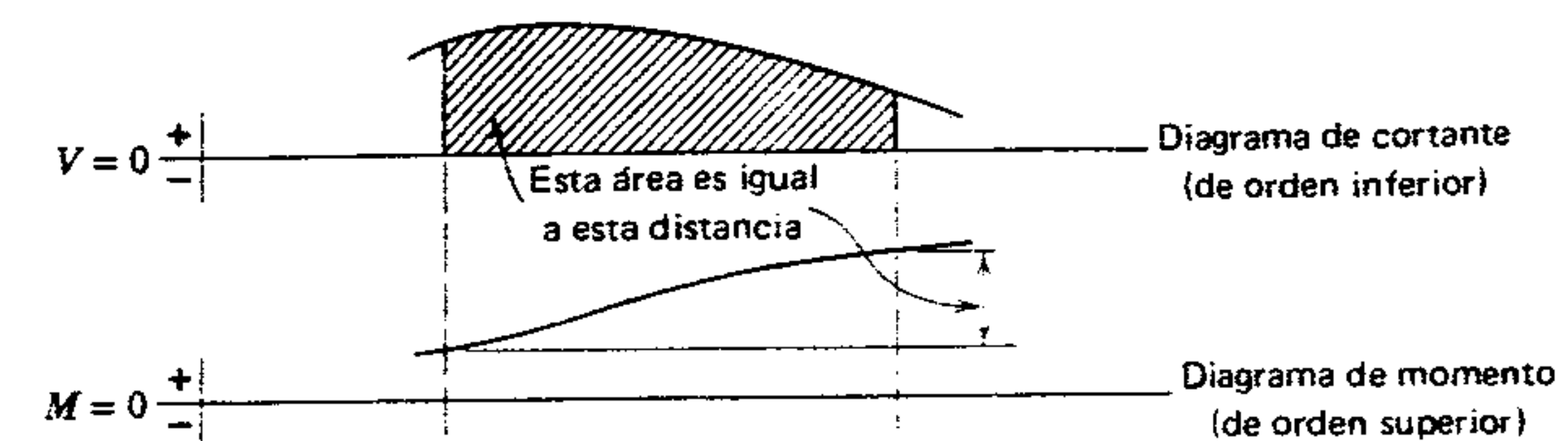


Figura 2.38 Relación de cambio área-ordenada.

de 2 kips por pie sobre toda su longitud, y una carga concentrada de 4 kips aplicada a 5 pies del apoyo izquierdo (figura 2.40a). Trazar los diagramas de cargas, cortante y momento flexionante.

### Solución

- Al calcular las reacciones se verá que  $R_L = 23$  kips y  $R_D = 21$  kips. Estos valores están anotados en el "diagrama de carga" de la figura 2.40b. Tanto la carga distribuida como la concentrada están trazadas abajo de la línea base y tienen signos negativos (véase la nota de pie 11). Como la intensidad de la carga distribuida (2 kips por pie) es constante a todo lo largo de la viga, ésta se puede representar con la ecuación

$$w = -2$$

y éste será su valor en *cualquier* punto  $x$  a la derecha de  $R_L$ .

- La ecuación para el cortante en cualquier punto entre  $R_L$  y 5 pies a la derecha (punto de aplicación de la carga concentrada) es la integral de la ecuación de carga entre estos mismos límites, es decir,

$$V_{0-5} = \int -2 = -2x + C$$

La constante de integración  $C$  se determina observando que el valor del cortante en un punto, entre los límites indicados, es conocido, es decir, en  $R_L$ . Por lo tanto, cuando  $x = 0$ ,  $V = 23$  kips. Sustituyendo en la ecuación anterior,

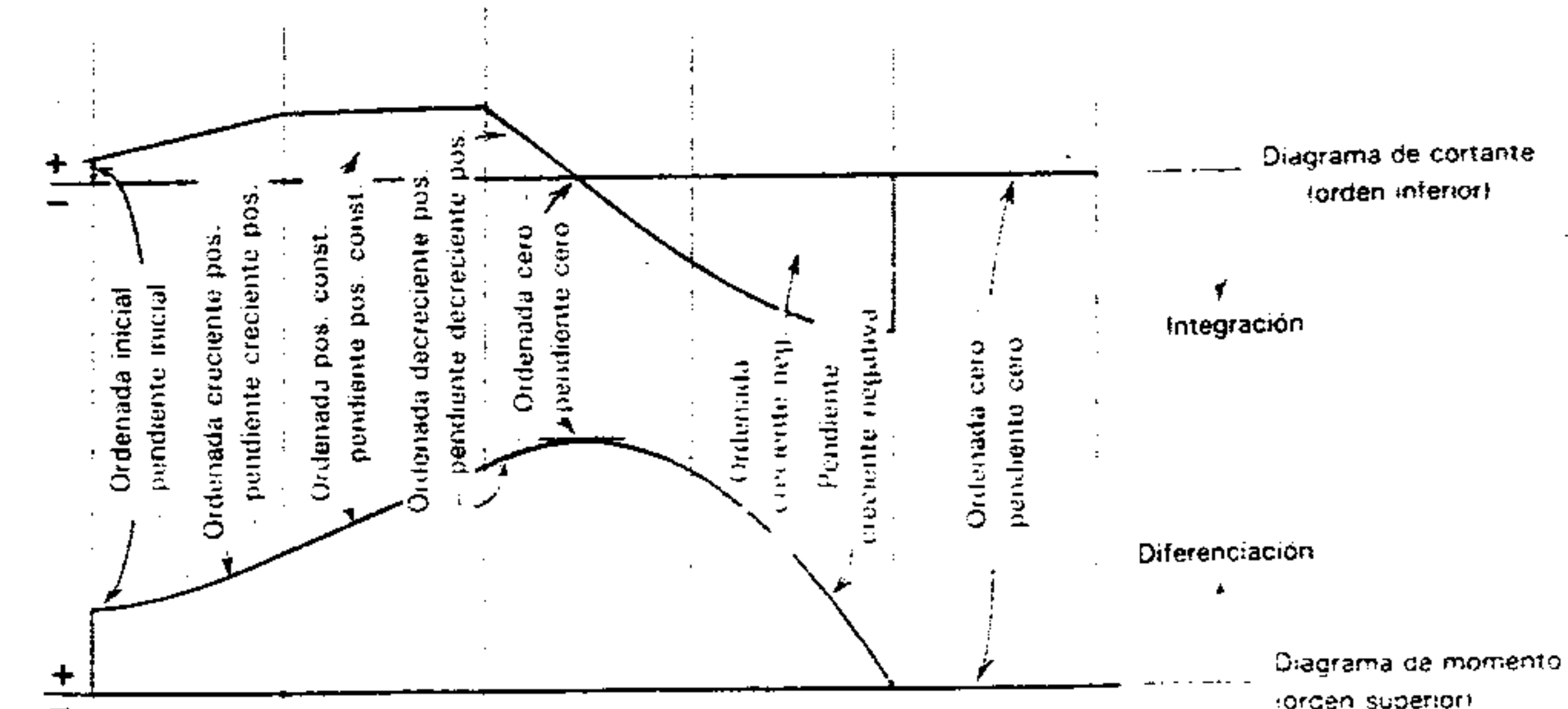


Figura 2.39 Relación entre diagramas superior e inferior.



$$V = -2x + C$$

$$23 = -2(0) + C$$

o

$$C = 23$$

y la ecuación final del diagrama de fuerza cortante entre los límites  $x = 0$  y  $x = 5$  pies es

$$V_{0-5} = 23 - 2x$$

Por lo tanto, el cortante (inmediatamente a la izquierda de la carga concentrada) en  $x = 5$  es

$$V_{5L} = 23 - 2(5) = 13 \text{ kips}$$

y el cortante inmediatamente a la derecha de la carga concentrada es

$$V_{5R} = 13 - 4 = 9 \text{ kips}$$

Estos valores están trazados en el diagrama de cortante (figura 2.40c).

- Para la porción de la viga entre la carga concentrada y la reacción derecha ( $R_D$ ), la ecuación de cortante para la carga distribuida tiene la misma expresión general puesto que la intensidad de la carga es la misma a todo lo largo de la viga. Por lo tanto,

$$V_{5-20} = \int -2 = -2x + C$$

Sin embargo, cuando  $x = 5$ ,  $V = 9$ , de modo que la constante de integración viene a ser

$$9 = -2(5) + C$$

o

$$C = 19$$

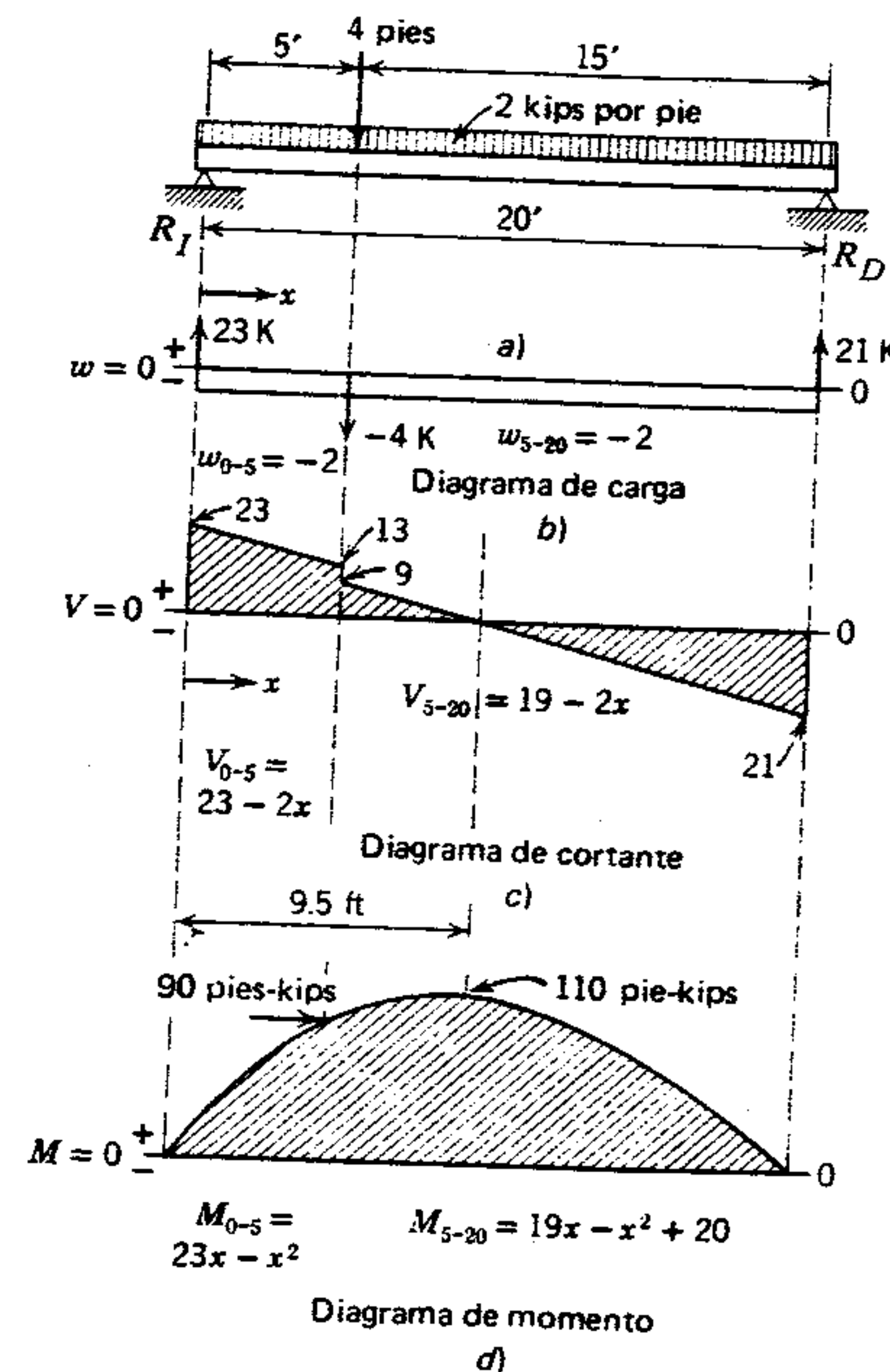


Figura 2.40 Ejemplo: Análisis de diagramas de vigas.

Por lo tanto, el cortante en *cualquier* punto entre la carga concentrada y  $R_D$  está dado por la expresión

$$V_{5-20} = 19 - 2x$$

donde  $x$  se mide de nuevo a partir de  $R_L$ . Como el cortante inmediatamente a la izquierda de la reacción derecha debe ser numéricamente igual a  $R_D$ , la ecuación se debe comprobar como sigue:

$$V_{(x=20)} = 19 - 2x = 19 - 2(20) = -21 \text{ kips}$$

- El punto de cortante cero, que ocurre entre  $x = 5$  y  $x = 20$ , se puede encontrar algebrai-

camente igualando a cero la ecuación de cortante aplicable y resolviendo para  $x$ , es decir,

$$V = 19 - 2x = 0$$

$$x = 9.5 \text{ pie}$$

- La ecuación para la curva del momento flexionante en cualquier punto entre  $R_L$  y la carga concentrada, se puede encontrar mediante integración de la ecuación de cortante correspondiente. Así

$$V_{0-5} = 23 - 2x$$

y

$$M_{0-5} = \int 23 - 2x = 23x - x^2 + C$$

Evaluando la constante de integración se observará que  $M = 0$  cuando  $x = 0$  y, en consecuencia, el valor de  $C$  también es cero. Por tanto,

$$M_{0-5} = 23x - x^2$$

De esta ecuación, el momento a 5 pies de  $R_L$  es

$$M_{(x=5)} = 23(5) - 5^2$$

$$M_{(x=5)} = 115 - 25 = 90 \text{ pies-kips}$$

- Para la parte de la viga entre la carga concentrada y  $R_D$ ,

$$V_{5-20} = 19 - 2x$$

y

$$M_{5-20} = \int 19 - 2x = 19x - x^2 + C$$

Evaluando  $C$  se notará que cuando  $x = 5$ ,  $M = 90$ . Por lo tanto,

$$90 = 19(5) - 5^2 + C$$

de donde

$$C = 20$$

Por lo tanto,

$$M_{5-20} = 19x - x^2 + 20$$

El momento máximo ocurre en  $x = 9.5$  pies y es

$$M_{(x=9.5)} = 19(9.5) - (9.5)^2 + 20$$

$$= 110 \text{ pies-kips}$$

- Los anteriores valores de los cortantes y los momentos flexionantes han sido trazados en la figura 2.40c y d), respectivamente. Como un ejemplo de la segunda regla básica de las relaciones de diagramas de vigas, se observará en la figura que el área del diagrama de fuerza cortante entre  $x = 5$  pies y  $x = 9.5$  pies es  $9(4.5)/2 \approx 20$ , lo cual es igual al cambio en el valor del momento flexionante entre estos mismos dos puntos, es decir,  $110 - 90 = 20$  pies-kips.

## 2.16 ECUACIONES DE MOMENTO FLEXIONANTE

Por supuesto las expresiones para el momento flexionante en cualquier punto a lo largo de una viga se pueden establecer mediante procedimientos distintos de la integración de la curva de cortante. Sin embargo, el conocimiento de los principios y relaciones comprendidos en este método general será muy útil para comprender las deflexiones de las vigas, lo cual se estudia en el capítulo 4. A continuación se muestra un procedimiento más directo para establecer las mismas ecuaciones de momento flexionante desarrolladas en el ejemplo del Artículo 2.15.

Usando la viga de la figura 2.40a, cortarla a cualquier distancia  $x$  de manera que se obtenga una sección recta entre la reacción izquierda y la carga concentrada (véase la figura 2.41a). Tomando momentos respecto a la sección.



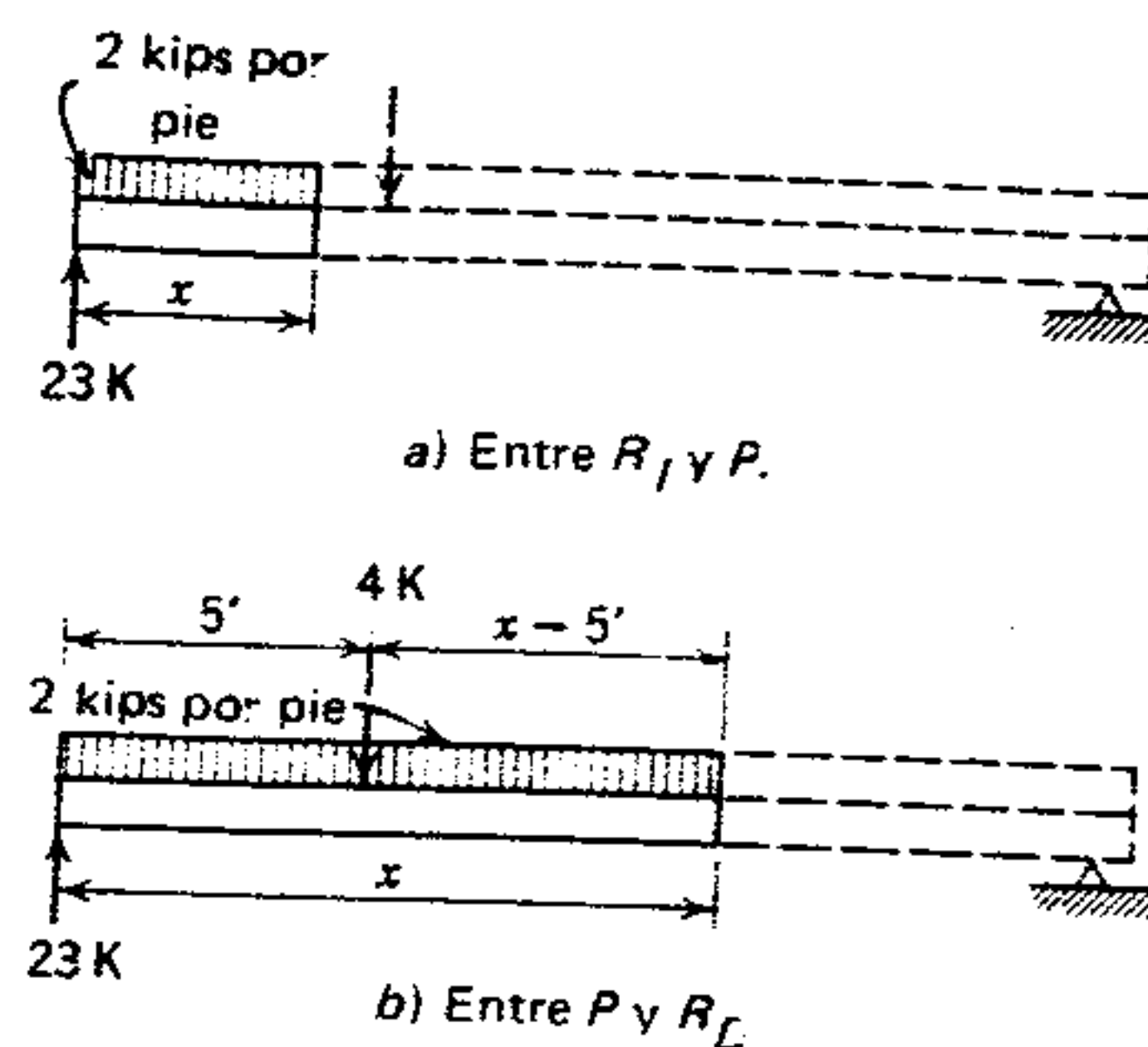


Figura 2.41 Ecuaciones de momento flexionante.

$$M_{0-5} = 23x - 2x\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_{0-5} = 23x - x^2$$

Se observará que ésta es la misma ecuación que la desarrollada en el paso 5 del ejemplo anterior.

Repetiendo este procedimiento para una sección recta en cualquier punto a lo largo de la viga entre la carga concentrada y  $R_D$  (figura 2.41b),

$$M_{5-20} = 23x - 2x\left(\frac{x}{2}\right) - 4(x - 5)$$

$$M_{5-20} = 19x - x^2 + 20$$

que es igual a la ecuación derivada en el paso 6) del ejemplo del Artículo 2.15.

### PROBLEMAS

1-7 Determinar las reacciones de las vigas de las figuras 2.42 a la 2.48, omitiendo el peso de la

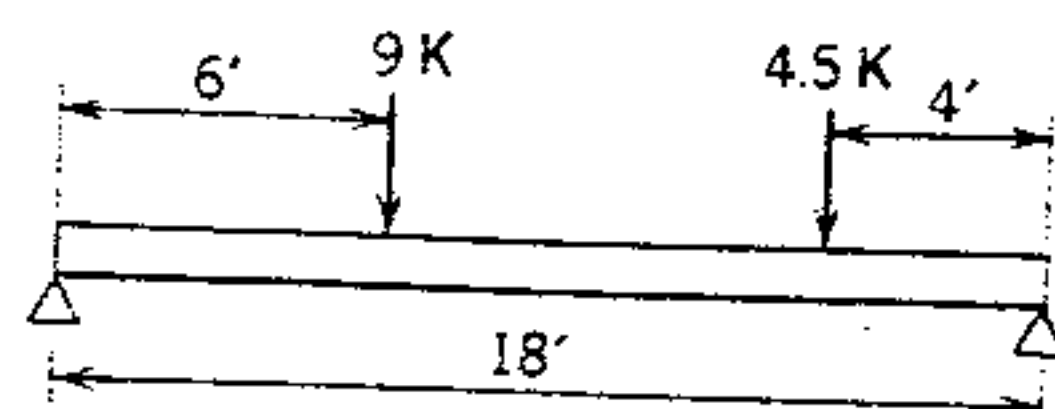


Figura 2.42

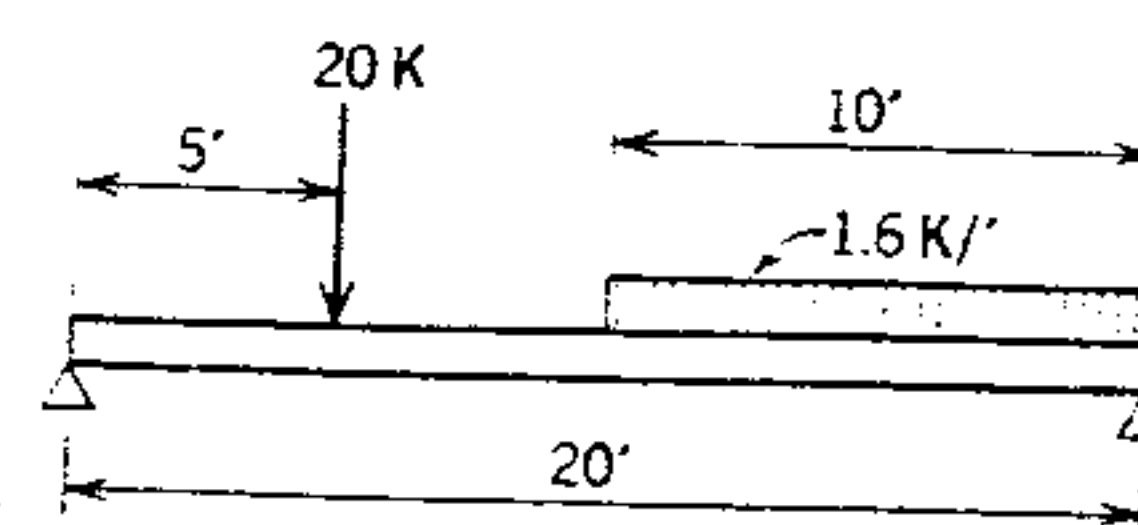


Figura 2.43

10. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga de la figura 2.44, usando las reacciones determinadas en el

problema 3. Escalas:  $L$ , 1/8 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 10 kips;  $M$ , 1 pulg = 60 kips-pie. (Las respuestas de los valores de cortante y momento flexionante aparecen en el Apéndice G).

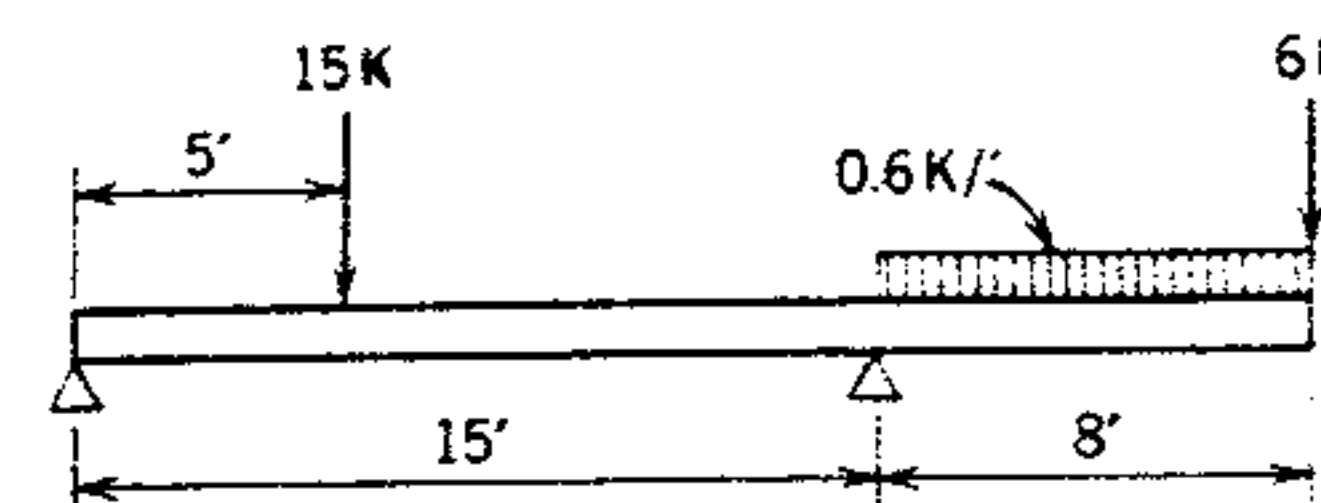


Figura 2.44

11. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga de la figura 2.45, usando las reacciones calculadas en el problema 4. Escalas:  $L$ , 1/8 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 10 kips;  $M$ , 1 pulg = 50 kips-pie.

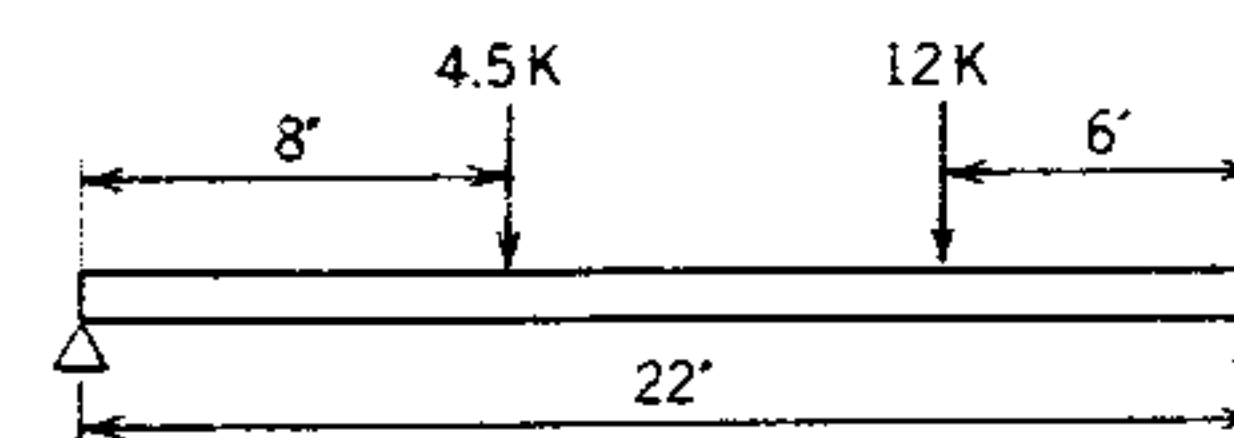


Figura 2.45

12. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga de la figura 2.46, usando las reacciones calculadas en el problema 5. Escalas:  $L$ , 1/8 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 20 kips;  $M$ , 1 pulg = 50 kips-pie.

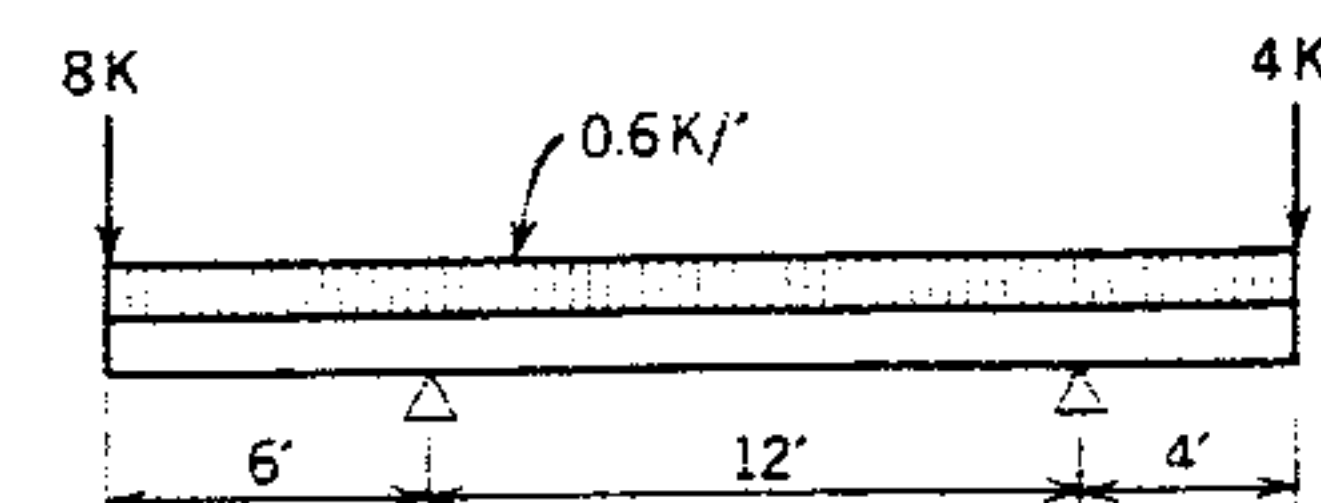


Figura 2.46

13. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga de la figura

2.47, usando las reacciones calculadas en el problema 6. Escalas:  $L$ , 1/8 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 20 kips;  $M$ , 1 pulg = 60 kips-pie.

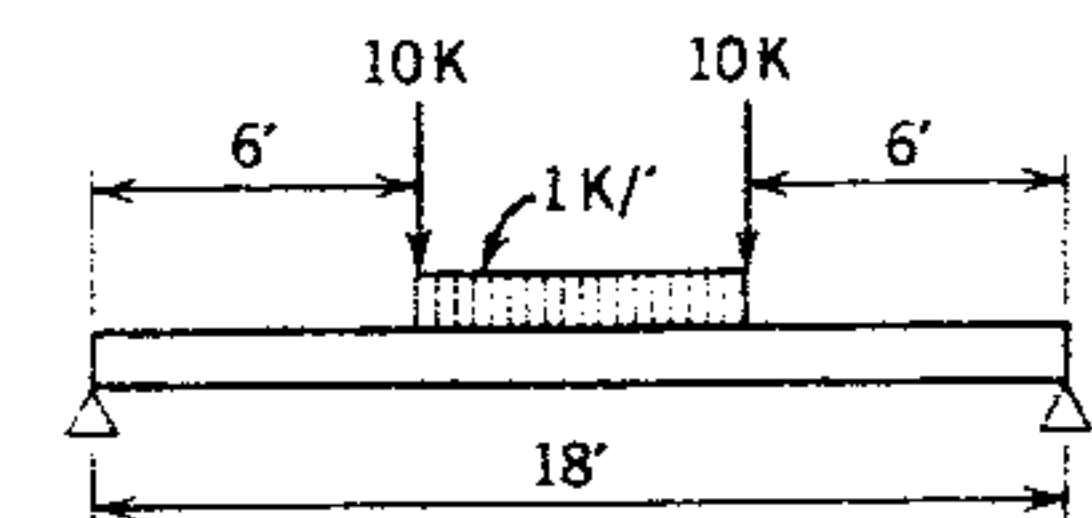


Figura 2.47

14. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga de la figura 2.48, usando las reacciones calculadas en el problema 7. Escalas:  $L$ , 1/4 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 20 kips;  $M$ , 1 pulg = 60 kips-pie.

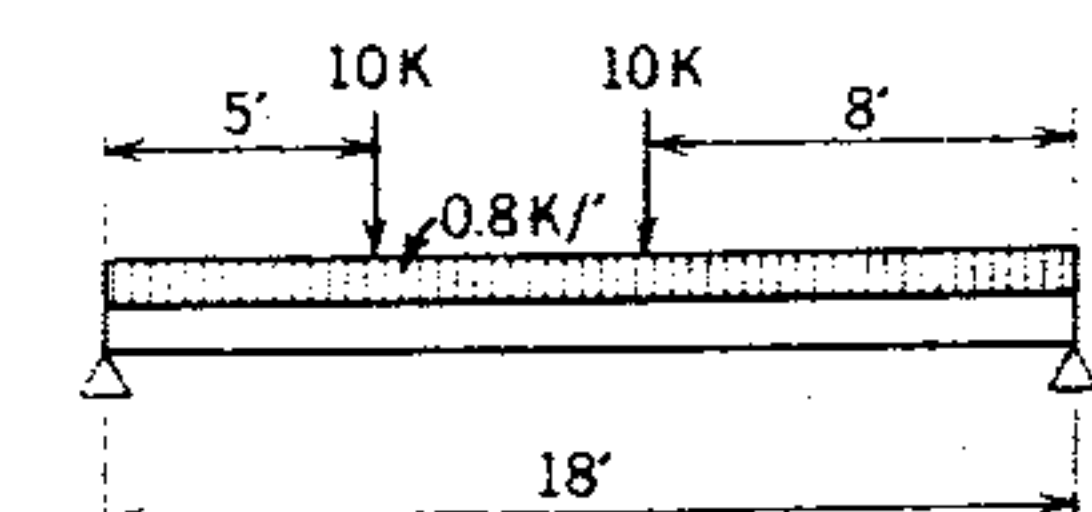


Figura 2.48

15. Calcular las reacciones, dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y escribir las ecuaciones correspondientes de la viga de la figura 2.49. Escalas:  $L$ , 1/4 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 10 kips-pie.

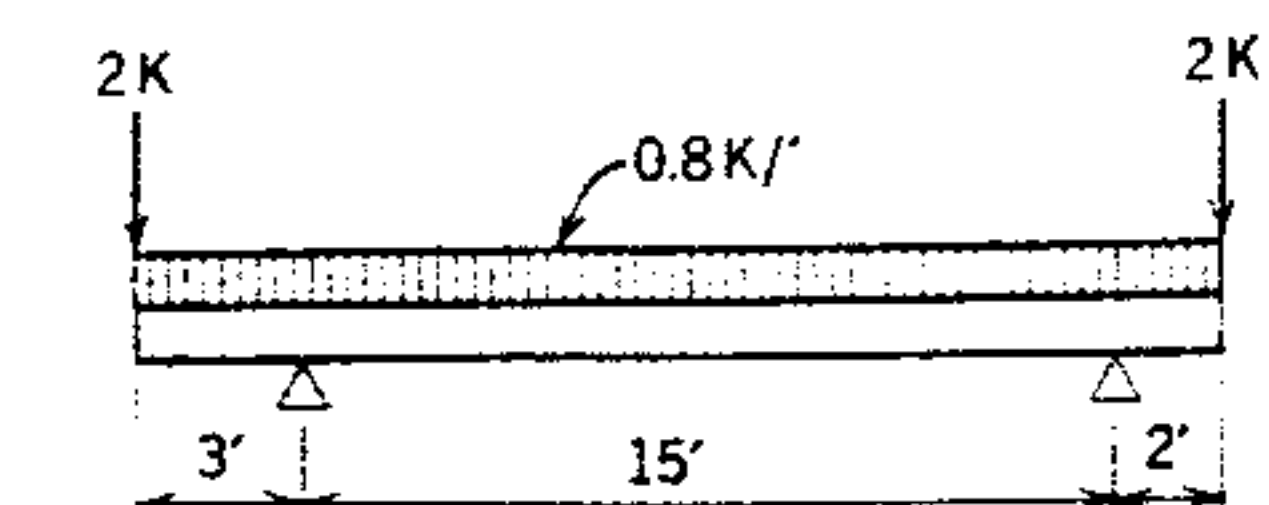


Figura 2.49

16. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la viga cantiléver de la



la figura 2.50 y plantear sus ecuaciones correspondientes. Escalas:  $L$ , 1/4 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 10 kips;  $M$ , 1 pulg = 60 kips-pie.

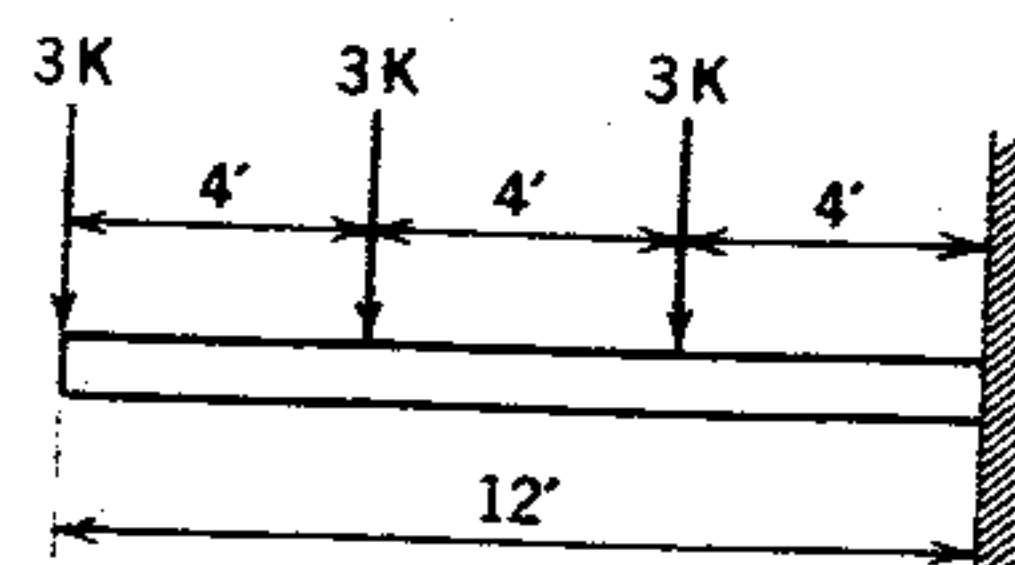


Figura 2.50

17. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y plantear las ecuaciones correspondientes, de la viga de la figura 2.51. Escalas:  $L$ , 1/4 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 10 kips;  $M$ , 1 pulg = 30 kips-pie.

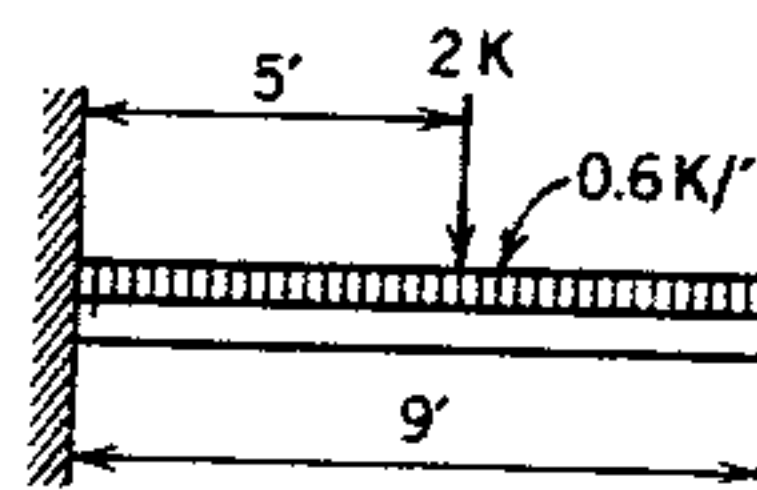


Figura 2.51

18. Una viga simple de 14 pies de largo soporta una carga uniformemente distribuida de 800 lb por pie sobre toda su longitud, y una carga concentrada de 4 kips localizada a 6 pies del extremo izquierdo. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y plantear sus ecuaciones correspondientes. Escalas:  $L$ , 1/4 pulg = 1 pie;  $V$ , 1 pulg = 5 kips;  $M$ , 1 pulg = 20 kips-pie.
9. Resolver por partes el problema 13, es decir, dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante de la carga uniforme y las cargas concentradas por separado y luego combinarlos.

20. Una viga simple de 18 pies de largo soporta una carga uniformemente distribuida de 800 lb por pie sobre toda su longitud, y una carga concentrada de 3 kips localizada a 4 pies del extremo izquierdo. Empezar con el diagrama de carga y sus ecuaciones y, mediante integración subsecuente, construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y plantear las ecuaciones correspondientes. Para todas las ecuaciones, usar  $x = 0$  en la reacción izquierda. Determinar algebraicamente la localización y la magnitud del momento flexionante. Escalas:  $L$ , 1/4 pulg = 1 pie; Carga, 1 pulg = 1 kip por pie;  $V$ , 1 pulg = 10 kips;  $M$ , 1 pulg = 20 kips-pie. (Respuestas en el Apéndice G).
21. Una viga simple de 20 pies de largo soporta una carga uniformemente distribuida de 500 lb por 12 pies de su longitud a partir del extremo izquierdo, y otra carga uniformemente distribuida de 1000 lb por pie en los restantes 8 pies de longitud. Empezar con el diagrama de cargas y sus ecuaciones y mediante integración subsecuente, construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, planteando las ecuaciones correspondientes. Determinar algebraicamente la localización y la magnitud del momento flexionante máximo. Escalas:  $L$ , 1/4 pulg = 1 pie; Carga, 1 pulg = 1 kips por pie;  $V$ , 1 pulg = 6 kips;  $M$ , 1 pulg = 20 kips-pie.
22. Una viga simple de 14 pies de largo soporta una carga que varía uniformemente. La carga varía de 500 lb por pie en el extremo izquierdo a 1200 lb por pie en el extremo derecho. Comenzar con el diagrama de cargas y sus ecuaciones y, mediante integración subsecuente, construir los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, planteando las ecuaciones correspondientes. Calcular el punto de momento flexionante máximo. Escalas:  $L$ , 1/4 pulg = 1 pie; Carga, 1 pulg = 1 kip por pie;  $V$ , 1 pulg = 6 kips;  $M$ , 1 pulg = 20 kips-pie. Comparar esta solución con una en que se use una carga uniformemente distribuida promedio de 850 lb por pie actuando a todo lo largo. (Respuestas parciales en el Apéndice G).

## 3

## Vigas, flexión y cortante

## 3.1 MOMENTO RESISTENTE

En el capítulo anterior se estudiaron las fuerzas externas que actúan sobre una viga y se instrumentó un método para medir su efecto en términos del esfuerzo cortante y el momento flexionante. Ahora es necesario analizar aquellas fuerzas que actúan dentro de una viga y que resisten la tendencia que tienen las fuerzas externas a provocar una falla. La primera de éstas es el trabajo dentro de la viga que resiste la flexión y se denomina *momento resistente*.

Antes de proceder a deducir una expresión para el momento resistente, será bueno recordar el principio de que para cada acción existe una reacción de igual intensidad y de sentido contrario. Obsérvese que en la figura 2.25, la carga uniforme se está incrementando lentamente. En estas condiciones, el valor máximo del momento flexionante en el punto medio del claro aumentará con la carga, al igual que el momento flexionante en todos los demás puntos del claro. Para mantener el equilibrio, los esfuerzos internos desarrollados deben constituir un momento resistente creciente dentro de la viga. Por supuesto, el valor máximo del momento resistente se dará en el punto del momento flexionante máximo, pero el momento flexionante en cada sección a lo largo del claro tendrá un momento resistente opuesto de igual magnitud y de signo contrario.

## 3.2 TEORÍA DE LA FLEXIÓN

La derivación de la expresión para el momento resistente se basa en dos supuestos fundamentales. El primero de éstos es:

*Una sección plana de una viga antes de flexionarse seguirá siendo una sección plana después de flexionarse.*

Las secciones planas paralelas  $AB$  y  $CD$  en la figura 3.1a siguen siendo secciones planas después de



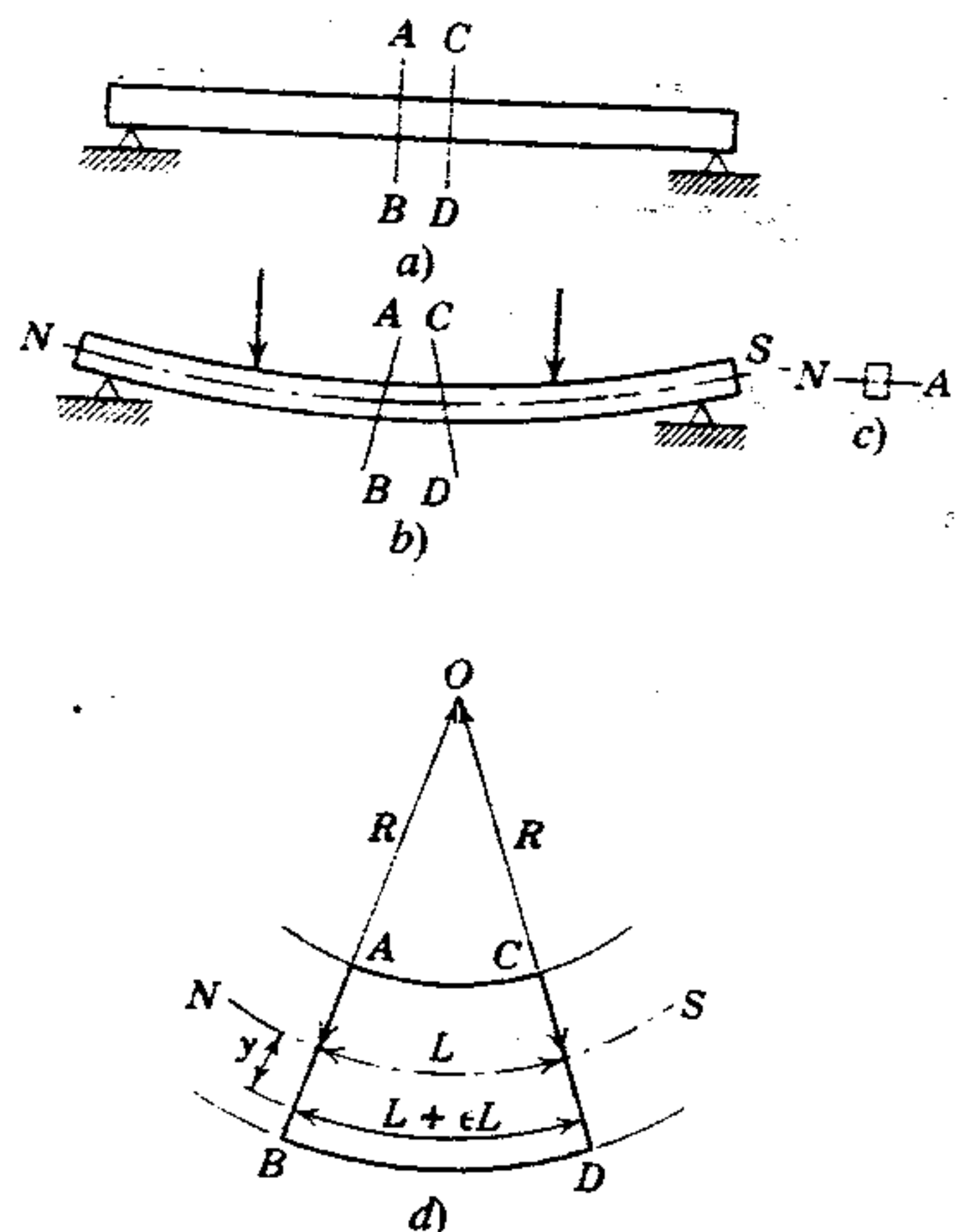


Figura 3.1 Teoría de la flexión.

que la viga se flexionó como se ve en la figura 3.1b. Sin embargo, ya no son paralelas.

En la figura 3.1d se muestra el segmento de la viga entre los planos con una curva exagerada. Mediante esta figura queda claro que la porción de la viga entre las dos secciones era rectangular antes de flexionarse y se hizo trapezoidal después de flexionarse. Por lo tanto, las fibras<sup>1</sup> en la porción superior de la viga deben haberse acortado y las de la porción inferior haberse alargado. Además, en la figura 3.1d resulta evidente que el acortamiento máximo de las fibras ocurrió en la superficie superior y que la magnitud del acortamiento decreció hacia el centro de la viga. Del mismo modo, el alargamiento máximo decreció hacia el centro. De esto se deduce que debe haber alguna superficie entre las partes superior e inferior de la viga en que no ocurrió ningún cambio en la longitud. Esta superficie se denomina *superficie neutra* y en la figura

<sup>1</sup> Por supuesto, el acero no es un material fibroso en el sentido que lo es la madera, pero el concepto de fibras infinitamente pequeñas es muy útil en el estudio de relaciones de esfuerzos dentro de cualquier material estructural.

está representada por la línea NS. La línea en que esta superficie neutra corta una sección transversal de la viga se llama eje neutro NA (figura 3.1c).

El segundo supuesto que se usa para el cálculo del momento resistente es:

*Dentro del límite elástico del material, el esfuerzo varía directamente con la deformación, y por lo tanto, con la distancia al eje neutro.*

En otras palabras, aquellas fibras cuya longitud cambia en mayor medida que el promedio soportan más esfuerzo. Esto significa que el máximo esfuerzo de compresión en la viga de la figura 3.1b ocurre en la fibra extrema superior y decrece uniformemente a cero en el eje neutro. El máximo esfuerzo de tensión ocurre en la fibra del extremo inferior y decrece uniformemente a cero en el eje neutro.

Se puede demostrar fácilmente que el valor del esfuerzo de las fibras en cualquier punto de la sección transversal de la viga es proporcional a la distancia de esa fibra al eje neutro. En la figura 3.1d, supóngase que los planos AB y CD se toman tan juntos entre sí que al prolongarse se encuentran en el punto O. Entonces, sea

- $R$  = radio de curvatura de la superficie neutra (NS).
- $L$  = longitud original de las fibras antes de flexionarse (la longitud en la superficie neutra no cambia).
- $y$  = distancia de la NS a cualquier fibra de la viga en el plano.
- $\epsilon$  = deformación unitaria en una fibra a distancia  $y$  de la superficie neutra.

Por geometría,

$$\frac{R}{L} = \frac{R + y}{L + \epsilon L}$$

y

$$\epsilon L = \frac{L}{R} (R + y) - L$$

Simplificando,  $\epsilon = y/R$ . Ahora, en el apéndice A se encuentra que  $\epsilon = f/E$ , es decir, deformación unitaria = esfuerzo unitario dividido entre el módulo de elasticidad. Por lo tanto, las deformaciones se pueden igualar y, calcular el esfuerzo

$$\frac{f}{E} = \frac{y}{R}$$

$$f = \frac{E}{R} y$$

Puesto que el módulo de elasticidad es constante para cualquier material dado, y el radio de curvatura es constante en cualquier punto dado para cualquier carga, resulta claro que el esfuerzo de la fibra es proporcional a la distancia del eje neutro. Asimismo, como la mayoría de los materiales estructurales tienen el mismo módulo de elasticidad en tensión y en compresión, el esfuerzo en la fibra extrema a tensión y a compresión es igual en vigas del mismo material y sección transversal simétrica.

### 3.3 POSICIÓN DEL EJE NEUTRO

En secciones simétricas como las de vigas rectangulares o vigas I, el eje neutro está a la mitad entre las superficies superior e inferior. Dicho de modo más general, el eje neutro pasa a través del centro de gravedad (o centroide) de la sección. Esto es cierto sin importar la forma de la sección transversal de la viga, aunque para simplificar se ha utilizado una sección rectangular en la siguiente demostración (figura 3.2).

Debe tenerse presente que los esfuerzos variables indicados en la figura 3.2b actúan perpendicularmente al plano de la sección transversal de la viga que aparece en la figura 3.2a. Asimismo, se supone aquí que la sección resiste la acción de un momento flexionante positivo, es decir, los esfuerzos sobre el eje neutro son de compresión y los de abajo son de tensión. El área  $dA$  representa un área muy pequeña (área diferencial) de la sección a una distancia  $y$  del eje neutro. La fuerza que actúa sobre el área  $dA$  es igual al valor del esfuerzo de la fibra en  $y$  por  $dA$ . Sin embargo, anteriormente se

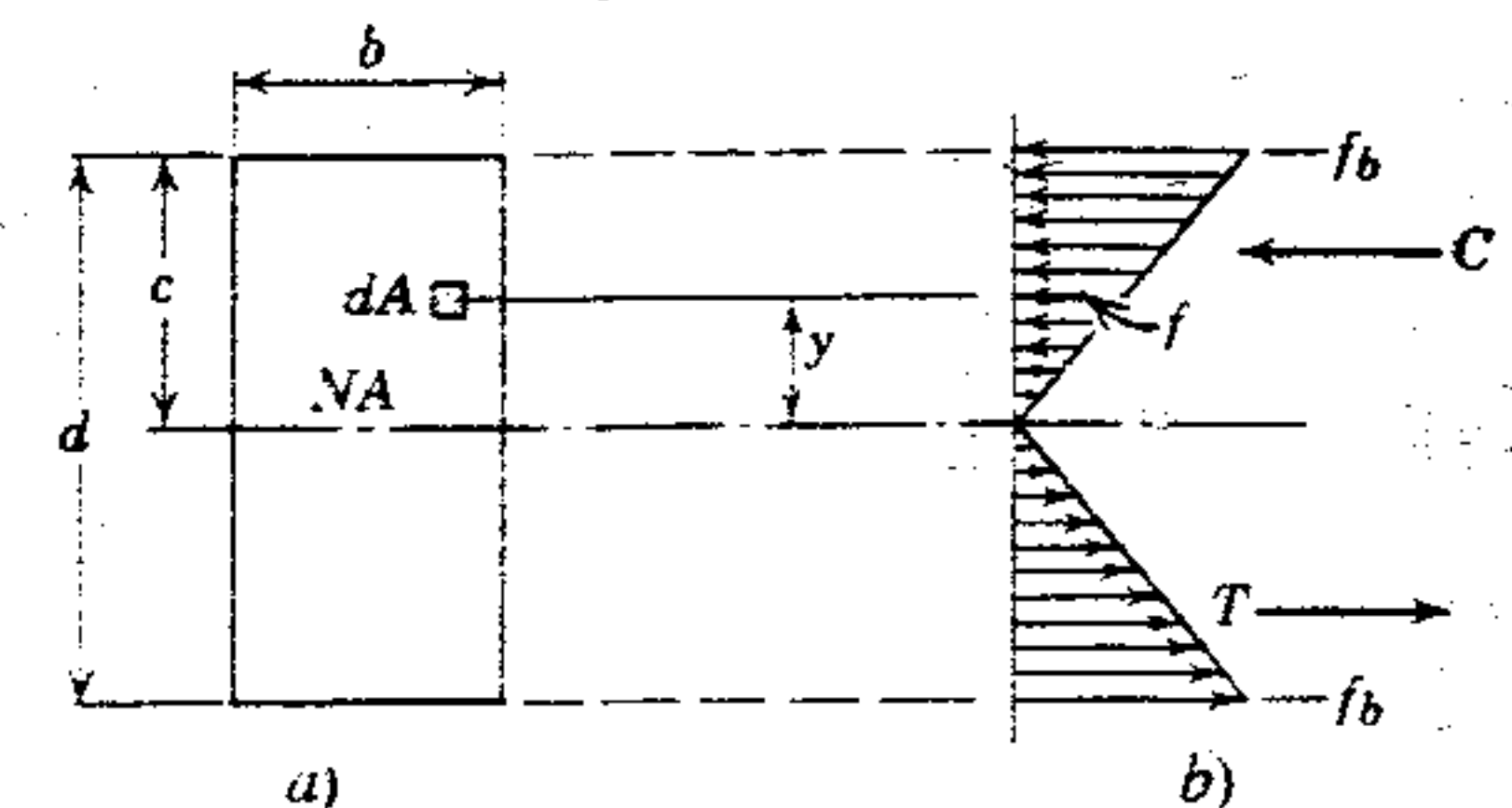


Figura 3.2 Distribución del esfuerzo flexionante.

demostró (Artículo 3.2) que el esfuerzo de la fibra a cualquier distancia  $y$  del eje neutro es igual a  $(E/R)y$ . Por lo tanto, la fuerza sobre el área  $dA$  es  $(E/R)y dA$ .

Como  $dA$  es cualquier área diferencial arriba del eje neutro, la suma de todos estos términos como  $(E/R)y dA$  sería igual a la compresión total sobre la sección señalada en la figura 3.2b como C. Usando áreas diferenciales abajo del eje neutro, la tensión total T se podría obtener con el mismo procedimiento. Como las únicas fuerzas horizontales presentes son C y T, su suma algebraica debe ser cero. En consecuencia, la suma del producto de todas las áreas diferenciales y sus esfuerzos respectivos para toda la sección debe ser igual a cero. Expresado en forma de ecuación,

$$T - C = 0 = \sum \frac{E}{R} y dA$$

Pero la relación  $E/R$ , siendo constante, no es igual a cero. Por lo tanto

$$\sum y dA = 0$$

De esta expresión se puede afirmar que el producto de cada área diferencial y la distancia de su centro de gravedad al eje neutro de la sección, al sumarse en toda la sección, es igual a cero. Por lo tanto,  $\sum y dA$  es el momento del área total respecto al eje neutro. El momento es cero sólo si el eje neutro pasa a través del centro de gravedad del área total. En consecuencia, el eje neutro debe pasar por el centro de gravedad.



### 3.4 LA FÓRMULA DE FLEXIÓN DE VIGAS

La expresión para el momento resistente que ahora se desarrollará con base en la anterior exposición se conoce como *fórmula de viga* o *fórmula de flexión*. En la figura 3.2 se ve que el momento resistente de la sección es igual al par formado por las fuerzas  $C$  y  $T$ . Sin embargo, en vez de evaluar este par, un enfoque más sencillo para deducir la fórmula de la viga es mediante suma de áreas diferenciales.

En el Artículo 3.3 se mostró que la fuerza sobre el área diferencial es  $(E/R)y \, dA$ . El momento de esta fuerza respecto al eje neutro se puede representar como  $dM$  y expresar como sigue:

$$dM = \frac{E}{R} y \, dA \, y$$

$$dM = \frac{E}{R} y^2 \, dA$$

El momento total en la sección sería la suma de todos los momentos diferenciales, es decir,

$$\sum dM = \sum \frac{E}{R} y^2 \, dA$$

o

$$M = \frac{E}{R} \sum y^2 \, dA$$

No obstante, como

$$\frac{E}{R} = \frac{f}{y}$$

esta ecuación se convierte en

$$M = \frac{f}{y} \sum y^2 \, dA$$

El término  $\sum y^2 \, dA$  se llama *momento de inercia* de la sección con respecto al eje neutro y se designa con la letra  $I$ . Matemáticamente, el momento de inercia de un área se puede describir como la suma de los productos obtenidos de multiplicar

cada área elemental (que compone el área dada) por el cuadrado de su distancia al eje (en este caso el eje neutro). En un sentido físico, el momento de inercia se puede considerar como un factor que influye en el momento resistente al relacionarlo con el tamaño y la forma de la sección transversal de la viga. Las unidades de  $I$  serán la distancia (usualmente en centímetros) elevada a la cuarta potencia (centímetros<sup>4</sup>). Sustituyendo  $I$  por  $\sum y^2 \, dA$ , la expresión general de la fórmula de la viga será

$$M = \frac{f}{y} I$$

O bien, como se escribe comúnmente,

$$M = \frac{fI}{y}$$

En esta expresión general,  $f$  es el esfuerzo unitario en cualquier punto de una sección, localizado a una distancia  $y$  del eje neutro. Puede ser tensión o compresión. En diseño, usualmente el esfuerzo más crítico es el esfuerzo máximo que ocurre sobre las fibras extremas, o donde  $y$  es máxima. Como la letra  $c$  se usa comúnmente para designar la distancia de la fibra extrema al eje neutro, la fórmula de la viga se puede plantear como

$$M = \frac{fI}{c}$$

Con cualquier material dado (como el acero), el esfuerzo unitario máximo admisible a la flexión se establecerá por especificación,<sup>2</sup> por lo tanto, el momento resistente *admisible* máximo de una sección en particular será

$$M_R = \frac{F_b I}{c}$$

<sup>2</sup> En la nomenclatura general de la Especificación AISC 1978, se hace una distinción entre esfuerzo flexionante permitido o admisible ( $F_b$ ) y esfuerzo flexionante real o calculado ( $f_b$ ); por lo tanto, estos símbolos se usarán en los estudios sobre diseño, en vez del símbolo general del esfuerzo flexionante ( $f$ ) que se usa en estudios teóricos.

### 3.5 MÓDULO DE SECCIÓN

El término  $I/c$  se llama módulo de sección y depende del tamaño y la forma de la sección. Se define como el momento de inercia dividido entre la distancia de la fibra más alejada del eje neutro. Su valor se da en centímetros cúbicos, y comúnmente se representa por la letra  $S$ . En el manual AISC y otros manuales de estructuras se dan los módulos de sección de formas laminadas de acero; así como sus momentos de inercia. Estos usualmente aparecen en la lista de "Propiedades para el diseño" o algunas tablas con títulos similares. Por ejemplo, cuando las conocidas secciones<sup>3</sup> en forma de  $I$  se usan como vigas para soportar cargas verticales, y se sitúan de la manera acostumbrada con sus almas verticales, los valores de  $S$  e  $I$  que se usarán en la fórmula de la viga son el eje  $x-x$  que aparece en las tablas de propiedades.

### 3.6 SECCIONES DE VIGAS

Por la fórmula de la viga es evidente que el momento resistente de una sección de una viga varía con su momento de inercia, es decir, entre mayor sea el momento de inercia, mayor será el momento resistente. Por lo tanto, la sección más económica sería la que proporcione el mayor momento de inercia con la menor área. Asimismo, como el valor máximo del esfuerzo ocurre en las partes superior e inferior extremas de la sección transversal de la viga, es conveniente colocar tanto como sea posible del material cerca de las caras superior e inferior de la sección.

La conocida viga de acero estructural en forma de  $I$  es el resultado del esfuerzo de satisfacer estos criterios.

En las figuras 3.3 a), b), c), d), e) y f) se muestran varias secciones, tanto simétricas como asimétricas, producidas en plantas de laminado de acero. Las secciones  $T$  (figura 3.3e) se fabrican en

tamaño: pequeños; sin embargo, los tamaños mayores que se usan para estructuras generalmente están hechos por medio de la división de secciones en forma de  $W$ ,  $M$  o  $S$ . Asimismo, los fabricantes también disponen de placas y barras (figura 3.3f), de modo que cuando surge la necesidad se pueden usar junto con formas de laminado de acero estándar para producir secciones compuestas (figura 3.3g). Es posible hacer diversas combinaciones de placas y formas. En el capítulo 5 se estudian con mayores detalles las secciones compuestas.

Algunas veces, por ejemplo, cuando un miembro va a estar expuesto, el diseñador puede preferir usar tubos o formas tubulares de acero (figura 3.3h). Debido a los diferentes procesos de fabricación, no obstante, los tubos de las estructuras no se fabrican con las mismas designaciones del ASTM, como otras formas de laminado de acero del tipo que se muestra en la figura 3.3. Comúnmente, hay tubo de acero disponible del tipo ASTM A53, Grado B ( $F_y = 35$  k/pulg<sup>2</sup>), y en cantidades menores del tipo ASTM A500 y A501, y en A618 ( $F_y = 50$  k/pulg<sup>2</sup>), denominación que implica un grado a prueba de intemperie. Hay formas tubulares de acero disponibles en ASTM A500, Grado B ( $F_y = 46$  k/pulg<sup>2</sup>), A501 ( $F_y = 36$  k/pulg<sup>2</sup>), y en pequeñas cantidades del tipo A500, Grados A y C ( $F_y = 39$  k/pulg<sup>2</sup> y 50 k/pulg<sup>2</sup>, respectivamente).

El eje  $x-x$  se muestra en cada una de las secciones de viga de la figura 3.3. Este eje pasa a través del centroide de la sección y se convierte en eje neutro cuando la flexión ocurre respecto a ese eje. En otras palabras, el plano de cargas debe ser perpendicular al eje neutro para utilizar las cantidades  $I$ ,  $c$  y  $S$  calculadas con referencia a ese eje. En raras ocasiones, las secciones de las vigas se colocan de modo que la flexión ocurra respecto al eje  $y-y$ . Cuando éste es el caso,  $y-y$  se convierte en  $EN$ , y las propiedades de la viga para su diseño deben referirse al eje  $y-y$ . En la parte I del Manual AISC se enlistan las diversas dimensiones y características de las formas de vigas más comunes para el diseño.

Cuando la viga es simétrica respecto al  $EN$ , el valor de  $c$  es la mitad del peralte de la viga. Por lo tanto, hay sólo un valor para el módulo de la sección, y los esfuerzos máximos de fibras que se desarrollan a la tensión y a la compresión son exacta-

<sup>3</sup> Las secciones en forma de  $I$ , tal como se usan en este texto, son aquellas designadas en la octava edición del Manual AISC como  $S$ ,  $W$  y  $M$  (ver Artículo 3.6 y figura 3.3).



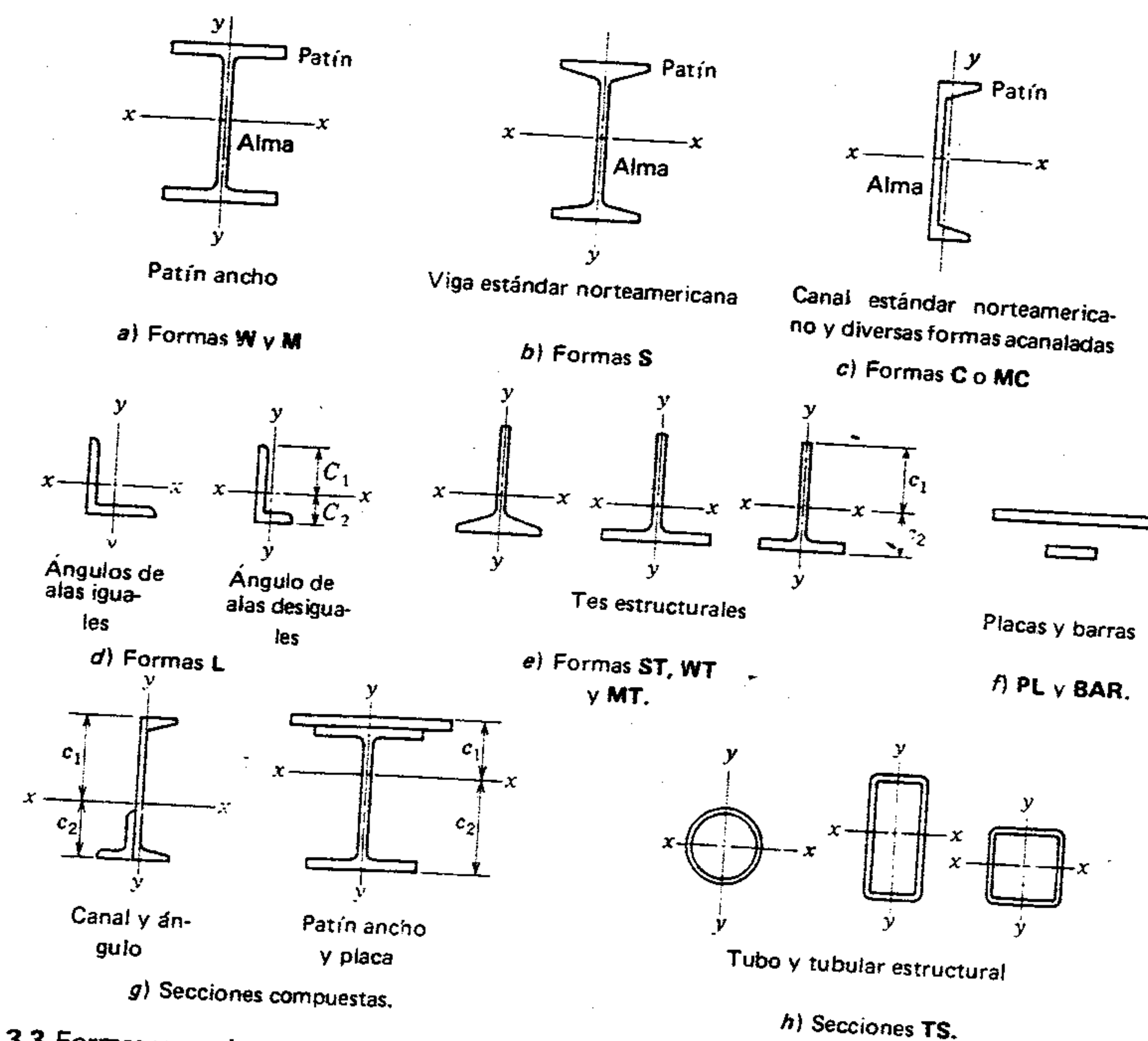


Figura 3.3 Formas y secciones de vigas fabricadas comercialmente.

mente los mismos que se presentan en las fibras opuestas más alejadas del *EN*. Cuando la viga no es simétrica con respecto al *EN* habrá dos valores para *c* (figura 3.3d, e y g). Debido a esto, los esfuerzos en los extremos superior e inferior no serán los mismos. Es evidente que hay dos posibles valores para *S*, es decir,  $S = I/c_1$ , o  $I/c_2$ . Si los esfuerzos admisibles a tensión y compresión son los mismos, el  $S$  ( $S = I/c$ ) más pequeño, se debe usar en el cálculo del momento resistente admisible, y es el único que se lista en el Manual AISC. (El lector debe comprobar que ésta es una conclusión válida.)

Las formas de acero que se muestran en la figura 3.3a), b), c), d) y e) se representan mediante un símbolo de forma o grupo, seguido por su peralte nominal y su peso real por pie de longitud. La de-

signación W 10 × 49 indica una forma de patín ancho, aproximadamente de 10 pulgadas de peralte y un peso de 49 libras por pie lineal. Los símbolos de forma o grupo, sus nombres y sus principales características son los siguientes:

**W** Formas de patín ancho. Superficies de patín interiores y exteriores paralelas (disponibles en una amplia gama de tamaños y, por tanto, los de uso más frecuente).<sup>4</sup>

<sup>4</sup> También existen comercialmente formas de pilote de apoyo **HP** que tienen patines esencialmente paralelos e iguales grosores de alma y patín, pero no se usan con frecuencia en marcos estructurales de construcción por arriba del nivel de tierra.

**M** Formas especiales. Formas especiales de peso ligero, con un perfil similar a las formas **W** (disponibles entre un número limitado de productores, o bien, se fabrican con poca frecuencia).

**S** Vigas estándar norteamericanas. Con almas más gruesas y patines más angostos, superficie interior del patín ahusada.

**C** Canales estándar norteamericanos. Con forma de **C**, y superficies interiores de patín ahusadas.

**MC** Canales especiales. Formas para usos especiales; tienen el mismo perfil que las formas **C** (fabricados por un número limitado de productores, o bien, se elaboran con poca frecuencia).

**L** Ángulos. Las alas, ya sean de igual o desigual longitud, forman un ángulo recto entre sí.

**ST, WT, MT** Tes estructurales. Formas **S**, **W** y **M**, partidas a la mitad del peralte.

**PL y BR** Placas y barras.

**TS** Tubo y tubular estructural de acero, de forma circular, rectangular o cuadrada.

La clasificación del tubo y tubular estructural es diferente a otras formas. Se da primero la forma del grupo y luego las dimensiones de peralte y anchura (o el diámetro en el caso de tubo) y el grosor de pared exterior, es decir, **TS** 6 × 4 × .375, o bien, para secciones circulares, **TS** 6 OD × .280.

Usualmente el peralte de secciones **W** y **M** varía un poco respecto al peralte nominal, porque las secciones más pesadas de cada peralte nominal se fabrican agregando grosor a la cara exterior de los patines y al alma. Por ejemplo, algunas de las secciones **W** más pesadas de 14 pulgadas tienen peraltes significativamente mayores que el tamaño nominal dado.

Como se ha visto, no se dispone de todas las secciones de viga laminada en todos los tipos y grados de acero. En el Artículo 1.6 se vieron los diversos tipos de acero y en la tabla 1.3 se clasifican por grados de resistencia junto con su disponibilidad de acuerdo con un agrupamiento ASTM A6. En

general, las vigas más pesadas con grandes grosores de patín se obtienen solamente en los grados más bajos de resistencia. Una notable excepción de esto es A36 y la mayor parte de A588. El Manual AISC 1980 contiene 76 nuevas formas **W**, 6 nuevas formas **HP** y 6 nuevas formas **S** para reemplazar 6 formas **S** de la edición anterior; asimismo, ya no aparecen cerca de 81 formas **W** de la edición anterior. Antes de utilizar cualquier tamaño de viga y grado de acero específicos, siempre es buena práctica comprobar si se puede obtener tanto a nivel local como nacional. En la tabla 2 del Manual AISC se resume el agrupamiento del tamaño de la forma estructural A6, el cual se puede cotejar con la tabla 1.3.

### 3.7 USO DE LA FÓRMULA DE FLEXIÓN DE VIGAS

La fórmula de flexión de viga se puede presentar en tres formas diferentes:

$$(1) M = \frac{F_b I}{c}; \quad (2) f_b = \frac{Mc}{I}; \quad (3) \frac{I}{c} = \frac{M}{F_b};$$

o igualando  $I/c = S$

$$(1) M = F_b S; \quad (2) f_b = \frac{M}{S}; \quad (3) S = \frac{M}{F_b}.$$

Con la forma (1), cuando se conocen las dimensiones de la viga (representadas por  $I/c$ ) y  $F_b$  es el esfuerzo máximo admisible de fibra del material, resolviendo  $M$  se obtiene el momento flexionante máximo que la viga puede resistir, es decir, el momento resistente máximo.

Con la forma (2), cuando se conoce el momento flexionante máximo debido a la carga, así como las dimensiones de la viga, resolviendo  $f_b$  se obtiene el esfuerzo flexionante desarrollado en la fibra extrema.

Con la forma (3), cuando se conoce el momento flexionante y el esfuerzo máximo admisible de fibras, resolviendo  $I/c$  se obtiene el módulo de sección requerido.



Esta es la forma que se usa en el diseño. Cuando se ha calculado el módulo de sección requerido, se selecciona una sección de viga que tenga un  $I/c$  igual o mayor que las requeridas.

Con frecuencia, es difícil de establecer el esfuerzo flexionante admisible y no se puede determinar con precisión hasta haber seleccionado la propia sección. Si éste es el caso, se calcula el valor aproximado de  $F_b$  y más adelante en el proceso de diseño, se afina después de seleccionar secciones de prueba. El esfuerzo flexionante admisible básico ( $F_b$ ) se toma como el 60 por ciento de  $F_y$ . Bajo ciertas condiciones, este valor se puede incrementar al 66 por ciento de  $F_y$ , e incluso bajo otras condiciones se podría reducir al 20 ó 30 por ciento de  $F_y$ . En el capítulo 5 se trata con gran detalle este tema. En el resto de esta sección se usará el valor básico del 60 por ciento de  $F_y$ .

Debe notarse que  $F_b$  y  $f_b$  se expresan en libras por pulgada cuadrada,  $c$  en pulgadas,  $S$  en pulgadas cúbicas e  $I$  en pulgadas cuartas. Por lo tanto,  $M$  debe estar en pulg./lb.  $M$ , calculado usualmente a partir de reacciones y cargas, se expresa en pies-libras y se debe convertir a pulgadas-libras multiplicando su valor por 12 antes de usarlos en la fórmula.

En el capítulo 5 y subsiguientes habrá oportunidad de mostrar correlaciones entre soluciones desarrolladas y solución de manual. Para hacer válidas estas correlaciones, se deben hacer los mismos supuestos para cada solución; por lo tanto, se usarán los siguientes valores redondeados de  $F_b$ :

$$\begin{aligned}\text{Cuando } F_y &= 36 \text{ kips/pulg}^2 \\ F_b &= 0.66(36) = 21.60; \text{ usar } 22 \text{ kips/pulg}^2 \\ F_b &= 0.66(36) = 23.76; \text{ usar } 24 \text{ kips/pulg}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cuando } F_y &= 42 \text{ kips/pulg}^2 \\ F_b &= 0.6(42) = 25.20; \text{ usar } 25 \text{ kips/pulg}^2 \\ F_b &= 0.66(42) = 27.72; \text{ usar } 28 \text{ kips/pulg}^2\end{aligned}$$

Para todos los otros valores de  $F_y$  y el porcentaje de  $F_y$ , usar el valor calculado de  $F_b$  redondeado al más próximo número entero en kips por pulgada cuadrada.

### Ejemplo 1

- Encontrar el momento resistente máximo de una  $W 16 \times 36$  si su esfuerzo flexionante admisible  $F_b$  es  $0.6F_y$ , y el acero A36.
- ¿Se podría considerar segura la sección  $a$ ) ante la flexión de una viga simplemente apoyada si el claro fuera de 28 pies y cargara una fuerza sobrepuesta de 1000 libras por pie?

### Solución (1)

- En la parte 1 del Manual AISC, Formas W-Dimensiones y Propiedades, se encuentra que el módulo elástico de sección para  $W 16 \times 36$  es de  $56.3 \text{ pulg}^3$ . Asimismo,  $F_b = 0.6(36,000) \approx 22,000 \text{ lb/pulg}^2$ . Entonces

$$M = F_b S = 22,000(56.3) = 1,240,000 \text{ pulg./lb}$$

$$M = \frac{1,240,000}{12} = 103,000 \text{ pies/lb}$$

### Solución (2)

- Trazar un esquema de la viga mostrando las cargas (figura 3.4). La viga debe soportar su propio peso además de las cargas sobrepuestas; por lo tanto, la carga unitaria es  $1000 + 36 = 1036 \text{ libras por pie}$ .
- En la figura 2.34 o en el Manual AISC (Diagramas y Fórmulas de Vigas), se ve que para esta condición de carga el momento máximo ocurre, a mitad del claro y es igual a

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{1036(28)^2}{8} = 102,000 \text{ pies/lb}$$

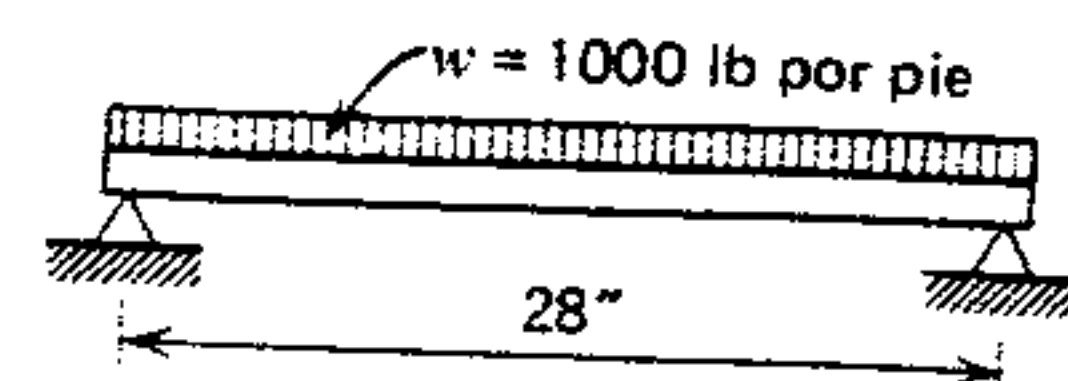


Figura 3.4 Ejemplo 1.

Esta sección es segura mientras el momento resistente admisible ( $103,000 \text{ lb/pie}$  determinado antes) sea igual o mayor que el momento flexionante desarrollado ( $102,000 \text{ lb/pie}$ ).

### Solución (3)

- El máximo esfuerzo estará en las figuras más alejadas del  $EN$  de la viga en la sección en que ocurre el mayor momento flexionante (mitad del claro), o

$$f_b = \frac{M}{S} = \frac{102,000(12)}{56.3} = 21,700 \text{ lb/pulg}^2$$

- Esto también es una comprobación de la seguridad de la viga, ya que el esfuerzo real  $f_b$  ( $21,700 \text{ lb/pulg}^2$ ) es menor que el admisible,  $F_b$  ( $22,000 \text{ lb/pulg}^2$ ).

### Ejemplo 2

Una viga  $S 10 \times 35$  tiene un claro de 10 pies. ¿Qué carga concentrada en el centro soportará la viga si el acero es del tipo A242 y el esfuerzo flexionante admisible es de  $0.6F_y$ ?

### Solución

- Hacer un esquema de la viga mostrando las cargas (figura 3.5).
- Para A242 en la tabla 1.3 y en la tabla 2 del Manual AISC, se observa que  $S 10 \times 35$  está dentro del grupo 1. En consecuencia,  $F_y = 50,000 \text{ lb/pulg}^2$  y

$$F_b = 0.6(50,000) = 30,000 \text{ lb/pulg}^2$$

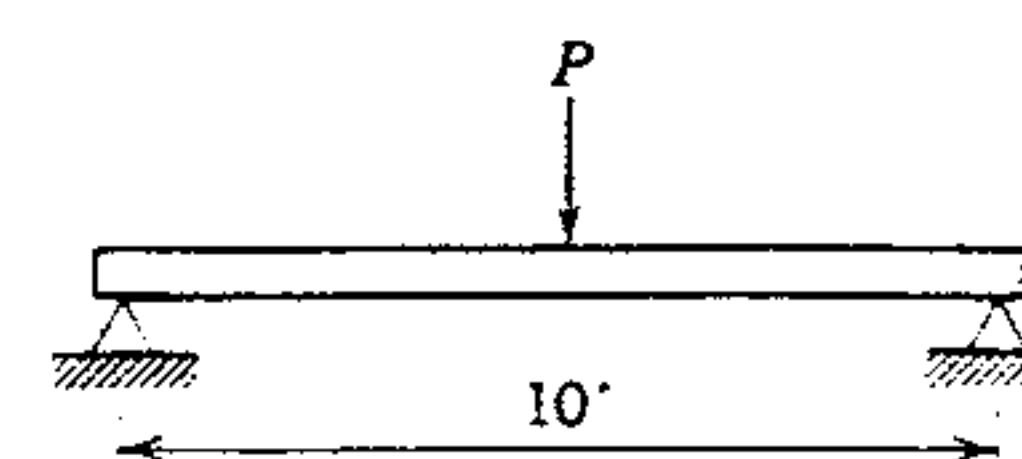


Figura 3.5

- En el Manual AISC, Formas S —características—, se encuentra que el módulo de sección es de  $29.4 \text{ pulg}^3$ . El momento resistente máximo de la viga es

$$M = F_b S = 30,000(29.4) = 882,000 \text{ pulg./libra}$$

$$M = \frac{882,000}{12} = 73,500 \text{ pie/libra}$$

- En la figura 2.34 se ve que el momento máximo resultante de la carga concentrada está

$$M = \frac{PL}{4}$$

El momento resultante del peso de la viga está en el mismo punto y es igual a  $M = wL^2/8$ . La suma numérica de estos momentos representa el momento máximo total causado por las fuerzas externas.

$$M = \frac{PL}{4} + \frac{wL^2}{8}$$

$$M = \frac{P(10)}{4} + \frac{35(10)^2}{8} = 73,500 \text{ pie/libra}$$

$$P = 29,200 \text{ lb}$$

### Ejemplo 3

Diseñar la viga más económica en función de la resistencia a la flexión, que soporte una carga uniformemente distribuida sobrepuesta de 1900 libras por pie, si la viga está simplemente apoyada y tiene un claro de 24 pies. El esfuerzo máximo admisible a la flexión ( $F_b$ ) es  $0.6F_y$  y el acero A36.

### Solución

- Hacer un esquema de la viga mostrando las cargas (figura 3.6).
- Calcular el momento máximo resultante de la carga sobrepuesta.



$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{1900(24)^2}{8} = 137,000 \text{ pie/libra}$$

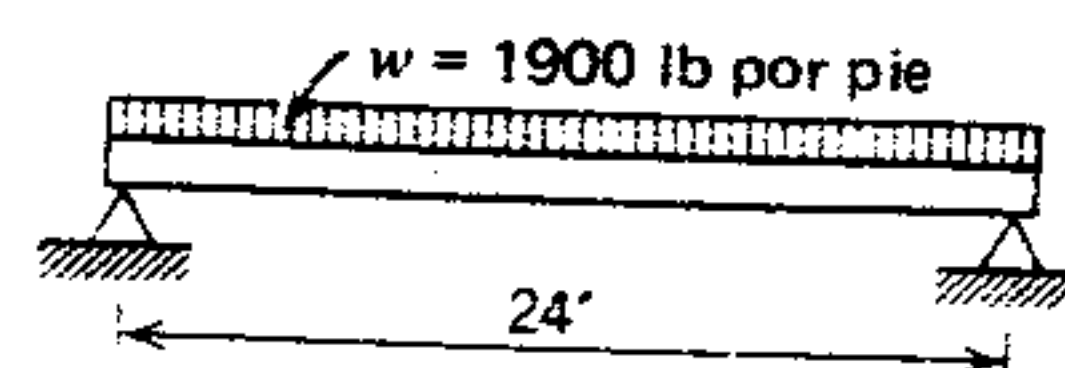


Figura 3.6

3. El esfuerzo flexionante admisible es

$$F_b = 0.6(36,000) \approx 22,000 \text{ lb/pulg}^2$$

4. Determinar el módulo de sección requerido para este momento.

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{137,000(12)}{22,000} = 74.7 \text{ pulg}^3$$

5. Se debe dejar tolerancia para el peso de la viga. Ahora el problema es seleccionar una viga que tenga un módulo de sección ligeramente mayor que  $74.7 \text{ pulg}^3$ . Para ello, en la parte 2 del Manual AISC aparece una tabla titulada "Tabla de selección de diseño del esfuerzo admisible", donde se listan formas de acuerdo a la magnitud de su módulo de sección. En esta tabla se selecciona una W 21 X 44 que tiene una S de  $81.6 \text{ pulg}^3$ . Todas las otras vigas listadas dentro de este grupo y que tienen un módulo de sección menor, tienen un peso mayor.
6. Se debe revisar la W 21 X 44 tomando en consideración la carga muerta de la viga. El momento en el centro debido al peso de la viga es

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{44(24)^2}{8} = 3,200 \text{ pie/libra}$$

El momento flexionante total en el centro es

$$M = 137,000 + 3,200 = 140,200 \text{ pie/libra}$$

El módulo de sección requerido para este momento es

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{140,200(12)}{22,000} = 76.5 \text{ pulg}^3$$

Como este valor requerido es menor que el módulo de sección de la viga seleccionada ( $81.6 \text{ pulg}^3$ ), la W 21 X 44 es adecuada.

#### Ejemplo 4

Diseñar la viga de menor peso en función de su resistencia a la flexión, que sostenga una carga uniformemente distribuida sobrepuesta de 2 kips por pie y una carga concentrada de 8 kips a 4 pies de la reacción derecha. La viga está simplemente apoyada y tiene un claro de 16 pies. El esfuerzo admisible a la flexión ( $F_b$ ) es  $0.6F_y$ , y el acero A36.

#### Solución

- Hacer un diagrama de la viga mostrando las cargas (figura 3.7a) y calcular las reacciones. Por las cargas se puede observar que el momento máximo no está a mitad del claro sino en otra sección. En el capítulo 2 se explicó que el momento máximo estará en la sección en que la fuerza cortante sea igual a cero.
- Dibujar el diagrama de fuerza cortante y calcular la sección en que ésta es igual a cero, como se ve en la figura 3.7b. (Cuando se desconoce la sección de momento máximo, el efecto del peso de la viga se calcula mejor estimando su magnitud e incluyéndola al principio de los cálculos.) Suponer un peso de viga de 40 lb por pie.
- Calcular el momento máximo. No es necesario dibujar el diagrama de momento flexionante ya que sólo se usa el momento máximo en la solución. Usando un cuerpo

libre a la izquierda de la fuerza cortante nula, se obtiene:

$$M = 18.3(8.97) - 2.04(8.97) \frac{8.97}{2} = 82.1 \text{ pie kips}$$

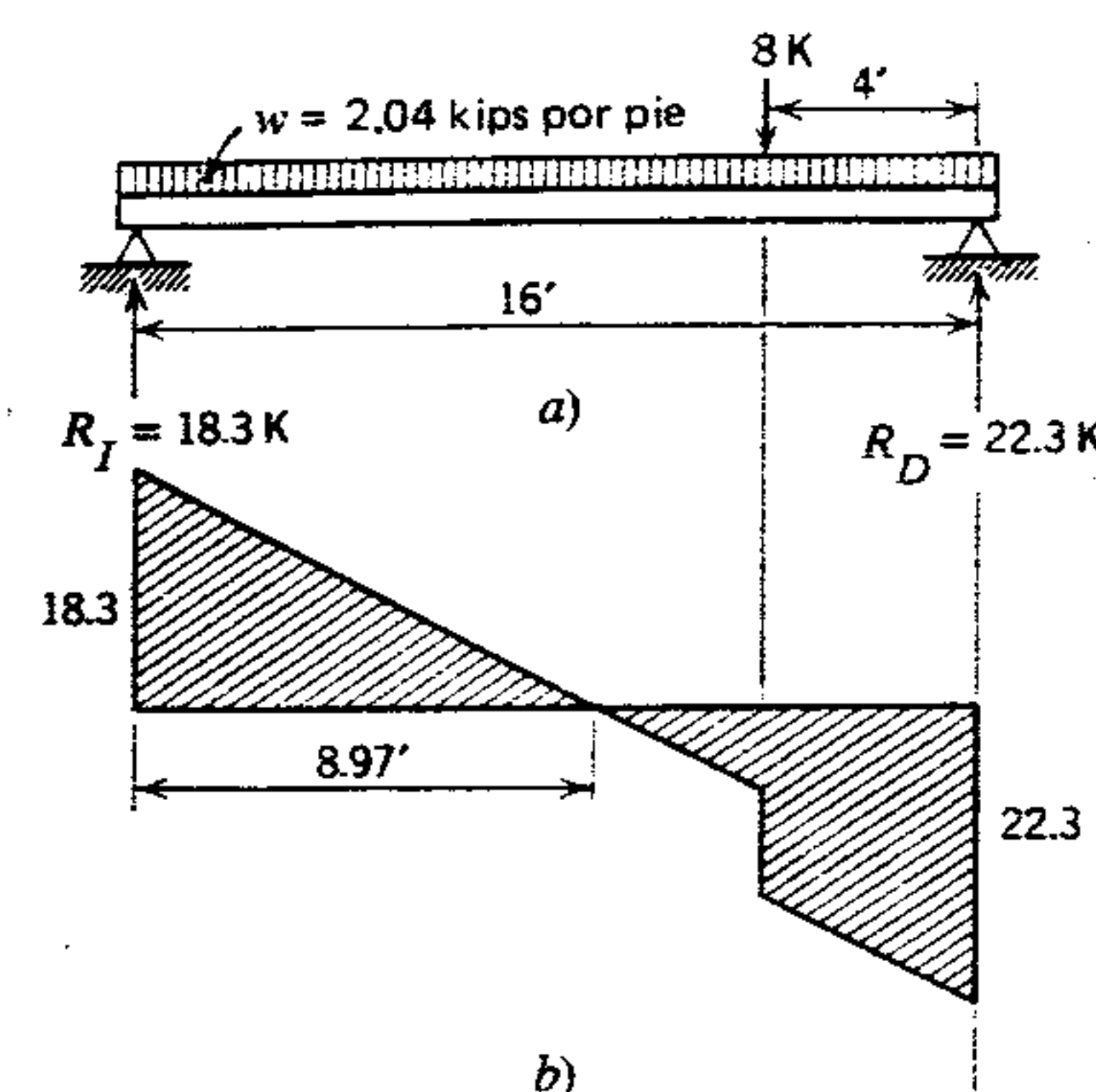


Figura 3.7

Este valor también se puede encontrar determinando el área del diagrama de fuerza cortante a la izquierda del punto cero del valor de ésta, como se ve a continuación:

$$M = \frac{18.3(8.97)}{2} = 82.1 \text{ pie kips}$$

4. Calcular el módulo de sección requerido

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{82.1(12)}{22} = 44.8 \text{ pulg}^3$$

5. En la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo admisible" (Manual AISC), seleccionar una W 16 X 31 que tenga  $S = 47.2 \text{ pulg}^3$ . Ya que el peso supuesto de la viga fue de 40 lb por pie, no se necesita mayor afinación.

### 3.8 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO

En el último ejemplo se ilustran los pasos necesarios para el diseño de una viga simple que resista esfuerzos flexionantes. Para vigas con sistemas de cargas más complicados, a menudo se requieren operaciones adicionales. En los siguientes procedimientos se dan los pasos usuales necesarios para completar un diseño que resista la flexión. En el capítulo 5 se usará más ampliamente el Manual AISC para el diseño.

- Hacer un esquema de la viga mostrando las cargas. Este puede o no incluir un peso estimado para la viga, dependiendo de la experiencia del diseñador y de la complejidad del problema. (Ver Artículo 3.9.)
- Calcular las reacciones.
- Encontrar las secciones de momento flexionante máximo. Estos estarán donde la línea de la fuerza cortante pase por cero. Para casos más complicados puede necesitarse trazar el diagrama de cortante.
- Calcular el momento flexionante máximo. Para vigas con partes voladas habrá momentos flexionantes máximos positivos y negativos. Por lo general en el diseño se usa el valor numérico mayor, sin importar el signo.<sup>5</sup> Para cargas complicadas puede ser conveniente trazar el diagrama del momento flexionante.

<sup>5</sup> En una comparación de la figura 2.23a y en la explicación del Artículo 3.2, es evidente que el momento flexionante positivo provoca esfuerzos de tensión en las fibras inferiores de una viga y esfuerzos de compresión en las fibras superiores.

Una revisión de la figura 2.23b mostrará que esta condición se revierte en el caso del momento flexionante negativo: las fibras superiores están en tensión y las inferiores en compresión. Puesto que en este capítulo se supone que los esfuerzos admisibles del acero estructural ante la tensión y compresión son iguales, esta consideración no es importante en secciones simétricas como W y S, excepto cuando se van a empalmar volados o vigas continuas. Sin embargo, otras condiciones que se presentan en el capítulo 5 requerirán una consideración más detallada de los momentos flexionantes positivos y negativos y de su influencia sobre el diseño.



5. Seleccionar un esfuerzo unitario admisible ( $F_b$ ) basado en el acero estructural que se usará, y encontrar el módulo de sección requerido usando la fórmula de flexión de viga.

$$S = \frac{M}{F_b}$$

6. Seleccionar una viga con un módulo de sección un poco mayor que el determinado necesario en el paso 5 con el fin de absorber el momento flexionante adicional causado por el peso de la viga. (Cuando en el paso 1 se incluyó el peso estimado de la viga, no se incluía este exceso y la solución se completaba sin ejecutar el paso 7.)

7. Calcular de nuevo el momento flexionante máximo debido al efecto combinado de la carga sobrepuesta y el peso de la viga, y de aquí determinar otra vez el módulo de sección requerido. Este valor no debe ser mayor que el módulo de sección de la viga que se supuso anteriormente. Si lo es, se debe escoger una nueva viga y repetir este paso.

Cuando no se imponen otras condiciones, se debe usar la sección de menor peso que soporte la carga. En la mayoría de los casos, sin embargo, la altura de claro de piso requerida o algunas otras consideraciones arquitectónicas limitan el peralte y, por lo tanto, se necesitará usar una viga más pesada de igual resistencia pero menor peralte. El procedimiento anterior se puede abreviar al adquirir destreza en el diseño.

### 3.9 EFECTO DEL PESO DE LA VIGA

En casos en que el peso de la viga es muy pequeño en comparación con la carga aplicada, se puede omitir. Sin embargo, en construcciones resistentes al fuego en que las vigas de acero pueden estar recubiertas de concreto, con frecuencia el peso de la viga más el del recubrimiento puede constituir una parte considerable de la carga. Además, el momento flexionante máximo, incluido el peso de la viga, puede no estar exactamente en la misma loca-

lización que el momento flexionante máximo originado únicamente por las cargas sobrepuestas (ejemplo 4). En caso de que el peso de la viga sea grande en comparación con la carga sobrepuesta, se deben revisar la posición y la cantidad del momento flexionante máximo después de conocer con certeza el peso de la viga.

### PROBLEMAS

Los siguientes problemas requieren el diseño en función de la resistencia a la flexión solamente. Para su solución se necesita un manual con las propiedades de las formas estructurales. Se recomienda usar la octava edición del Manual AISC.

1. Una viga W 12 X 40 está simplemente apoyada en un claro de 16 pies. Encontrar la carga uniforme total que soportará, además de su peso propio. El acero es A36 y el esfuerzo flexionante admisible de  $0.6F_y$ . (La solución aparece en el apéndice G.)
2. Una viga S 18 X 54.7 está simplemente apoyada en un claro de 21 pies. Soporta una carga uniformemente distribuida de 2000 libras por pie (incluyendo su propio peso) más una carga concentrada de 3 kips a 3 pies de la reacción izquierda. Determinar la magnitud y la posición del esfuerzo flexionante máximo ( $f_b$ ).
3. Una viga con un claro de 24 pies soporta una carga uniformemente distribuida de 2 kips por pie más cargas concentradas de 10 kips cada 8 pies. Encontrar la forma S más ligera y la forma W más ligera que soporten esta carga si el acero es A36 y el esfuerzo flexionante admisible es de  $0.6F_y$ . (La solución se da en el apéndice G.)
4. Una viga con un claro de 16 pies soporta cargas concentradas de 2 kips a cada cuatro pies. Encontrar la viga de 10 pulgadas nominal más ligera requerida si el acero es A36 y el esfuerzo flexionante admisible es  $0.6F_y$ . (La solución se da en el apéndice G.)
5. Una viga TS 6 X 3 X 1/4 cubre un claro de 8 pies. Determinar la mayor carga concentrada que se puede aplicar a mitad de su claro. El acero es A501 y el esfuerzo flexionante admisible es  $0.6F_y$ .

6. Una viga W 14 X 30 cubre un claro de 21 pies. Omitir el peso propio de la viga. Cada 7 pies se aplican fuerzas concentradas iguales. Determinar el valor máximo de estas cargas si el acero es A36 y el esfuerzo admisible  $0.66F_y$ .
7. Una viga S 5 X 10 trabaja en cantiliver con un volado de 6 pies a partir de un muro. El acero es A36 y el esfuerzo admisible de  $0.66F_y$ . Calcular la carga concentrada máxima que se puede aplicar a 2 pies del extremo libre.
8. Una viga W 21 X 83 cubre un claro de 20 pies. Tiene una carga uniforme de 500 lb por pie a todo lo largo, una carga concentrada de 32 kips a 6 pies de la reacción izquierda, y una carga concentrada de 21 kips a 8 pies de la reacción derecha. Determinar la localización y la magnitud del esfuerzo flexionante máximo ( $f_b$ ).
9. Una viga W 14 X 30 se apoya en dos soportes separados 18 pies. La viga se extiende 6 pies más allá del apoyo izquierdo y 4 pies más allá del derecho. Se aplica una carga concentrada de 12 kips a la mitad de los dos apoyos, otra carga concentrada de 6 kips en el extremo izquierdo de la viga, y una tercera carga concentrada de 10 kips en el extremo derecho de la viga. Además, una carga uniforme de 400 lb por pie, incluyendo el propio peso de la viga, se extiende a todo lo largo de la viga. Encontrar el valor del esfuerzo flexionante ( $f_b$ ).
  - a) sobre el apoyo izquierdo;
  - b) bajo la carga de 12 kips;
  - c) sobre el apoyo derecho.

En cada caso indicar la posición del esfuerzo flexionante máximo a tensión y compresión, es decir, partes superior e inferior de la viga.

10. Seleccionar una viga estándar norteamericana (forma S) que soporte una sola carga concentrada de 20 kips en el centro del claro de 18 pies. El acero es A36 y el esfuerzo admisible de  $0.66F_y$ . La viga estará completamente recubierta de concreto (2 pulgadas en todos los lados). Suponer que el peso del concreto será de 144 libras por pie cúbico.
11. Seleccionar una sección de patín ancho (forma W) de 24 pies de largo que soporte cargas concentradas de 10 kips situadas cada 8 pies del claro. El acero es A572, Grado 50, y el esfuerzo admisible de  $0.6F_y$ .
12. Seleccionar una viga de forma S que soporte una carga sobrepuesta de 1500 libras por pie sobre un claro de 22 pies. El acero es A588, Grado 50, y el esfuerzo flexionante admisible de  $0.6F_y$ .
13. Seleccionar una forma W con las siguientes características: el claro es de 18 pies; a seis pies de la reacción derecha se aplica una carga concentrada de 6 kips, y una carga uniforme de 500 libras por pie se extiende desde la reacción izquierda hasta la carga concentrada. El acero es A36 y el esfuerzo admisible de  $0.66F_y$ .
14. Seleccionar una forma W con las siguientes características: el claro de la viga es de 24 pies, tres cargas concentradas iguales de 4 kips se aplican cada 6 pies y el peralte nominal de la viga está limitado a 10 pulgadas. El acero es A36 y el esfuerzo flexionante admisible es de  $0.6F_y$ .
15. Diseñar una viga con las siguientes características: la longitud total es de 22 pies; la viga tiene un volado de 6 pies a partir del soporte derecho; se aplica una carga concentrada de 6 kips a 4 pies de la reacción izquierda y otra de igual magnitud a 8 pies de la reacción izquierda; una tercera carga concentrada de 8 kips se aplica al extremo del volado y una carga uniforme de 1200 lb por pie se extiende a lo largo de la viga. El acero es A36 y el esfuerzo flexionante admisible de  $0.66F_y$ .
16. Una viga C 8 X 18.75 yace sobre su alma con los patines hacia arriba. Tiene un claro de 8 pies y soporta una carga uniforme de 200 libras por pie. Determinar el esfuerzo flexionante máximo ( $f_b$ ) a la tensión y a la compresión.
17. Elegir una sección "Te" estructural que reúna las siguientes características: el patín está en la parte inferior y debe tener una anchura de aproximadamente 8 pulgadas; el alma es vertical y el claro de 12 pies debe soportar una carga uniforme de 350 libras por pie. Usar acero A36; esfuerzo admisible =  $0.6F_y$ . Para la sección que se elija, calcular el esfuerzo flexionante máximo a la tensión y a la compresión.
18. Seleccionar un ángulo para soportar una carga de 300 libras por pie sobre un claro sencillo de  $6\frac{1}{2}$  pies. El ala inferior del ángulo será de  $3\frac{1}{2}$  pulgadas, situada horizontalmente. El acero es A36 y el esfuerzo flexionante admisible es de  $0.6F_y$ .



### 3.10 RESISTENCIA AL CORTANTE

Una vez diseñada una viga para la flexión, se debe investigar su resistencia al esfuerzo cortante. En la mayoría de los casos, la investigación no dará como resultado un incremento en el tamaño. Sin embargo, cuando el claro es corto, y/o la viga está muy cargada o sujeta a grandes cargas concentradas cerca de sus extremos, es posible que falle al esfuerzo cortante.

En los Artículos 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8 se presentaron fórmulas para calcular la magnitud de la fuerza cortante vertical de las fuerzas externas en cualquier sección a lo largo del claro de la viga. Para mantener el equilibrio la viga debe desarrollar una fuerza resistente interna igual en sentido contrario. Esta se denomina *fuerza cortante resistente*. La capacidad de la viga para resistir el momento flexionante se midió por el momento resistente en términos de esfuerzo cortante. De manera similar la magnitud de la fuerza cortante resistente se debe medir en términos de esfuerzo cortante. El esfuerzo cortante es la *intensidad* de la fuerza en cualquier punto determinado y, en consecuencia, debe calcularse en unidades de fuerza por unidad de área (usualmente lb por pulg<sup>2</sup>). Al igual que con los esfuerzos flexionantes, es necesario determinar cómo varía el esfuerzo cortante a través de la sección y cómo calcular su valor máximo.

En la figura 2.12 se muestra la tendencia de todos los planos verticales a deslizarse uno sobre otro debido a las fuerzas cortantes verticales. En la figura 3.8 se muestra que está presente una acción cortante adicional, denominada *esfuerzo cortante horizontal*.

La figura 3.8a representa una viga que se ha deflexionado debido a la carga  $P$ . La figura 3.8b representa una viga de las mismas dimensiones que la de a), pero constituida por tres franjas indepen-

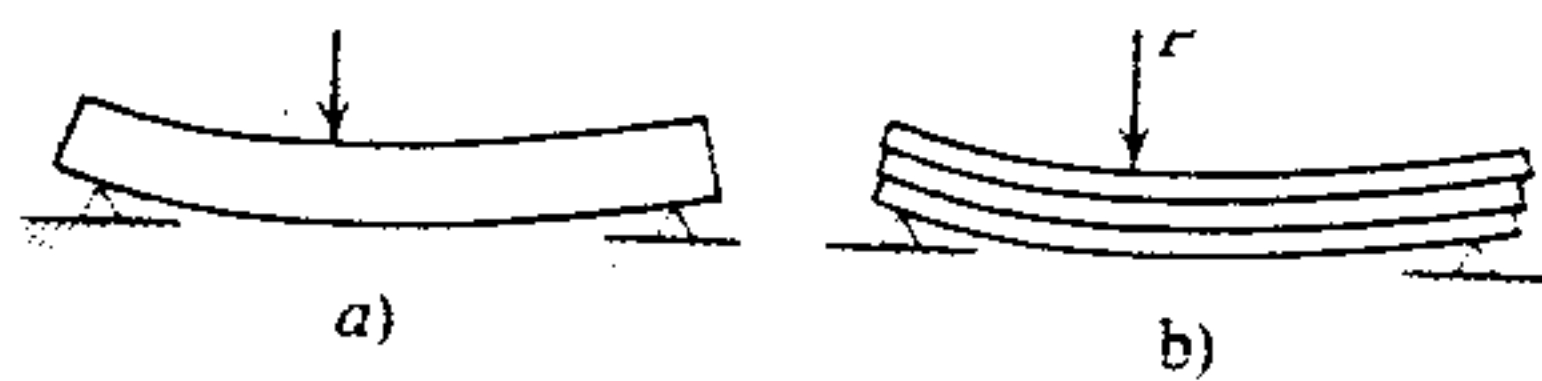


Figura 3.8 Cortante horizontal.

dientes; en este caso la deflexión es mayor que la de la viga sólida. Además, es evidente que el deslizamiento ha ocurrido a lo largo de las superficies de contacto de las tres piezas independientes. La tendencia que las capas de la viga tienen a deslizarse una sobre otra también se presenta en la viga sólida de la figura 3.8a, pero se ha evitado debido a la resistencia de la viga al cortante horizontal. Hay una fuerza cortante horizontal actuando a lo largo de cada plano horizontal de la viga. Por lo tanto, debe existir un esfuerzo cortante horizontal en todos los planos horizontales.

### 3.11 RELACIÓN ENTRE EL CORTANTE HORIZONTAL Y EL VERTICAL

En la figura 3.9a se presenta una parte de la viga que se muestra en la figura 3.8a. Las líneas verticales representan dos secciones de la viga tomadas tan próximas entre sí (distancia diferencial  $dx$ ), que el cortante sobre las secciones se puede suponer igual. Considérese que se ha eliminado una pequeña parte de la viga entre estas secciones (con dimensiones de  $dx$  y  $dy$ ). Esta parte se presenta a mayor escala en la figura 3.9b con las fuerzas verticales ( $v$ ) actuando sobre ella. Resulta evidente en esta figura que esta parte no está en equilibrio y que giraría en sentido de las manecillas del reloj si no estuvieran presentes otras fuerzas. Sin embargo, se sabe que esta parte está en equilibrio y, por lo tanto, deben existir otras fuerzas como las representadas por  $v'$  en la figura 3.9c.

Como la parte está en equilibrio, los momentos tomados respecto a cualquier punto, como la esquina  $O$ , deben ser iguales a cero. Si el ancho de la parte perpendicular al papel se toma como una uni-

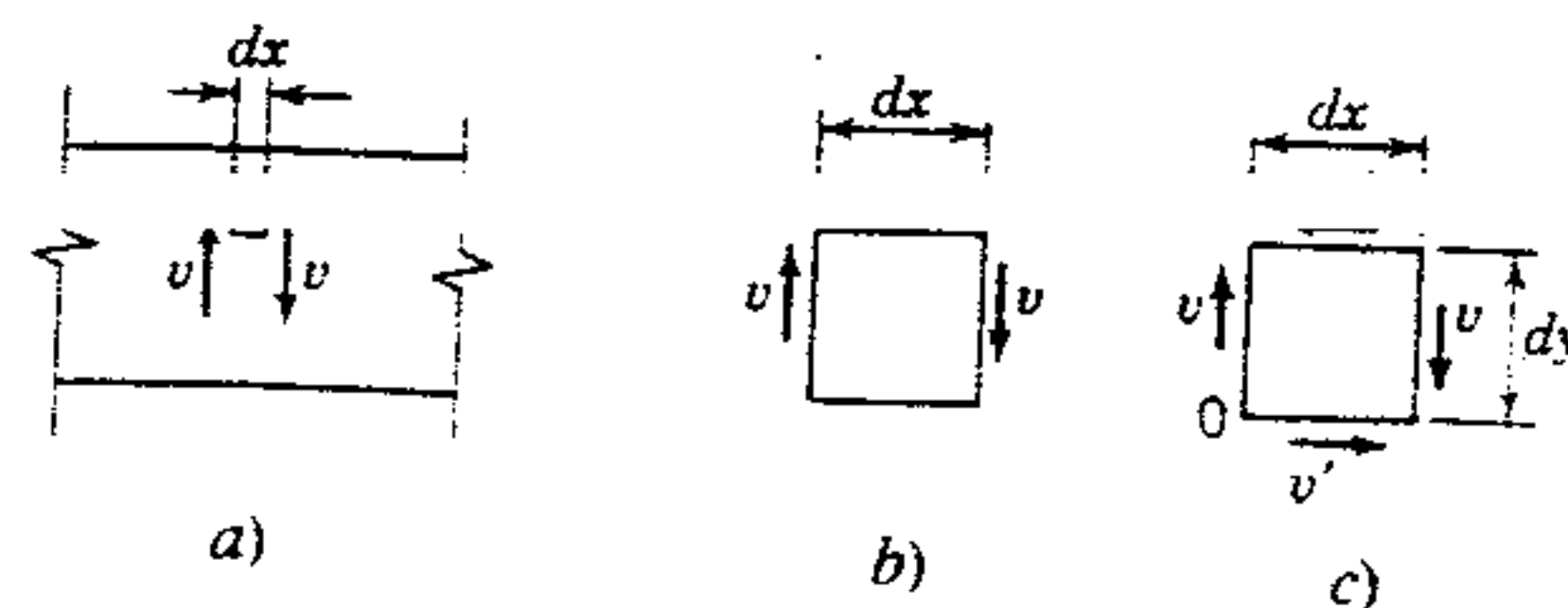


Figura 3.9 Cortante vertical y horizontal.

dad, entonces el esfuerzo total sobre la cara superior es  $v'(1) dx$  y el de la cara derecha es  $v(1) dy$ . Por lo tanto, tomando momentos respecto a  $O$ ,

$$v' dx dy = v dx dy$$

o

$$v' = v$$

Es decir, la intensidad del cortante horizontal en cualquier punto de una viga es igual a la intensidad del cortante vertical en ese punto. Entonces el cortante vertical produce otra fuerza cortante en ángulos rectos entre sí, de igual intensidad y actuando a lo largo de la viga. El símbolo  $v$  se usa para indicar los esfuerzos cortantes, ya sean horizontales o verticales. En exposiciones posteriores se usará el símbolo  $f_v$  para representar el esfuerzo cortante desarrollado en vigas de acero.

### 3.12 INTENSIDAD DEL ESFUERZO CORTANTE

Para determinar cómo varía el esfuerzo cortante a lo largo de la sección transversal de una viga, es necesario elaborar una expresión general que represente la magnitud del esfuerzo en cualquier punto. Para hacerlo es necesario aislar un pequeño elemento de una viga como cuerpo libre y aplicar leyes de estática. Este elemento se toma de la viga que se presenta en la figura 3.10a. Para mayor claridad, la viga se muestra recta y no deflexionada.

El elemento a considerar está entre los dos planos verticales 1-1 y 2-2. Se supone que estos planos están muy cercanos entre sí, con sólo una distancia diferencial  $dx$  separándolos. Cualquier otro plano, paralelo al eje neutro y a una distancia  $y$  de él, aísla completamente el pequeño bloque rectangular que se muestra en la figura 3.10b. Nótese que el ancho de la viga.

Los momentos flexionantes en los planos 1-1 y 2-2 se designarán como  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. Estos momentos producirán esfuerzos de flexión sobre los lados del elemento, como se ve en la figura 3.10c, y si estos esfuerzos de flexión sobre sus

respectivas áreas se suman, tendrán las resultantes  $C_1$  y  $C_2$ . Si  $M_2$  es mayor que  $M_1$ , entonces  $C_2$  es mayor que  $C_1$ , y el elemento tendería a moverse hacia la izquierda. Para mantener el equilibrio se requiere una fuerza adicional  $H$  actuando sobre el área  $b dx$ . En consecuencia,

$$C_2 - C_1 = H = v(b) dx$$

Los valores de las resultantes del esfuerzo,  $C_1$  y  $C_2$ , se pueden encontrar mediante la suma de esfuerzos sobre las áreas de las caras laterales del bloque ( $\sum f dA$ ). Sin embargo, en el Artículo 3.4 se mostró que el esfuerzo de fibra en cualquier punto era

$$f = \frac{My}{I}$$

Por lo tanto,

$$C_1 = \sum \frac{M_1 y}{I} dA$$

o

$$C_1 = \frac{M_1}{I} \sum y dA$$

Asimismo

$$C_2 = \frac{M_2}{I} \sum y dA$$

y

$$C_2 - C_1 = \frac{M_2 - M_1}{I} \sum y dA$$

Como los dos planos 1-1 y 2-2 distan solamente una distancia diferencial  $dx$ , la diferencia entre los momentos  $M_2$  y  $M_1$  es sólo un momento diferencial  $dM$ . Resumiendo

$$C_2 - C_1 = v(b) dx = \frac{dM}{I} \sum y dA$$

$$v = \frac{dM}{dx} \left( \frac{1}{Ib} \right) \sum y dA$$

Analizando aún más la ecuación anterior,  $dM/dx = V$  (ver Artículo 2.15). Asimismo,  $\sum y dA$  es el mo-



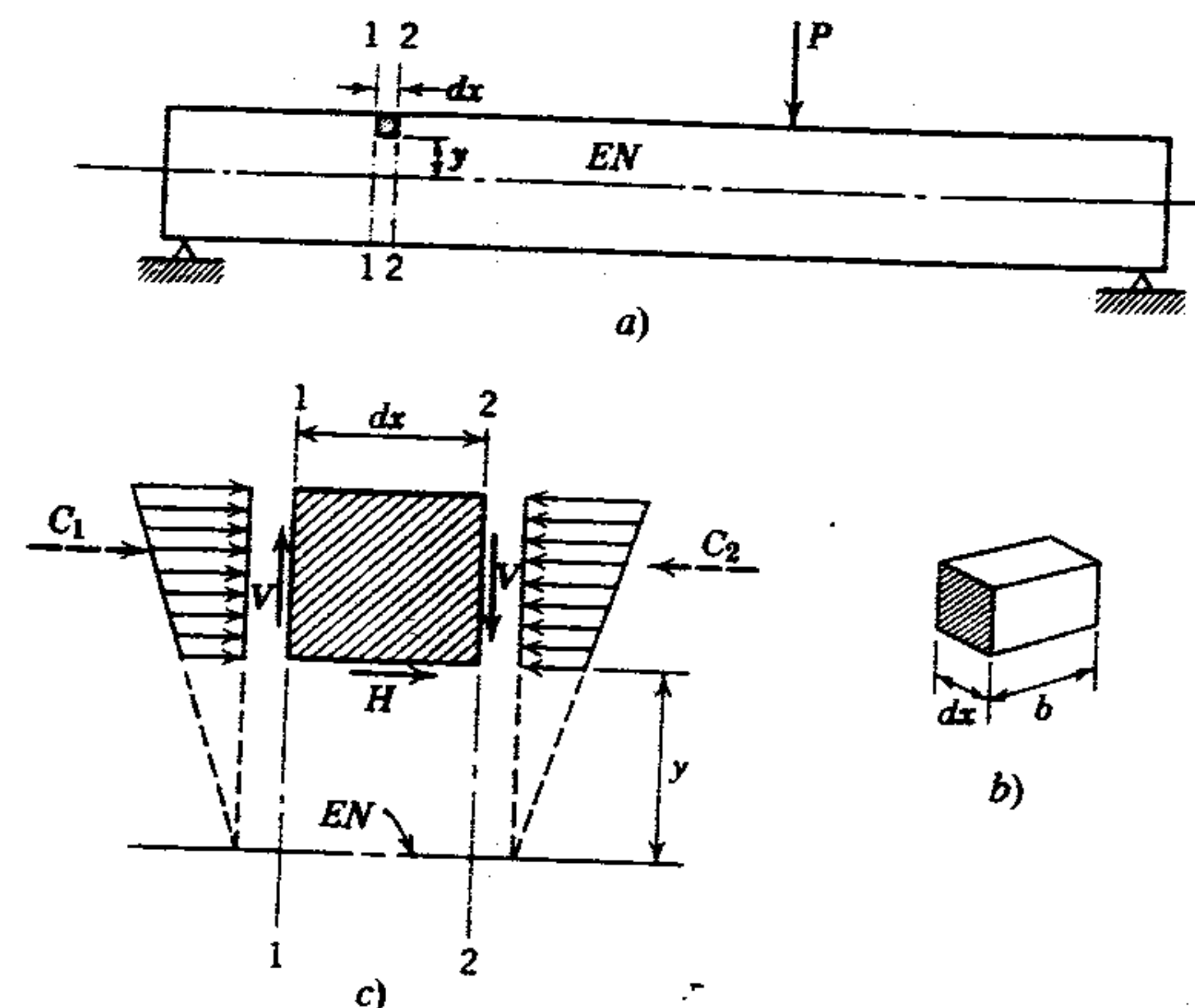


Figura 3.10 Derivación de la fórmula del esfuerzo cortante.

mento estático, denotado por el símbolo  $Q$ . Es el momento, respecto al eje neutro, del área incluida entre el plano del esfuerzo deseado y el eje superior de la sección. Por tanto, la expresión general para el esfuerzo cortante es

$$v = \frac{VQ}{Ib}$$

### 3.13 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS CORTANTES

Un examen más a fondo de la fórmula del cortante muestra que la magnitud del cortante tiene una variación inversamente proporcional al ancho de la sección, es decir, entre menor sea la anchura, mayor será el esfuerzo cortante. Si la anchura de cualquier sección dada permanece constante, la única

manera en que el esfuerzo cortante puede variar es cuando el plano del esfuerzo se deposita sobre el eje neutro.

Obsérvese la sección de viga rectangular de la figura 3.11a. La anchura  $b$  permanece constante (2 pulg) y se determina el momento estático en los cuatro planos: 1, 2, 3, y EN.

$$Q_1 = 2(1)3.5 = 7$$

$$Q_2 = 2(2)3 = 12$$

$$Q_3 = 2(3)2.5 = 15$$

$$Q_{EN} = 2(4)2 = 16$$

El momento de inercia con referencia al eje neutro ( $bh^3/12$ ) es 85.5 pulg<sup>4</sup>.

Sustituyendo estos valores en la ecuación  $v = VQ/Ib$ , una fuerza cortante externa  $V$  de 50 kips produciría los esfuerzos mostrados en la figura 3.11b. Estos esfuerzos se representan gráficamente para mostrar su distribución a lo largo de la sección. Aunque están trazados horizontalmente, debe recordarse que también hay un esfuerzo igual en cada punto, actuando en dirección vertical.

El esfuerzo cortante de interés esencialmente el esfuerzo máximo. Este se localiza en el eje neutro. Usando la sección rectangular de la figura 3.11a, el esfuerzo cortante máximo en el eje neutro es

$$v = \frac{VQ}{bI} = \frac{V(b)h/2(h/4)}{b(bh^3/12)}$$

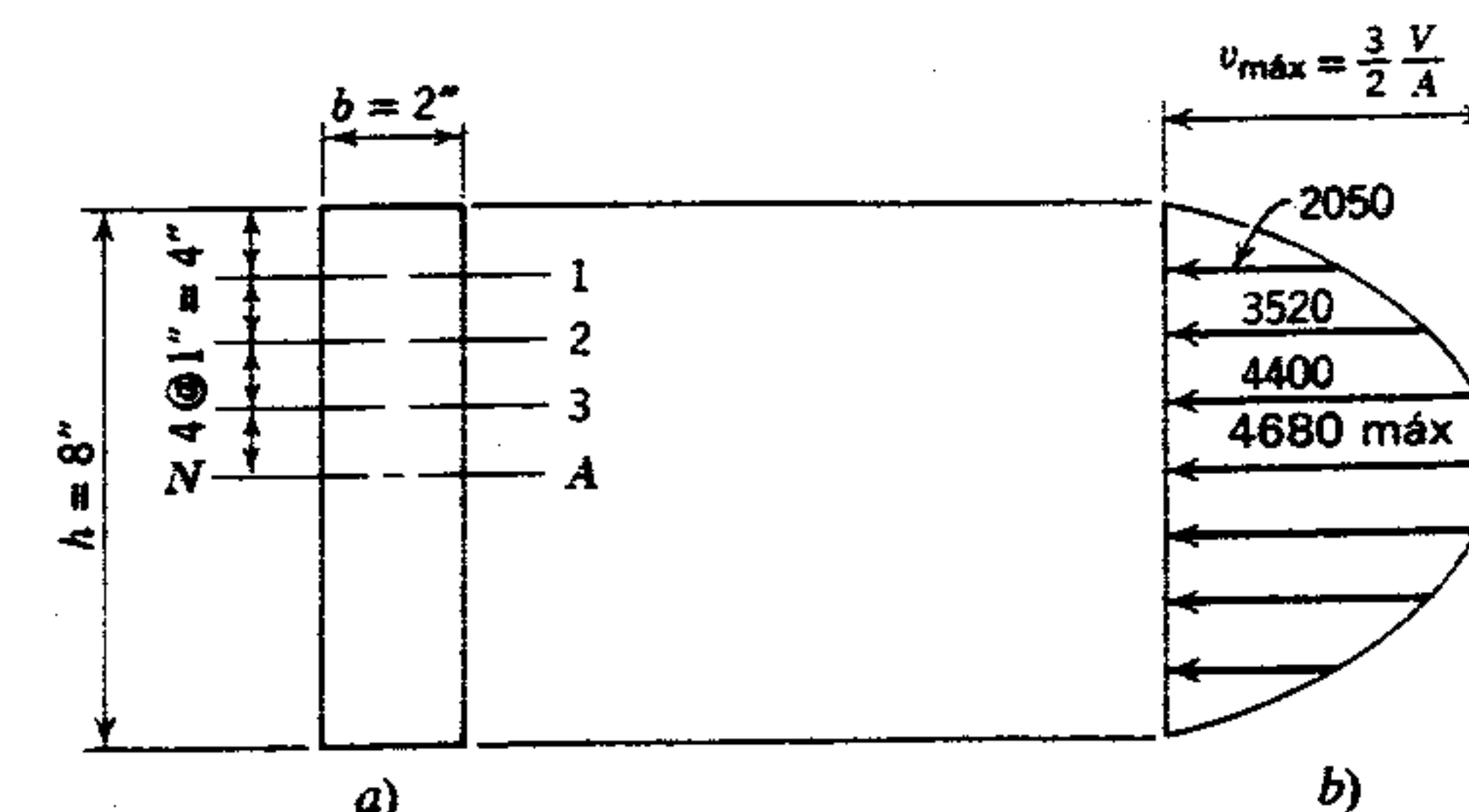


Figura 3.11 Distribución del cortante: forma rectangular.

Igualando  $A = bh$  y sustituyendo en la anterior

$$v = \frac{3}{2} \left( \frac{V}{A} \right)$$

Así, para secciones rectangulares, el esfuerzo cortante máximo es  $3/2$  veces el esfuerzo cortante promedio.

En el Artículo 3.6 se mostró que la forma de viga más adecuada para resistir el momento flexionante es una sección tipo patín. Sin embargo, los patines tienen poca resistencia al cortante. Para ilustrar esto, en la figura 3.12a se muestra una sec-

ción transversal de una viga W 12 X 40, donde se indica la posición de seis planos horizontales que se utilizan en el cálculo del momento estático. Están marcados como, EN, B, C, D, E y F. Otro plano está situado en el punto G. Al calcular el esfuerzo cortante en los seis planos del alma, el valor de  $b$  en la fórmula  $VQ/Ib$  es el grosor del alma. Para calcular el esfuerzo cortante en el punto G, el valor de  $b$  es el grosor del patín. Si se supone que el cortante vertical total sobre la sección es de 40 kips, entonces un análisis similar al anterior dará como resultado esfuerzos unitarios, como los registrados en la figura 3.12b. Se verá que aun cuando las áreas

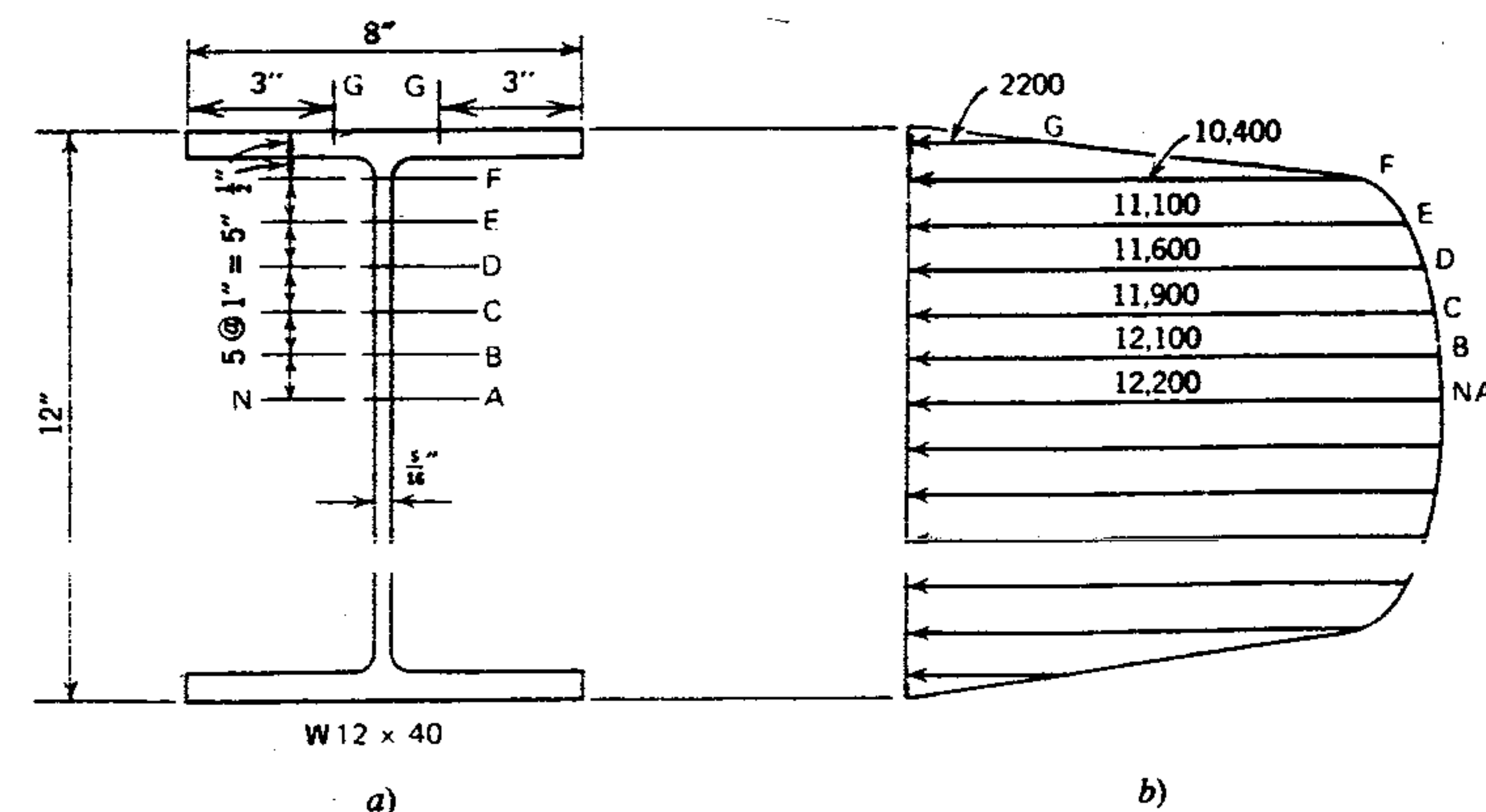


Figura 3.12 Distribución del cortante: vigas con patín.



de patín son relativamente grandes, no son particularmente efectivas. El alma de la viga soporta aproximadamente el 90 por ciento de la resistencia al cortante.

### 3.14 DISEÑO PARA EL ESFUERZO CORTANTE

Para un diseño rutinario resulta demasiado complejo emplear el método utilizado en la sección anterior para determinar el esfuerzo cortante máximo en el eje neutro en vigas con patín. Además, existe cierta duda respecto al valor preciso que se debe usar para el esfuerzo cortante unitario admisible ( $F_v$ ).<sup>6</sup> Por lo tanto, en la práctica se usa un método aproximado en el cual se supone que el alma de la viga de acero resiste todo el cortante. Se usa un valor admisible para el esfuerzo cortante unitario admisible, que es lo suficientemente bajo para que el cortante unitario máximo desarrollado en la viga esté dentro de los límites de seguridad. Por ejemplo, si el valor especificado para el esfuerzo cortante unitario promedio ( $F_v$ ) fue 14,500 lb/pulg<sup>2</sup> cuando se calculó sobre esta base, el esfuerzo máximo real desarrollado podría estar próximo a 15,500 lb/pulg<sup>2</sup>. En casi todos los reglamentos de edificación, el valor especificado para el esfuerzo cortante unitario admisible en vigas de acero se basa en esta aproximación. De acuerdo con la práctica común, el término  $f_v$  tal como se usa en este texto denotará *esfuerzo cortante unitario promedio*, y no *esfuerzo cortante unitario*, y el símbolo  $A_w$  indicará *área de alma* (peralte real de viga por grosor de alma). Por lo tanto, la fórmula para el cortante es

$$f_v = \frac{V}{A_w}$$

<sup>6</sup> En el General Nomenclature of the 1980 AISC Manual (Nomenclatura General del Manual AISC 1980),  $F_v$  es el "esfuerzo cortante admisible",  $f_v$  es el "esfuerzo cortante (real) calculado" y  $V$  es el "cortante máximo de alma permitido". En este texto se usarán estos símbolos en todas las consideraciones sobre diseño.

Para la viga de la figura 3.12, supóngase que está soportando un cortante vertical total de 40 kips, el esfuerzo cortante unitario promedio, usando la fórmula anterior, es de 11,400 lb/pulg<sup>2</sup>, en comparación con el cortante unitario real de 12,200 lb/pulg<sup>2</sup>. La especificación de AISC establece que el esfuerzo cortante admisible  $F_v$  en el alma de la viga no será mayor de  $0.4F_y$ . Para acero A36,  $0.4F_y = 14.4$  k/pulg<sup>2</sup>, pero siempre se redondea a 14.5 k/pulg<sup>2</sup>. Asimismo, para aceros con una resistencia al cortante de 42 k/pulg<sup>2</sup> se redondea a 17.0 k/pulg<sup>2</sup>. Esto supone que el alma resiste todo el cortante tal como se calculó en la fórmula anterior.

### 3.15 USO DE LA FÓRMULA DEL ESFUERZO CORTANTE UNITARIO

La fórmula dada en el Artículo 3.14 se usa de dos maneras. Primera, cuando una viga se ha diseñado para resistir la flexión, el cortante en el alma se revisa resolviendo  $f_v$ . Este valor no debe exceder al establecido en las especificaciones. Por supuesto, el esfuerzo cortante unitario alcanza su valor máximo en la sección de cortante vertical total máximo. Para vigas simples sin volados, éste es adyacente al apoyo; entonces  $V$  viene a ser el cortante en el apoyo y  $A_w$  es el producto del peralte de la viga y el grosor del alma. Si el valor de  $f_v$  resulta mayor que el especificado, se debe seleccionar e investigar una viga con alma más gruesa o mayor peralte. Cuando se desea encontrar el cortante total máximo permisible que puede soportar una viga, el esfuerzo cortante unitario especificado se multiplica por el área del alma,

$$V = F_v A_w$$

En el Manual AISC se encuentran peraltes y grosores de alma de formas S, W y otras. Debe notarse que en muchos casos los peraltes reales de las formas W varían considerablemente de sus peraltes nominales. El área de alma siempre se debe calcular usando el peralte real de la sección.

Una comparación del grosor del alma de formas S y W revelará que para vigas de peraltes y pesos comparables, los grosores de alma de formas S son mayores. Esta variación se debe a la colocación de mayor cantidad de metal en los patines de las formas W y, por lo tanto, menor en el alma. Esto se hace para producir una forma de viga más resistente a la flexión. Cuando se trata de grandes esfuerzos cortantes, con frecuencia el mayor grosor del alma de las formas S las hace más ventajosas. Sin embargo, la mayoría de las vigas de acero que se usan actualmente en la práctica son formas W, ya que la resistencia a la flexión determina el diseño de vigas de acero con mucha mayor frecuencia que el cortante. Como se dijo antes, es más probable que el cortante se convierta en factor determinante cuando se soportan grandes cargas en claros cortos o cuando se aplican grandes cargas concentradas cerca de los extremos de un claro.

Asimismo, debe notarse que debido a las propiedades físicas del material, las vigas de acero estructural sujetas a esfuerzos cortantes excesivos no fallan por el cortante real del metal a lo largo de una sección plana como x-x en la figura 2.12, Artículo 2.5, o por el característico agrietamiento horizontal de las vigas de madera, como se indicó en la figura 3.8b. Cuando excesivos esfuerzos cortantes producen la falla, ésta ocurre por el pandeo diagonal del alma, que es un fenómeno causado por la acción combinada del cortante vertical y horizontal y los esfuerzos flexionantes. Sin embargo, los grosores y peraltes de almas de secciones de vigas de acero estructural laminado han sido elaborados de tal manera que el pandeo no se presentará si no se exceden los esfuerzos cortantes y la flexión admisibles. (Ver Artículo 5.8.)

#### Ejemplo 1

Si se usa una S 12 × 40.8 para soportar las cargas que se muestran en la figura 3.13, ¿cuál será el esfuerzo cortante unitario promedio máximo  $f_v$  desarrollado dentro de la viga? (La carga uniforme de 10,000 lb incluye una tolerancia para el peso de la viga.)

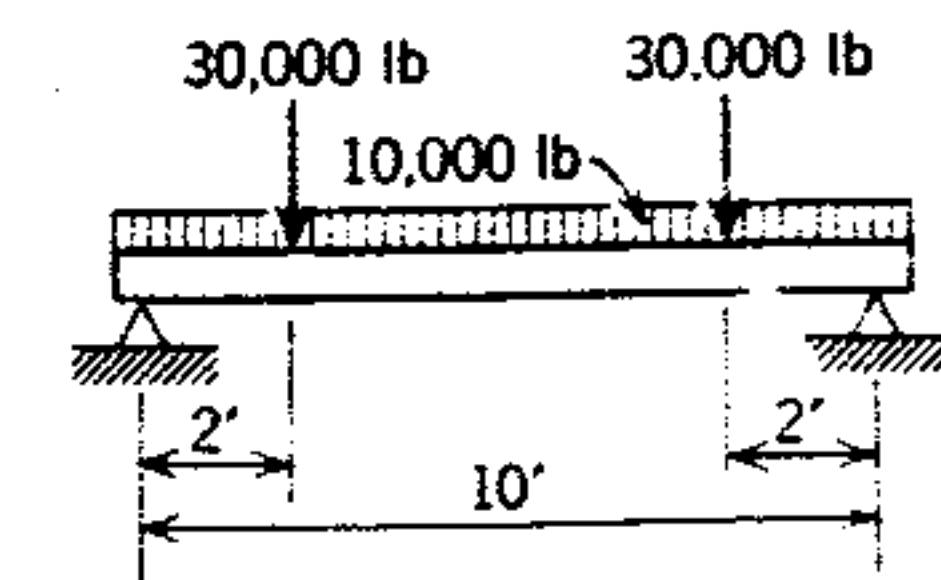


Figura 3.13 Ejemplo 1.

#### Solución

1. Calcular las reacciones. Como las cargas son simétricas, cada reacción será igual a la mitad de la carga total, o sea

$$R_L = R_R = \frac{10,000 + 2(30,000)}{2} = 35,000 \text{ lb}$$

2. El cortante vertical máximo es adyacente, e igual, a la reacción. Por lo tanto, su valor es 35,000 lb.
3. Consultando el Manual AISC para las dimensiones de la viga S 12 × 40.8, el área de alma de la sección es  $12(0.462) = 5.54$  pulg<sup>2</sup>. Por lo tanto,

$$f_v = \frac{V}{A_w} = \frac{35,000}{5.54} = 6318 \text{ lb/pulg}^2$$

#### Ejemplo 2

¿Cuál es el cortante total permisible máximo sobre una S 10 × 25.4, si el esfuerzo cortante unitario admisible ( $F_v$ ) es 14,500 lb/pulg<sup>2</sup> (acero A36)?

#### Solución

$$V = F_v A_w$$

y

$$V = 14,500(3.11) = 45,100 \text{ lb}$$

En el Manual AISC se encuentra que el área del alma de una S 10 × 25.4 es  $10(0.311) = 3.11$  pulg<sup>2</sup>. Por lo tanto,

$$V = 14,500(3.11) = 45,100 \text{ lb}$$



## PROBLEMAS

Los números de los problemas que se citan a continuación se refieren a los problemas que siguen al Artículo 3.9.

1. Determinar el esfuerzo cortante (unitario promedio) máximo para el problema 1. Determinar la carga uniforme total si el cortante es el factor

determinante y  $F_v = 14,500 \text{ lb/pulg}^2$  (acero A36). (La solución aparece en el apéndice G.)

2. Determinar el esfuerzo cortante máximo en las vigas de los problemas 2, 3 y 4. (Las respuestas se dan en el apéndice G.)
3. Determinar si las vigas de los problemas 7, 8 y 9 son seguras al cortante si  $F_v = 14,500 \text{ lb/pulg}^2$  (acero A36).

## 4

## Vigas de flexión

## 4.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Una viga se diseña para resistir adecuadamente ya sea a la flexión o a la fuerza cortante, pero aún así la deflexión puede llegar a tal grado que la viga resulte inapropiada para el uso propuesto. Los efectos más comunes de la deflexión excesiva en vigas son el daño a materiales adyacentes, una curvatura notable y, por tanto, inquietante o bien, imperfecciones funcionales como la desnivelación o un piso sin la rigidez necesaria. Para evitar estas condiciones, es práctica común diseñar las vigas de modo que, al recibir las cargas, la deflexión no exceda cierta magnitud específica, establecida como una fracción de la longitud del claro. En el diseño industrial, cuando se tienen aplanados la práctica más común ha sido limitar la deflexión por carga viva de piso a un valor máximo de  $1/360$  del claro. Sin embargo, no todas las estructuras llevan aplanado. Por lo tanto, es necesario establecer criterios basados en la ocupación, tipo de materiales usados y similares factores relacionados. En el capítulo 5 se tratan más detalladamente las limitaciones de deflexión; aquí se abarcará solamente el cálculo de deflexiones reales de vigas determinadas estáticamente.

Desde el punto de vista teórico también es importante hacer un estudio de los fenómenos de la deflexión, para auxiliar en el análisis de vigas y marcos estáticamente indeterminados. El diseño de vigas continuas (tres o más apoyos), marcos rígidos y otras estructuras indeterminadas con miembros de rigidez relativa está relacionado directamente con el patrón de deformación. Por lo tanto, el estudio de la deflexión y de los principios derivados de ella proporciona "herramientas" para el análisis de es-

pítulo 10 se ve la aplicación de estos principios en el diseño de vigas continuas.

El contenido que aquí se presenta abarca solamente la deflexión originada por el momento flexionante. Los esfuerzos cortantes presentes en las vigas también dan lugar a pequeñas cantidades de deflexión; sin embargo, excepto en vigas cortas y



de gran peralte, ésta constituye un porcentaje tan pequeño de la deflexión total, que se puede ignorar. Puesto que el momento flexionante es el que produce la deflexión, cualquier expresión para deflexión contendrá más o menos los mismos factores que aparecen en la expresión para la resistencia a flexión. Como se verá en las siguientes secciones, la fórmula general de las ecuaciones para la deflexión es

$$\Delta = K \frac{WL^3}{EI}$$

Esta expresión muestra que la magnitud de la deflexión depende de la magnitud de la carga  $W$ , la longitud del claro  $L$ , la rigidez del material de la viga medida por el módulo de elasticidad  $E$  y el tamaño y la forma de la sección transversal como se indica por el momento de inercia  $I$ . El término  $K$  es una constante cuyo valor depende de la distribución de la carga y las condiciones de apoyo. La expresión anterior también indica (debido a los factores físicos comprendidos) que la deflexión aumenta con el incremento de la carga o de la longitud del claro, y disminuye con el incremento del módulo de elasticidad o del momento de inercia. Es muy importante observar que la deflexión varía con la tercera potencia de la longitud del claro. Estas relaciones se pueden afirmar en la memoria estudiando la figura 4.15, en la que se presentan fórmulas de deflexión para diversas condiciones de carga que se encuentran con frecuencia en estructuras de edificios.

La derivación de expresiones para la deflexión bajo diversas condiciones de carga se puede obtener por diferentes métodos. En este capítulo se presentan dos de ellos: el método de área-momento y el método de curva elástica. Este último requiere el uso de la ecuación diferencial para la curva elástica por doble integración. El método de área-momento, aunque se basa en la ecuación de la curva elástica, se puede aplicar sin utilizar el cálculo y, por ello, se desarrollará primero.

## MÉTODO ÁREA-MOMENTO

### 4.2 PRINCIPIOS DEL MÉTODO ÁREA-MOMENTO DERIVACIÓN

Los principios de área-momento y el método derivado de su aplicación proporcionan uno de los más útiles juegos de herramientas para determinar deflexiones en vigas simples y para analizar estructuras indeterminadas.

En el capítulo 3 se mostró que la superficie neutra de una viga homogénea es un plano continuo que pasa a través del centro de gravedad de cada sección transversal. Cuando la viga se deflexiona, la superficie neutra se convierte en una curva continua que se denomina curva elástica. Las deflexiones se miden desde la posición original de la superficie neutra hasta la curva elástica. En la figura 4.1 se muestra en forma semigráfica la derivación de las ecuaciones de área-momento, para aquellos que no estén familiarizados con el cálculo.

**Primer principio área-momento.** En la figura 4.1, la línea curva  $CD$  representa la superficie neutra de la viga después de flexionarse. Es la curva elástica de una viga deflexionada de una longitud indefinida.  $A$  y  $B$  son puntos de la curva elástica y están separados por una distancia muy pequeña  $dx$ . Cuando se trazan dos líneas perpendiculares a la curva elástica en los puntos  $A$  y  $B$ , sus extensiones se intersectarán en el centro de curvatura  $O$ , a una distancia  $R$  de la curva y formarán el pequeño ángulo  $d\theta$ . En realidad la curvatura es muy pequeña; por lo tanto,  $AB$  se puede considerar como la longitud horizontal  $dx$ .

Entonces, por geometría,

$$dx = R d\theta$$

$$d\theta = \frac{1}{R} dx$$

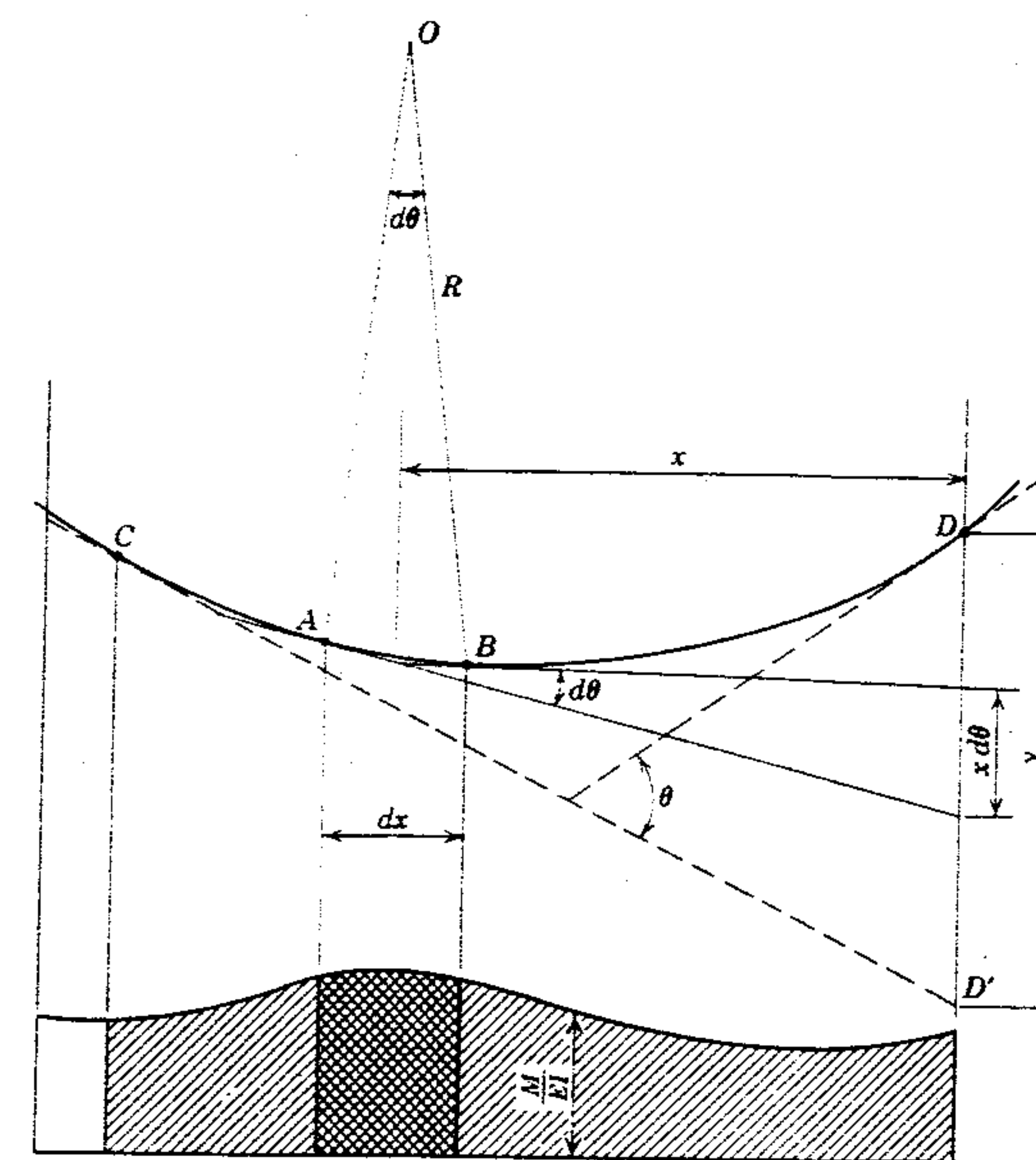


Figura 4.1 Primer principio de área-momento.

En las secciones 3.2 y 4.6 se mostró que

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

por lo tanto

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

En seguida se trazan tangentes a la curva elástica en los puntos  $A$  y  $B$ , perpendiculares al radio de curvatura de  $A$  y  $B$ , respectivamente. Entonces, por geometría, el ángulo entre las dos también es igual a  $d\theta$ .

Directamente abajo de la curva elástica se muestra el diagrama  $M/EI$  correspondiente. En la figura

4.1 se puede observar la relación entre  $d\theta$  y el diagrama  $M/EI$  establecida antes, como sigue:

El ángulo elemental  $d\theta$ , formado por dos tangentes a la curva elástica en los puntos  $A$  y  $B$ , es igual al área elemental  $(M/EI)dx$  (mostrada por el área cuadrículada). Así, cualquier ángulo como  $\theta$ , formado por dos tangentes cualesquiera a la curva elástica (como las de  $C$  y  $D$ ), se puede determinar mediante la suma de todas las áreas elementales del diagrama  $M/EI$  entre los dos puntos de tangencia (es decir, el área cuadrículada que se muestra). Representado esto en forma de ecuación

$$\theta = \sum \left( \frac{M}{EI} \right) dx$$

Éste es el primer principio área-momento. Se puede enunciar como sigue:



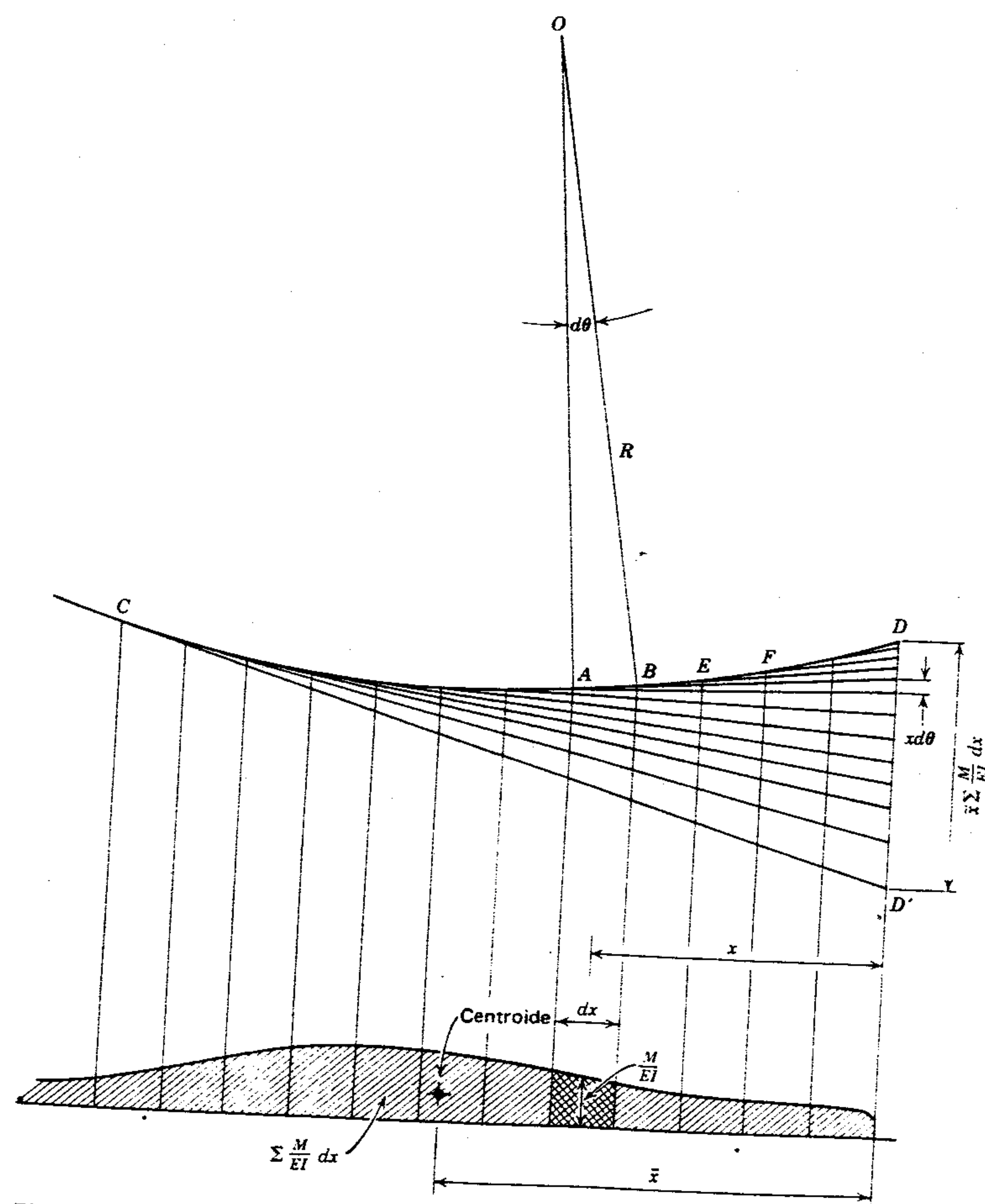


Figura 4.2 Segundo principio de área-momento.

El ángulo en radianes o el cambio de pendiente entre dos tangentes a la curva elástica es igual al área del diagrama de momento flexionante entre los dos puntos de tangencia dividida por la rigidez a la flexión ( $EI$ ) de la viga.

Segundo principio área-momento. Ahora es conveniente establecer un medio para medir la distancia y de la figura 4.1. Ésta es la distancia entre un segundo punto sobre una curva elástica continua ( $D$ ), medida perpendicularmente al eje recto original de

la viga ( $DD'$ ) y a la tangente a la curva elástica en un primer punto ( $C$ ). Se ve que la sección elemental  $AB$  contribuye  $x d\theta$  a esta distancia total. Por lo tanto, como

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

$$x d\theta = x \left( \frac{M}{EI} \right) dx$$

Éste es el primer momento del área ( $M/EI$ ) $dx$  respecto a la línea  $DD'$ .

Por lo tanto, la distancia total y sería la suma de los momentos de todas las áreas elementales entre  $C$  y  $D$  respecto a  $DD'$ . Esto se ve claramente en la figura 4.2, donde cada una de las diversas secciones elementales  $AB$ ,  $BE$ ,  $EF$ , etc., contribuye  $x d\theta$  a la distancia total  $DD'$ . Así, la suma de todas las áreas elementales es igual al área total del diagrama  $M/EI$  entre  $C$  y  $D$ , y  $\bar{x}$  es el brazo de momento o distancia horizontal al centroide del área  $M/EI$  entre  $C$  y  $D$ . Presentado en forma de ecuación,

$$y = \sum \left( x \frac{M}{EI} dx \right) = \bar{x} \sum \left( \frac{M}{EI} dx \right)$$

Ahora el segundo principio área-momento se puede enunciar como sigue:

*La distancia vertical entre un segundo punto sobre una curva elástica continua y la tangente al primer punto sobre la curva elástica es igual al momento del área del diagrama  $M/EI$  entre estos dos puntos respecto al segundo punto.*

#### 4.3 APLICACIÓN DEL MÉTODO ÁREA-MOMENTO

En las figuras 4.1 y 4.2 el diagrama de momento flexionante que se muestra es irregular con el objeto de representar cualquier forma posible. No obstante, la mayoría de los diagramas de momentos que se encuentran en problemas de diseño estructural se pueden dividir en una o más de las formas geométricas básicas que aparecen en la figura 4.3. Se da la fórmula de área y la localización de centroide de cada forma que aparece en la figura.

Para trabajar con formas simplificadas es necesario trazar en partes el diagrama de momento flexionante. Esto se hace tratando independiente-

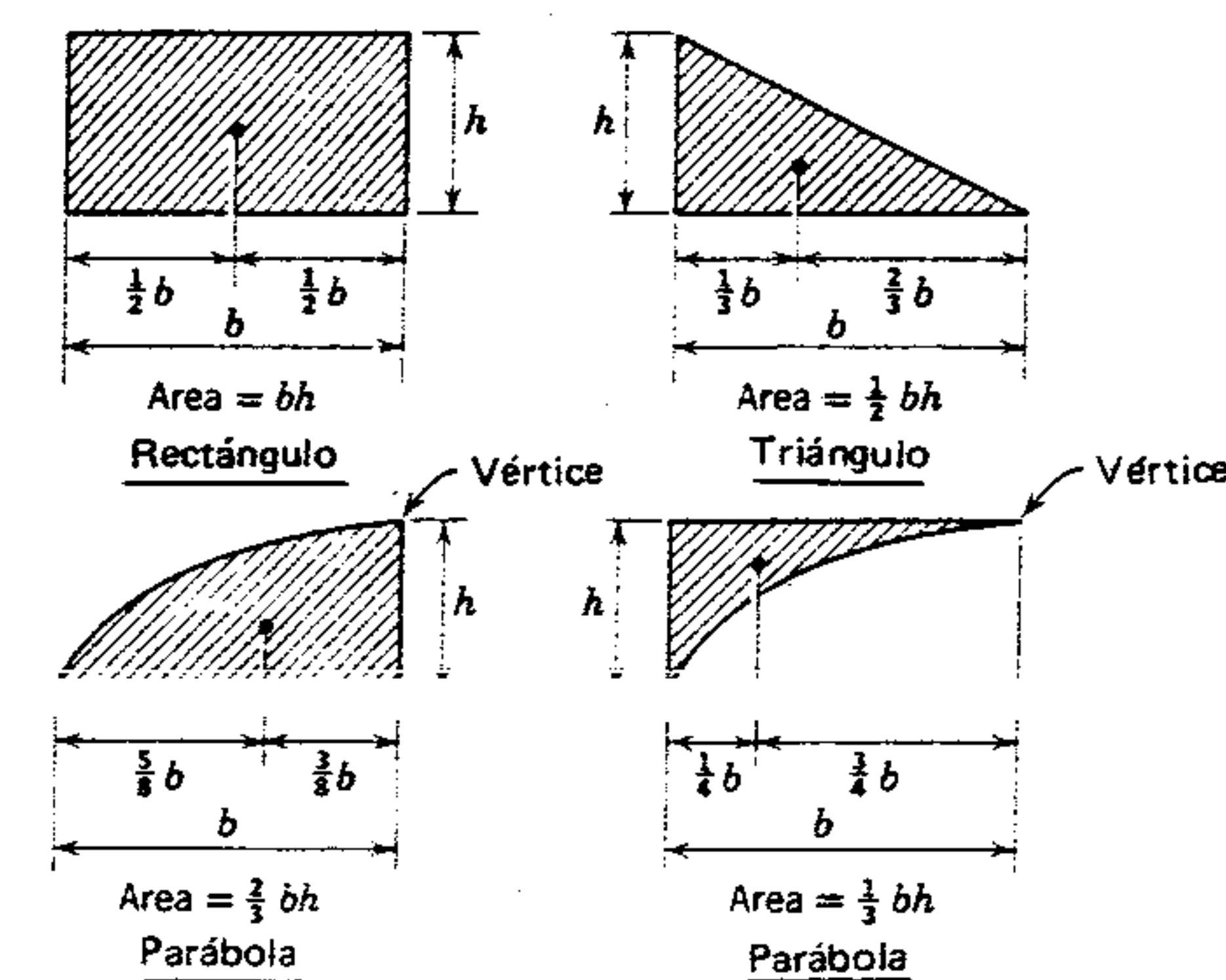


Figura 4.3 Formas geométricas básicas.



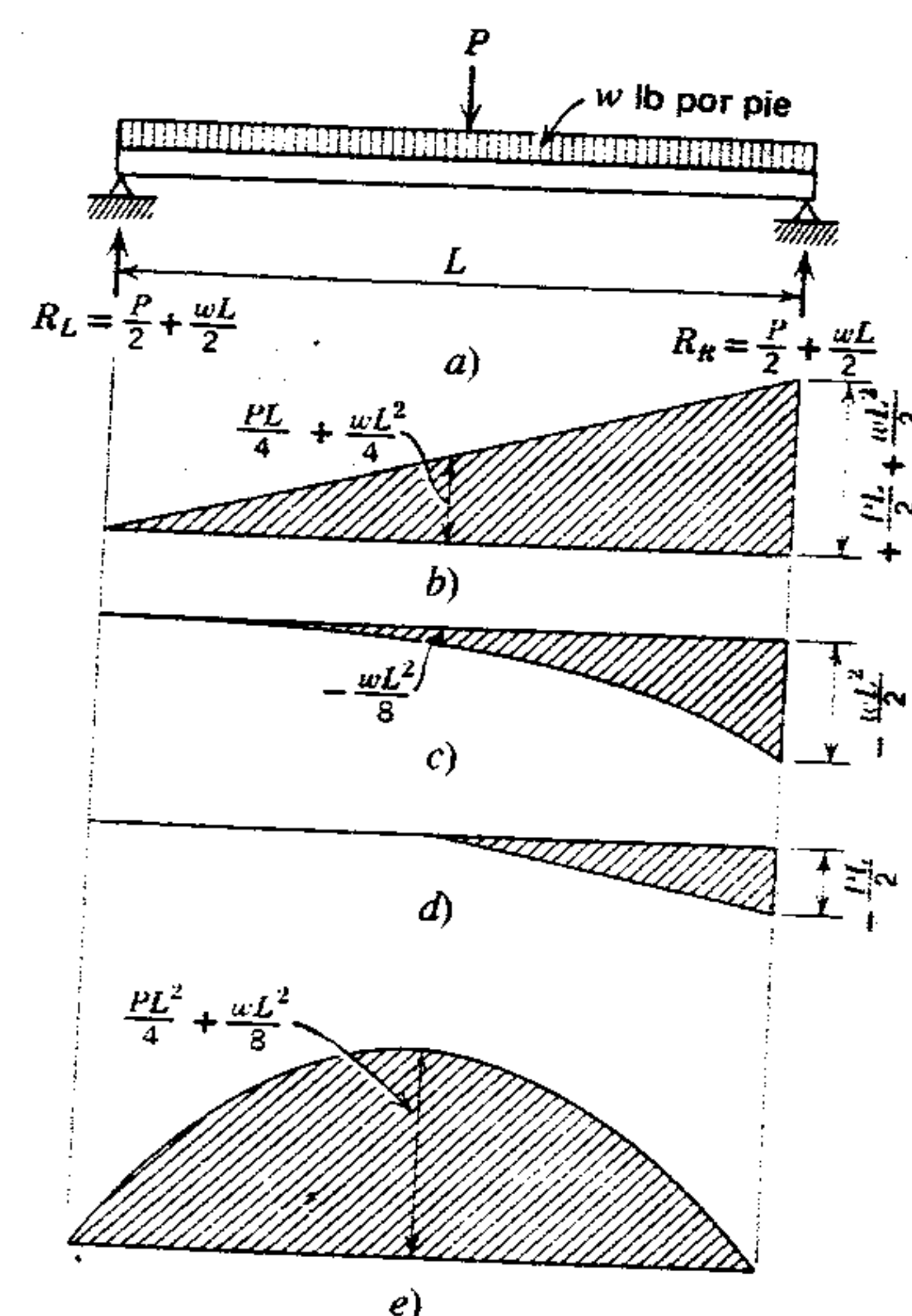


Figura 4.4 Diagrama de momento por partes.

mente cada carga o reacción, como se ejemplifica en la figura 4.4a donde se muestra una viga simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro del claro y una carga uniformemente distribuida en toda su longitud.

Si se toma la reacción derecha como centro de momentos y se considera solamente la reacción izquierda, se obtendrá el diagrama de la figura 4.4b. La reacción izquierda tiende por sí misma a flexionar la viga hacia arriba y hacerla cóncava, produciendo un momento positivo en toda su longitud. En la figura 4.4c aparece el diagrama de momento flexionante para la carga distribuida, usando de nuevo  $R_R$  como centro de momentos, y es negativo. El diagrama del momento de la figura 4.4d es el de la carga concentrada en el centro del claro. Si se suman algebraicamente todas las partes de la figura b), c) y d), el diagrama completo que se formará será como el de la figura 4.4e.

### Ejemplo 1

Determinar la pendiente y la deflexión máximas de una viga cantiliver con una longitud total  $L$  y una carga concentrada  $P$  en el extremo libre, usando el método de momento de área. No incluir el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

#### Solución

1. Trazar un esquema de la viga mostrando las cargas (figura 4.5a).
2. Calcular reacciones y trazar el diagrama de momento flexionante. Indicar el valor del momento flexionante en el apoyo (figura 4.5b).
3. Trazar la supuesta forma deflexionada de la viga (figura 4.5c) y estudiar la curva elástica para determinar el modo más efectivo de aplicar los principios de momentos de área para obtener la solución deseada. En este caso, se sabe que el extremo fijo de la viga no puede girar. Por lo tanto, la tangente que se trace en este punto será horizontal. Una tangente trazada en  $C'$  sobre la curva elástica formará el ángulo  $\theta$  en  $B$ , con la tangente trazada en  $A$ .

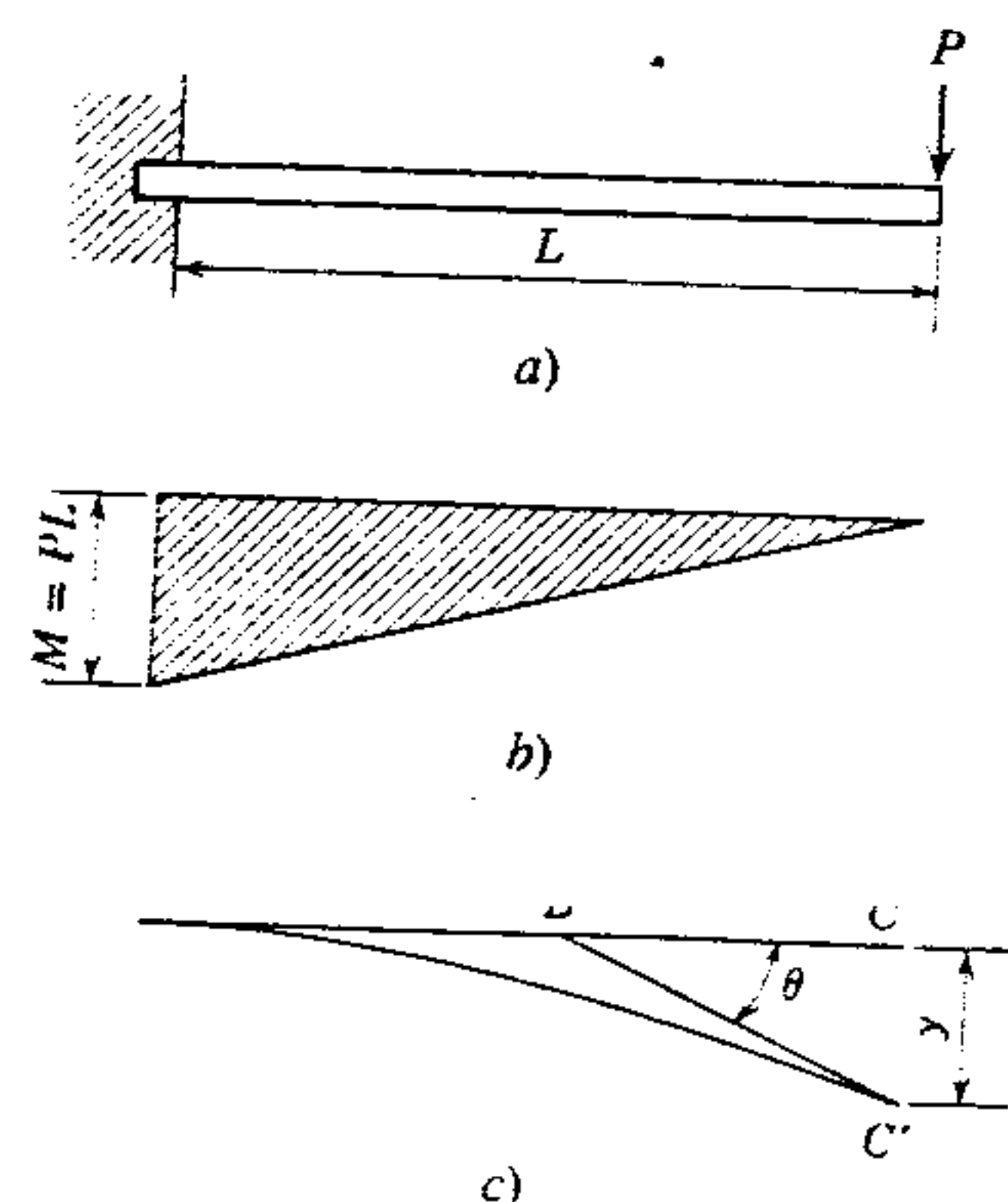


Figura 4.5 Ejemplo 1: Momento de área.

Este ángulo es la pendiente de la curva elástica en el extremo libre.

4. Trazar las tangentes como se vio en el paso 3). Luego, aplicando el primer principio de momento de área, la pendiente en el extremo libre es el área sombreada por  $1/EI$ .

$$\theta = \frac{1}{2} PL(L) \frac{1}{EI}$$

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI}$$

5. Como la tangente en el extremo fijo es horizontal, todas las distancias desde esta tangente hasta la curva elástica son deflexiones reales. Así, la deflexión máxima en el extremo libre se medirá por la distancia vertical entre la tangente en  $A$  y la curva elástica de la viga en  $C'$ .

Aplicando el segundo principio de momento de área, la deflexión en el extremo libre es

$$y = \frac{1}{2} PL(L) \frac{1}{EI}$$

$$y = \frac{PL^3}{3EI}$$

### Ejemplo 2

Obtener la fórmula para la deflexión máxima de una viga cantiliver con una carga uniformemente distribuida  $w$  en todo el claro  $L$ .  $E$  e  $I$  permanecen constantes. No considerar el peso de la viga.

Siempre que se encuentren cargas distribuidas, el diagrama de momento será una línea curva en forma de parábola. Si la carga está uniformemente distribuida, se aplican los datos de la figura 4.3.

#### Solución

Los pasos del 1) al 3) son similares a los del ejemplo anterior, y los datos están registrados en la figura

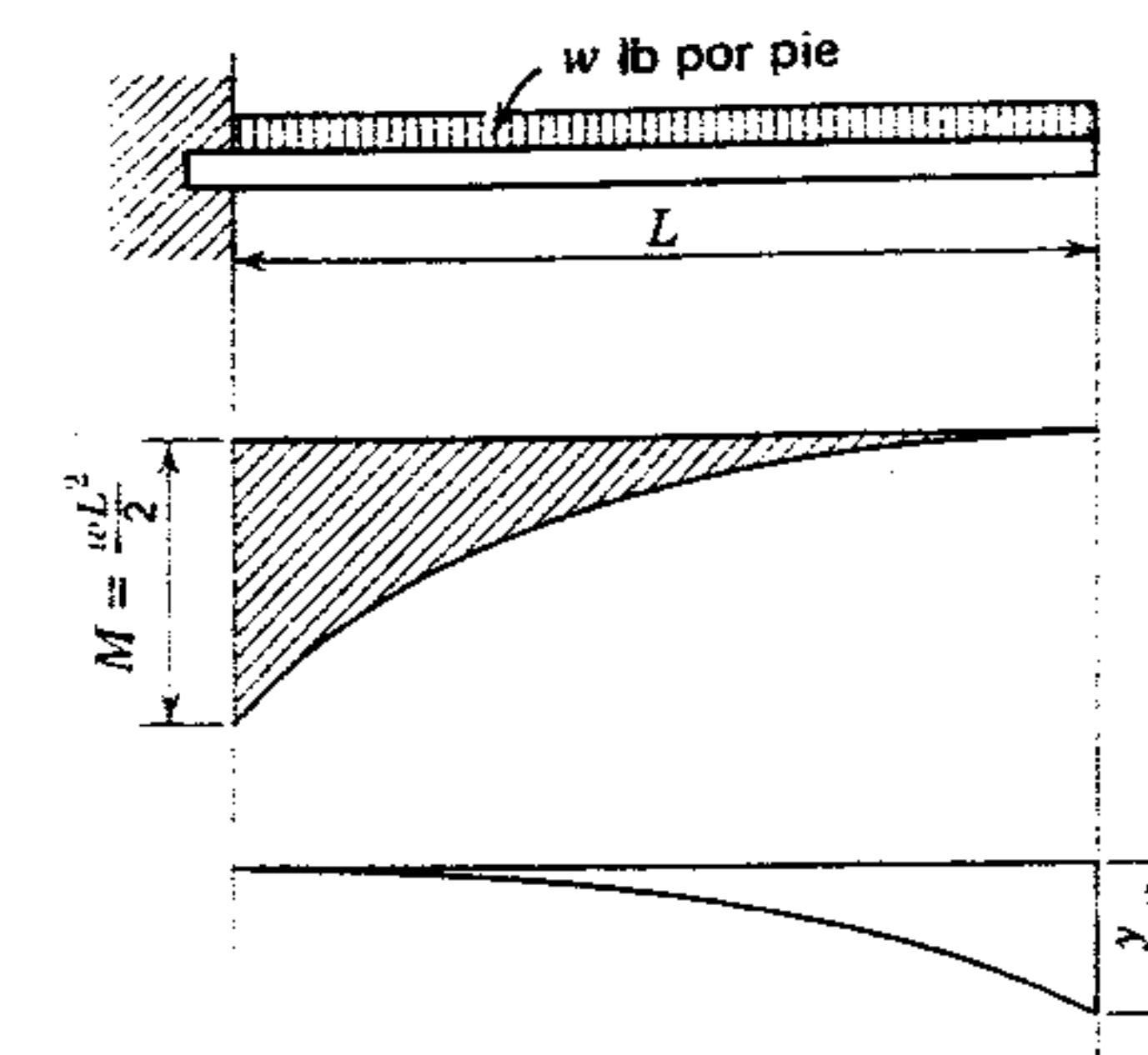


Figura 4.6 Ejemplo 2: Momento de área.

4.6. 4) Aplicando el segundo principio de momento de área, la deflexión máxima en el extremo libre es

$$y = \frac{1}{3} \left( \frac{wL^2}{2} \right) L \left( \frac{3L}{4} \right) \frac{1}{EI}$$

$$y = \frac{wL^4}{8EI}$$

### 4.4 MOMENTO DE ÁREA: SIMETRÍA

Cuando las vigas simplemente apoyadas y sin voladizos están cargadas simétricamente, el método de momento de área se simplifica en gran medida. Esto se debe a que la pendiente de la curva elástica en su punto medio es igual a cero, lo cual indica una deflexión máxima. Asimismo, la tangente es una línea horizontal y es fácil calcular la desviación vertical de la curva elástica a partir de la horizontal, y esta desviación en el apoyo es igual a la deflexión en el centro del claro (véase la figura 4.7). Los dos siguientes ejemplos ilustran el método de momento de área, tal como se aplica a vigas simplemente

### Ejemplo 1

Determinar la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada (sin voladizos), que soporta car-



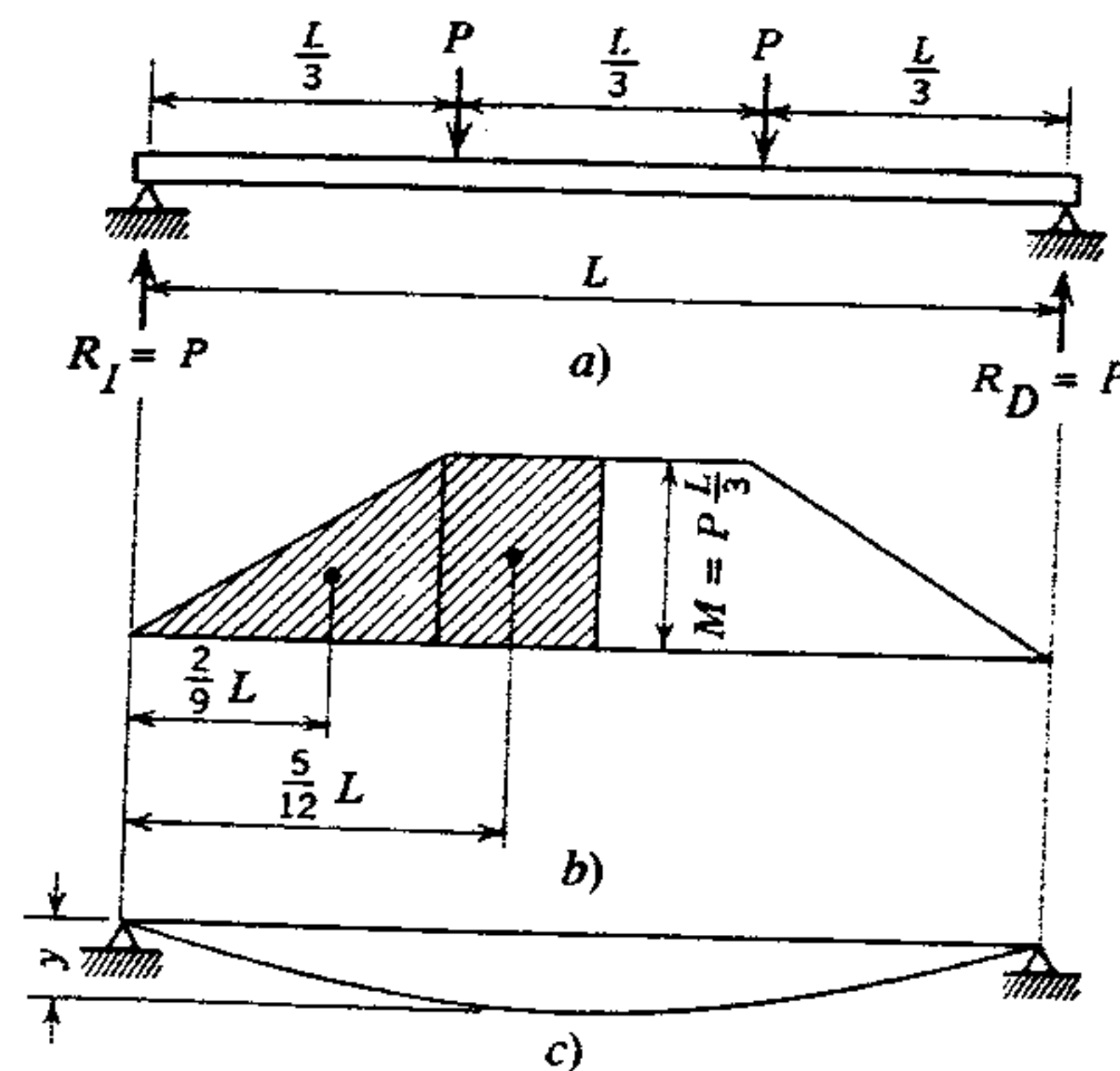


Figura 4.7 Ejemplo 1: Simetría.

gas concentradas iguales en los tercios de su claro. No incluir el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

**Solución**

1. Hacer un esquema de la viga mostrando cargas y reacciones (figura 4.6a).
2. Trazar el diagrama de momento flexionante (figura 4.7b). Debido a que el diagrama de momento flexionante completo está compuesto por formas simples con centroides fácilmente localizados, no es necesario trazar sus partes.
3. Dibujar la forma deflexionada del eje neutro. Se puede ver que la deflexión máxima será en el centro del claro. Trazar una tangente al eje neutro en el centro del claro. Ésta es una línea horizontal; así, la distancia vertical y desde la tangente al eje neutro en el apoyo (el cual no se mueve) es igual a la deflexión en el centro del claro.
4. Aplicando el segundo principio de momento de área, calcular la distancia  $y$ . Ésta es igual al momento del área cuadrículada dividida entre  $EI$ , respecto a una línea vertical trazada desde el apoyo izquierdo.

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{PL}{3} \right) \frac{L}{3} \left( \frac{2L}{9} \right) \right] + \left[ \frac{PL}{3} \left( \frac{L}{6} \right) \frac{5L}{12} \right]$$

$$y = \frac{23}{648} \left( \frac{PL^3}{EI} \right)$$

**Ejemplo 2**

Calcular la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada (sin voladizos) sometida a cargas concentradas iguales en sus cuatro partes. No incluir el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

**Solución**

1. Trazar un esquema de la viga mostrando cargas y reacciones (figura 4.8a).
2. Trazar el diagrama del momento flexionante (figura 4.8b). Para ilustrar, el diagrama de momento flexionante se muestra en partes. Las distancias a los centroides están localizadas donde se indica.

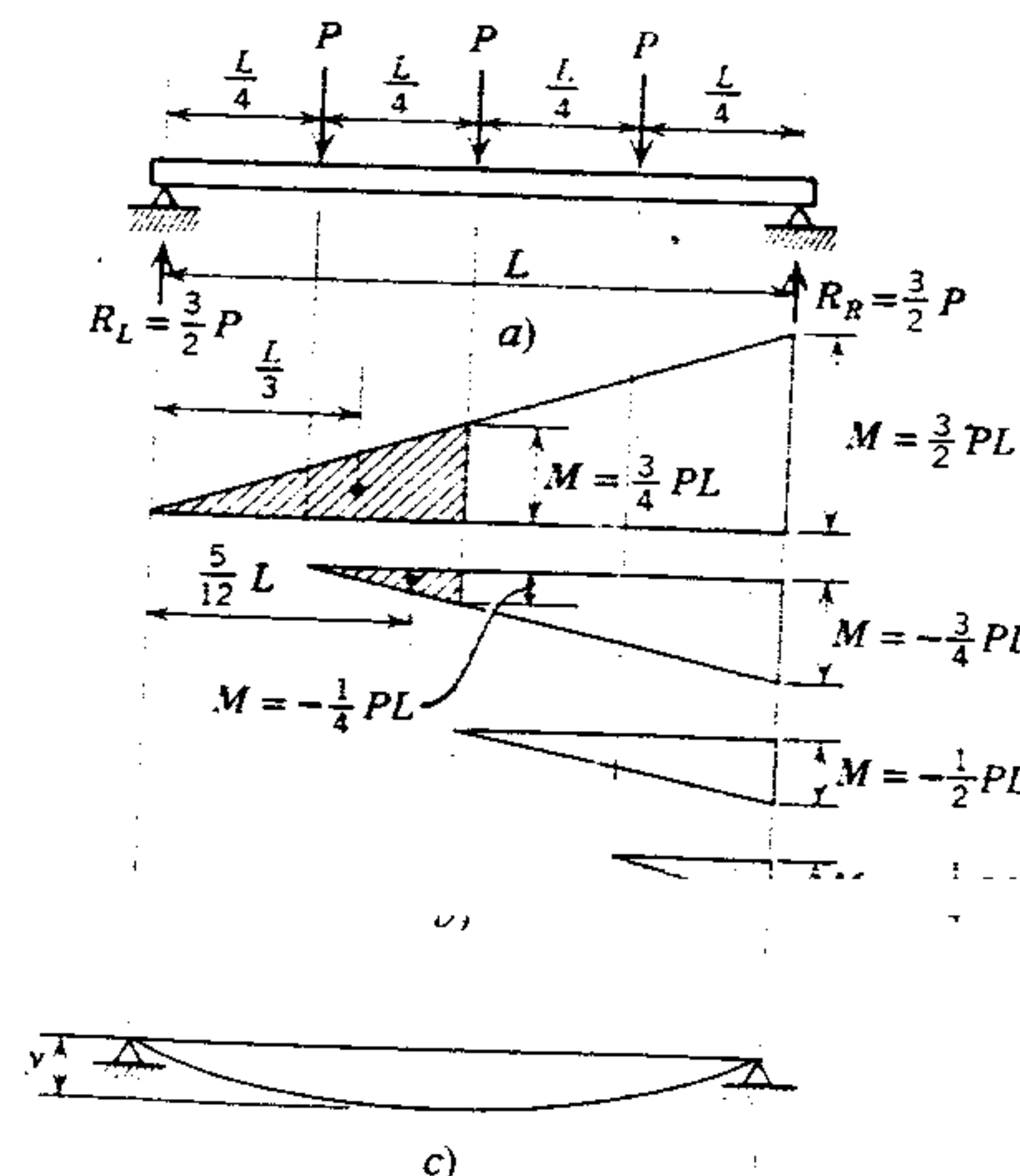


Figura 4.8 Ejemplo 2: Simetría.

3. Dibujar la forma aproximada de la curva elástica (figura 4.8a) y, observando que la deflexión máxima ocurre en el centro del claro, trazar una tangente en ese punto. La distancia  $y$  (como se ve) es la deflexión máxima.
4. Aplicando el segundo principio del momento de área, calcular la distancia  $y$ .

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} PL \right) \frac{L}{2} \left( \frac{L}{3} \right) \right] - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} PL \right) \frac{L}{4} \left( \frac{5L}{12} \right) \right]$$

$$y = \frac{19}{384} \left( \frac{PL^3}{EI} \right)$$

**4.5 MOMENTO DE ÁREA: CARGAS ASIMÉTRICAS**

El análisis de una viga estáticamente determinada se vuelve más complejo cuando no se detecta a simple vista el punto de deflexión máxima. Tal es el caso, por ejemplo, cuando la carga no es simétrica como en las figuras 4.9 y 4.10. Aquí, la deflexión

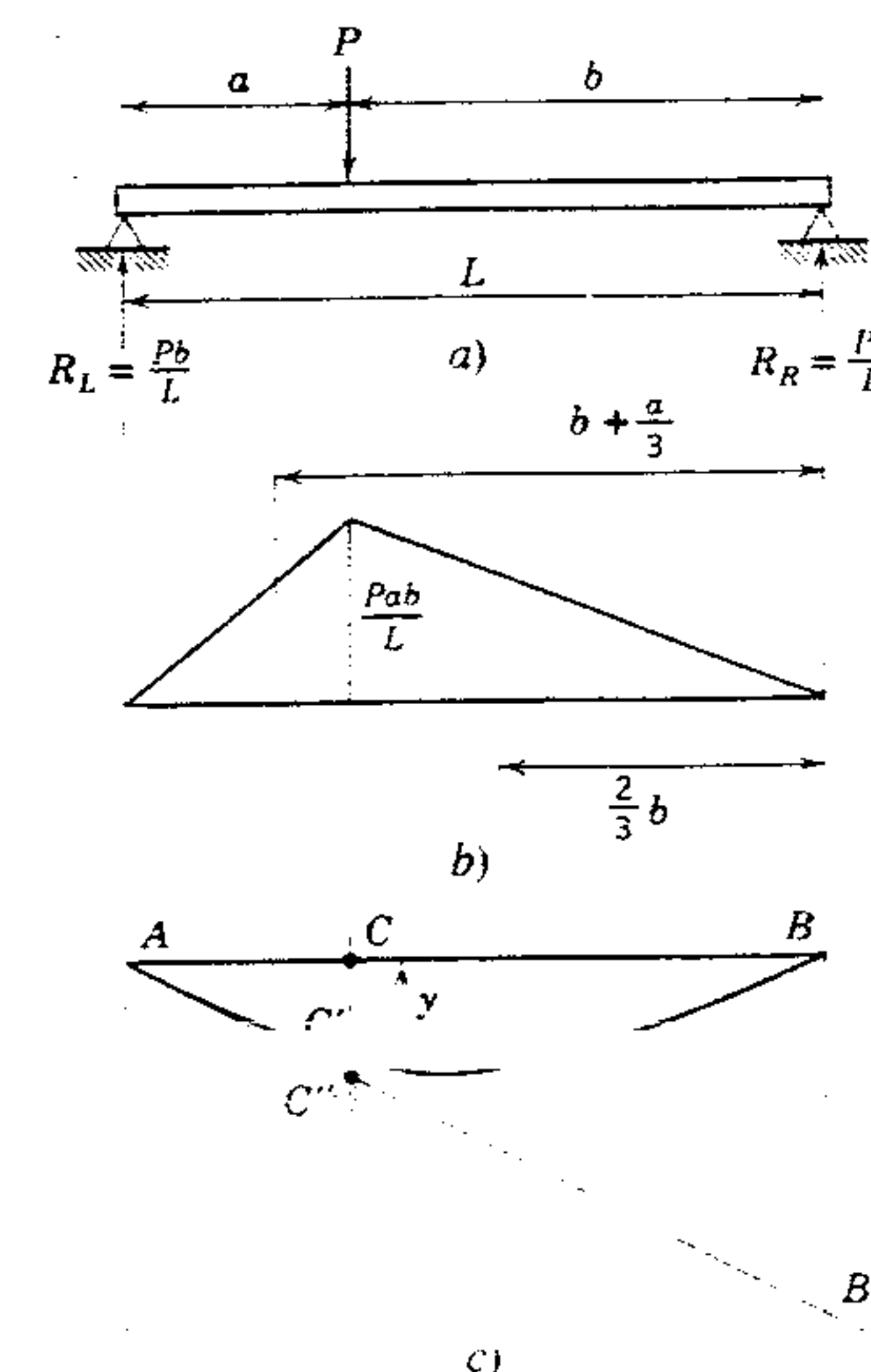


Figura 4.9 Ejemplo 1: Asimetría.

máxima no ocurrirá bajo la carga ni en el centro, sino en un punto intermedio. Cuando se presenta un problema como éste, se podría encontrar una solución más rápida<sup>1</sup> mediante otro método analítico. Sin embargo, esto no quiere decir que no se pueda usar efectivamente el método de momento de área, como se mostrará en los dos siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1**

Determinar la deflexión bajo la carga  $P$  de la viga simplemente apoyada de la figura 4.9. No considerar el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

**Solución**

1. Trazar un esquema de la viga con las cargas y las reacciones (figura 4.9a).
2. Trazar el diagrama del momento flexionante (figura 4.9b).
3. Dibujar la forma deflexionada del eje neutro (figura 4.9c). Trazar una tangente al eje neutro en  $A$ , y aplicando el segundo principio del momento de área, calcular la distancia  $BB'$ . Ésta es igual al momento de toda el área del diagrama de momento dividida entre  $EI$ , respecto a  $BB'$ .

$$BB' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pab}{L} (b) \frac{1}{2} \right] \left[ \frac{2}{3} b \right] + \left[ \frac{Pab}{L} (a) \frac{1}{2} \right] \left[ b + \frac{a}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{Pab^3}{3L} + \frac{Pa^3b}{6L} \right)$$

<sup>1</sup> Por ejemplo, se podría usar la ecuación diferencial para la curva elástica que se verá más adelante en este capítulo, o bien, la teoría de energía elástica.



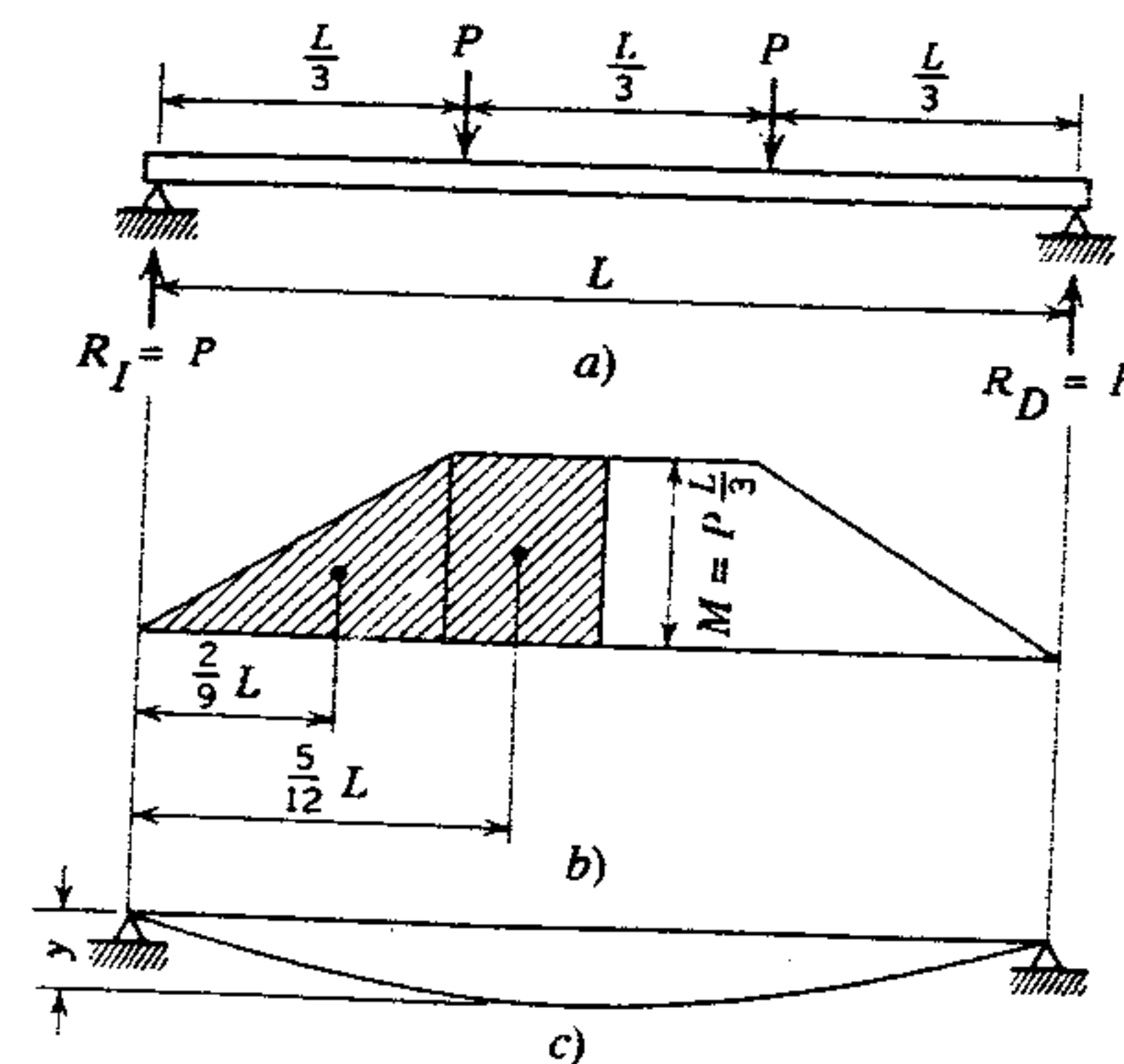


Figura 4.7 Ejemplo 1: Simetría.

gas concentradas iguales en los tercios de su claro. No incluir el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

**Solución**

1. Hacer un esquema de la viga mostrando cargas y reacciones (figura 4.6a).
2. Trazar el diagrama de momento flexionante (figura 4.7b). Debido a que el diagrama de momento flexionante completo está compuesto por formas simples con centroides fácilmente localizados, no es necesario trazar sus partes.
3. Dibujar la forma deflexionada del eje neutro. Se puede ver que la deflexión máxima será en el centro del claro. Trazar una tangente al eje neutro en el centro del claro. Ésta es una línea horizontal; así, la distancia vertical y desde la tangente al eje neutro en el apoyo (el cual no se mueve) es igual a la deflexión en el centro del claro.
4. Aplicando el segundo principio de momento de área, calcular la distancia  $y$ . Ésta es igual al momento del área cuadrículada dividida entre  $EI$ , respecto a una línea vertical trazada desde el apoyo izquierdo.

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{PL}{3} \right) \frac{L}{3} \left( \frac{2L}{9} \right) \right] + \left[ \frac{PL}{3} \left( \frac{L}{6} \right) \frac{5L}{12} \right]$$

$$y = \frac{23}{648} \left( \frac{PL^3}{EI} \right)$$

**Ejemplo 2**

Calcular la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada (sin voladizos) sometida a cargas concentradas iguales en sus cuatro partes. No incluir el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

**Solución**

1. Trazar un esquema de la viga mostrando cargas y reacciones (figura 4.8a).
2. Trazar el diagrama del momento flexionante (figura 4.8b). Para ilustrar, el diagrama de momento flexionante se muestra en partes. Las distancias a los centroides están localizadas donde se indica.

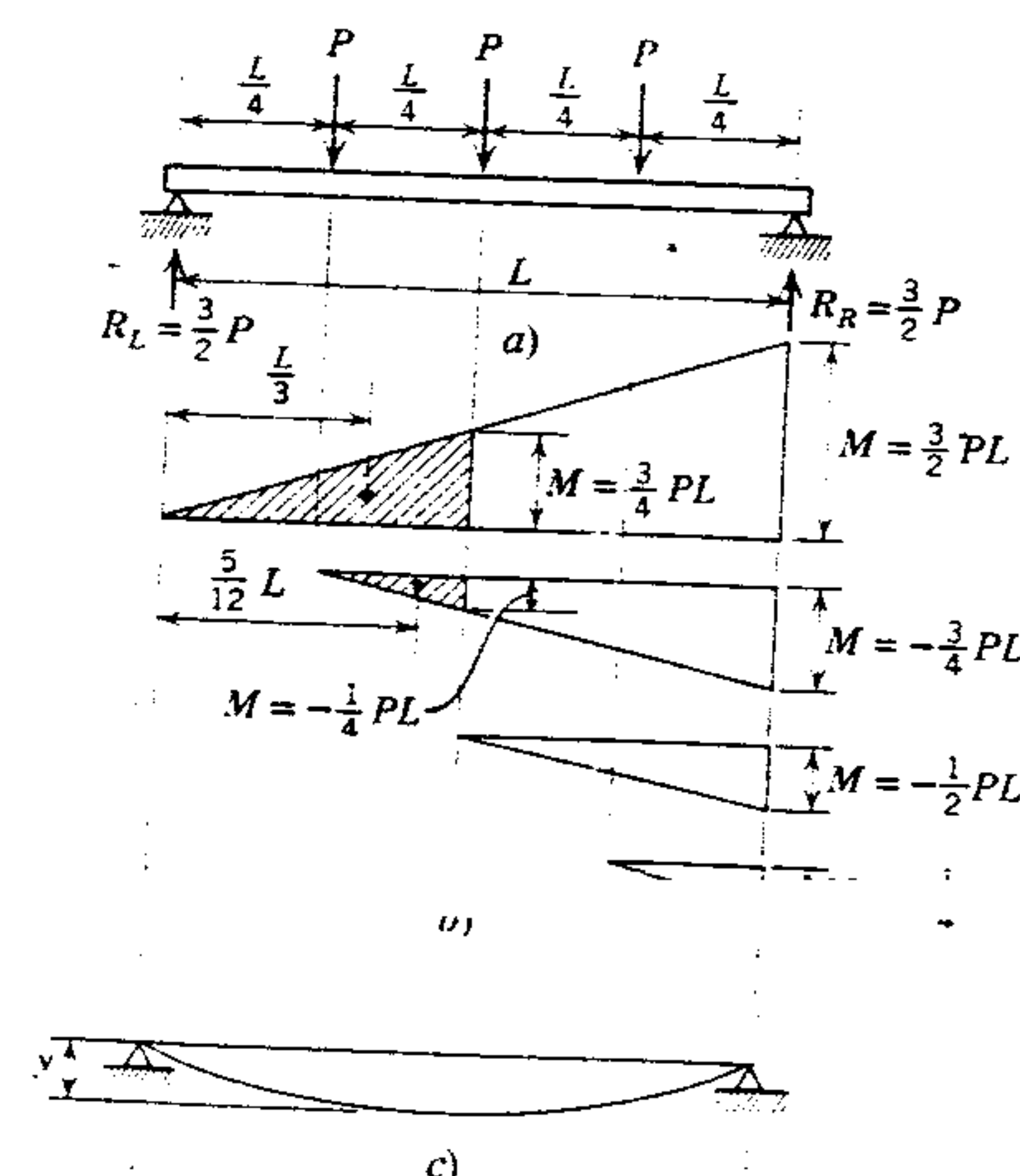


Figura 4.8 Ejemplo 2: Simetría.

3. Dibujar la forma aproximada de la curva elástica (figura 4.8a) y, observando que la deflexión máxima ocurre en el centro del claro, trazar una tangente en ese punto. La distancia  $y$  (como se ve) es la deflexión máxima.
4. Aplicando el segundo principio del momento de área, calcular la distancia  $y$ .

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} PL \right) \frac{L}{2} \left( \frac{L}{3} \right) \right] - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} PL \right) \frac{L}{4} \left( \frac{5L}{12} \right) \right]$$

$$y = \frac{19}{384} \left( \frac{PL^3}{EI} \right)$$

**4.5 MOMENTO DE ÁREA: CARGAS ASIMÉTRICAS**

El análisis de una viga estáticamente determinada se vuelve más complejo cuando no se detecta a simple vista el punto de deflexión máxima. Tal es el caso, por ejemplo, cuando la carga no es simétrica como en las figuras 4.9 y 4.10. Aquí, la deflexión

máxima no ocurrirá bajo la carga ni en el centro, sino en un punto intermedio. Cuando se presenta un problema como éste, se podría encontrar una solución más rápida<sup>1</sup> mediante otro método analítico. Sin embargo, esto no quiere decir que no se pueda usar efectivamente el método de momento de área, como se mostrará en los dos siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1**

Determinar la deflexión bajo la carga  $P$  de la viga simplemente apoyada de la figura 4.9. No considerar el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

**Solución**

1. Trazar un esquema de la viga con las cargas y las reacciones (figura 4.9a).
2. Trazar el diagrama del momento flexionante (figura 4.9b).
3. Dibujar la forma deflexionada del eje neutro (figura 4.9c). Trazar una tangente al eje neutro en  $A$ , y aplicando el segundo principio del momento de área, calcular la distancia  $BB'$ . Ésta es igual al momento de toda el área del diagrama de momento dividida entre  $EI$ , respecto a  $BB'$ .

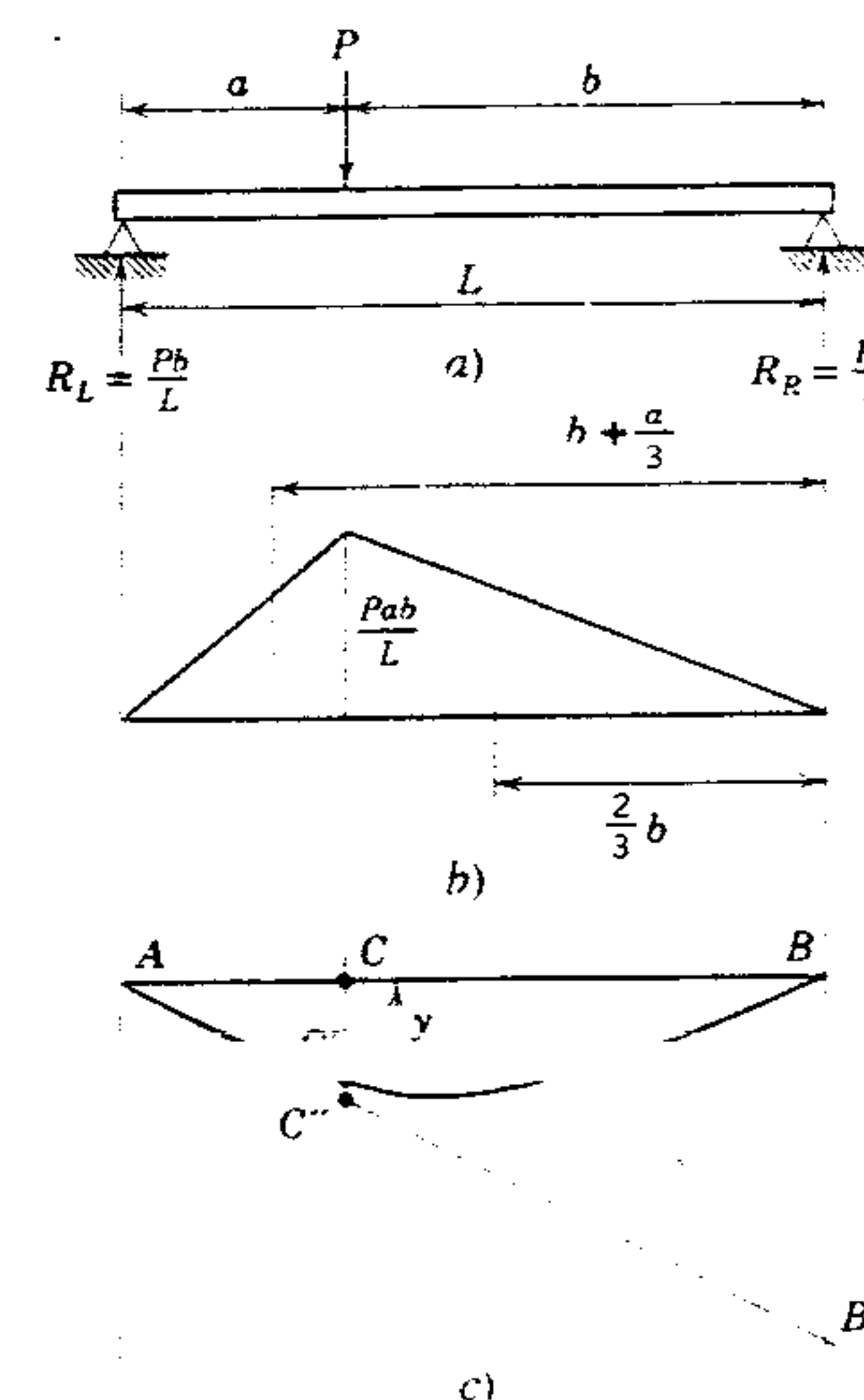


Figura 4.9 Ejemplo 1: Asimetría.

$$BB' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pab}{L} (b) \frac{1}{2} \right] \left[ \frac{2}{3} b \right] + \left[ \frac{Pab}{L} (a) \frac{1}{2} \right] \left[ b + \frac{a}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{Pab^3}{3L} + \frac{Pa^3b}{6L} \right)$$

<sup>1</sup> Por ejemplo, se podría usar la ecuación diferencial para la curva elástica que se verá más adelante en este capítulo, o bien, la teoría de energía elástica.



4. Por triángulos semejantes, determinar  $CC''$ .

$$BB' : L = CC'' : a$$

$$CC'' = \frac{BB'(a)}{L}$$

$$CC'' = \frac{1}{EI} \left( \frac{Pa^2b^3}{3L^2} + \frac{Pa^3b^2}{2L^2} + \frac{Pa^4b}{6L^2} \right)$$

5. Aplicando el segundo principio de momento de área, calcular la distancia  $C'C''$ . Ésta es igual al momento del área del diagrama de momento entre  $A$  y  $C$ , dividida entre  $EI$ , respecto a  $C'CC''$ .

$$C'C'' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pab}{L} \left( \frac{a}{2} \right) \left[ \frac{a}{3} \right] \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{Pa^3b}{6L} \right)$$

6. Entonces, la deflexión ( $CC'$ ) bajo la carga  $P$  es  $CC'' - C'C''$ .

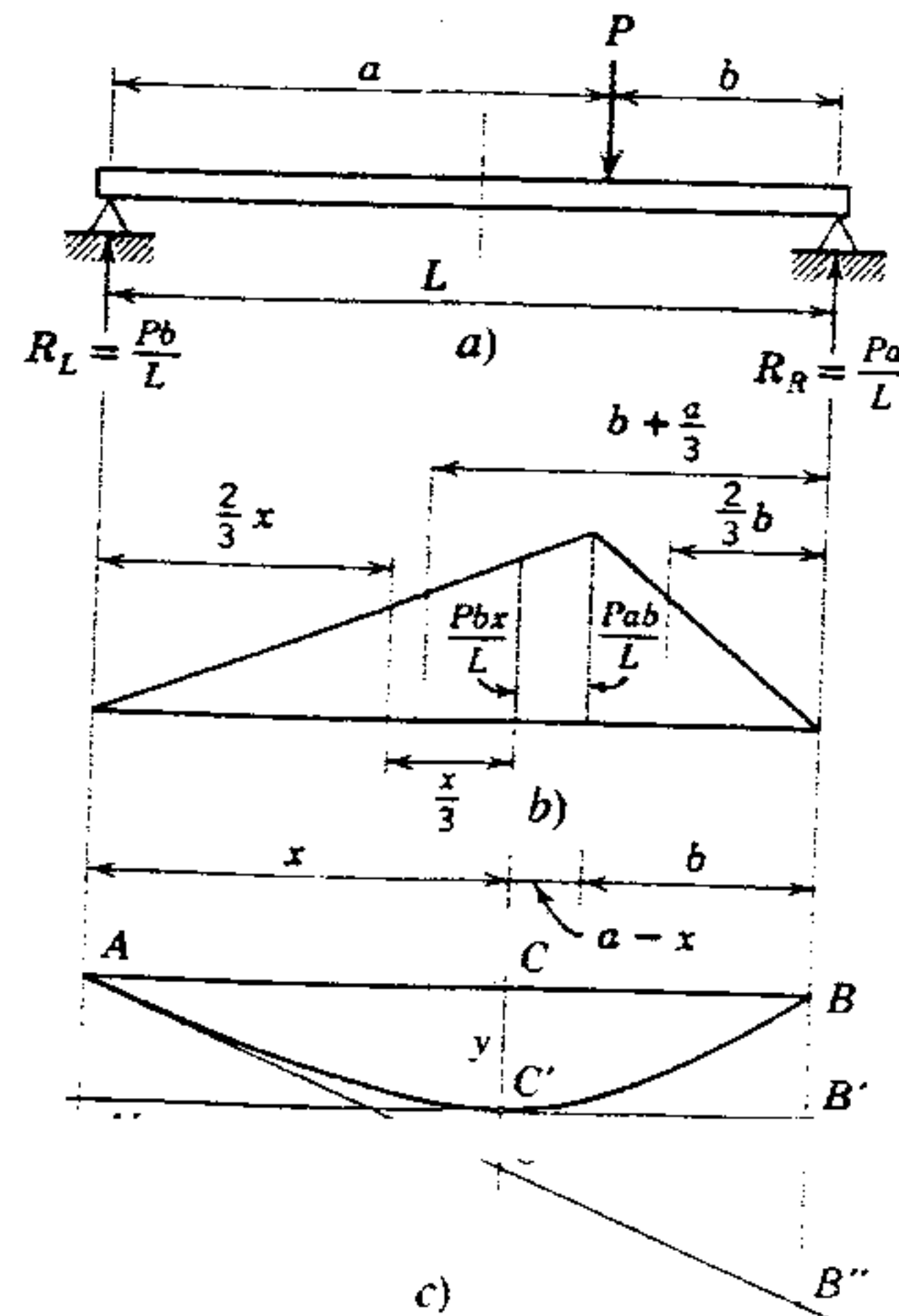


Figura 4.10 Ejemplo 2: Asimetría.

$$CC' = CC'' - C'C''$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{Pa^2b^3}{3L^2} + \frac{Pa^3b^2}{2L^2} + \frac{Pa^4b}{6L^2} \right) - \left( \frac{Pa^3b}{6L} \right)$$

Multiplicando el cuarto término por  $L/L = a + b/L$ , y buscando un común denominador,

$$CC' = \frac{1}{EI} \left( \frac{2Pa^2b^3}{6L^2} + \frac{3Pa^3b^2}{6L^2} + \frac{Pa^4b}{6L^2} - \frac{Pa^4b}{6L^2} - \frac{Pa^3b^2}{6L^2} \right)$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{2Pa^2b^3}{6L^2} + \frac{2Pa^3b^2}{6L^2} \right)$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{3EIL} \left( \frac{a+b}{L} \right)$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{3EIL} \quad \text{por lo tanto,}$$

$$CC' = \frac{Pa^2b^2}{3EIL} = y$$

### Ejemplo 2

Calcular la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada de la figura 4.10. No considerar el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

### Solución

Los pasos 1) y 2) son los mismos del ejemplo 1.

3. La deflexión máxima  $CC'$  ocurrirá en algún punto entre el centro del claro y la carga  $P$ , a una distancia  $x$  desde  $P$ .

Trazar una tangente al eje neutro en  $C'$ . Como éste es el punto de deflexión máxima, la pendiente es cero y  $AA' = CC'$ .

Aplicando el segundo principio de momento de área,  $AA'$  es igual al momento del

área del diagrama de momento entre  $A$  y  $C$  dividida por  $EI$ , respecto a  $AA'$ .

$$AA' = CC' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pbx}{L} \left( \frac{x}{2} \right) \left[ \frac{2}{3}x \right] \right]$$

$$= \frac{pbx^3}{3EIL}$$

4. Para que se pueda usar la ecuación del paso 3) anterior, se debe encontrar la distancia  $x$  entre  $a$  y  $b$ . Un método para lograrlo es el siguiente:

Trazar una tangente a la curva elástica en  $A$  y encontrar la distancia  $BB''$ .

$$BB'' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pab}{L} \left( \frac{b}{2} \right) \left[ \frac{2}{3}b \right] + \left[ \frac{Pab}{L} \left( \frac{a}{2} \right) \left( b + \frac{a}{3} \right) \right] \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{Pab^3}{3L} + \frac{Pa^2b^2}{2L} + \frac{Pa^3b}{6L} \right)$$

Luego, por triángulos semejantes

$$BB'' : L = CC'' : x$$

$$CC'' = \frac{xBB''}{L}$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{Pab^3x}{3L^2} + \frac{Pa^2b^2x}{2L^2} + \frac{Pa^3bx}{6L^2} \right)$$

$$= \frac{Pabx}{6EIL^2} (2b^2 + 3ab + a^2)$$

Para encontrar  $C'C''$ ,

$$C'C'' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pbx}{L} \left( \frac{x}{2} \right) \left[ \frac{x}{3} \right] \right]$$

$$= \frac{Pbx^3}{6EIL}$$

Luego, de la figura 4.10c

$$CC' + C'C'' = CC''$$

$$\frac{Pbx^3}{3EIL} + \frac{Pbx^3}{6EIL} = \frac{Pabx}{6EIL^2} (2b^2 + 3ab + a^2)$$

Combinando los términos de la izquierda y anulando el término en común  $Pbx/6EIL$ ,

$$3x^2 = \frac{a}{L} (2b^2 + 3ab + a^2)$$

$$= \frac{a}{L} (a+b)(a+2b)$$

$L = a + b$ ; por tanto,

$$3x^2 = a(a+2b)$$

$$x = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}}$$

5. Sustituyendo el valor anterior de  $x$  en la ecuación del paso 3)

$$CC' = \frac{Pbx^3}{3EIL}$$

$$= \frac{Ph}{3EIL} \left( \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} \right)^3$$

$$= \frac{Pab(a+2b) \sqrt{a(a+2b)}}{9EIL}$$

$$CC' = \frac{Pab(a+2b) \sqrt{3a(a+2b)}}{27EIL} = y$$

### MÉTODO DE LA CURVA ELÁSTICA

#### 4.6 ECUACIÓN DE LA CURVA ELÁSTICA—DERIVACIÓN

En la sección 3.2 se mostró que la magnitud de los esfuerzos flexionantes varía directamente con la distancia al eje neutro, o sea

$$\frac{f}{y} = \frac{E}{R}$$

donde  $R$  es el radio de curvatura de la curva elástica. Tomando la fórmula general para la flexión,  $f =$



$My/I$ , y sustituyendo el valor de  $f$  en la siguiente ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

Esta es la expresión que acompaña a la fórmula de flexión. Es la base para calcular la deflexión debida a la flexión. El término  $EI$  se conoce a menudo como *rigidez a la flexión* puesto que es una medida directa de la resistencia a la deformación por flexión.

Para determinar una expresión equivalente para  $1/R$ , supóngase un punto  $p$  sobre la curva elástica de una viga deformada como la de la figura 4.11a. Si el origen de coordenadas de la curva elástica se toma a la izquierda de la viga, entonces  $p$  tiene coordenadas  $x$  y  $y$ , y  $y$  es la deflexión de  $p$ .  $R$  es el radio de curvatura de la curva elástica en  $p$ . Entonces, calculando, el recíproco del radio de curvatura de cualquier curva es

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Sin embargo, las curvas de las deformaciones de vigas son extremadamente planas, y la pendiente de la curva en  $p(dy/dx)$  es muy pequeña en relación con la unidad. Por lo tanto, se puede suponer que los valores de  $dy/dx$  se pueden omitir sin incurrir

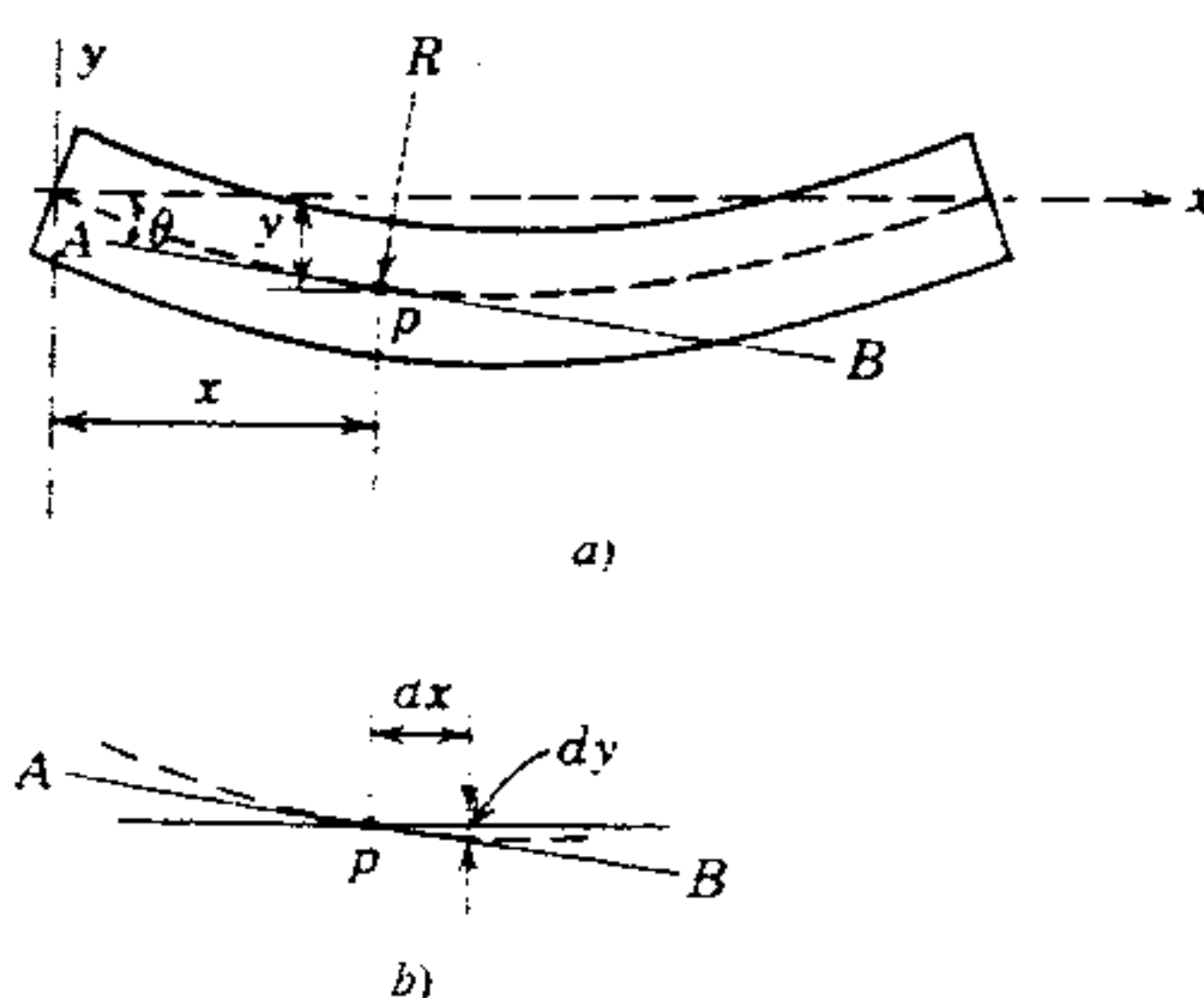


Figura 4.11 Derivación de la curva elástica.

en un error apreciable. Entonces, las ecuaciones anteriores son

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Igualando los dos valores para  $1/R$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Esta es la ecuación diferencial de la curva elástica

#### 4.7 APLICACIÓN DE LA CURVA ELÁSTICA. DOBLE INTEGRACIÓN

Si se comienza con la ecuación de la curva elástica y se integra una vez, se tendrá una expresión para la pendiente  $\theta$  de la curva elástica en cualquier punto  $x$ , o sea

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI} dx$$

Mediante una segunda integración se tendrá una expresión para la deflexión (coordenada  $y$ ) en cualquier punto  $x$  sobre la curva, o sea

$$y = \int \int \frac{M}{EI} dx^2$$

Asimismo, como se mostró en la sección 2.15

$$M = \int \int w dx^2$$

se deduce que

$$y = \int \int \int \frac{w}{EI} dx^3$$

En el capítulo 2 se mostró que la ecuación del momento flexionante se puede plantear mediante la

variable  $x$ . Si se usan los valores apropiados de  $E$  e  $I$ , una sola integración dará el valor de la pendiente de la curva elástica en términos de  $x$ , y una segunda integración dará el valor de la deflexión también en términos de  $x$ . Por lo tanto, la pendiente o la deflexión en un punto específico, medida a lo largo de la viga, se puede calcular sustituyendo esta distancia por  $x$  en la ecuación apropiada.

Es frecuente que el punto de deflexión máxima no se pueda localizar mediante la observación. Sin embargo, de los principios establecidos en la sección 2.15, análisis de diagramas de viga, se sabe que la deflexión máxima ocurrirá en el punto en que la pendiente de la curva elástica sea igual a cero (excepto en vigas cantilíver). Por tanto, igualando a cero la expresión de la pendiente, resolviendo para  $x$  y luego sustituyendo este valor de  $x$  en la expresión de la deflexión, se puede obtener la deflexión máxima. Esto se comprende mejor mediante ejemplos.

#### Ejemplo 1

Determinar la pendiente y deflexión máximas de una viga cantilíver con una longitud total  $L$  y una carga concentrada  $P$  en el extremo libre. No incluir el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

#### Solución

1. Trazar el esquema de la viga mostrando las cargas (figura 4.12a).
2. Establecer la ecuación para el momento flexionante, midiendo  $x$  a partir del extremo empotrado y dibujar el diagrama de momento flexionante (figura 4.12b).

$$M = -P(L - x)$$

3. Dividir la ecuación del momento flexionante entre  $EI$  e integrar una vez para obtener la ecuación para la pendiente de la curva elástica.

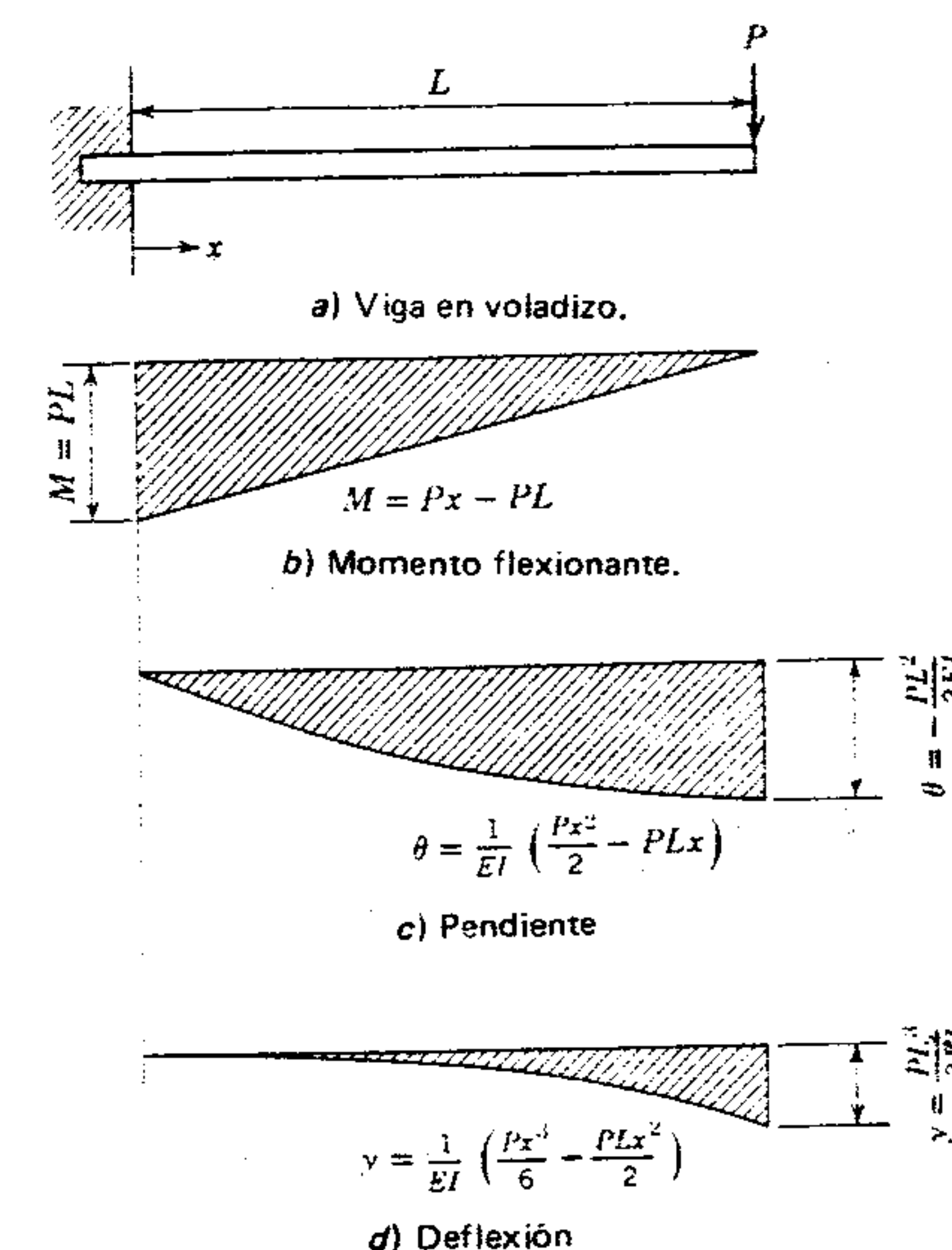


Figura 4.12 Ejemplo 1: Viga en voladizo.

$$\begin{aligned} \theta &= \int \frac{M}{EI} dx = \int \frac{Px - PL}{EI} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{Px^2}{2} - PLx + C \right) \end{aligned}$$

La constante de integración se puede evaluar a partir de la característica que se conoce de la viga cantilíver, es decir, la pendiente en el extremo empotrado es cero. Así, cuando  $x = 0$ ,  $\theta = 0$ ; por tanto  $C = 0$ , o sea

$$\theta = \frac{1}{EI} \left( \frac{Px^2}{2} - PLx \right)$$

La curva para la pendiente está trazada en la figura 4.12c.

4. Calcular el valor de la pendiente máxima. Ésta se encuentra en el extremo libre o cuando  $x = L$ .



$$\theta = \frac{1}{EI} \left( \frac{PL^2}{2} - PL^2 \right)$$

$$\theta = -\frac{PL^2}{2EI}$$

5. Integrando la expresión de la pendiente de la curva elástica se obtiene la ecuación para la deflexión.

$$y = \int \theta dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{Px^3}{6} - \frac{PLx^2}{2} + C \right)$$

De nuevo, la constante de integración se puede establecer mediante el valor conocido del problema, es decir, no hay deflexión en el extremo empotrado. Por lo tanto, cuando  $x = 0, y = 0$ ; por lo tanto  $C = 0$ .

$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{Px^3}{6} - \frac{PLx^2}{2} \right)$$

La gráfica de esta curva representa la forma exacta de la curva del eje neutro debida a la carga  $P$  (figura 4.12d).

6. Calcular el valor de la deflexión máxima. Es obvio que la deflexión máxima ocurra en el extremo libre o cuando  $x = L$ . Por lo tanto,

$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{PL^3}{6} - \frac{PL^3}{2} \right)$$

$$y = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Un excelente ejercicio sería hacer de nuevo este problema midiendo  $x$  a partir del extremo libre. Aunque las ecuaciones intermedias tendrían una forma diferente, la expresión final para el máximo  $\theta$  y  $y$  seguiría siendo la misma.

#### 4.8 DOBLE INTEGRACIÓN-USO DE LA SIMETRÍA

El método de doble integración se vuelve laborioso cuando es difícil determinar las constantes de inte-

gración. Sin embargo, como se ha señalado, cuando las vigas simplemente apoyadas tienen cargas simétricas, se vuelve mucho más sencilla la solución mediante cualquier método. Esto es verdad porque la deflexión máxima ocurre en el centro del claro, lo cual también significa que la pendiente de la curva elástica equivale a cero en el centro del claro. Por lo general lo liviano de la carga elimina la necesidad de trazar el diagrama completo para hacer el análisis de las vigas. Los dos siguientes ejemplos muestran el procedimiento de integración doble, tal como se aplica a vigas simples cargadas simétricamente.

En el ejemplo 1 se utiliza el proceso de integración completo, mientras que en el ejemplo 2 sólo lo necesario para obtener la solución deseada.

##### Ejemplo 1

Preparar el conjunto completo de diagramas de viga ( $L, V, M, \theta, \Delta$ ) y de ecuaciones de una viga simplemente apoyada, de 20 pies y una sola carga concentrada de 20 kips en el centro del claro. No incluir el peso de la viga.  $E$  e  $I$  permanecen constantes. Medir  $x$  a partir de la reacción izquierda.

##### Solución

1. Hacer un bosquejo de la viga mostrando las cargas y las reacciones (figura 4.13a).
2. Preparar el diagrama de cargas (figura 4.13b). Como no se toma en cuenta el peso de la viga, no hay carga distribuida y la ecuación equivale a un cero constante.
3. Preparar el diagrama de cortante (figura 4.13c). En este ejemplo, el diagrama de cortante es una línea horizontal constante, positiva para la mitad izquierda y negativa para la mitad derecha. (Para cargas más complejas con cargas distribuidas, la ecuación para el cortante se puede derivar mediante la integración de las ecuaciones de carga).
4. Construir el diagrama de momento y elaborar las ecuaciones para el momento (figura 4.13d).

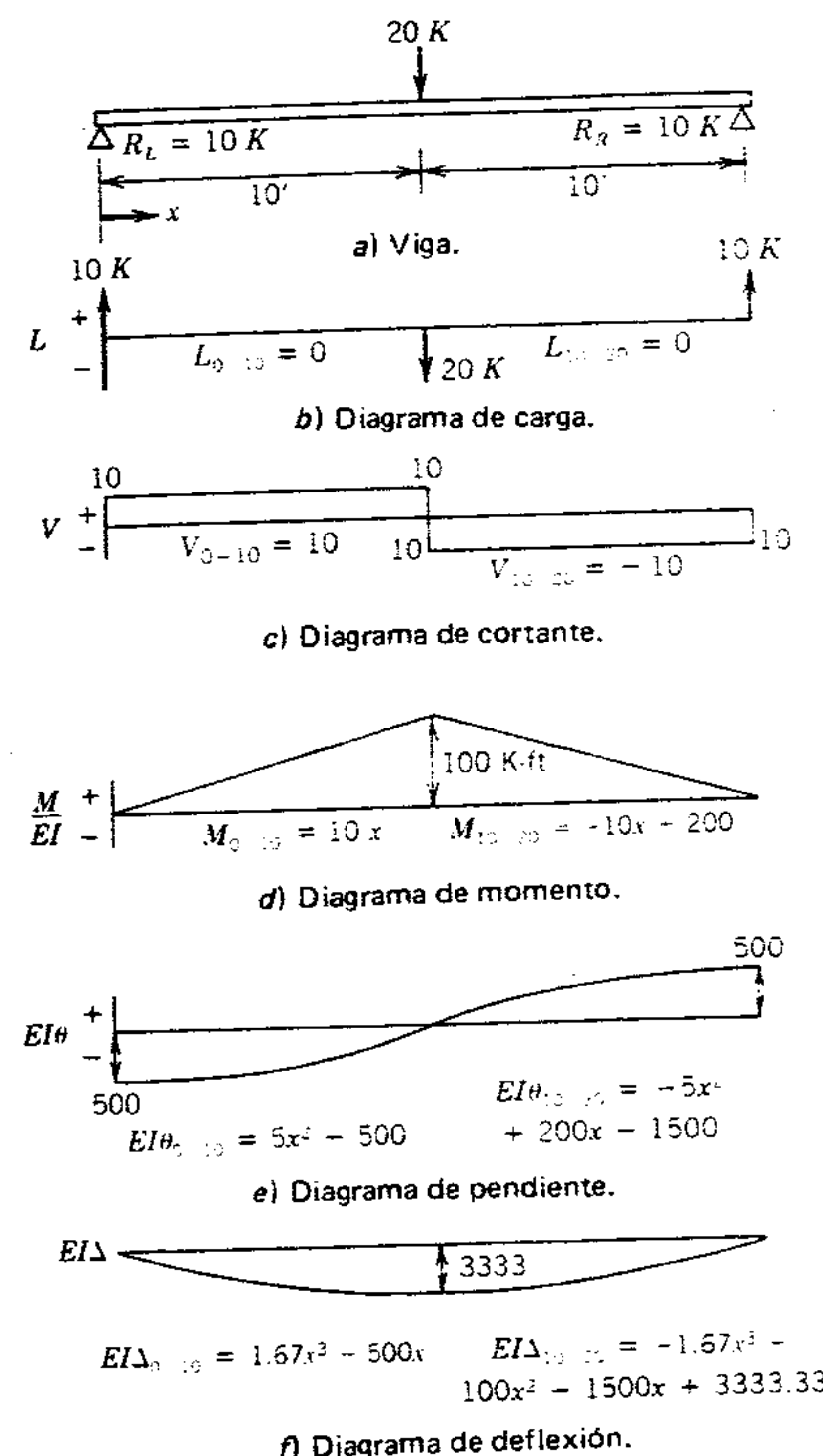


Figura 4.13 Ejemplo 1: Doble integración.

Para la mitad izquierda, la integración de la constante 10 da

$$M_{0-10} = 10x + C$$

La constante de integración se determina observando que cuando  $x = 0, M$  también es 0 y, por consiguiente, la constante es cero. Para la mitad derecha, integrando la constante -10, se obtiene

$$M_{10-20} = -10x + C$$

La constante de integración se determina observando que cuando  $x = 10$ , el momento equivale a 100. Sustituyendo esto en la ecuación anterior

$$100 = -10(10) + C$$

$$C = 200$$

En este ejemplo,  $E$  e  $I$  se suponen constantes; por lo tanto, la forma del diagrama  $M/EI$  seguirá siendo la misma que en el diagrama  $M$ . Sólo cambian los valores de las ordenadas, permitiendo que  $E$  e  $I$  se consideren como una constante externa en operaciones subsecuentes.

5. Elaborar el diagrama  $EI\theta$  y obtener las ecuaciones de su forma (figura 4.13e). En la mitad izquierda, integrando la ecuación del momento se tiene

$$EI\theta_{0-10} = 10 \frac{x^2}{2} + C$$

La constante de integración se determina observando que la pendiente es igual a cero en el centro del claro. Sustituyendo  $x = 10$  y  $EI\theta = 0$  en la ecuación anterior

$$0 = 10 \frac{(10)^2}{2} + C$$

$$C = -500$$

En la mitad derecha, integrando la ecuación del momento se tiene

$$EI\theta_{10-20} = -10 \frac{x^2}{2} + 200x + C$$

La constante de integración se determina observando que la pendiente equivale a cero en el centro del claro, entonces, usando la ecuación anterior

$$0 = -10 \frac{(10)^2}{2} + 200(10) + C$$

$$C = -1500$$



6. Dibujar el diagrama  $EI\Delta$  y desarrollar las ecuaciones (figura 4.13f). En la mitad izquierda, integrando la ecuación  $EI\theta$  se tiene

$$EI\Delta_{0-10} = 5 \frac{x^3}{3} - 500x + C$$

La constante de integración se determina observando que la deflexión en la reacción izquierda es igual a cero; luego, usando la ecuación anterior

$$0 = 5 \frac{(0)^3}{3} - 500(0) + C$$

$$C = 0$$

En la mitad derecha, integrando la ecuación de  $EI\theta$  se tiene

$$EI\Delta_{10-20} = -5 \frac{x^3}{3} + 200 \frac{x^2}{2} - 1500x + C$$

La constante de integración se determina observando que la deflexión en la reacción derecha es igual a cero; luego, usando la ecuación anterior

$$0 = -5 \frac{(20)^3}{3} + 200 \frac{(20)^2}{2} - 1500(20) + C$$

$$C = 3333.33$$

7. Debe verse que el valor para  $EI\Delta$  en el centro del claro (cuando  $x = 10$ ) debe ser el mismo usando cualquier ecuación. Con la ecuación del lado izquierdo

$$EI\Delta = 1.67(10)^3 - 500(10)$$

$$EI\Delta = -3330 \text{ kip-pie}^3$$

Usando la ecuación en el lado derecho

$$EI\Delta = -1.67(10)^3 + 100(10)^2 - 1500(10) + 3333$$

$$EI\Delta = -3337 \text{ kip-pie}^3$$

Por supuesto, la ligera diferencia en los valores se debe al redondeo de los números.

Finalmente, la deflexión máxima para cualquier viga se puede obtener usando sus valores  $E$  e  $I$  y ajustándolos por unidades. Si, por ejemplo, se usara una viga W 12 X 40, su deflexión máxima sería

$$\Delta = \frac{3330(12)^3}{310(29,000)} = 0.64 \text{ pulg}$$

siendo las unidades

$$\Delta = \frac{k \cdot \text{pie}^3 (12 \text{ pulg/pie})^3}{\text{pulg}^4 (k/\text{pulg}^2)} = \text{pulg}$$

### Ejemplo 2

Determinar la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada con una longitud de claro  $L$  y sometida a una carga uniformemente distribuida de  $w$  lb por pie.  $E$  e  $I$  permanecen constantes.

### Solución

1. Hacer un bosquejo de la viga mostrando la carga, reacciones y origen de  $x$  (figura 4.14).
2. Utilizar la ecuación de la curva de momento flexionante y dividir entre  $EI$ .

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right)$$

3. Determinar la ecuación del diagrama de la pendiente integrando la ecuación  $M/EI$ .

$$EI\theta = \frac{wLx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} + C$$

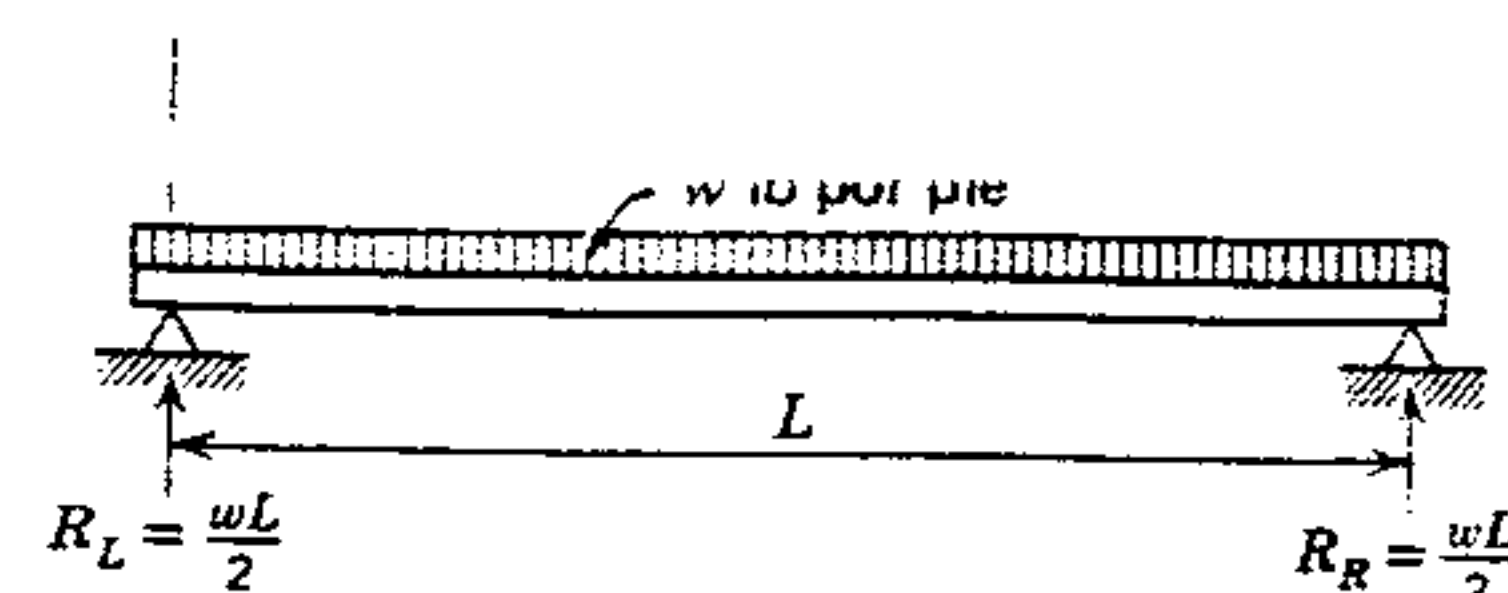


Figura 4.14 Ejemplo 2: Doble integración.

Determinar la constante de integración  $C$  como sigue: Cuando  $x = L/2$ ,  $EI\theta = 0$ . Por lo tanto,

$$EI\theta = \left[ \frac{wL}{4} \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right] - \left[ \frac{w}{6} \left( \frac{L}{2} \right)^3 \right] + C = 0$$

$$C = -\frac{wL^3}{24}$$

y la ecuación completa para la pendiente de la curva es

$$EI\theta = \frac{wLx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wL^3}{24}$$

4. Determinar la ecuación de la curva elástica integrando la ecuación  $EI\theta$ .

$$EI\Delta = \frac{wLx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wL^3}{24} (x) + C$$

cuando

$$x = 0, \quad EI\Delta = 0$$

y

$$C = 0$$

5. Calcular la deflexión máxima. Ésta ocurre a mitad del claro o cuando  $x = L/2$ .

$$EI\Delta = \left[ \frac{wL}{12} \left( \frac{L}{2} \right)^3 \right] - \left[ \frac{w}{24} \left( \frac{L}{2} \right)^4 \right] - \left[ \frac{wL^3}{24} \left( \frac{L}{2} \right) \right]$$

$$\Delta = \frac{5wL^4}{384EI}$$

### 4.9 FÓRMULAS DE DEFLEXIÓN

El cálculo real de la deflexión máxima utilizado en el diseño se hace usualmente mediante la sencilla apli-

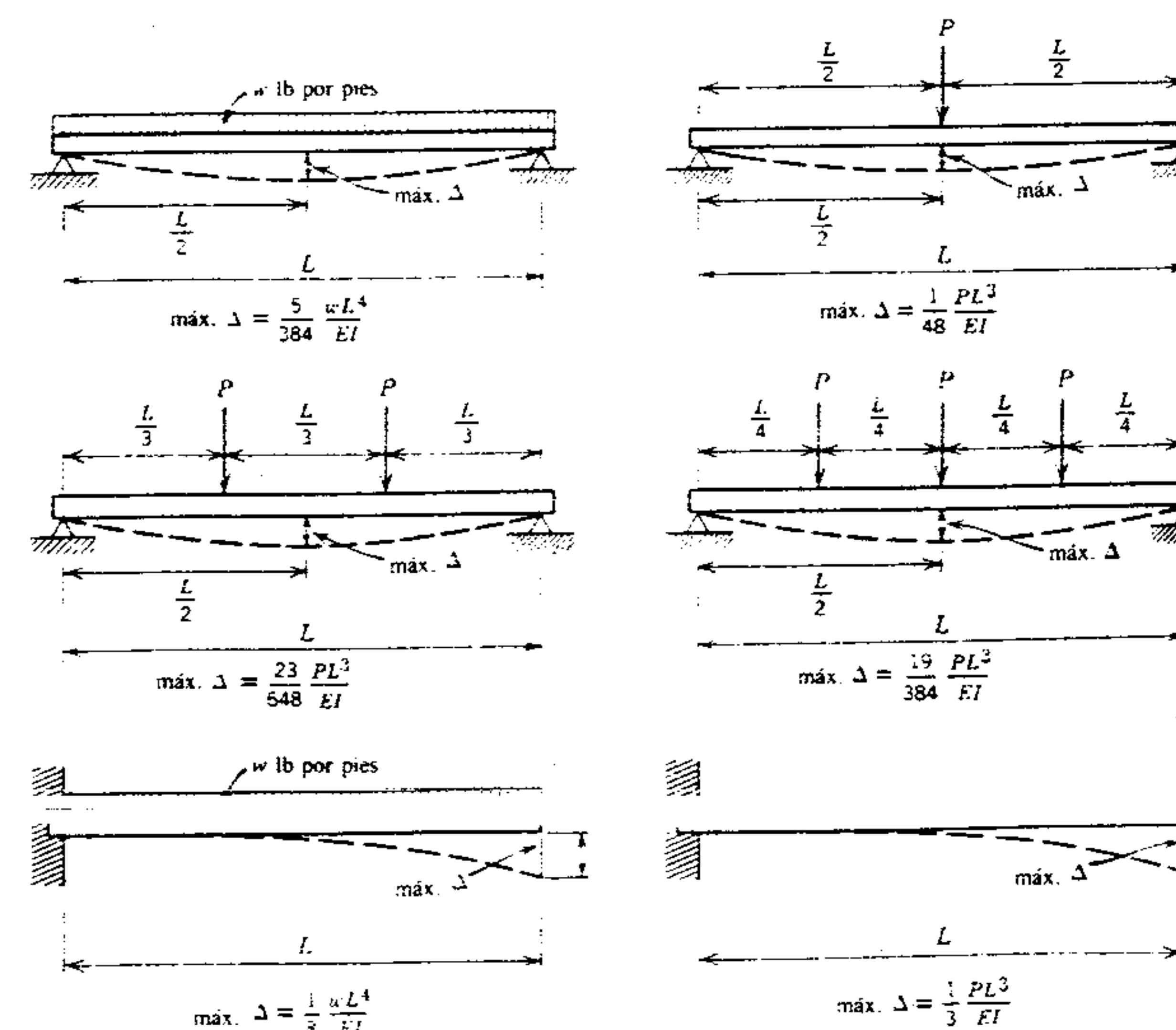


Figura 4.15 Fórmulas de deflexión.



cación de una fórmula. Es casi imposible dar una lista de fórmulas para cada apoyo de vigas y cada sistema de cargas concebibles; por supuesto, ésta es la razón de utilizar un enfoque general en las secciones anteriores. Asimismo, hay casos en que el cálculo de deflexiones puede ser muy complejo; en éstos es común desarrollar y usar programas de computación.

No obstante, en la figura 4.15 se presentan fórmulas de deflexión para las vigas y las cargas que se encuentran con mayor frecuencia en estructuras de edificios. En el Manual AISC se presentan fórmulas adicionales.

Para usarlas es necesario seleccionar una que corresponda a las características reales del diseño y conocer las propiedades de las secciones de las vigas.<sup>2</sup>

Debe observarse que si una viga se somete a cargas distribuidas y cargas concentradas, la deflexión total en cualquier punto es la suma de las deflexiones obtenidas por separado en el mismo punto.

## PROBLEMAS

1. Una viga simplemente apoyada tiene un claro de 30 pies. Hay una carga concentrada de 10 kips a 10 pies de la reacción izquierda. Se puede omitir la carga distribuida del peso de la viga.

- a) Construir diagramas completos de la viga y elaborar la ecuación de cada curva. Usar la reacción izquierda como origen para medir  $x$  en cada ecuación. En el trazo de los diagramas de pendiente y deflexión, usar la ecuación diferencial de la curva elástica.
- b) Determinar el punto de deflexión máxima.
- c) Calcular la deflexión máxima si se usa una viga W 14 X 34.

(En el apéndice G se dan las respuestas).

<sup>2</sup> El momento de inercia ( $I$ ) se puede seleccionar en un manual de acero, y el módulo de elasticidad ( $E$ ) para el acero estructural se supone que es de 29,000,000 lb por pulgada cuadrada, en todos los ejemplos de este texto. (Véase el apéndice A).

2. Una viga tiene una longitud total de 20 pies. La reacción izquierda está en el extremo izquierdo y la derecha está a 5 pies a la izquierda del extremo derecho. La carga distribuida a lo largo de la viga (incluyendo el peso de la misma) es de 10 kips por pie.

- a) Elaborar los diagramas completos de la viga y calcular la ecuación para cada curva. Ubicar el origen en la reacción izquierda para medir  $x$  en las ecuaciones entre las reacciones y ubicar el origen en la reacción derecha para medir  $x$  en las ecuaciones de la parte en voladizo.
- b) Determinar el punto de deflexión máxima.
- c) Calcular la deflexión máxima y la deflexión en el extremo libre del voladizo si se usa una viga W 14 X 90.

3. Una viga W 8 X 31 tiene un voladizo de 12 pies a partir de un muro. Soporta una carga uniformemente distribuida de 400 lb por pie a partir del muro hasta 4 pies del extremo libre. También sostiene dos cargas concentradas de 1 kip, una localizada en el extremo libre y la otra a 4 pies del extremo libre. Usando el método de momento de área, calcular:

- a) La deflexión máxima.
- b) La deflexión de la viga a 4 pies del extremo libre.

*Nota:* Dibujar en partes el diagrama de momentos. (Las respuestas aparecen en el apéndice G).

4. Una viga W 12 X 40 está simplemente apoyada en un claro de 24 pies. Soporta una carga uniformemente distribuida de 800 lb por pie a todo lo largo, y dos cargas concentradas de 6 kips, una localizada a 6 pies de cada apoyo. Usando el método de momento de área, determinar la deflexión máxima. (Respuesta en el apéndice G).
5. Una viga S 12 X 35 tiene un claro de 30 pies. Soporta una carga uniformemente distribuida de 1200 lb por pie a todo lo largo. Determinar la deflexión máxima.
6. Una viga cubre un claro de 24 pies y soporta una carga concentrada de 10 kips en el centro del claro. Sin tomar en cuenta el propio peso de la viga, seleccionar la más ligera sección W de 10

pulgadas que no se deflexione más de 1/2 pulg. (Solución en el apéndice G).

7. Determinar la deflexión máxima de una viga W 12 X 19 con un voladizo de 11 pies a partir de un muro. Soporta una carga distribuida de 200 lb por pie a todo lo largo y una carga concen-

trada de 2 kips situada en su extremo libre.

8. Determinar la deflexión máxima de una viga W 12 X 26 con un claro de 24 pies y sometida a una carga distribuida de 500 lb por pie y una carga concentrada de 4 kips actuando en cada tercio del claro.



## 5

# Vigas Procedimientos de diseño

### 5.1 ASPECTOS GENERALES

El diseño completo de vigas requiere el cálculo de la 1) resistencia a la flexión y al esfuerzo cortante, 2) limitación de la deflexión, 3) pandeo lateral y 4) pandeo local.

En el capítulo 3 se estudió la resistencia a la flexión y al cortante usando valores supuestos de  $F_b$ , y en el capítulo 4 los métodos para calcular deflexiones de vigas. En este capítulo se tratan más detalladamente los puntos 2, 3 y 4 y se presenta un procedimiento general de diseño de vigas.

Este procedimiento de diseño de vigas incluye el examen de las consecuencias de la deflexión excesiva, así como el pandeo de las secciones que no tienen un soporte lateral adecuado, ya que ambos podrían influir en el valor de  $F_b$  que se usará en el diseño. Se describe el procedimiento general de diseño de vigas y su uso, primero sin acudir a los numerosos auxiliares de diseño que proporciona el Manual AISC, y luego, más adelante, empleando algunos de estos auxiliares de diseño. También se consideran tipos especiales de vigas y de cargas. Sin embargo, sólo se examinan vigas estáticamente determinadas; en el capítulo 10 se estudian las vigas estáticamente indeterminadas (continuas).

### 5.2 LIMITACIONES DE LA DEFLEXIÓN

Resulta difícil establecer limitaciones en la deflexión, ya que raras veces la "seguridad" de una viga depende de la cantidad que se deflexione bajo carga.

Como regla general, los reglamentos de construcción dan una escasa guía, ya que son principalmente un instrumento para asegurar la seguridad de las estructuras. La notable excepción a esto es el tratamiento del "encharcamiento de techos", el cual se verá más adelante. Por lo tanto, el tema de la limitación sobre la deflexión generalmente lo tiene que resolver el diseñador aplicando su propio criterio.

Por lo general, la deflexión permisible máxima se expresa como una dimensión absoluta (por ejemplo, pulgadas o fracción de pulgada) o como una proporción de la longitud del claro (por ejem-



plo,  $L/360$ ). La limitación dimensional absoluta se debe a la necesidad de proporcionar una cantidad especificada de claro libre en una construcción, es decir, se sabe que si una viga se deflexiona en uno o más puntos que la cantidad especificada, causará daño a los materiales adyacentes o unidades de equipo, por ejemplo, romperá ventanas, agrietará divisiones o hará que las puertas se atasquen. La limitación proporcional que se encuentra con más frecuencia (que se trata en el capítulo 4) especifica que la deflexión máxima por carga viva no debe exceder a  $\frac{1}{360}$  del claro de vigas y trabes que sostienen plafones enyesados. Se presume que causará daño una mayor deflexión que ocurra una vez aplicado el yeso. Esta limitación está explícita en la Especificación AISC, y se usa con frecuencia como una guía acerca de si se usan o no plafones enyesados. Es importante remarcar que esta limitación es solamente para carga viva.

Aun cuando ninguna de las consideraciones anteriores fuera importante, todavía puede ser conveniente imponer una limitación por razones estéticas o psicológicas. Con frecuencia este límite se establece como  $\frac{1}{300}$  o  $\frac{1}{240}$  del claro bajo la carga total.

Cuando no se conocen los usos a que se dedicará un edificio durante toda su vida, es bueno usar la limitación más restrictiva de  $\frac{1}{360}$ . No obstante, cuando el uso futuro es obvio y estas restricciones son innecesarias, el diseñador deseará aprovechar la ventaja económica que proporciona la mayor deflexión permisible. Asimismo, cuando se sabe que se necesitan límites específicos aún más restrictivos que  $\frac{1}{360}$  del claro, éstos, por supuesto, se deberán aplicar.

Como se vio en el capítulo 4, la rigidez a la flexión ( $EI$ ) es la propiedad de una viga que controla la deflexión; es decir, entre mayor sea el valor de  $E$  o  $I$ , menor será la deflexión. Sin embargo, se debe remarcar que el valor de  $E$  para todos los tipos y grados de acero es 29,000 ksi (véase el apéndice A). Por lo tanto, si la deflexión determina el tamaño de una viga, el uso de un grado superior de acero no será benéfico y, de hecho, se podría considerar desperdicio. Entonces, en efecto, es el momento de inercia ( $I$ ) el que controla la deflexión de los edificios de acero.

Para una determinada área de sección transversal, el valor de  $I$  variará respecto al cuadrado del peralte. Por lo tanto, el cálculo del peralte de una viga es un paso importante en el procedimiento de diseño y, habitualmente constituye el primer paso. Una guía útil para establecer este peralte para vigas simplemente apoyadas, es lo que se conoce como la "relación  $L/24$ ". A menudo, esta relación se define como "el peralte de la viga en pulgadas es igual a la mitad del claro en pies", es decir, una viga simple con un claro de 24 pies requeriría una sección con un peralte mínimo de 12 pulgadas.

En el Manual AISC se dan guías similares, por ejemplo, para grandes áreas abiertas de piso, libres de muros divisorios que puedan amortiguar los efectos de cargas vivas repetidas como lo son la circulación de personas, usar un peralte mínimo de viga igual a  $\frac{1}{20}$  del claro. Esta limitación minimizará la sensación de que el piso se mueve con la circulación de personas.

Otra guía para el peralte, que proporciona el Manual AISC, es el establecido para vigas y trabes totalmente esforzados que se usan para pisos. Para estos miembros, la relación dada es  $F_y/800$ <sup>1</sup>; no obstante, esta relación puede aumentar a  $F_y/1000$  en largueros de techos inclinados.<sup>2</sup> Por ejemplo, una viga de piso de acero A36 sobre un claro simple de 28 pies y usando  $F_b = 24 \text{ k/pulg}^2$ , el peralte mínimo debe ser

$$\frac{36}{800} (28)(12) \approx 15 \text{ pulg}$$

Si se van a usar peraltes menores, es conveniente efectuar una reducción directamente proporcional en el esfuerzo permisible, por ejemplo, si se selecciona un peralte de viga de 12 pulg, el esfuerzo flexionante permisible se debe reducir a

$$F_b = \frac{12}{15} (24) = 19.2 \text{ k/pulg}^2$$

<sup>1</sup>  $F_y$  y otros valores de esfuerzos dados en la Especificación del AISC se expresan en kips por pulgada cuadrada.

<sup>2</sup> Un larguero es una pequeña viga que soporta directamente la cubierta del techo.

Estas guías pueden ser alteradas por otras condiciones, como voladizos, extremos empotrados, contra flechas de fabricación,<sup>3</sup> etc., las cuales reducen la deflexión.

El caso de deflexión excesiva que podría afectar la seguridad de un edificio es debido al estancamiento de agua sobre un techo. Por esta razón, la Especificación AISC es explícita respecto a estas deflexiones. La mayoría de los techos son inclinados o tienen pendientes para llevar el agua a canales cercanos o drenajes internos. Sin embargo, cuando se usan techos planos, existe la posibilidad de que el agua se acumule y origine una deflexión en el techo y por ello se acumule aún más agua hasta tener el peso suficiente para provocar un colapso en el techo. La rigidez adecuada del sistema del techo podría contrarrestar el efecto de esto. Un sistema de techo está compuesto por la cubierta, las vigas que soportan la cubierta y las trabes que soportan las vigas. Hay una especificación AISC para obtener una rigidez adecuada para el sistema de techo; si no se satisface esta especificación, entonces se debe efectuar alguna otra investigación para asegurar la seguridad ante los efectos del encharcamiento. En el ejemplo 5 de la sección 5.6 se ilustra la aplicación de los criterios AISC acerca del encharcamiento.

### 5.3 USO DE FÓRMULAS DE DEFLEXIÓN EN EL DISEÑO

En el capítulo 4 se presentaron procedimientos para el cálculo directo de deflexiones de vigas, así como procedimientos para desarrollar y usar fórmulas de deflexión estándar para las condiciones de apoyo y carga que se encuentran con más frecuencia en la práctica. Por supuesto, hay casos en que resulta complicado determinar la localización y el valor máximo de la deflexión, influyendo estos factores en el enfoque que se adopte el diseño de

una viga; no obstante, el procedimiento usual de diseño es el siguiente:

1. Trazar el diagrama de cargas de la viga.
2. Suponer el peralte y el peso de la viga.
3. Trazar diagramas de momento y fuerza cortante y determinar los valores máximos de  $M$  y  $V$  (o usar las fórmulas apropiadas).
4. Encontrar la  $S$  requerida  $= M \text{ real}/F_b$  permisible, y seleccionar tentativamente una sección de viga de la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo permisible" o de las tablas de "Dimensiones y propiedades" del AISC. Se debe suponer que el valor de  $F_b$  es un porcentaje de  $F_y$  y verificar o afinar basándose en la sección seleccionada al tanteo. (Como se señaló antes, tanto la deflexión como el pandeo de la viga pueden influir en el valor de  $F_b$ ).
5. Comparar el peso real de la viga con el supuesto. Si el peso supuesto es significativamente superior o menor que el real, repetir los pasos 3 al 5 hasta que haya una concordancia razonable.
6. Revisar la resistencia al cortante:

$$f_v \text{ real} = \frac{V \text{ real}}{A_w \text{ real}} \leq F_v \text{ permisible}^4$$

Si  $f_v$  es mayor que la permisible, regresar al paso 4 y seleccionar otra sección de prueba con una mayor área de alma ( $A_w$ ). Luego, repetir los pasos 3 al 6 que la sección de prueba satisfaga las necesidades tanto de flexión como de esfuerzo cortante. (Con secciones roladas estándar, la resistencia raras veces constituirá un problema).

7. Determinar la deflexión permisible deseada ( $\Delta$ ) en pulgadas, y calcular la deflexión máxima, usando una fórmula estándar si se tiene una, por ejemplo, para una carga concentrada en el centro de un claro simple

$$\Delta \text{ real} = \frac{PL}{48EI} \leq \Delta \text{ permisible}$$

<sup>3</sup> En las vigas la contraflecha es la curvatura inversa, usualmente producida durante la fabricación para contrarrestar la deflexión real debida a las cargas. Generalmente se recomienda una contraflecha igual a la deflexión causada por la carga muerta. En estas condiciones, la viga se nivelará hasta que se someta a cargas vivas.

<sup>4</sup> En la nomenclatura del AISC,  $A_w$  se define como el "área del alma de la trabe", es decir, el espesor del alma por el peralte de la sección.



Si ninguna fórmula estándar se ajusta al caso de diseño, calcular la deflexión real de acuerdo con el procedimiento general presentado en el capítulo 4. Si la  $\Delta$  real excede a la  $\Delta$  permisible, regresar al paso 4 y seleccionar otra sección de prueba con un mayor momento de inercia ( $I$ ). Luego, repetir los pasos 3 al 7 hasta que la sección<sup>5</sup> de prueba satisfaga las necesidades para flexión cortante y deflexión.

Se puede ver que este procedimiento ocupa mucho tiempo a menos que en el paso 4 se tenga la suerte de elegir al primer intento la sección de prueba adecuada. No obstante, como se dijo en el paso 6, el cortante pocas veces será problema en las secciones roladas, y usualmente la deflexión será crítica sólo cuando se tienen cargas ligeras en grandes claros, cuando la altura libre de piso o algunas otras consideraciones arquitectónicas exigen el uso de una viga de menor peralte que el que se hubiera seleccionado para satisfacer las necesidades de la flexión. Además, a medida que se adquiere pericia en el diseño, es posible abreviar el procedimiento anterior mediante modos que se explican en la nota de pie 5 o mediante el uso de auxiliares de diseño de manual como los que se comentarán en la sección 5.9.

#### 5.4 APLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE DISEÑO

Los siguientes ejemplos servirán para explicar la aplicación del método para obtener la deflexión, que se vio en la sección 5.3, así como el procedimiento de diseño total para la flexión, el cortante y la deflexión, pero sin considerar el pandeo. (La numeración de pasos será diferente de la del procedimiento general descrito en la sección 5.3).

<sup>5</sup> Cuando existen fórmulas de deflexión, éstas se pueden utilizar para encontrar el  $I$  requerido: es decir,  $I$  requerido  $= PL^3/48E\Delta$ . Entonces, se puede seleccionar una sección de viga con un  $I$  igual o mayor que el requerido.

#### Ejemplo 1

Diseñar la sección más ligera que soporte una carga uniforme de 770 lb por pie en todo su claro simple de 24 pies (figura 5.1). Usar una viga de acero A36 con  $F_b = 0.66F_y$  y  $E = 29,000$  k/pulg<sup>2</sup>. Limitar la deflexión por carga total a  $\frac{1}{300}$  del claro.

#### Solución

- Suponiendo un peso de viga de 30 lb por pie,  $w = 800$  lb por pie.  
Si  $L/24$  se usa como guía para el peralte,  $d_1 = 12$  pulgadas.  
Si  $F_y/800$  se usa como guía para el peralte,

$$d_2 = \frac{36}{800} (24)(12) = 13 \text{ pulg}$$

Estos datos serán útiles para seleccionar una sección de prueba (paso 4).

$$R_L = R_R = V = \frac{800(24)}{2} = 9600 \text{ lb}$$

$$V_{\text{máx}} = 9600 \text{ lb}$$

- El momento flexionante máximo en el centro del claro es

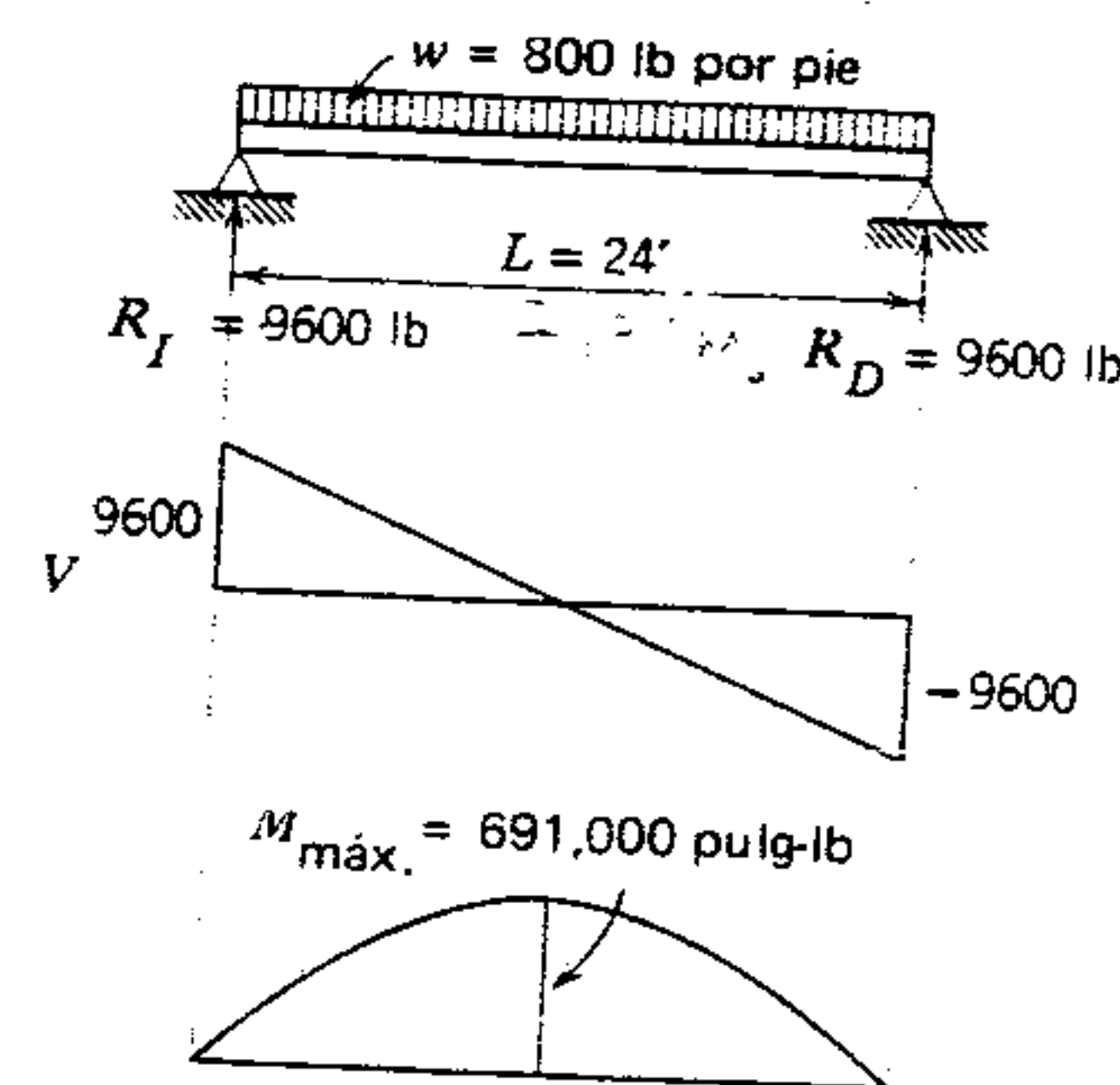


Figura 5.1

$$\begin{aligned} M &= \frac{wL^2}{8} \\ &= \frac{800(24)^2}{8} \\ &= 57,600 \text{ pie-lb} \\ M &= 57,600(12) \\ &= 691,000 \text{ pulg-libra} \end{aligned}$$

- Calcular el módulo de sección requerido, suponiendo que el peralte utilizado es el adecuado

$$F_b = 0.66(36) = 24 \text{ k/pulg}^2$$

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{691,000}{24,000} = 28.8 \text{ pulg}^3$$

- Seleccionar la viga más ligera que tenga el módulo de sección requerido. En la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo permisible" de AISC, seleccionar una viga W14  $\times$  22.

$$S = 29.0 \text{ pulg}^3 > 28.8 \text{ pulg}^3 \text{ requerida}$$

El peralte de 14 pulg  $> 13 > 12$  determinado en el paso 1); por lo tanto,  $F_b = 24$  k/pulg<sup>2</sup> (verificado).

- Revisar la viga W 14  $\times$  22 para el cortante:  $F_v = 14,500$  lb/pulg<sup>2</sup>;  $A_w = t$  (espesor del alma) por  $d$  (peralte de la sección).

$$f_v = \frac{V}{td} = \frac{9600}{0.230(13.74)} = 3038 < 14,500 \text{ lb/pulg}^2$$

- Determinar la deflexión máxima en el centro del claro.

$$\Delta_{\text{permisible}} = \frac{\text{claro}}{300} = \frac{24(12)}{300} = 0.96 \text{ pulg}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{5(800)(24)^4(12)^3}{384(29,000,000)(199)} \\ &= 1.03 > 0.96 \text{ pulg} \end{aligned}$$

Como la deflexión real excede a la permisible, se debe seleccionar una viga con mayor  $I$

y revisarla si es adecuada a la flexión ( $S$ ) y al cortante ( $f_v$ ).

- En la Tabla de módulo de sección elástica del AISC, la siguiente sección mayor y más económica es W 14  $\times$  26. El peso de viga supuesto previamente (30 lb por pie) es adecuado. Por lo tanto,

$$S = 35.3 \text{ pulg}^3 > 28.8 \text{ pulg}^3 \text{ requerida}$$

y

$$\begin{aligned} f_v &= \frac{V}{td} = \frac{9600}{0.255(13.91)} \\ &= 2706 < 14,500 \text{ lb/pulg}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{5wL^4}{384EI} \\ &= \frac{5(800)(24)^4(12)^3}{384(29,000,000)(245)} \\ &= 0.84 < 0.96 \text{ pulg.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la viga W 14  $\times$  26 satisface los tres requisitos (momento flexionante, fuerza cortante y deflexión) y es adecuada. El peso supuesto de la viga de 30 lb por pie es ligeramente mayor que el real como para justificar un nuevo cálculo con la esperanza de que se pueda usar una sección más ligera. Esto se puede comprobar mediante el cálculo de  $\Delta$  basándose en una carga de 792 lb por pie. Si el peso supuesto ha sido considerablemente menor que el real, se tendrá que tomar una decisión similar, es decir, si la diferencia es tan significativa como para justificar un nuevo cálculo para ver si se necesita una viga más pesada. En estas decisiones será útil la experiencia.

El problema del ejemplo 1 también se puede solucionar después del paso 6) resolviendo la ecuación de deflexión para el momento de inercia requerido, como se indica en la nota de pie 5, de la sección 5.3.



**Solución**

Los pasos 1) al 6) son los mismos.

7. Determinar el momento de inercia requerido para limitar la deflexión a 0.96 pulg específica.

$$I = \frac{5wL^4}{384E\Delta} = \frac{5wL^4}{384E(0.96)}$$

$$= \frac{5(800)(24)^4(1728)}{384(29,000,000)(0.96)} = 215 \text{ pulg}^4$$

8. Seleccionar la sección de menor peso con  $I \geq 215 \text{ pulg}^4$  y  $S \geq 28.8 \text{ pulg}^3$ . En la tabla de módulo de sección elástico ("Tabla de selección de diseño de esfuerzo admisible" de AISC), hacer una selección de prueba basándose solamente en el módulo de sección ( $W 14 \times 22$ ). Luego, consulte las "Tablas de selección de momento de inercia", que aparecen por primera vez en la octava edición del Manual AISC. En la tabla se verá que la sección de menor peso que tiene un  $I \geq 215$  es la  $W 14 \times 26$ . Esta sección tiene una  $S \geq 28.8$ ; por lo tanto, se selecciona.

Como se vio en el paso 5), el cortante no es crítico, y el peso real lo suficientemente próximo al supuesto, por lo tanto se considera una correcta selección.

**Ejemplo 3**

Rediseñar la viga del ejemplo 1 usando un peralte nominal de viga de 12 pulgadas y el criterio de peralte de  $F_y/800$ , siendo todo lo demás igual que en el ejemplo 1.

**Solución**

Los pasos 1 y 2 son los mismos.

3. Calcular el módulo de sección requerido. Si está totalmente esforzada, el esfuerzo flexionante permisible es

$$F_{b1} = 0.66(36) \approx 24 \text{ k/pulg}^2$$

y el peralte debe ser

$$d = \frac{36}{800} (24)(12) \approx 13 \text{ pulg}$$

Cuando se usa la viga con un peralte de 12 pulg, el esfuerzo se debe reducir a

$$F_{b2} = \frac{12}{13} (24) = 22.2 \text{ k/pulg}^2$$

y

$$S = \frac{691}{22.2} = 31.1 \text{ pulg}^3$$

4. Calcular el momento de inercia requerido.

$$I = 215 \text{ pulg}^4 \text{ (véase el paso 7 del ejemplo 2)}$$

5. En la tabla "Formas W: Dimensiones y propiedades" del Manual AISC, seleccionar una  $W 12 \times 30$  del grupo de 12 pulg de peralte ( $I = 238 \text{ pulg}^4$  y  $S = 38.6 \text{ pulg}^3$ ). Se observa que el valor de  $I$  es el mayor. De nuevo, el peso real es lo bastante cercano al supuesto y el cortante no es crítico.

**PROBLEMAS**

(En el apéndice G se dan las soluciones a todos los problemas).

- Una viga está simplemente apoyada sobre un claro de 28 pies. Hay una sola carga concentrada de 15 kips situada en el centro del claro. Sin tomar en cuenta el peso propio de la viga, seleccionar la sección más económica que se pueda usar con seguridad. Limitar la deflexión por carga total a  $F_y/800$  y la guía de peralte-claro de  $F_y/800$ .
- Una viga está simplemente apoyada sobre un claro de 36 pies. Hay dos cargas concentradas de 10 kips, una a cada tercera parte del claro. Sin tomar en cuenta el peso propio de la viga, seleccionar la sección más económica que se pueda usar con seguridad. Limitar la deflexión por

carga total a  $L/300$ . Usar acero A36,  $F_{b1} = 0.66F_y$ , y la guía peralte-claro  $L/24$ .

- Una viga está simplemente apoyada sobre un claro de 32 pies. Hay tres cargas concentradas de 5 kips situadas simétricamente a cada cuarta parte del claro. El peralte máximo permisible de la viga es de 14 pulgadas. Sin considerar el peso propio de la viga, seleccionar la sección más económica que se pueda usar con seguridad. Limitar la deflexión máxima por carga total a  $L/300$ . Usar acero A36,  $F_{b1} = 0.66F_y$ , y la proporción peralte-claro de  $F_y/800$ .
- Una viga está simplemente apoyada sobre un claro de 26 pies. Hay una carga concentrada de 2 kips en el centro del claro. Además, hay una carga uniforme de 400 lb por pie (incluyendo el peso de la viga) sobre todo el claro. Seleccionar la sección más económica que se pueda usar con seguridad. Limitar la deflexión máxima por carga total a  $L/240$ . Usar acero A572, grado 50,  $F_{b1} = 0.66F_y$ , y la guía peralte-claro de  $F_y/800$ . Rediseñar la viga usando acero A36, permaneciendo iguales los demás requisitos.
- Una viga tiene un voladizo de 12 pies a partir de un muro. Hay una carga concentrada de 2 kips sobre el extremo libre y una carga concentrada de 4 kips a 6 pies del extremo libre. Considerar estas cargas concentradas como cargas vivas. La carga muerta incluyendo el peso de la viga y su construcción circundante es de 100 lb por pie. La deflexión por carga viva en el extremo libre se debe limitar a  $\frac{1}{2}$  pulg. Seleccionar la sección más económica que se pueda usar con seguridad. Usar acero A36 y  $F_b = 0.66F_y$ .
- Una viga simplemente apoyada, de 32 pies de largo, tiene un voladizo de 8 pies en un extremo, siendo de 24 pies la distancia entre los apoyos. Seleccionar la sección más económica que se pueda usar con seguridad si hay una carga uniformemente distribuida de 1200 lb por pie (incluyendo el peso de la viga), sobre todo el claro. Limitar la deflexión por carga total entre apoyos a 0.80 pulg y la del extremo libre del voladizo a 0.40 pulg (hacia arriba o hacia abajo). Usar acero A36,  $F_b = 0.66F_y$ , y no usar guía peralte-claro, debido al voladizo.

**5.5 PANDEO LATERAL**

Una viga sometida a flexión está a tensión en un patín y a compresión en el otro. El patín a compre-

sión es el que tiende a pandearse, y esta tendencia aumenta con el esfuerzo. Si hay pandeo, éste será en la dirección de menor resistencia. Como el alma mantiene firmemente verticales ambos patines, esta dirección es la lateral y casi siempre se presenta cierto torcimiento. En la figura 5.2 se ilustra la posición hipotética de pandeo de una viga simplemente apoyada. El desplazamiento vertical que se muestra es la deflexión normal y no se debe al pandeo.

La forma de una viga también influye en su tendencia a pandearse. Usualmente, una viga económica tiene un gran momento de inercia respecto al eje  $x-x$  y un momento de inercia relativamente pequeño respecto a su eje  $y-y$ . La tendencia al pandeo aumenta igual que la relación  $I_{xx}/I_{yy}$ . Por lo tanto, mientras más estrecha y mayor peralte tenga una sección, más susceptible será al pandeo.

Es obvio que ninguna viga se pandearía si la construcción circundante lo evitara. Cuando el movimiento lateral de una viga está restringido así, ésta se clasifica como apoyada lateralmente; la determinación de cuando una viga está apoyada lateralmente no es siempre fácil. Cuando hay duda, la viga se debe diseñar como si no estuviera apoyada lateralmente, ya que éste es el supuesto más crítico. En la figura 5.3 se ilustran varios tipos de construcción que por lo general se reconocen como medios adecuados para proporcionar un apoyo lateral completo del patín superior. Los sistemas precolados de pisos que se mantienen en su lugar mediante sujetadores, por ejemplo, *no* se consideran por lo general suficientemente rígidos para suministrar apoyo lateral. Tampoco una viga empotrada en un muro de mampostería convencional posee necesariamente apoyo lateral del muro solo.

Asimismo se pueden introducir miembros intermedios especiales o regulares en puntos predeterminados. Sin embargo, se debe prestar gran atención a los detalles de las conexiones. En la figura 5.4 *a* y *b* se ilustran dos maneras de conectar vigas para suministrar apoyo lateral. En la figura 5.4*a* está apoyado solamente el patín superior. En la figura 5.4*c* se muestran vigas de techo o largueros inclinados por gravedad en el



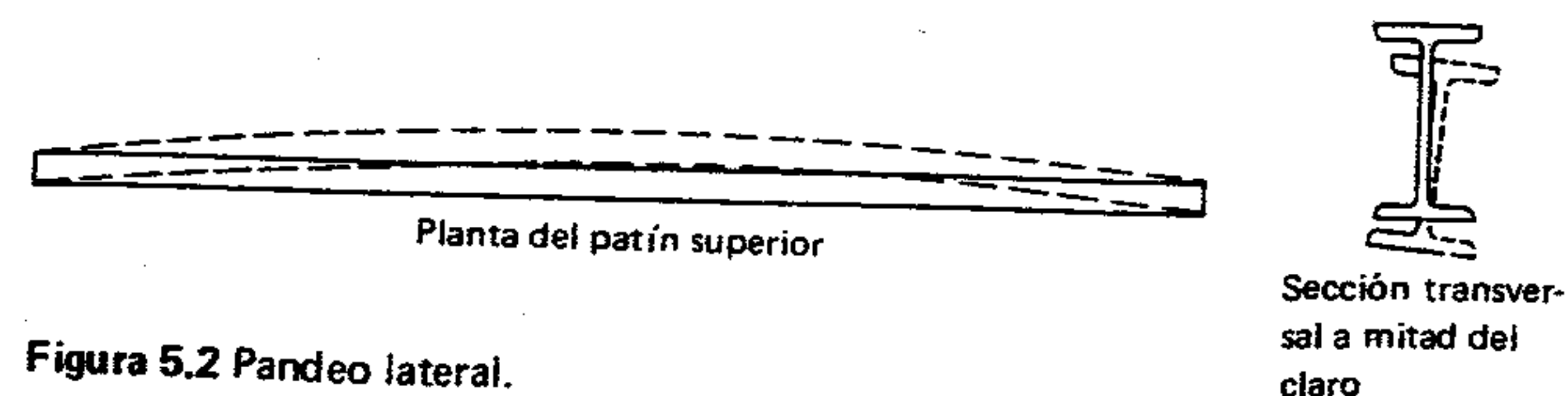


Figura 5.2 Pandeo lateral.

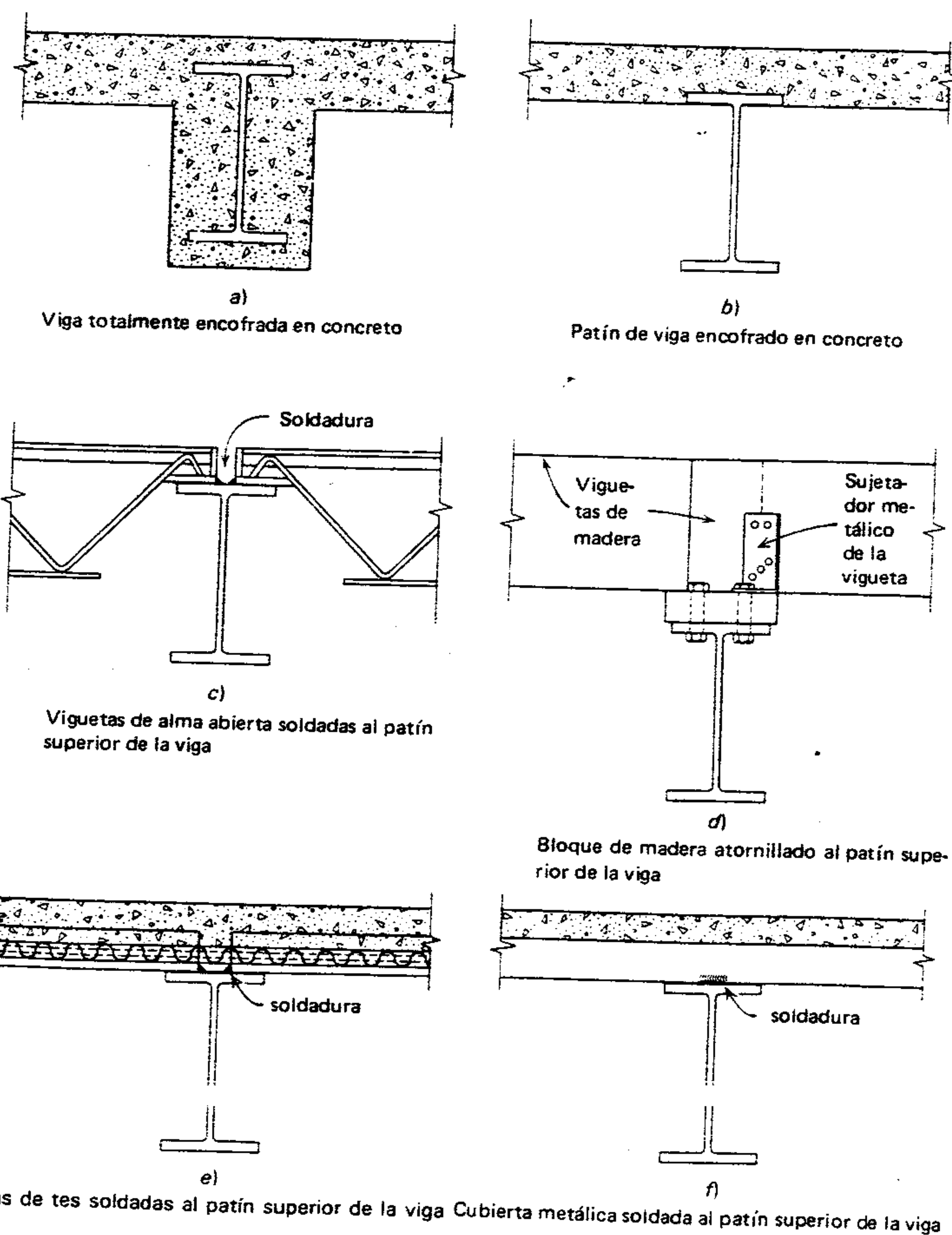


Figura 5.3 Vigas con apoyo lateral completo en el patín superior.

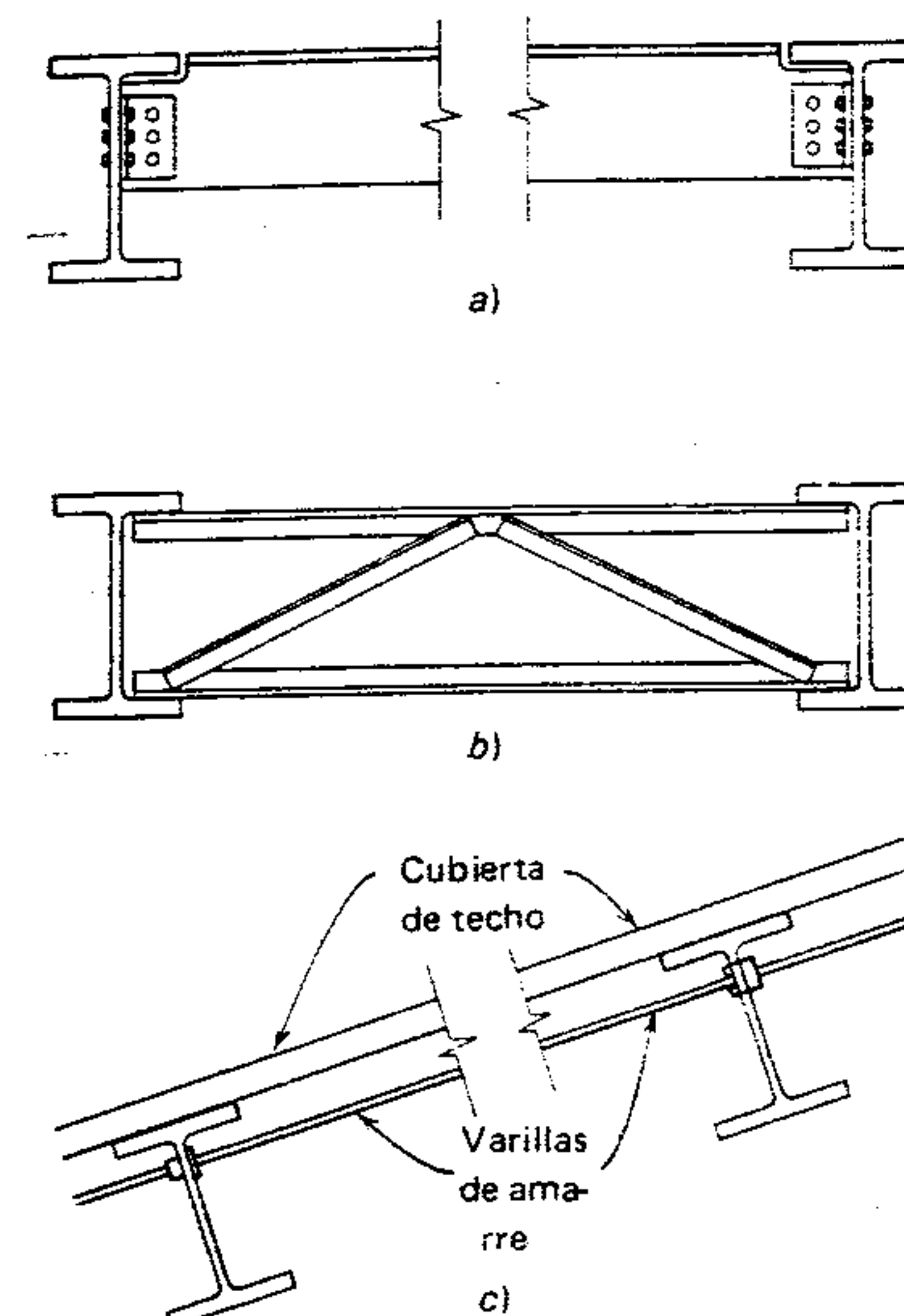


Figura 5.4 Apoyo lateral en puntos intermedios.

sentido de las cargas y están soportadas lateralmente por varillas de amarre (sag-rods) situadas como se ilustra.

Incluso las vigas que tienen soporte lateral por otros miembros se pueden pandear en los puntos donde reciben este soporte lateral; por lo tanto, mientras menor sea la longitud no apoyada lateralmente, mayor será la resistencia al pandeo. Las vigas que se ilustran en la figura 5.3 tienen un apoyo casi continuo para prevenir efectivamente el pandeo.

También debe observarse que el patín a compresión de abajo, no el superior puede pandearse cuando en partes de la viga se presentan momentos negativos, como en los voladizos.

En el diseño de una viga se debe clasificar como si tuviera apoyo lateral adecuado, o como si no tuviera apoyo lateral. La clasificación apropiada depende de las dimensiones de la viga, y como regla general, estas proporciones no se pueden determinar hasta que haya comenzado el proceso de diseño y se haya

hecho una selección de prueba. Cuando éste es el caso, el diseñador debe usar un procedimiento de aproximación sucesiva, es decir, debe suponer que existe una condición, luego modificarla cuando los cálculos subsecuentes indiquen la necesidad de ello.

En las siguientes dos secciones se estudia el proceso de diseño, primero para vigas con apoyo lateral adecuado y luego para vigas sin apoyo lateral. En cada proceso, la tarea principal es establecer el esfuerzo flexionante permisible,  $F_b$ . El diagrama de flujo de la figura 5.5 a y b es útil para comprender las condiciones que rigen la selección de una fórmula particular para  $F_b$ . Este diagrama de flujo es para vigas con patines (W, M, S, C, MC) solamente. Para otras formas —es decir, caja, tubular, ángulo— consúltese la Especificación AISC.

## 5.6 VIGAS: APOYADAS LATERALMENTE

Se deben considerar dos factores principales —condiciones que 1) constituyen un adecuado apoyo lateral y aquellas que 2) determinan el esfuerzo permisible ( $F_b$ ) para vigas que tienen apoyo lateral adecuado. Las construcciones como las de la figura 5.3 proporcionan apoyo lateral continuo para el patín superior. En estas condiciones, cualquier viga, sin importar sus dimensiones, se puede clasificar automáticamente como apoyada lateralmente en forma adecuada, siempre que la viga esté sometida solamente a flexión positiva (es decir, compresión en el patín superior). Otras construcciones no proporcionan apoyo lateral continuo, pero sí proveen apoyo en puntos específicos a lo largo de la viga (figura 5.4). Si la distancia de un punto de apoyo lateral a otro es excesiva, entonces el patín a compresión se podría pandear entre esos puntos (figura 5.6).

Cuando las vigas tienen apoyo lateral adecuado, el diseñador debe determinar si la viga es compacta o no compacta. Si la viga es compacta, el esfuerzo permisible es  $0.6 F_y$  y  $0.66 F_y$ . El valor más alto ( $0.66 F_y$ ) se puede usar solamente si la viga está clasificada como compacta y su longitud no soportada lateralmente ( $L_b$ ) no excede una longitud especial  $L_c$  para cada viga de patines. La mayoría de las formas laminadas de vigas son compactas (sobre todo



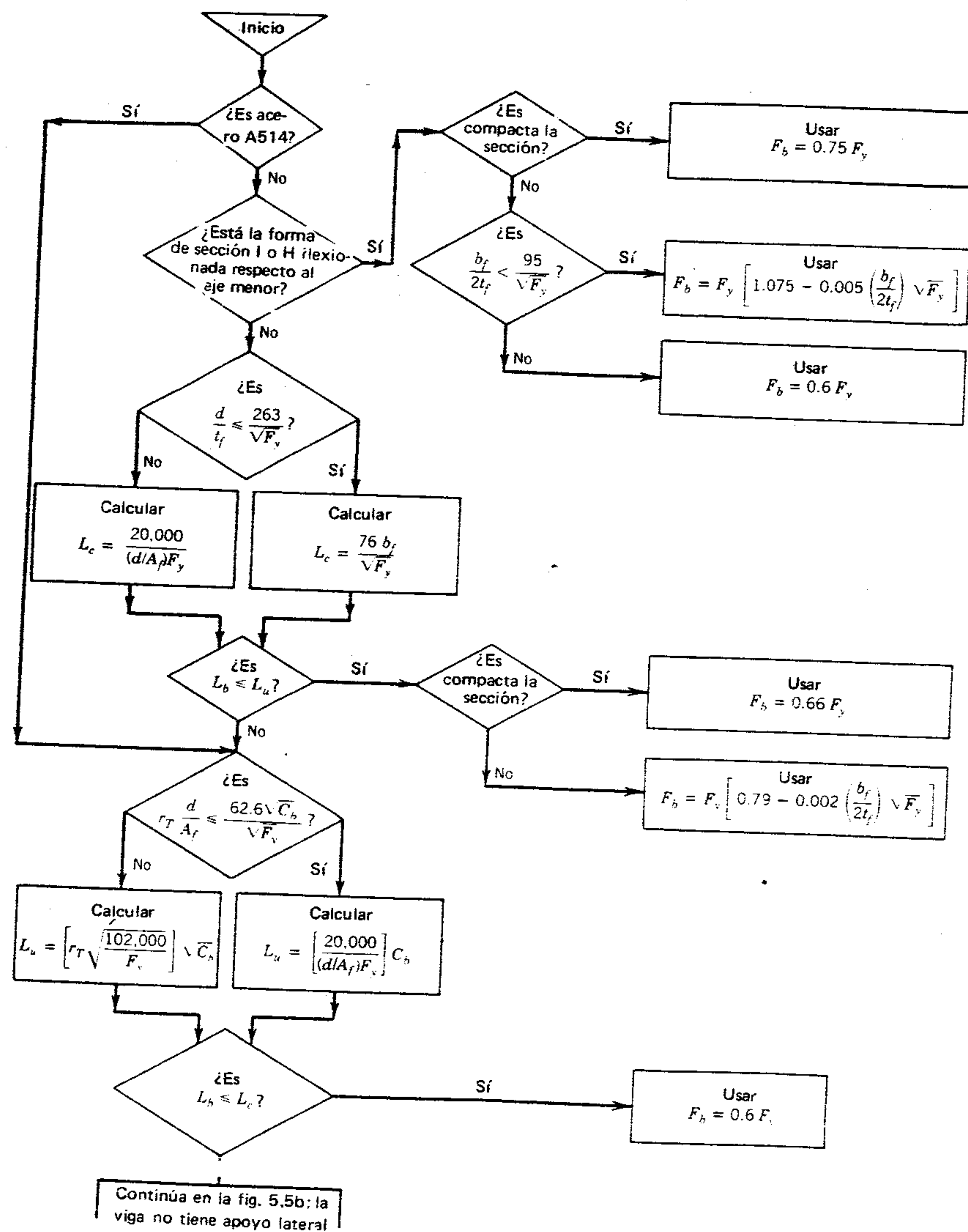


Figura 5.5a Diagrama de flujo para esfuerzo flexionante permisible  $F_b$ , excepto para vigas híbridas y de cajón.

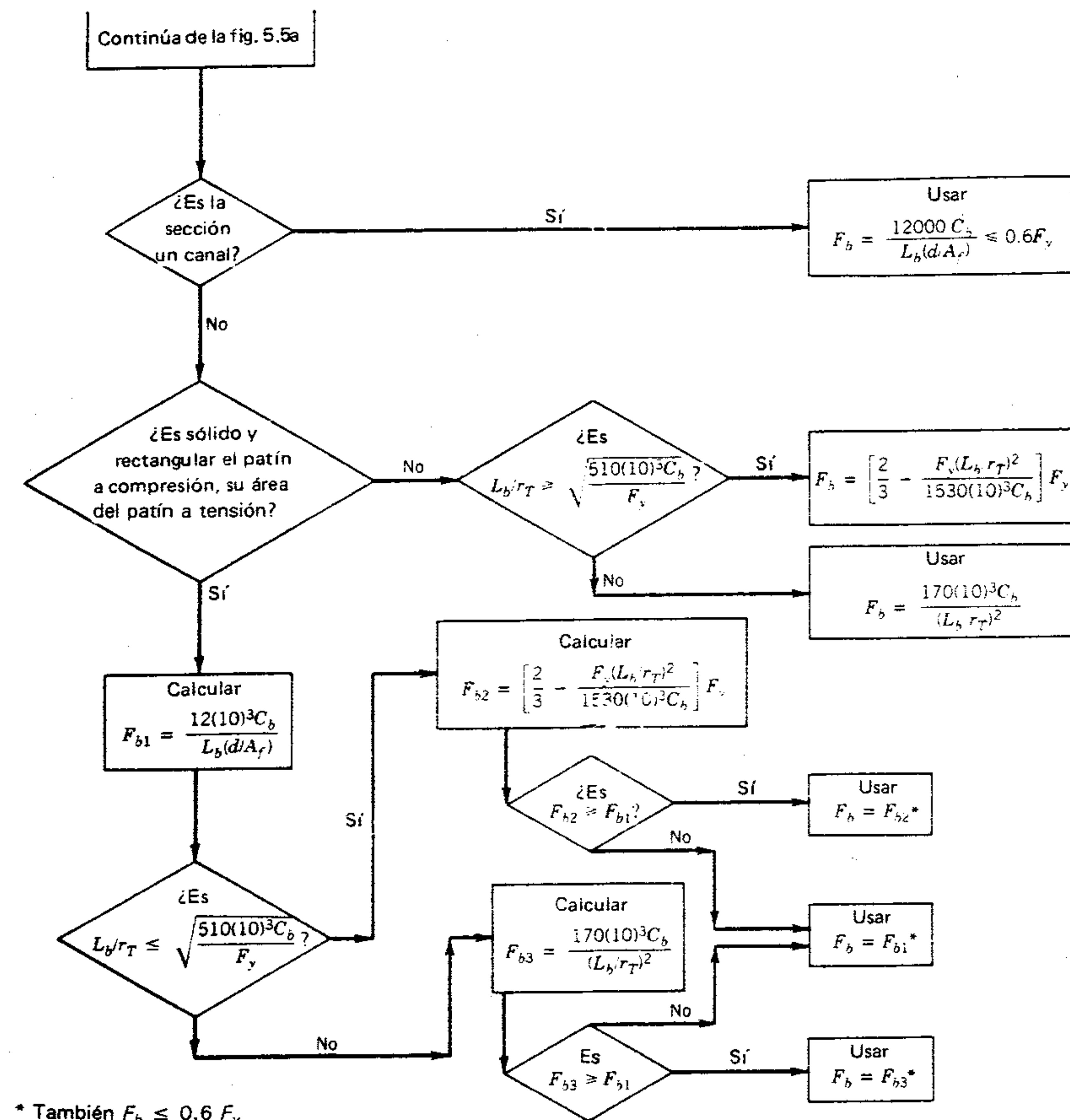


Figura 5.5b Diagrama de flujo para esfuerzo flexionante permisible  $F_b$  excepto para vigas híbridas y de cajón.

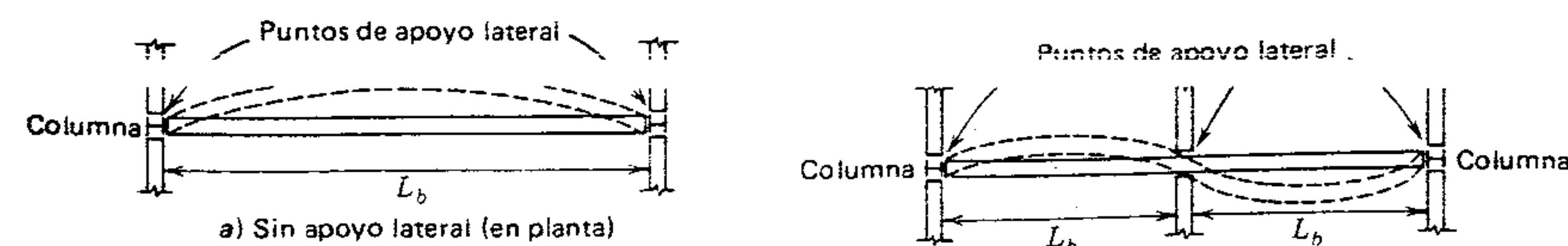


Figura 5.6 Longitud de pandeo con apoyo lateral ( $L_b$ ).



si están hechas de acero A36). Más adelante, en esta sección, se describirá detalladamente el concepto de compacidad.

Puesto que cada viga con patines tendrá un ancho, un peralte y un área de patín determinados para cada grado particular de acero, asimismo tendrá una longitud específica para los límites de sus puntos de soporte, para que se pueda clasificar como apoyada lateralmente. Existen dos fórmulas para calcular la longitud  $L_c$  de una viga dada. De acuerdo con la Especificación AISC, se deben cumplir ambas condiciones para usar el esfuerzo permisible más alto,  $0.66F_y$ . La primera fórmula, basada en el pandeo lateral, es

$$L_c = \frac{76b_f}{\sqrt{F_y}} \text{ y es determinante cuando } d/t_f \leq \frac{263}{\sqrt{F_y}}$$

La segunda fórmula basada en la torsión, es

$$L_c = \frac{20,000}{(d/A_f)F_y}$$

$$\text{y es determinante cuando } d/t_f > \frac{263}{\sqrt{F_y}}$$

Se pueden calcular ambos valores para  $L_c$  y luego usar el menor de los dos para compararlo con  $L_b$ ; o bien, primero se puede establecer la fórmula limitante mediante observación de sus proporciones ( $d/t_f$ ) y comparando este valor con  $263/\sqrt{F_y}$ . El término  $d/A_f$  en la fórmula de torsión es el peralte de la sección dividido por el área del patín a compresión.<sup>6</sup> Todos los otros términos en las fórmulas se identifican en la figura 5.8. Los valores determinantes de  $L_c$  de cada sección laminada aparecen en el Manual AISC junto con otros valores de diseño, tanto en la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo permisible", como en la tabla de "Constantes de Carga uniforme".

Cuando la longitud real de pandeo  $L$  es menor que  $L_c$ , no se puede usar  $0.66F_y$  para el esfuerzo flexionante permisible. Bajo estas condiciones, el esfuerzo desciende abruptamente a  $0.6F_y$  o menos.

<sup>6</sup> El valor de  $d/A_f$  de cada viga laminada se incluye junto con sus otras propiedades en el Manual del AISC.

Hay una longitud específica  $L_u$  para cada viga de patines relacionada con el esfuerzo permisible  $0.6F_y$ . Cuando la longitud real de pandeo  $L_b$  excede a la  $L_c$  de una viga, pero no excede a la  $L_u$  de la viga, se sigue clasificando como apoyada lateralmente de modo adecuado, pero el esfuerzo permisible es igual a  $0.6F_y$ . Cuando excede a  $L_u$ , la viga se considera no apoyada lateralmente.

La explicación completa de  $L_u$  consta de dos aspectos principales. Una importante propiedad de una forma para resistir el pandeo es el radio de giro. Su símbolo es  $r$  y se puede calcular mediante la fórmula  $r = \sqrt{I/A}$ . Esta propiedad se describe con mayores detalles en el siguiente capítulo vinculada con el pandeo de columnas. También se aborda en la siguiente sección, en que se estudian las vigas no apoyadas lateralmente. Lo que importa aquí son las dimensiones del patín a compresión en relación al eje y de la viga (figura 5.13), que incluyen un tercio del área de la parte a compresión del alma. Este radio específico de giro se representa por  $r_T$ , cuyo valor aparece en el Manual AISC para cada sección laminada, junto con sus otras dimensiones y propiedades. El uso de  $r_T$  en el cálculo de  $L_u$  se mostrará en fórmulas subsecuentes.

El otro aspecto que influye en la longitud de pandeo es el denominado multiplicador de gradiente de momento. Su símbolo es  $C_b$  y su valor fluctúa de 1 a 2.3. Sólo se puede aplicar si la viga está cargada en el plano de su alma, si se flexiona respecto a su eje principal y el patín a compresión rectangular tiene un área no menor que la del patín a tensión. Con frecuencia, el valor de  $C_b$  es igual a 1.0 y, por lo tanto, podría ser un supuesto conservador; es decir, cuando  $C_b = 1.0$ , el supuesto es que el esfuerzo flexionante a compresión permanece constante entre puntos soportados lateralmente o que su valor máximo está localizado en algún punto entre los soportes y no en los extremos. Si se sabe que existen condiciones menos críticas, habrá una menor tendencia al pandeo, y el diseñador puede desear aprovechar las ventajas de este hecho. El valor de  $C_b$  depende de la variación del momento flexionante a lo largo de la viga en relación con la localización de los puntos de soporte. Esta es otra razón por la que es recomendable la práctica de trazar el diagrama de momento flexionante.

La Especificación ASIC 1978 proporciona la siguiente fórmula para obtener  $C_b$

$$C_b = 1.75 + 1.05\left(\frac{M_1}{M_2}\right) + 0.3\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \leq 2.3$$

donde  $M_1$  es el menor momento flexionante y  $M_2$  el mayor en los extremos de la longitud no soportada, tomados en relación a los ejes fuertes del miembro; la relación de los momentos de extremo ( $M_1/M_2$ ) es positiva para la curvatura doble de flexión y negativa para una curvatura simple de flexión. Cuando el momento flexionante en cualquier punto dentro de la longitud no soportada es mayor que en ambos extremos de su longitud, el valor de  $C_b$  se toma como 1.

Para ampliar la explicación de  $C_b$ , véase la viga representada en la figura 5.7. Los puntos de soporte se localizan en las reacciones y en cada carga concentrada aplicada (denotada por el símbolo "x").

Para el voladizo  $C_b$  es:

$$C_b = 1.75 + 1.05\left(-\frac{0}{16}\right) + 0.3\left(-\frac{0}{16}\right)^2 = 1.75$$

$C_b$  entre la reacción derecha y la primera carga de 6 kips es

$$C_b = 1.75 + 1.05\left(+\frac{16}{37.3}\right) + 0.3\left(+\frac{16}{37.3}\right)^2 = 1.75 + 0.45 + 0.06 = 2.26$$

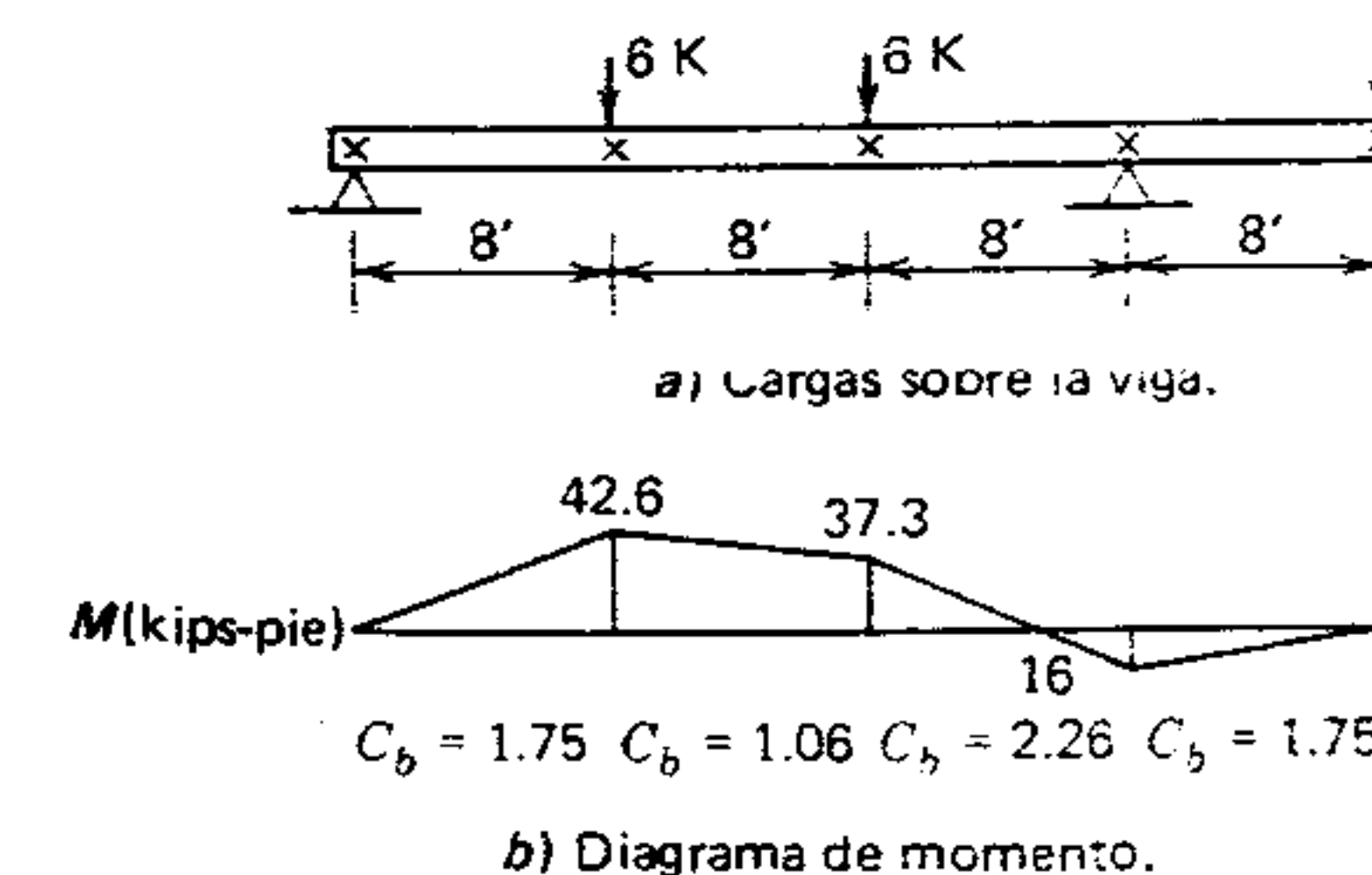


Figura 5.7 Ejemplo de gradiente de momento

$C_b$  entre las dos cargas concentradas es

$$C_b = 1.75 + 1.05\left(-\frac{37.3}{42.6}\right) + 0.3\left(-\frac{37.3}{42.6}\right)^2 = 1.75 - 0.92 + 0.23 = 1.06$$

Se usan dos fórmulas para establecer  $L_u$ , la longitud que no se puede exceder si  $0.6F_y$  se va a usar como el esfuerzo flexionante permisible. La fórmula basada en la torsión

$$L_u = \left[ \frac{20,000}{(d/A_f)F_y} \right] C_b$$

$$\text{y es determinante cuando } (r_T) \frac{d}{A_f} \leq \frac{62.62\sqrt{C_b}}{\sqrt{F_y}}$$

La fórmula basada en el pandeo,

$$L_u = \left[ r_T \sqrt{\frac{102,000}{F_y}} \right] \sqrt{C_b}$$

$$\text{y es determinante cuando } (r_T) \frac{d}{A_f} > \frac{62.62\sqrt{C_b}}{\sqrt{F_y}}$$

Se pueden calcular ambos valores de  $L_u$  y luego usar el mayor de los dos para compararlo con  $L_b$ , o bien, la fórmula determinante se puede establecer primero mediante la observación del producto de  $r_T$  y  $d/A_f$  y comparándolo con  $62.62\sqrt{C_b}/\sqrt{F_y}$ .

Cuando  $C_b = 1$ , la fórmula de torsión para  $L_u$  es la misma que para  $L_c$ . El valor determinante de  $L_u$  para cada sección laminada cuando  $C_b = 1$  aparece en el Manual AISC, junto con otros valores de diseño tanto en la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo permisible", como en la tabla de "Constantes de carga uniforme".

Aunque no se describe explícitamente en la Especificación AISC, debe observarse en las ecuaciones que el valor listado de  $L_u$  si ésta basada en la fórmula de torsión, se puede multiplicar por  $C_b$  y usar el producto resultante para compararlo con  $L_b$ . Sin embargo, cuando rige la fórmula del pandeo, el valor listado se debe multiplicar por  $\sqrt{C_b}$ . Expresado en forma de ecuación, una viga tiene apoyo lateral adecuado para un esfuerzo de  $0.6F_y$  si



$$L_b \leq L_u C_b, \text{ cuando rige la torsión,}$$

o

$$L_b \leq L_u \sqrt{C_b}, \text{ cuando rige el pandeo.}$$

En la octava edición del Manual AISC se lista un total de 226 formas (W, M y S) que se usan comúnmente como vigas. De éstas, sólo 12 tienen propiedades tales que el pandeo rige el valor de  $L_u$  listado en el manual. Sería útil identificar estas doce secciones, para futuros problemas de diseño cuando  $C_b$  no se toma como 1.

Para un ejemplo de apoyo lateral adecuado, considérese una viga W 10 X 33 de acero A 36. Tiene una relación de peralte-espesor de patín de  $9.73/0.435 = 22.37$ , que es menor que  $263/\sqrt{36} = 43.83$ , de modo que el pandeo rige la longitud  $L_c$ . En consecuencia,

$$L_c = \frac{76(7.96)}{\sqrt{36(12)}} = 8.4 \text{ pies}$$

Comprobando el producto de  $r_T$  y  $d/A_f$ ,  $2.14(2.81) = 6.01$ , el cual es menor que  $62.62/\sqrt{36} = 10.44$ . En consecuencia, la fórmula de torsión rige el valor de  $L_u$ . Tomando  $C_b = 1$ , se calcula  $L_u$ .

$$L_u = \frac{20,000}{2.81(12)36} = 16.5 \text{ pies}$$

Para la misma sección de viga, pero de acero A572, grado 50, se aplican las mismas fórmulas determinantes, pero la longitud permisible se debe reducir a  $L_c = 7.1$  pies y  $L_u = 11.8$  pies. La longitud se puede calcular como se muestra aquí, o se puede obtener directamente del Manual AISC si la viga tiene una sección laminada regular.

En el anterior ejemplo de acero A36, se considera que la viga tiene apoyo lateral adecuado. La longitud real no soportada  $L_b$  es igual o menor a 16.5 pies. Sin embargo, si el gradiente de momento  $C_b$  fuera igual a 1.25, la longitud no soportada se podría aumentar a  $1.25(16.5) = 20.6$  pies.

Una vez establecido que una viga tiene un adecuado soporte lateral, el esfuerzo flexionante per-

misible ( $F_b$ ) fluctuará entre  $0.6F_y$  y  $0.66F_y$ ,<sup>7</sup> dependiendo del valor exacto de  $L_c$  y el grado de compacidad de la sección en particular. Para explicar: para usar más efectivamente la cantidad de acero en una sección dada de viga, hay una tendencia a distribuir el metal (figura 5.8) con el fin de aumentar las anchuras de patines ( $b_f$ ) y el peralte de la viga ( $d$ ) y a disminuir el espesor de los patines ( $t_f$ ) y el espesor del alma ( $t_w$ ). Sin embargo, si se efectúa una excesiva distribución, la sección será poco resistente y difícilmente podrá aguantar esfuerzos flexionantes. Para controlar esta tendencia, la Especificación AISC contiene limitaciones de "relación anchura-espesor". Los límites superiores de la relación para secciones laminadas son

$$\frac{b_f/2}{t_f} \leq \frac{95}{\sqrt{F_y}}$$

$$\frac{h}{t_w} \leq \frac{14,000}{\sqrt{F_y(F_y + 16.5)}}$$

La mayoría de las secciones de vigas hacen algo más que cumplir simplemente con este requisito mínimo.

Se dijo ya que el esfuerzo flexionante permisible básico ( $F_b$ ) es  $0.6F_y$ . Este valor básico se debe usar solamente cuando la viga tiene apoyo lateral adecuado y se cumplen las limitaciones citadas anteriormente para relaciones entre anchura y espesor (lo cual sucede con todas las secciones laminadas que aparecen en el manual AISC).

Las vigas compactas se definen como aquellas secciones que satisfacen las más restrictivas relaciones de anchura-espesor: esta última supone que

$$\frac{b_f/2}{t_f} \leq \frac{65}{\sqrt{F_y}}$$

$$\frac{h}{t_w} \leq \frac{640}{\sqrt{F_y}}$$

<sup>7</sup> Las excepciones a esto son las vigas de acero A514, algunas vigas de cajón compuestas, y vigas compuestas de dos diferentes grados de acero (híbridas).

Cuando  $L_b \leq L_c$ ,  $L_b \leq L_u$ , y la viga no es compacta,

$$F_b = F_y \left[ 0.79 - 0.002 \frac{b_f}{2t_f} \sqrt{F_y} \right]$$

Cuando  $L_b > L_c$ ,<sup>8</sup> pero  $L_b \leq L_u$

$F_b = 0.6F_y$  (la compacidad no se considera)

Cuando  $L_b > L_c$  y  $L_u$ ,<sup>8</sup> la viga no posee apoyo lateral adecuado y

$$F_b < 0.6F_y$$

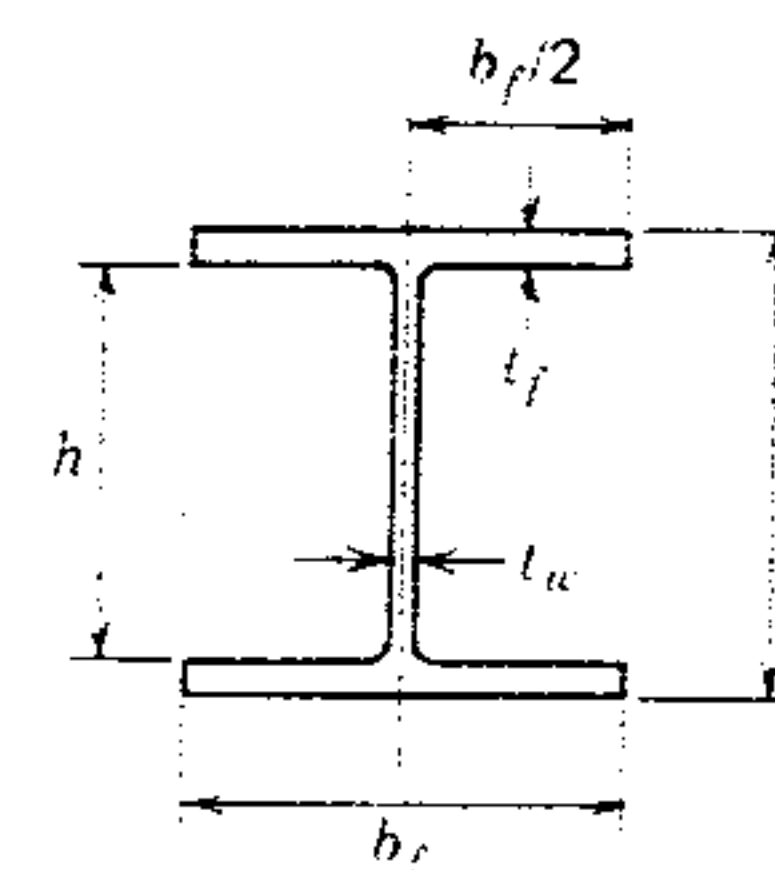


Figura 5.8 Proporciones de vigas.

hay un esfuerzo axial además de flexión, lo cual no sucede en todas las vigas que se estudian en este capítulo. En el capítulo 6 se tratan los esfuerzos flexionantes y axiales combinados.

En las secciones compactas que están arriostradas de modo que  $L_b \leq L_c$  se permite el mayor esfuerzo flexionante permisible, es decir,  $F_b = 0.66F_y$ . La mayoría de las secciones de vigas laminadas cumplen con el requisito de compacidad cuando el esfuerzo de fluencia es relativamente bajo. En la tabla "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC se listan valores de  $F'_y$  y  $F'''_y$ , para cada sección, que es el esfuerzo de fluencia teórico ante el cual la sección deja de ser compacta.  $F'_y$  pertenece al patín y  $F'''_y$  al alma.

Las vigas que están arriostradas de modo que  $L_b \leq L_c$ , pero que no son totalmente compactas, tienen valores de  $F_b$  que fluctúan entre  $0.6F_y$  y  $0.66F_y$  y se obtienen mediante la fórmula denominada de transición

$$F_b = F_y \left[ 0.79 - 0.002 \left( \frac{b_f}{2t_f} \right) \sqrt{F_y} \right]$$

Obsérvese en la fórmula anterior que cuando  $b_f/2t_f$  se convierte en  $95/\sqrt{F_y}$ , la cantidad dentro del paréntesis equivale a 0.6.

A continuación se resumen las fórmulas de esfuerzo flexionante permisible para vigas con apoyo lateral

Cuando  $L_b \leq L_c$ ,  $L_b \leq L_u$ , y la viga es compacta,

$$F_b = 0.66F_y$$

A continuación, los ejemplos 1, 2, 3 y 4 muestran el uso de las fórmulas anteriores. En el ejemplo 5 se usa un procedimiento de diseño de viga general para vigas con apoyo lateral.

### Ejemplo 1

Una viga W 14 X 34 de acero A36 tiene un claro total simple de 28 pies y está cargada como se ve en la figura 5.9 (la carga distribuida incluye un margen para el peso de la viga). La viga tiene apoyo lateral completo y no hay especificaciones para el peralte o limitación de deflexión. Determinar el valor máximo de las cargas concentradas ( $P$ ).

### Solución

1. Como hay apoyo lateral completo,  $L_b = 0$ .

Determinar si la sección es compacta.

El límite de la relación anchura-espesor para el patín es

$$\frac{65}{\sqrt{36}} = 10.8$$

<sup>8</sup> Si  $C_b$  no es igual a 1.0, estas fórmulas deben ser

$L_b > L_c$  pero  $L_b \leq C_b L_u$  } cuando la torsión es determinante  
 $L_b > L_c$  y  $C_b L_u$  }

$L_b > L_c$  pero  $L_b \leq \sqrt{C_b} L_u$  } cuando el pandeo es determinante  
 $L_b > L_c$  y  $\sqrt{C_b} L_u$  }



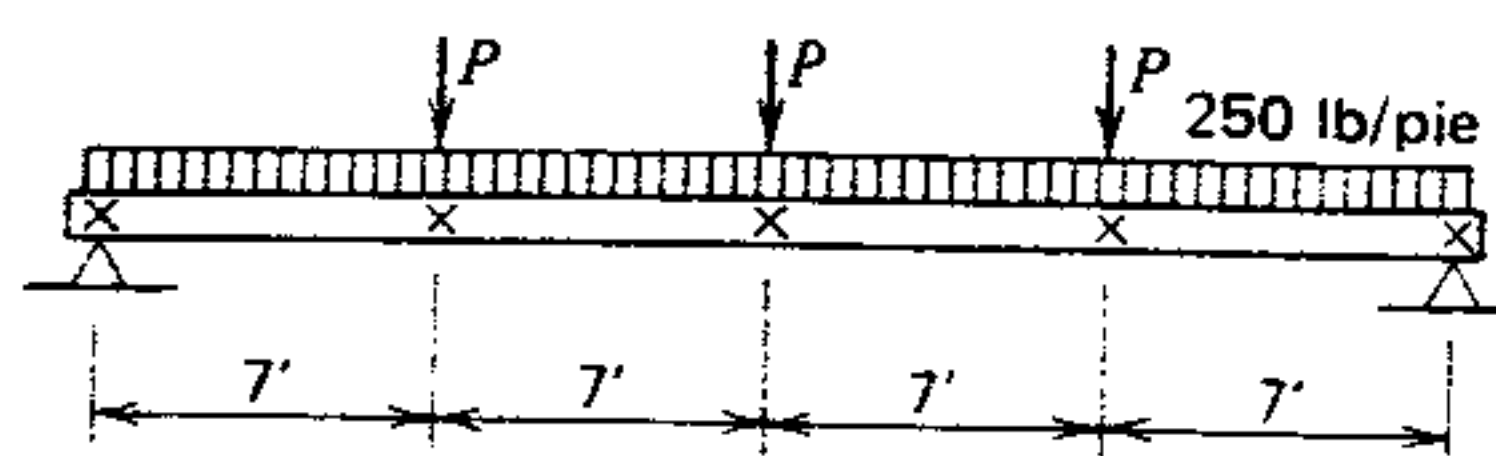


Figura 5.9 Ejemplos 1, 2 y 3.

Como no hay esfuerzo axial ( $f_a$ ) las dimensiones del alma no alcanzan una compacidad.

Del Manual AISC se obtienen los valores de  $b_f$  y  $t_f$  para la W 14 X 34.

$$\frac{b_f}{2t_f} = \frac{6.745}{2(0.455)} = 7.41 < 10.8 \text{ correcto}$$

La sección es compacta. (Esto se puede verificar checando en la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo permisible" o en la tabla "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC que  $F_y$  no tiene asignado ningún valor en la lista, lo cual significa que es mayor a 60 k/pulg<sup>2</sup> y la sección es compacta).

- Determinar el esfuerzo flexionante permisible.

Como  $L_b = 0$  y la sección es compacta,

$$F_b = 0.66(36) = 24 \text{ k/pulg}^2$$

- Calcular el máximo momento resistente.

Del Manual AISC,  $S = 48.6 \text{ pulg}^3$  para una W 14 X 34; por lo tanto,

$$M_R = SF_b = 48.6(24) = 1166 \text{ pulg-kips}$$

$$M_R = \frac{1166}{12} = 97.2 \text{ pies-kips}$$

- Calcular el momento máximo producido por la carga e igualarlo al momento resistente para determinar  $P$ . De la figura 2.34

$$\begin{aligned} M &= \frac{0.25(28)^2}{8} P(28) \\ &= 24.5 + 14P \\ 24.5 + 14P &= 97.2 \\ 14P &= 72.7 \\ P &= 5.2 \text{ k/pulg}^2 \end{aligned}$$

### Ejemplo 2

Determinar el valor máximo de las cargas ( $P$ ) de la viga usada en el ejemplo 1 si, en vez del apoyo lateral continuo, hay apoyo lateral en puntos situados en las cargas concentradas y en las reacciones. Usar  $C_b = 1$ .

### Solución

- Calcular  $L_c$  y  $L_u$  para la viga.

Del Manual AISC obtener los valores de  $d$ ,  $t_f$ ,  $b_f$ ,  $r_T$  y  $d/A_f$  para una W 14 X 34. Se tiene

$$\frac{d}{t_f} = \frac{13.98}{0.455} = 30.73 < \frac{263}{\sqrt{36}} = 43.83$$

Por lo tanto

$$L_c = \frac{76(6.745)}{\sqrt{36}} = 85.4 \text{ pulg o } 7.1 \text{ pies}$$

Asimismo, puesto que

$$(r_T) \frac{d}{A_f} = (1.76)(4.56) = 8.03 < \frac{62.62}{\sqrt{36}} = 10.44$$

$$L_u = \frac{20,000}{4.56(36)} = 122 \text{ pulg o } 10.2 \text{ pies}$$

Estos valores se pueden verificar en la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo permisible" de AISC.

- Determinar si la sección es compacta.

Paso 1) del ejemplo 1 (la sección es compacta).

- Determinar el esfuerzo flexionante permisible.

Como  $L_b = 7.0 < 7.1 < 10.2$  y la sección es compacta

$$F_b = 0.66(36) = 24 \text{ k/pulg}^2$$

- Calcular el momento resistente máximo y la carga permisible ( $P$ ). Igual que en los pasos 3) y 4) del ejemplo 1.

$$P = 5.2 \text{ kips}$$

### Ejemplo 3

Determinar el valor máximo de las cargas ( $P$ ) del ejemplo 1 si la viga es W 16 X 40, hecha de acero A572, grado 50, y tiene apoyos laterales en puntos en los extremos y cargas concentradas.

### Solución

- Determinar si la viga tiene apoyo lateral adecuado. Calcular  $L_c$  y  $L_u$  de la W 16 X 40

$$\frac{d}{t_f} = \frac{16.01}{0.505} = 31.7 < \frac{263}{\sqrt{50}} = 37.19$$

$$L_c = \frac{(76)(6.995)}{\sqrt{50}} = 75.2 \text{ pulg o } 6.3 \text{ pies}$$

$$(r_T) \frac{d}{A_f} = (1.82)(4.53) = 8.24 < \frac{62.62}{\sqrt{50}} = 8.86$$

$$L_u = \frac{20,000}{(4.53)(50)} = 88.3 \text{ pulg o } 7.4 \text{ pies}$$

Estos valores se pueden verificar en el Manual AISC.

Como  $L_b = 7.0 \text{ pies} > 6.3 \text{ pies}$ , no hay necesidad de determinar si la sección es compacta.

Como  $L_b = 7.0 \text{ pies} < 7.4 \text{ pies}$ , no hay necesidad de calcular  $C_b$ .

- Determinar el esfuerzo flexionante permisible.

Como  $L_c < L_b < L_u$ ,  $F_b = 0.6F_y$

$$F_b = 0.6(50) = 30 \text{ k/pulg}^2$$

- Calcular el momento resistente máximo y la máxima carga permisible ( $P$ )

$$M_R = SF_b = 64.7(30) = 1941 \text{ pulg-kips}$$

$$M_R = \frac{1941}{12} = 162 \text{ pies-kips}$$

$$M_{\max} = \frac{0.25(28)^2}{8} + \frac{P(28)}{2} = 24.5 + 14P$$

$$24.5 + 14P = 162$$

$$P = 9.82 \text{ kips}$$

### Ejemplo 4

Una viga W 10 X 33 de acero A572, grado 60 está simplemente apoyada sobre un claro de 22 pies. Está sometida a una carga uniformemente distribuida y tiene apoyo lateral completo. No hay especificaciones para el peralte o limitaciones de deflexión. Determinar el valor de la carga unitaria que puede soportar, incluyendo su propio peso.

### Solución

- Determinar si la sección es compacta. El límite de relación anchura-espesor para el patín es

$$\frac{65}{\sqrt{60}} = 8.4$$

Determinar valores de  $b_f$  y  $t_f$  del Manual AISC

$$\frac{b_f}{2t_f} = \frac{7.960}{2(0.435)} = 9.15$$

Como  $9.15 > 8.4$ , la sección no es compacta.

- Determinar si la fórmula de transición se puede usar.

$$\frac{95}{\sqrt{60}} = 12.3$$

correcto

Puesto que  $9.15 < 12.3$ . Está bien.

- Calcular el esfuerzo flexionante permisible y el momento resistente máximo

$$F_b = 60[0.79 - 0.002(9.15)\sqrt{60}] = 38.8$$

$$M_R = SF_b = 35(38.8) = 1358 \text{ pulg. kips}$$

$$M_R = \frac{1358}{12} = 113 \text{ pies-kips}$$



4. Encontrar el momento máximo desarrollado por las cargas y calcular la carga máxima permisible  $W$ .

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} = \frac{w(22)^2}{8} = 60.5w$$

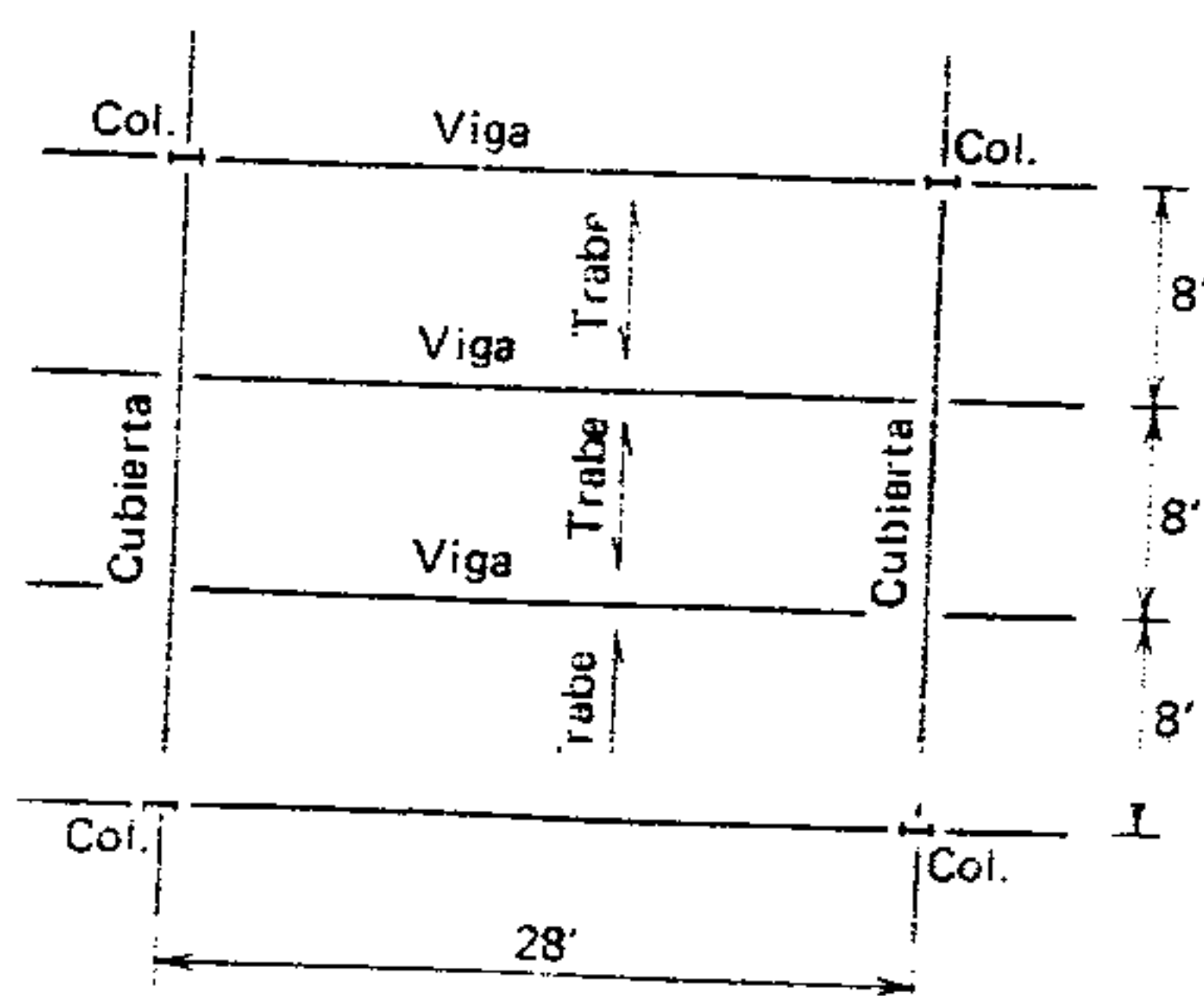
$$60.5w = 113$$

$$w = 1.87 \text{ kips por pies}$$

### Ejemplo 5/Diseño de un sistema de techo

En la figura 5.10 se muestra una planta que indica la localización de vigas y trabes de un vano interior típico de 24 por 28 pies. Las vigas, trabes y columnas estarán unidas entre sí con conexiones flexibles (véase la sección 7.3, Construcción tipo 2); por lo tanto, se generan solamente reacciones simples.

La cubierta consistirá en una placa metálica de calibre 20, cubierta con concreto reforzado de 2 pulgadas; es decir, la cubierta en un solo sentido transferirá toda su carga directamente sobre las vigas. El patín superior de las vigas estará 1 pulgada sobre el patín superior de las trabes; por lo tanto, la cubierta no estará en contacto con las trabes. La cubierta se soldará por puntos (con roldanas, de soldadura) a la viga y dará a ésta apoyo lateral completo.



Ejemplo 5.10 Planta típica con vanos interiores del ejemplo 5.

Se colocará una pulgada de aislamiento rígido y un techo construido de 5 hojas laminadas sobre la cubierta, y se suspenderá de ésta un falso plafón de tela metálica y aplanado de yeso. Usando una carga viva y ambiental combinada de 30 lb por pie cuadrado, diseñar la viga y la trabe usando acero A36. Revisar el sistema para que no se presente un encharcamiento.

### Solución

1. Dividir en partidas las cargas y totalizarlas.<sup>9</sup>

Techo de 5 hojas laminadas interconstruido	6.0 lb/pie <sup>2</sup>
1 pulgada de aislamiento rígido	1.5
2 pulgadas de cubierta de concreto reforzado	25.0
Cubierta metálica de calibre 20	2.5
Falso plafón colgante de tela metálica y aplanado de yeso	10.0
Carga muerta total	45.0 lb/pie <sup>2</sup>

2. Trazar el diagrama de cargas de la viga y calcular cargas, momento máximo y fuerza cortante (figura 5.11)

Carga viva y ambiental	30(8) = 240 lb por pie
Carga muerta	45(8) = 360
Peso supuesto de viga	= 30
<b>Total</b>	<b>= 630 lb por pie</b>

De la figura 2.34

$$M_{\max} = \frac{0.63(28)^2}{8} = 61.7 \text{ pies-kips}$$

$$V_{\max} = R = \frac{0.63(28)}{2} = 8.82 \text{ kips}$$

3. Calcular el peralte y el esfuerzo flexionante admisible de la viga usando una guía de claro-

<sup>9</sup> Consúltase el reglamento de construcción o la especificación del fabricante.

peralte de  $\frac{1}{4}$ . (La comprobación de la deflexión real se hará en el paso 4).

$$d_{\min} = \frac{28(12)}{24} = 14 \text{ pulg}$$

Como el patín a compresión (superior) de la viga tiene apoyo lateral completo, y probablemente la viga seleccionada sea compacta, se puede suponer que el esfuerzo es

$$F_b = 0.66(36) = 24 \text{ k/pulg}^2$$

4. Determinar el momento de inercia requerido. Del paso 2, la carga viva y ambiental combinada es  $w = 240$  lb por pie. La máxima deflexión por carga viva para el falso plafón de yeso es

$$\Delta_{\max} = \frac{28(12)}{360} = 0.93 \text{ pulg.}$$

De la figura 4.15

$$I_{\text{req.}} = \left( \frac{5}{384} \right) \frac{0.24(28)^4(12)^3}{29,000(0.93)} = 123 \text{ pulg}^4$$

5. Calcular el módulo de sección requerido y seleccionar una sección de prueba.

$$S_{\text{req.}} = \frac{61.7(12)}{24} = 30.9 \text{ pulg}^3$$

En "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC y en el grupo de vigas con peralte de 14 pulgadas, seleccionar la sección de menor peso con una  $S \geq 30.9 \text{ pulg}^3$  y un  $I \geq 123 \text{ pulg}^4$ . Seleccionar una W 14 X 26.

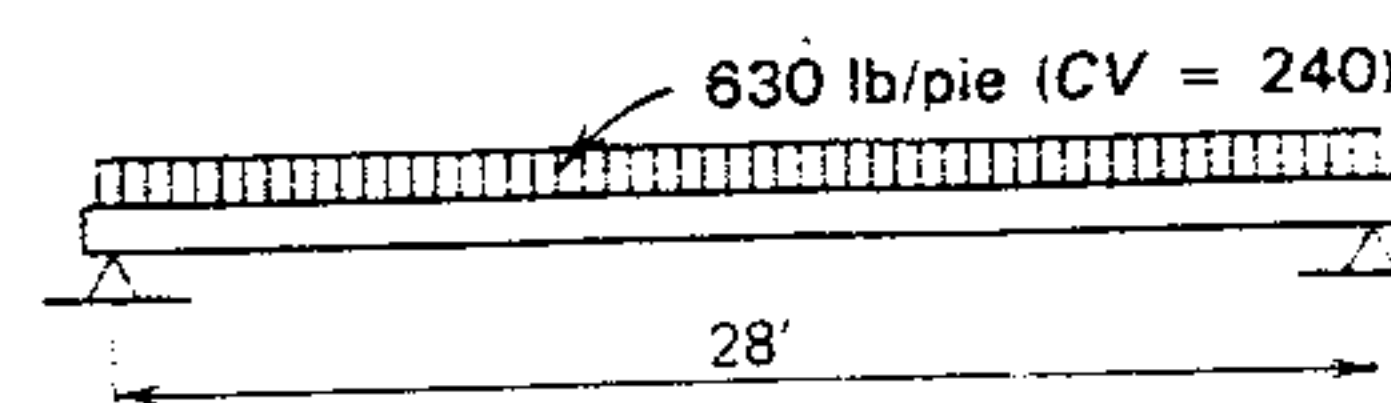


Figura 5.11 Viga para el ejemplo 5.

6. Verificar los supuestos y modificar la selección si es necesario. Revisar para ver si la W 14 X 26 es compacta.

Relación máxima anchura-espesor de patín

$$\frac{65}{\sqrt{36}} = 10.8$$

Relación real

$$\frac{5.025}{2(0.420)} = 6.0 \text{ correcto}$$

La sección es compacta y  $F_b = 24 \text{ k/pulg}^2$  (comprobado); el peso supuesto de la viga (30 lb/pie) es satisfactorio. No es necesario revisar.

7. Revisar esfuerzo cortante

$$f_v = \frac{V}{A_{\text{alma}}} = \frac{8.82}{13.91(0.255)} = 2.49 \text{ k/pulg}^2$$

como

$$2.49 < 14.5 \text{ correcto}$$

8. Calcular y trazar el diagrama de carga de la trabe y determinar el momento y el cortante máximos.

La trabe soporta un área de  $28(24) = 672$  pies cuadrados. La mayoría de los reglamentos permite una reducción de carga viva para pisos. En algunos casos, se permite una reducción similar para techos, pero esto depende en gran medida de la localización geográfica y la fuente de la carga viva del techo. En este ejemplo, no se hará reducción.

$$\begin{aligned} \text{carga viva concentrada en la trabe} &= 0.24(28) = 6.7 \text{ kips} \\ (\text{las vigas se conectan por dos lados}) \\ \text{carga muerta concentrada en la trabe} &= 0.39(28) = 10.9 \end{aligned}$$

$$\text{carga total concentrada} = 17.6 \text{ kips}$$

Suponer un peso para la trabe de 45 lb por pie.

Ver la carga sobre la trabe en la figura 5.12. De la figura 2.34



$$M_{\max} = \frac{17.6(24)}{3} + \frac{0.045(24)^2}{8}$$

$$= 141 + 3 = 144 \text{ pie kips}$$

$$V_{\max} = 17.6 + 0.045\left(\frac{24}{2}\right) = 18.1 \text{ kips}$$

9. Estimar el peralte de la trabe y el esfuerzo flexionante permisible. Usar una relación claro-peralte de  $\frac{1}{24}$ .

$$\text{peralte mínimo} = \frac{24(12)}{24} = 12 \text{ pulg.}$$

Las vigas proporcionan apoyo lateral concentrado a intervalos de 8 pies, por lo tanto,  $L_c = 8$  pies. Si la trabe seleccionada tiene una  $L_c \geq 8$  pies y es compacta,  $F_b = 0.66F_y$ . Si la trabe seleccionada tiene una  $L_c > 8$  pies  $< L_u$ ,  $F_b = 0.6F_y$ . Suponer que  $F_b = 0.66(36) = 24 \text{ k/pulg.}^2$ .

10. Determinar el momento de inercia requerido. La deflexión total por carga viva máxima y carga ambiental es  $24(12)/360 = 0.8 \text{ pulg.}$  De la figura 4.15

$$I = \left(\frac{23}{648}\right) \frac{6.7(24)^3(12)^3}{29,000(0.8)} = 245 \text{ pulg}^4$$

11. Calcular el módulo de sección requerido y seleccionar una sección de prueba.

$$S_{\text{req.}} = \frac{144(12)}{24} = 72 \text{ pulg}^3$$

En la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo permisible" y la "Tabla de selec-

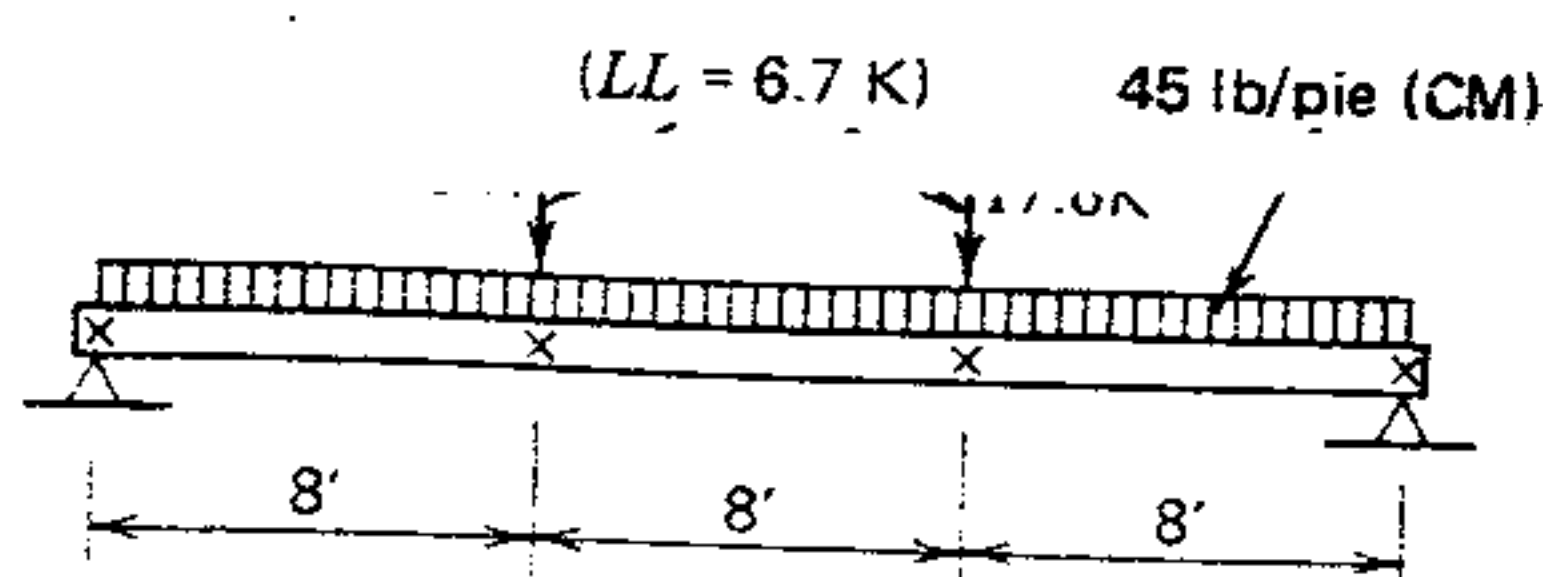


Figura 5.12 Trabe para el ejemplo 5.

ción de momento de inercia" del Manual AISC, seleccionar una sección de prueba, la W 21 X 44 con una  $S = 81.6 \text{ pulg}^3$  e  $I = 843 \text{ pulg}^4$ .

12. Verificar los supuestos y modificar la selección si es necesario. En la "Tabla de selección de esfuerzo permisible" se observa que para acero A36, la W 21 X 44 tiene valores de  $L_c$  y  $L_u$  (6.6 pies y 7 pies, respectivamente) menores que  $L_b = 8$  pies. Asimismo, nótese que  $C_b = 1.0$  porque el tramo central de 8 pies tiene un momento máximo entre puntos arriostrados. Por lo tanto, la primera sección de prueba no tiene apoyo lateral adecuado y  $F_b < 0.6F_y$ , lo cual no verifica los supuestos hechos en el paso 9. (Aquí se debe remarcar que aún se puede encontrar satisfactoria esta sección si se examinara como una viga sin apoyo lateral adecuado, y de hecho, es satisfactoria. Sin embargo, este examen se efectuará en la siguiente sección; por lo tanto, se proseguirá con la solución usando los criterios establecidos para este punto). En seguida se selecciona una viga W 18 X 46 para analizarla (2 lb más de peso, pero 2.6 pulgadas menos de peralte).

En el Manual AISC para la viga W 18 X 46,  $I = 712 \text{ pulg}^4$ ,  $S = 78.8 \text{ pulg}^3$ ,  $L_c = 6.4$  pies y  $L_u = 9.4$  pies.

Como  $L_b = 8$  pies  $> 6.4$ , pero  $< 9.4$  pies,  $F_b$  no es igual a  $0.66F_y$  (supuesto)

pero

$$F_b = 0.6F_y$$

Por lo tanto,  $F_b = 0.6(36) = 22 \text{ k/pulg}^2$  y

$$f_b = \frac{144(12)}{78.8} = 21.9 \text{ k/pulg}^2$$

Como  $21.9 < 22$ , el esfuerzo flexionante es aceptable.

13. Revisar cortante.

$$f_v = \frac{18.1}{18.06(0.360)} = 2.78 \text{ k/pulg}^2 \text{ correcto}$$

14. Revisar el sistema de techo para encharcamiento (Especificación AISC).

$$C_p = \frac{32L_s L_p^4}{10^7 I_p} = \frac{32(28)(24)^4}{10^7(712)} = 0.0418$$

$$C_s = \frac{32SL_s^4}{10^7 I_s} = \frac{32(8)(28)^4}{10^7(245)} = 0.0642$$

$$0.0418 + 0.9(0.0642) = 0.106 < 0.25 \text{ correcto}$$

El  $I_d$  no se tiene que revisar porque la cubierta estructural es de concreto reforzado. El sistema evita el encharcamiento.

## 5.7 VIGAS: SIN APOYO LATERAL

Una viga sin apoyo lateral es la que tiene apoyo lateral en su patín a compresión en puntos separados a una mayor distancia ( $L_b$ ) que el valor único  $L_u$  de esa viga. En el cálculo del valor de  $L_u$ , así como el valor de  $F_b$  que lo acompaña, se puede suponer conservadoramente un valor de 1.0 para el término  $C_b$ , o bien, hacer una evaluación más exacta como la que se definió y estudió en la sección anterior. Cuando  $L_b > C_b L_u$  (o  $\sqrt{C_b} L_u$  cuando rige el pandeo), el valor del esfuerzo flexionante permisible  $F_b$  siempre será menor que  $0.6F_y$ , y como esto sucede así, es irrelevante la cuestión de la compacidad. El procedimiento usado para determinar el valor de  $F_b$  para vigas sin apoyo lateral es diferente del que se usa para vigas con apoyo lateral adecuado.

La Especificación AISC de 1978 proporciona dos fórmulas separadas y distintas para calcular  $F_b$  con base en el pandeo lateral del patín a compresión. La susceptibilidad al pandeo se expresa como la relación entre la longitud de pandeo y el "radio de giro efectivo", o sea  $L_b/r_T$ .<sup>10</sup>

El radio de giro ( $r$ ) se mide en pulgadas y se puede calcular para cualquier sección de la fórmula  $r = \sqrt{I/A}$ , donde  $r$  siempre está referido al mismo eje que  $I$ . AISC define la sección efectiva

<sup>10</sup> En el capítulo 6, Columnas y puntales, se definen más ampliamente el pandeo y el radio de giro.

para  $r_T$  como el patín a compresión más un tercio del área del alma a compresión, con  $I$  y  $r_T$  referidos al eje  $y-y$  (figura 5.13). Por conveniencia, los valores de  $r_T$  para todas las secciones laminadas se listan junto con otras características en las tablas de "Dimensiones y características" del Manual AISC.

El primer paso en la determinación del valor de  $F_b$  consiste en calcular la relación  $L_b/r_T$ , asegurándose de que  $L_b$  se mida en pulgadas si  $r_T$  se toma del Manual AISC (donde se lista en pulgadas). Si la relación es pequeña, es decir, menor que

$$\sqrt{\frac{102(10)^3 C_b}{F_y}}$$

se puede pasar por alto la susceptibilidad al pandeo, y la viga se clasifica como con apoyo lateral adecuado y, en consecuencia,  $F_b = 0.6F_y$ . Si  $L_b/r_T$  es mayor que esta relación, el pandeo se podría tornar crítico y se debe calcular otro límite para  $L_b/r_T$ . La Especificación AISC indica que el segundo límite es

$$\sqrt{\frac{510(10)^3 C_b}{F_y}}$$

Una vez establecido que  $L_b/r_T$  es igual o mayor que el radical más pequeño y también igual o menor que el radical más grande, una fórmula válida para calcular  $F_b$  es

$$F_{b2} = \left[ \frac{2}{3} - \frac{F_y(L_b/r_T)^2}{1530(10)^3 C_b} \right] F_y$$

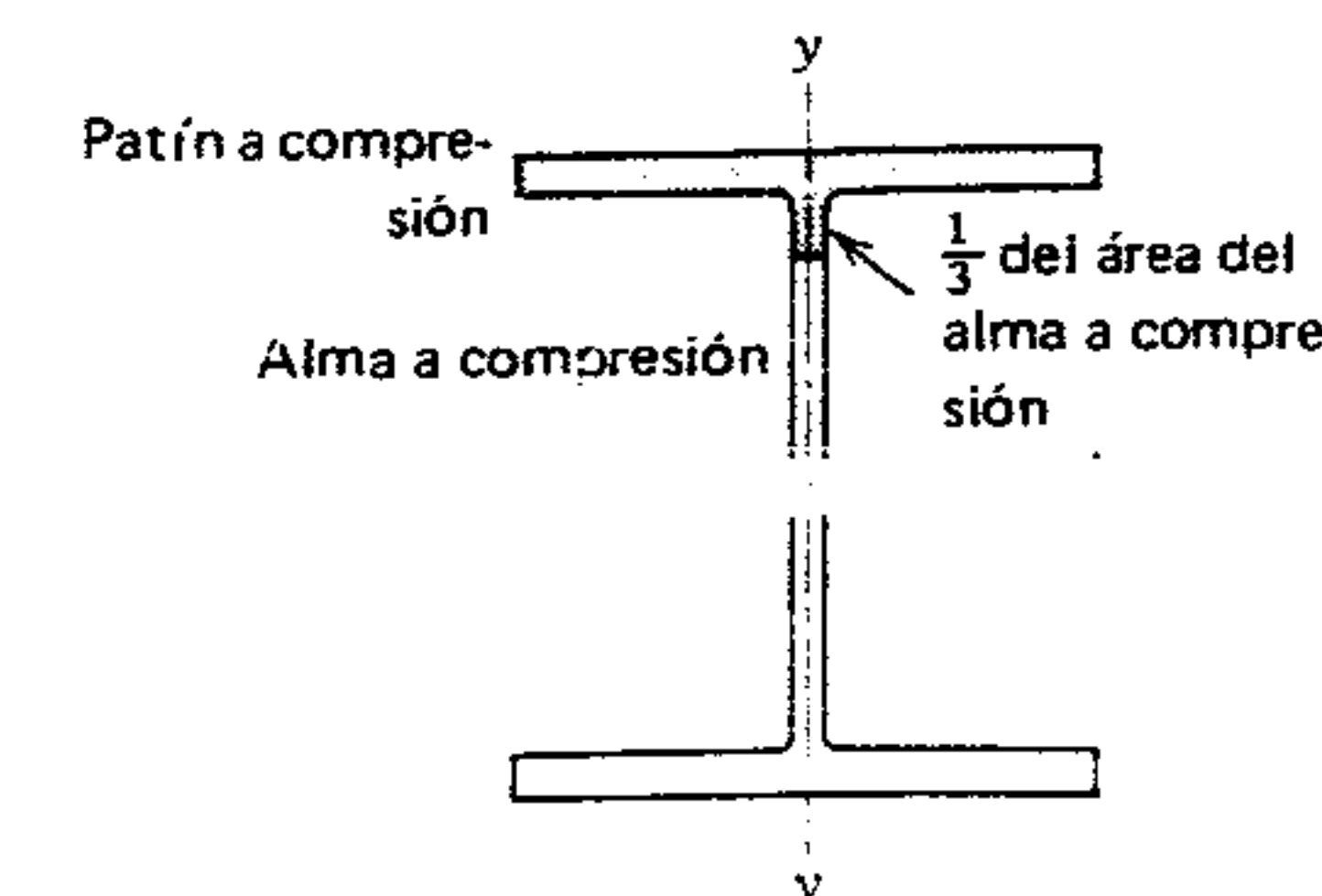


Figura 5.13 Área para calcular



Si  $L_b/r_T$  es mayor que el radical más grande, una fórmula válida para calcular  $F_b$  es

$$F_{b3} = \frac{170(10)^3 C_b}{(L_b/r_T)^2}$$

Las fórmulas para  $F_{b2}$  y  $F_{b3}$  se basan en la rigidez a la flexión lateral del patín a compresión y una pequeña parte del alma y no toman en cuenta la resistencia al pandeo torsional elástico. Cuando  $F_{b2}$  y/o  $F_{b3}$  se calculan como se mostró antes, los valores pueden ser más o menos conservadores; por lo tanto la Especificación AISC permite una afinación mayor si el patín a compresión es sólido, tiene una sección transversal aproximadamente rectangular y su área no es menor que la del patín a tensión. Bajo estas circunstancias, la Especificación AISC proporciona una fórmula de torsión simplificada para determinar  $F_b$ ; es decir,

$$F_{b1} = \frac{12(10)^3 C_b}{L_b(d/A_f)}$$

Esta es una fórmula conocida; se estudió antes como una condición limitante para apoyo lateral adecuado.

Resumiendo, para vigas sin apoyo lateral:

Si  $F_{b1}$  no es una consideración válida, entonces el esfuerzo flexionante admisible será  $F_{b2}$  o  $F_{b3}$ , dependiendo de qué fórmula indica  $L_b/r_T$  que se debe usar.

Si  $F_{b1}$  es una consideración válida, entonces se compara con  $F_{b2}$  o  $F_{b3}$  (sólo una de las dos es válida), y se toma el valor más grande como el esfuerzo flexionante permisible.

Cuando se determina el esfuerzo flexionante permisible ( $F_b$ ) de una sección dada para una viga sin apoyo lateral, el procedimiento es directo y no requiere supuestos (Ejemplos 1 y 2 siguientes). El diagrama de flujo (figuras 5.5a y b) se puede usar para localizar el esfuerzo flexionante permisible. Sin embargo, cuando se diseñan vigas que se sabe que no tienen apoyo lateral, el procedimiento es indirecto y puede requerir muchos supuestos.

para lo cual se necesita elegir varias secciones de prueba que fallan al compararse con los supuestos y, por tanto, se tienen que rechazar por insatisfactorios. Esto es particularmente cierto si no se dispone de elementos auxiliares para el diseño, como los diagramas o tablas que proporciona el Manual AISC. Si el diseñador desea seleccionar la sección más ligera, así como una que sea estructuralmente adecuada, tendrá que hacer muchas más selecciones de prueba.

### Ejemplo 1

Una viga W 14 X 34 de acero A36 tiene un claro simple de 26 pies, sin voladizos y sin apoyo lateral excepto en las reacciones. Calcular la mayor carga uniforme que podría soportar, incluyendo su propio peso.

### Solución

1. Determinar los límites inferior y superior de la relación  $L_b/r_T$  permisible para indicar qué fórmula es válida para  $F_b$ .

$$\sqrt{\frac{102(10)^3 C_b}{F_y}} = \sqrt{\frac{102(10)^3 1.0}{36}} = 53.2$$

$$\sqrt{\frac{510(10)^3 C_b}{F_y}} = \sqrt{\frac{510(10)^3 1.0}{36}} = 119.0$$

- Nótese que en este ejemplo,  $C_b = 1.0$ , y que los valores calculados antes se pudieron haber extraído directamente del Manual AISC (Tabla 7, Apéndice A).
2. Calcular la  $L_b/r_T$  real para la viga W 14 X 34. En las tablas de "Dimensiones y Propiedades" del Manual AISC se da  $r_T = 1.76$  in.

$$\frac{L_b}{r_T} = \frac{26(12)}{1.76} = 177$$

Como esta relación es mayor que el límite superior para  $F_{b2}$  ( $177 > 119$ ), una ecuación correcta es

$$F_{b3} = \frac{170,000}{(L_b/r_T)^2}$$

3. Determinar el esfuerzo flexionante permisible.

$$F_{b3} = \frac{170,000}{(177)^2} = 5.43 \text{ k/pulg}^2$$

Asimismo, como la viga es una sección laminada, también es válida la fórmula de torsión.

$$F_{b1} = \frac{12,000}{26(12)4.56} = 8.43 \text{ k/pulg}^2$$

Como  $8.43 > 5.43$ , el esfuerzo flexionante máximo permitido es de 8.43 k/pulg<sup>2</sup>.

4. Calcular el momento resistente máximo y la carga uniforme permisible.

$$M_R = F_b S = \frac{8.43(48.6)}{12} = 34.1 \text{ kips-pie}$$

y, de la figura 2.34 ,

$$w = \frac{8(34.1)}{(26)^2} = 0.40 \text{ kips por pie}$$

### Ejemplo 2

Una viga W21 X 50 de acero A588 tiene un claro simple de 26 pies, sin voladizos y con apoyo lateral concentrado en las reacciones y en el centro del claro (figura 5.14). El propio peso de la viga no se contempla. Calcular la carga concentrada máxima que se podría colocar en el centro del claro si

- a) Se supone que  $C_b$  es 1.0.
- b) Se calcula  $C_b$ .

### Solución (a)

1. Como se usa acero A588 y no todas las secciones se fabrican con este acero, verificar el

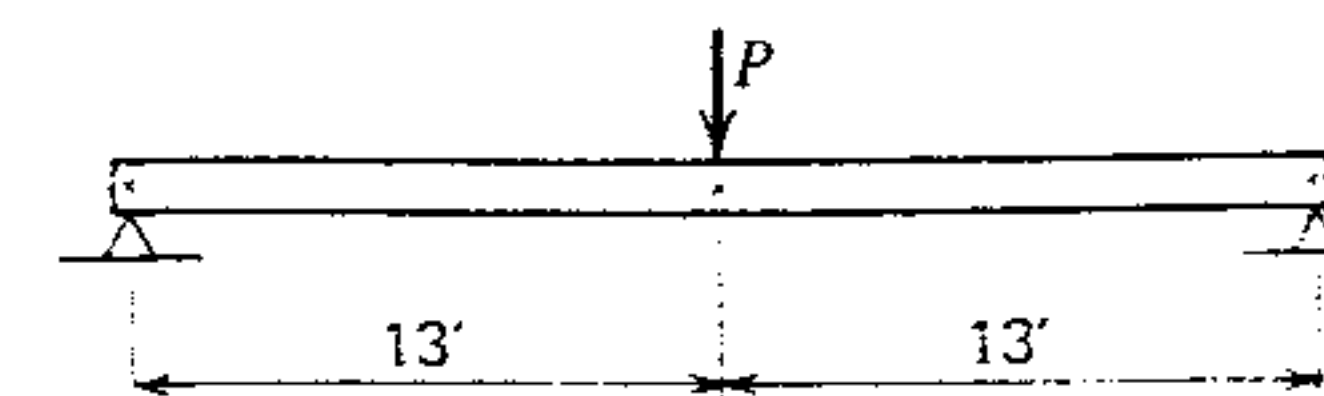


Figura 5.14 Ejemplo 2.

uso de una viga W 21 X 50 y su esfuerzo de fluencia.

Véanse las tablas 1 y 2 del Manual AISC.

La viga W 21 X 50 se incluye en el grupo 1, y el grupo 1 en acero A588 tiene un esfuerzo de fluencia de 50 k/pulg<sup>2</sup>.

2. Determinar los límites inferior y superior de la relación  $L_b/r_T$  permisible para calcular qué fórmula es válida para  $F_b$ .

$$\sqrt{\frac{102,000}{50}} = 45.2$$

$$\sqrt{\frac{510,000}{50}} = 101.0$$

$$\frac{L_b}{r_T} = \frac{13(12)}{1.6} = 97.5$$

Como  $45.2 < 97.5 < 101$

Usar

$$F_{b2} = \left[ \frac{2}{3} - \frac{F_y(L_b/r_T)^2}{1530(10)^3 C_b} \right] F_y$$

3. Calcular el esfuerzo flexionante permisible.

$$F_{b2} = \left[ \frac{2}{3} - \frac{50(97.5)^2}{1,530,000(1)} \right] 50$$

$$= 17.8 \text{ k/pulg}^2$$

$$F_{b1} = \frac{12,000}{13(12)5.96} = 12.9 \text{ k/pulg}^2$$

El esfuerzo flexionante permisible es 17.8 k/pulg<sup>2</sup>.

4. Determinar el momento resistente máximo y calcular la carga en el centro del claro (P).



$$M_R = F_b S = 17.8 \left( \frac{94.5}{12} \right) = 140 \text{ pie kips}$$

De la figura 2.34,

$$P = \frac{4(140)}{26} = 21.5 \text{ kips}$$

**Solución (b)**

1. Del paso 1 de la solución (a),  $F_y = 50 \text{ k/pulg}^2$ .
2. Calcular  $C_b$ . De la Especificación de AISC,

$$C_b = 1.75 + 1.05 \left( \frac{0}{M_2} \right) + 0.3 \left( \frac{0}{M_2} \right)^2 = 1.75$$

3. Determinar si la viga tiene apoyo lateral adecuado. En el Manual AISC, una viga W 21 X 50 tiene una  $L_u = 6.0$  pies.  
Revisar si rige la torsión o el pandeo  $F_b$ .

$$(r_T) \frac{d}{A_f} = 1.6(5.96) = 9.54 > \frac{62.62}{\sqrt{50}} = 8.86$$

Por lo tanto, rige la torsión y  $\sqrt{C_b} L_u = \sqrt{1.75}(6.0) = 7.94$  pies. Como  $7.94 < 13$  pies, la viga no tiene apoyo lateral adecuado y  $F_b < 0.6F_y$ .

4. Determinar límites inferior y superior para  $L_b/r_T$ .

$$\sqrt{\frac{102,000(1.75)}{50}} = 59.6$$

$$\sqrt{\frac{510,000(1.75)}{50}} = 134$$

$$\frac{r_T}{r_T} = \frac{12(12)}{1.60} = 90$$

Como  $59.6 < 97.5 < 134$ , usar

$$F_{b2} = \left[ \frac{2}{3} - \frac{F_y(L_b/r_T)^2}{1530(10)^3 C_b} \right] F_y$$

5. Calcular el esfuerzo flexionante permisible.

$$F_{b2} = \left[ \frac{2}{3} - \frac{50(97.5)^2}{1,530,000(1.75)} \right] 50$$

$$= (0.489)(50) = 24.5 \text{ k/pulg}^2$$

$$F_{b1} = \frac{12,000(1.75)}{13(12)5.96} = 22.6 \text{ k/pulg}^2$$

El esfuerzo flexionante permisible es  $24.5 \text{ k/pulg}^2$ .

6. Determinar el momento resistente máximo y calcular la carga en el centro del claro ( $P$ ).

$$M_R = F_b S = 24.5 \left( \frac{94.5}{12} \right) = 193 \text{ pie kips}$$

$$P = \frac{4(193)}{26} = 29.7 \text{ kips}$$

**Ejemplo 3**

Diseñar una viga para soportar una carga uniforme de 400 lb por pie (incluyendo su propio peso) sobre un claro simple de 26 pies. No hay apoyo lateral excepto en las reacciones. El acero es A36. Para la consideración de la deflexión, usar la mínima relación claro-peralte de  $F_y/800$  y limitar la deflexión por carga total a  $\frac{1}{300}$  del claro.

**Solución**

1. Calcular el peralte mínimo de la viga si el diseño final requiere que esté completamente esforzada.

$$d = \frac{36}{800} (12)(26) = 14 \text{ pulg.}$$

2. Una longitud de 26 pies sin apoyos laterales es tan grande que probablemente se requiera una viga de menor peralte y patines más anchos. Antes de investigar secciones de menor peralte que la recomendada cuando está sometida al esfuerzo total, tabular los

valores reducidos de  $F_b$  para secciones de 12 y 10 pulgadas de peralte.

Para 12 pulgadas,

$$F_b = \frac{12}{14} (22) = 18.9 \text{ k/pulg}^2$$

Para 10 pulgadas,

$$F_b = \frac{10}{14} (22) = 15.7 \text{ k/pulg}^2$$

3. Calcular el momento de inercia requerido para la deflexión.

$$\Delta_{\max} = \frac{26(12)}{300} = 1.04 \text{ pulg.}$$

De la figura 4.15

$$I_{\text{req.}} = \frac{5(0.4)(26)^4(12)^3}{384(29,000)(1.04)} = 136 \text{ pulg}^4$$

4. Suponer un esfuerzo permisible, calcular el módulo de sección requerido y hacer algunas selecciones de prueba. Como  $L_b = 26$  pies, que es muy grande, las vigas de mayor peralte y menor peso tendrán un esfuerzo mucho más reducido. Probar  $F_b = 12 \text{ k/pulg}^2$ .

De la figura 2.34

$$M_{\max} = \frac{0.4(26)^2}{8} = 33.8 \text{ kips-pies}$$

$$S_{\text{req.}} = \frac{33.8(12)}{12} = 33.8 \text{ pulg}^3$$

En la "Tabla de selección de diseño de esfuerzo permisible" y en las tablas de "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC,

14 X 26 para una selección de prueba. Asimismo, elegir la siguiente viga más pesada de 14 pulg, la cual es W 14 X 30. Ambas secciones tienen peraltes y momentos de inercia adecuados.

5. Revisar las secciones de viga de prueba para ver si es adecuada la resistencia a la flexión y

revisar la selección como lo indican los cálculos. Obsérvese que  $C_b = 1.0$ .

Calcular límites superior e inferior de  $L_b/r_T$ .

$$\sqrt{\frac{102,000}{36}} = 53.2$$

$$\sqrt{\frac{510,000}{36}} = 119$$

Para la viga W 14 X 26

$$f_b = \frac{33.8(12)}{35.3} = 11.5 \text{ k/pulg}^2$$

$$\frac{L_b}{r_T} = \frac{26(12)}{1.28} = 244$$

$$F_{b3} = \frac{170,000}{(244)^2} = 2.86 \text{ k/pulg}^2$$

$$F_{b1} = \frac{12,000}{26(12)6.59} = 5.84 \text{ k/pulg}^2$$

NO SIRVE

Para la viga W 14 X 30

$$f_b = \frac{33.8(12)}{42} = 9.66 \text{ k/pulg}^2$$

$$\frac{L_b}{r_T} = \frac{26(12)}{1.74} = 179$$

$$F_{b3} = \frac{170,000}{(179)^2} = 5.31 \text{ k/pulg}^2$$

$$F_{b1} = \frac{12,000}{26(12)5.34} = 7.20 \text{ k/pulg}^2$$

NO SIRVE

Parece que esta sección de prueba está cerca de la correcta; por lo tanto, con toda probabilidad, la siguiente sección más pesada, W 14 X 33, sería suficiente y se podría comprobar. Sin embargo, también podría haber una viga de menor peso y menor peralte que pudiera servir. Probar tanto la W 12 X 30 como la W 10 X 33. Ambas tienen un momento de inercia adecuado.

Para la W 10 X 33,



$$f_b = \frac{33.8(12)}{35} = 11.6 \text{ k/pulg}^2$$

11.6 < 15.7, Correcto (paso 3)

$$\frac{L_b}{r_T} = \frac{26(12)}{2.14} = 146$$

$$F_{b3} = \frac{170,000}{(146)^2} = 7.98 \text{ k/pulg}^2$$

$$F_{b1} = \frac{12,000}{26(12)2.81} = 13.7 \text{ k/pulg}^2$$

Esta sección es adecuada:

Para la W 12 X 30,

$$f_b = \frac{33.8(12)}{38.6} = 10.5 \text{ k/pulg}^2$$

10.5 < 18.9, Correcto (paso 3)

$$\frac{L_b}{r_T} = \frac{26(12)}{1.73} = 180$$

$$F_{b3} = \frac{170,000}{(180)^2} = 5.25 \text{ k/pulg}^2$$

$$F_{b1} = \frac{12,000}{26(12)4.30} = 9.94 \text{ k/pulg}^2$$

NO SIRVE

Selección final: W 10 X 33.

## PROBLEMAS

- Una viga W 12 X 26 de acero A36 está simplemente apoyada sobre un claro de 24 pies y soporta, además de su propio peso, una carga concentrada de 10 kips en el centro del claro. No hay especificaciones para el claro peralte ni limitación de deflexión.
  - Determinar si la viga está segura si tiene apoyo lateral completo.
  - Determinar si la viga está segura si el apoyo lateral lo proporciona el miembro que deposita 10 kips en ella.

(En el apéndice G aparecen las respuestas).
- Una viga W 16 X 36 de A572, grado 50, está simplemente apoyada sobre un claro de 26 pies.

No hay especificaciones de claro-peralte ni limitación de la deflexión.

- Determinar la carga distribuida máxima que puede soportar la viga (incluyendo su propio peso) si tiene apoyo lateral completo.
  - Determinar la carga distribuida máxima que puede soportar la viga (incluyendo su peso propio) si no tiene apoyo lateral.
- (Respuestas en el apéndice G).
- Una viga de acero A36 está simplemente apoyada sobre un claro de 24 pies y soporta una carga uniformemente distribuida de 590 lb por pie, incluyendo su propio peso. No hay especificaciones de claro-peralte ni limitación de deflexión.
    - Diseñar una viga suponiendo que tiene un apoyo lateral completo.
    - Rediseñar la viga suponiendo que tiene apoyo lateral solamente en el centro del claro.
  - Una viga simplemente apoyada de acero A36 y claro de 30 pies soporta dos cargas concentradas de 6 kips, localizadas a cada tercera parte del claro. Además, una carga uniforme de 200 lb por pie (incluyendo el peso de la viga) en todo su claro. Tiene apoyo lateral sólo en la reacción y puntos de cargas concentradas. Usar las especificaciones de claro-peralte mínimos para los pisos, es decir,  $F_y/800$ . Diseñar la viga.
  - Diseñar una viga de acero A36 con un voladizo de 10 pies a partir de un muro y que pueda soportar una carga uniforme de 200 lb por pie a todo lo largo y una carga concentrada de 2 kips en el extremo libre. No hay especificaciones de limitación de deflexión. La construcción es tal que no proporciona apoyo lateral, pero el apoyo sí proporciona un arriostamiento contra la torsión.
 

(Las respuestas se dan en el apéndice G).
  - Una viga de acero A36 tiene 28 pies de largo. Está simplemente apoyada pero tiene un voladizo de 10 pies a partir de un muro. Soporta una carga concentrada de 4 kips en el extremo del voladizo y una carga concentrada de 10 kips en el centro entre los dos apoyos. Tiene apoyo lateral en las reacciones y en los puntos de las cargas concentradas. No hay limitación de deflexión y se considera el peso de la viga.

- Diseñar una viga de acero A36 con un voladizo de 14 pies a partir de un muro, que está cargada como sigue: una carga concentrada de 10 kips en el extremo volado y una carga concentrada de 1 kips a 4 pies del muro. Tiene apoyo lateral en el muro y en el punto de la carga concentrada de 1 kip. El muro es resistente a la torsión. No hay limitación de deflexión.

(Las respuestas aparecen en el apéndice G).

- En la figura 5.15 se ilustra un típico sistema de piso interior, trazado en planta. Se ha utilizado acero A572, grado 50 para vigas y trabes. Todas las conexiones son de tipo flexible y se generan claros simples. Se usa una cubierta metálica de un solo sentido entre las vigas y, al soldarla a éstas, proporciona apoyo lateral. El único apoyo lateral para las trabes es el que proporcionan las vigas en los lugares en que se sujetan a ellas. Hay una losa de concreto de peso ligero sobre la cubierta de metal, una alfombra arriba y un falso plafón colgante abajo, que dan un total de 32 libras por pie cuadrado, sin incluir el peso de las vigas y las trabes. Usar las especificaciones de claro-peralte  $F_y/800$  para el piso y limitar la deflexión por carga viva a  $\frac{1}{360}$  del claro. No usar reducción de carga viva. Diseñar las vigas y trabes para una carga viva de 40 lb/pie<sup>2</sup>.

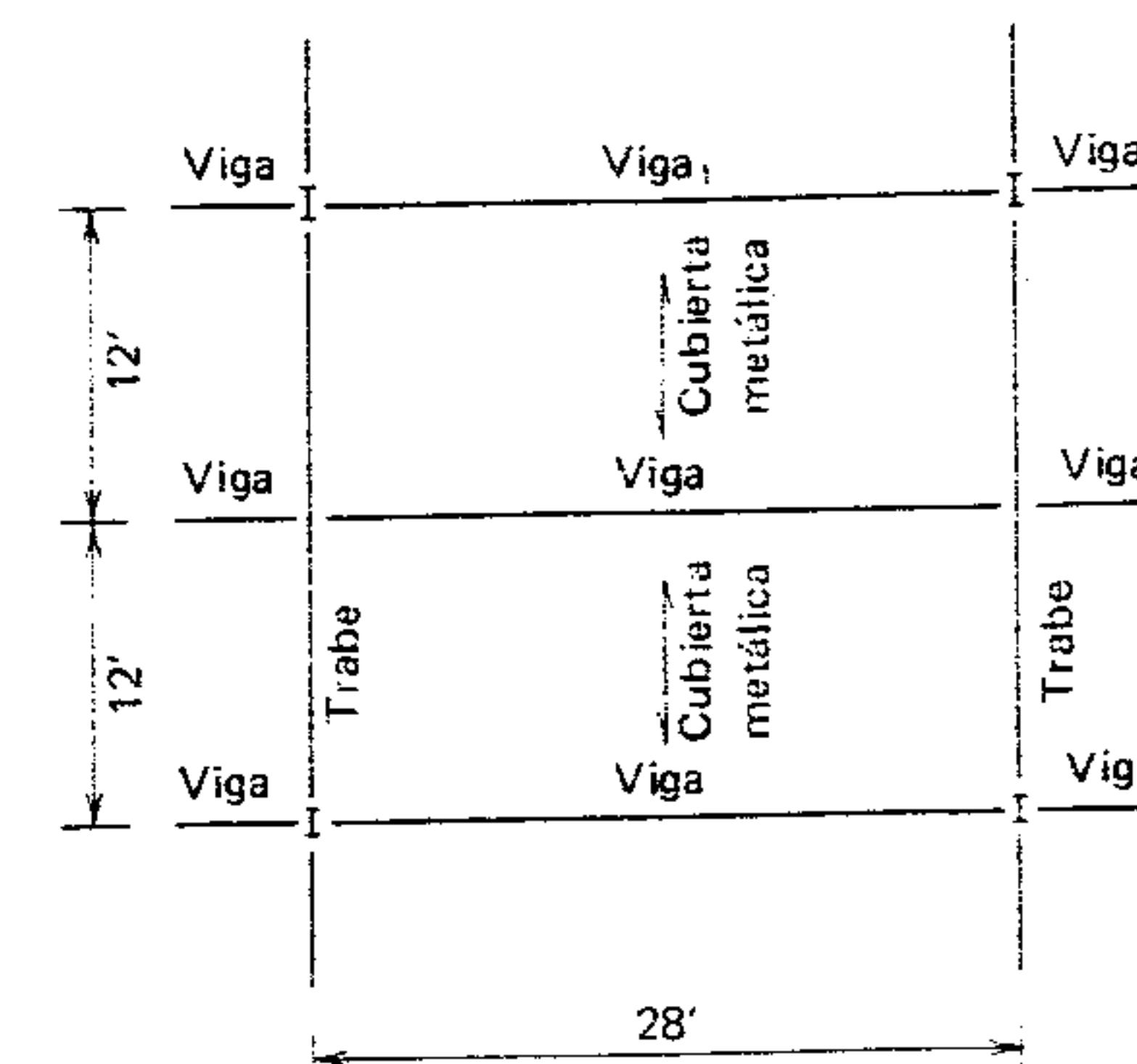


Figura 5.15 Planta típica de piso interior (problema 8).

ocurrido si ese elemento no estuviera sujeto a fuerzas producidas por una falla inicial en algún otro lugar. La causa más frecuente de la falla inicial es el pandeo local.

En la sección anterior se examinó el pandeo en el patín a compresión entre puntos de apoyo lateral. En éste se trata el pandeo del alma. Las funciones principales del alma de una viga son separar los patines tanto como es posible para obtener el provecho máximo del peralte de la viga y resistir casi todos los esfuerzos cortantes que son generalmente pequeños. Por lo tanto, existe una tendencia a hacer las almas tan delgadas como es posible y la distancia (peralte) entre patines tan grande como se pueda, debilitando con ello la placa del alma cerca de las cargas concentradas (figura 5.16).

En la figura 6.16a se ilustran cuatro tipos de pandeo vertical del alma. La ocurrencia de cada uno de ellos depende de la naturaleza del apoyo que el patín superior recibe de la construcción circundante. La posibilidad de una falla en la viga debida al pandeo vertical sólo existe cerca de grandes cargas concentradas, es decir, en las reacciones en que se apoya la viga o en los puntos en que se apoyan las columnas u otras vigas sobre el patín superior de la viga. En los mismos puntos, también existe la posibilidad de otro tipo de falla,

## 5.8 PANDEO LOCAL

Es muy frecuente que en el diseño de vigas no se tome en consideración el pandeo local. Siempre que las placas delgadas, como las almas y los patines, se someten a una gran fuerza de compresión, existe una tendencia al pandeo, similar al de las columnas (capítulo 6). Cuando hay pandeo local, es posible que se produzcan dos efectos principales: 1) pérdida de capacidad de carga en la propia placa pandeada; y 2) lo que es más importante, poco después (a veces aún antes de que se desarrolle un pandeo completo) se redistribuye el esfuerzo a otras partes de la viga, lo cual puede propiciar una falla subsecuente al someter a estas partes a fuerzas para las que no fueron diseñadas.

Cuando ocurre cualquier falla estructural, generalmente es difícil detectar la causa inicial. Esto es particularmente cierto cuando existe una falla visible de un elemento estructural, que no hubiera



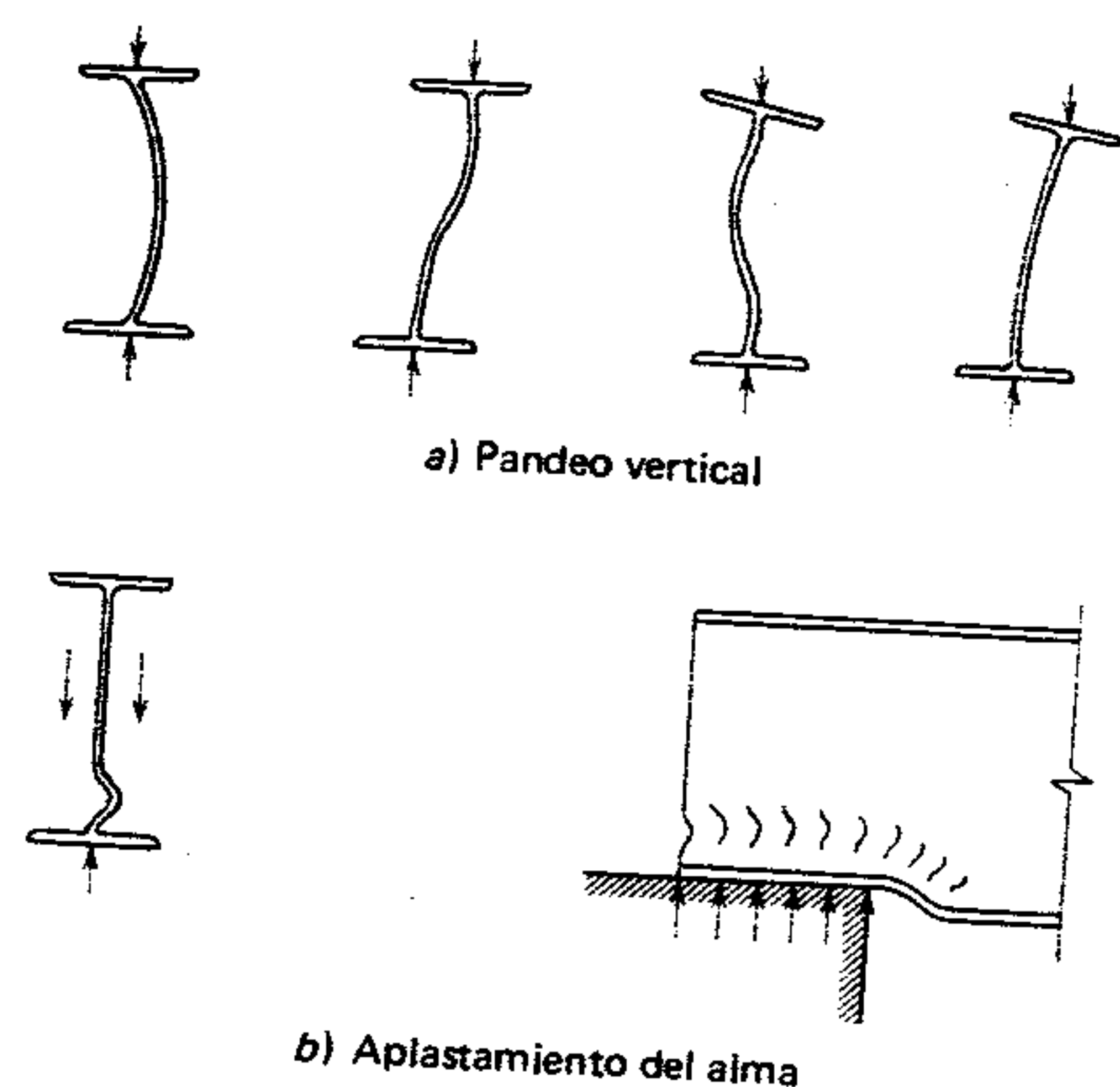


Figura 5.16 Pandeo local del alma.

conocido como aplastamiento del alma (figura 4.16b). La experiencia indica que una viga laminada estándar que es segura contra el aplastamiento del alma, también lo es contra el pandeo vertical; por lo tanto, lo que se debe investigar es el aplastamiento. No obstante, en las trabes de placa u otros miembros compuestos, se deben investigar tanto el pandeo vertical como el aplastamiento del alma.

En el diseño se supone (Especificación AISC) que el alma actúa como una columna cuyas dimensiones de sección transversal son iguales a  $(N + k)$  por el espesor del alma  $t$  en las reacciones (figura 5.17a), y  $(N + 2k)$  por  $t$  en las cargas interiores (figura 5.17d). La distancia  $N$  es igual a la longitud de apoyo. El procedimiento del AISC, que permite un valor ligeramente mayor que  $N$ , es decir,  $k$  o  $2k$ , se basa en el hecho de que la parte del alma directamente arriba o abajo de  $N$  no actúa como una columna libre, sino que, debido a su continuidad con el resto del alma y los patines, distribuye una parte de la carga al material del alma adyacente. Este equivalente a la distancia entre la cara exterior del patín y la base de filete de transición del alma (figura 5.17b). En las tablas de "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC aparecen los valores de  $k$  para las diversas secciones laminadas.

En los apoyos extremos, el esfuerzo de compresión unitario real ejercido sobre la sección transversal de la columna opuesta es igual a la reacción de la viga  $R$  dividida entre el área efectiva de columna, o sea

$$\text{esfuerzo} = \frac{R}{t(N + k)}$$

La AISC estipula que el esfuerzo unitario máximo permisible para acero A36 es 0.75 del esfuerzo de fluencia o sea 27,000 lb/pulg<sup>2</sup>. Por lo tanto, la longitud de apoyo mínima requerida para cualquier reacción dada se puede encontrar resolviendo la siguiente ecuación, despejando  $N$ , o sea

$$N_{(\text{mín})} = \frac{R}{0.75F_y t} - k$$

Si en un punto interior el patín superior se aplica una gran fuerza concentrada  $P$ , la longitud de apoyo mínima requerida se determina como sigue (figura 5.17d):

$$N_{(\text{mín})} = \frac{P}{0.75F_y t} - 2k$$

Cuando no se puede obtener la longitud de apoyo requerida, se debe usar una viga con alma más gruesa, o bien, reforzar un alma más delgada con placas atiesadoras verticales que usualmente se colocan a los dos lados, como se indica en las figuras 5.17c y e.

### Ejemplo 1

La reacción del extremo de una viga W 12 X 26 de acero A36 es de 28 kips. Determinar la longitud de apoyo mínima requerida en el soporte para el pandeo local del alma.

### Solución

1. El Manual AISC:  $t = 0.230$  pulg;  $k = \frac{7}{8}$  pulg = 0.875  $\approx$  0.88 pulg.
2. Resolviendo para  $N$

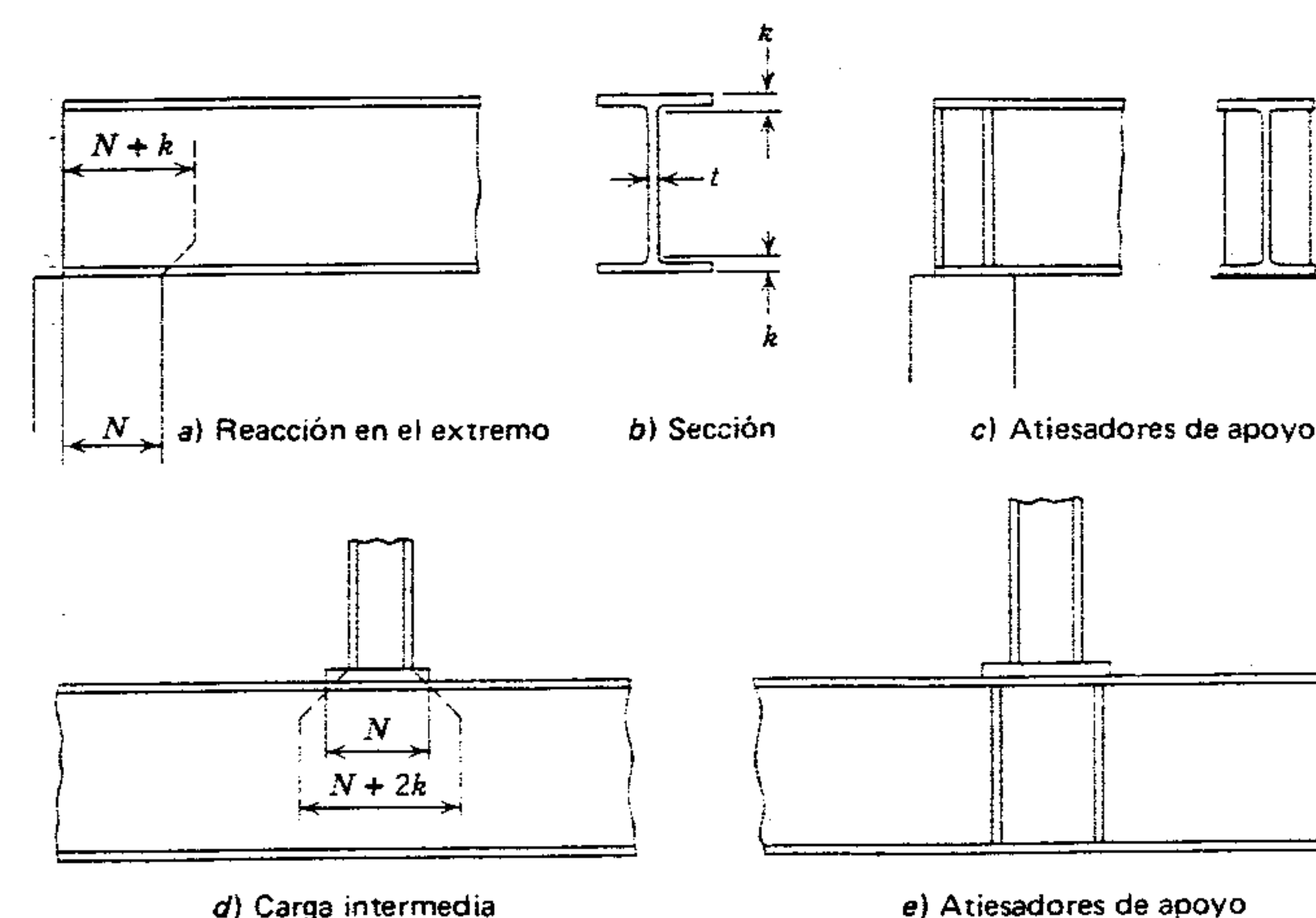


Figura 5.17 Diseño para pandeo local.

$$\begin{aligned} N &= \frac{R}{0.75F_y t} - k \\ &= \frac{28}{0.75(36)(0.230)} - 0.88 \\ &= 3.63 \text{ pulgs.} \end{aligned}$$

**Pandeo diagonal del alma.** En la figura 5.18a se muestra el pandeo diagonal, el cual constituye otro tipo de falla del alma de una viga de acero. Esta falla se podría deber a una combinación de esfuerzos resultantes del cortante y la flexión, denominada por lo general como esfuerzo principal. Entre mayor peralte tenga la sección y más delgada el alma, la viga será más susceptible al pandeo diagonal.

El análisis preciso del esfuerzo principal y su propósito de este texto y ciertamente no se justifica en la mayoría de los casos que se dan en la práctica.

La resistencia al pandeo diagonal de una relación  $h/t$  dada se puede incrementar usando atiesadores intermedios de alma como se muestra en la figura 5.31. Estos atiesadores intermedios son similares

a los atiesadores de soporte que se ven en la figura 5.17 excepto que están espaciados a todo lo largo de la viga, en vez de estarlo en los puntos de cargas concentradas. El espaciamiento de atiesadores intermedios (a), el claro entre patines (h) y el espesor del alma (t) defienden completamente la geometría de la placa y, por tanto, controlan su capacidad para resistir la carga del cortante y el pandeo combinados (para cualquier grado específico de acero).

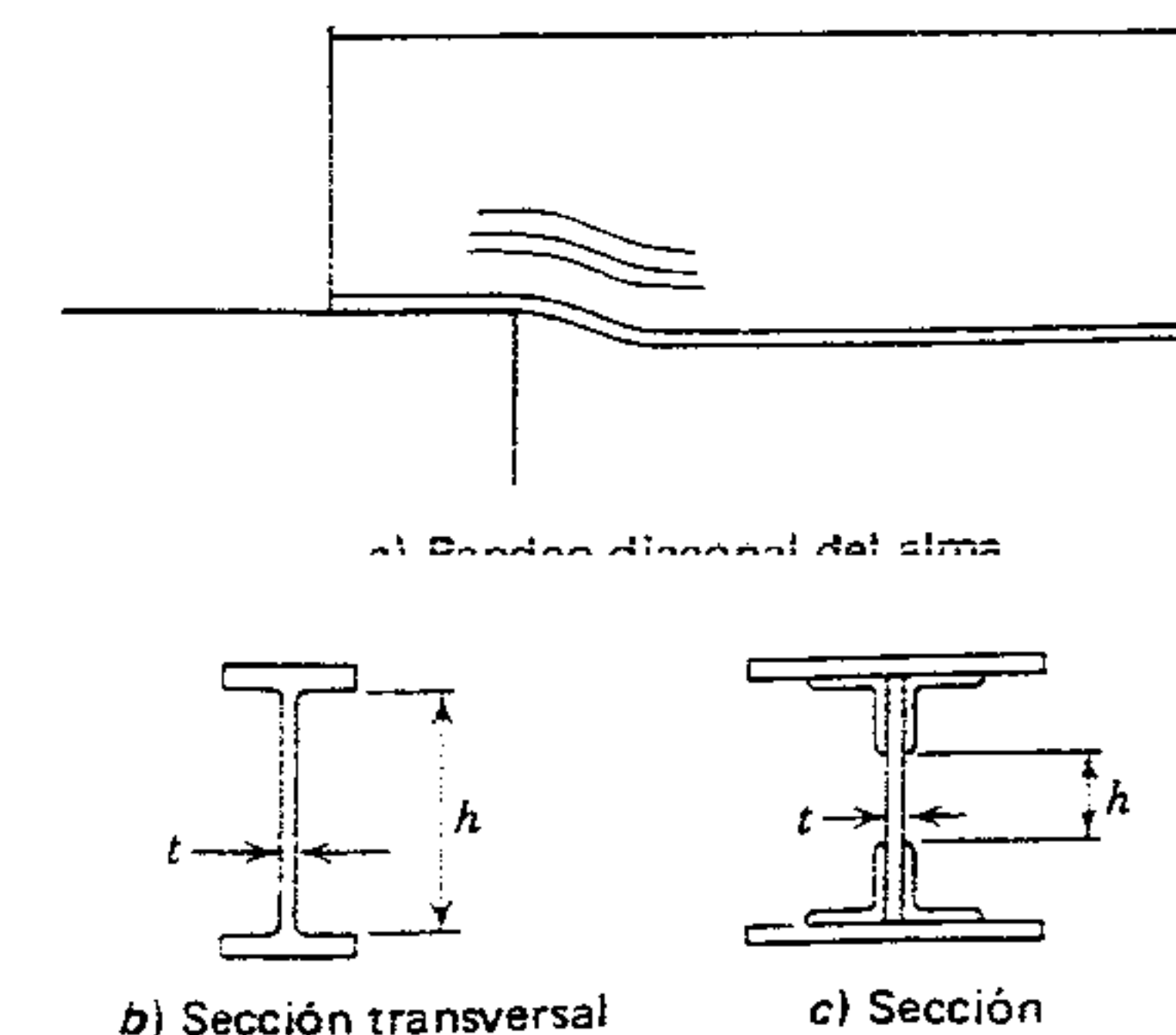


Figura 5.18 Pandeo diagonal local.



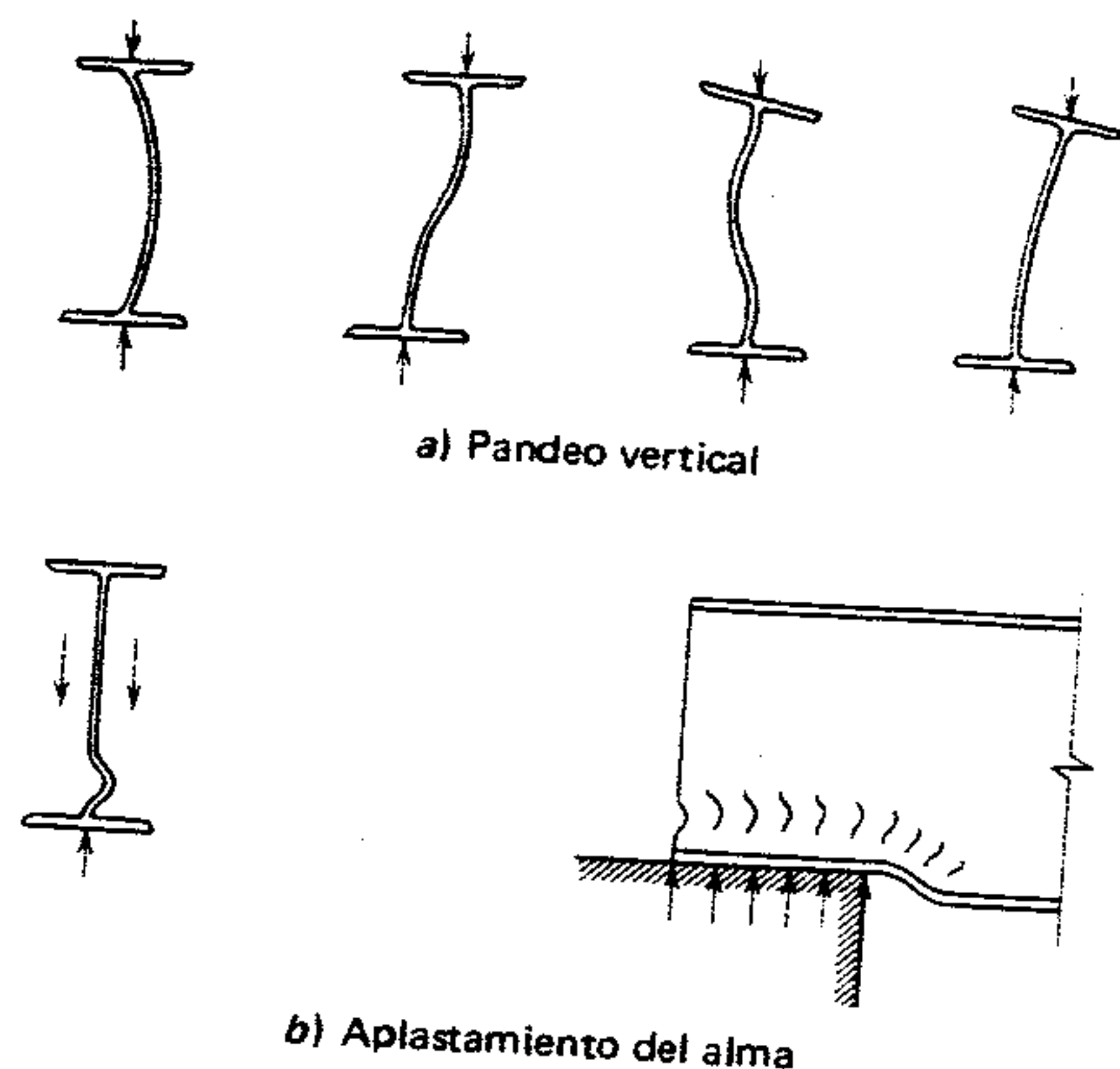


Figura 5.16 Pandeo local del alma.

conocido como aplastamiento del alma (figura 4.16b). La experiencia indica que una viga laminada estándar que es segura contra el aplastamiento del alma, también lo es contra el pandeo vertical; por lo tanto, lo que se debe investigar es el aplastamiento. No obstante, en las trabes de placa u otros miembros compuestos, se deben investigar tanto el pandeo vertical como el aplastamiento del alma.

En el diseño se supone (Especificación AISC) que el alma actúa como una columna cuyas dimensiones de sección transversal son iguales a  $(N + k)$  por el espesor del alma  $t$  en las reacciones (figura 5.17a), y  $(N + 2k)$  por  $t$  en las cargas interiores (figura 5.17d). La distancia  $N$  es igual a la longitud de apoyo. El procedimiento del AISC, que permite un valor ligeramente mayor que  $N$ , es decir,  $k$  o  $2k$ , se basa en el hecho de que la parte del alma directamente arriba o abajo de  $N$  no actúa como una columna libre, sino que, debido a su continuidad con el resto del alma y los patines, distribuye una parte de la carga al material del alma adyacente.

Es equivalente a la distancia entre la cara exterior del patín y la base de filete de transición del alma (figura 5.17b). En las tablas de "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC aparecen los valores de  $k$  para las diversas secciones laminadas.

En los apoyos extremos, el esfuerzo de compresión unitario real ejercido sobre la sección transversal de la columna opuesta es igual a la reacción de la viga  $R$  dividida entre el área efectiva de columna, o sea

$$\text{esfuerzo} = \frac{R}{t(N + k)}$$

La AISC estipula que el esfuerzo unitario máximo permisible para acero A36 es 0.75 del esfuerzo de fluencia o sea 27,000 lb/pulg<sup>2</sup>. Por lo tanto, la longitud de apoyo mínima requerida para cualquier reacción dada se puede encontrar resolviendo la siguiente ecuación, despejando  $N$ , o sea

$$N_{(\text{mín})} = \frac{R}{0.75F_y t} - k$$

Si en un punto interior el patín superior se aplica una gran fuerza concentrada  $P$ , la longitud de apoyo mínima requerida se determina como sigue (figura 5.17d):

$$N_{(\text{mín})} = \frac{P}{0.75F_y t} - 2k$$

Cuando no se puede obtener la longitud de apoyo requerida, se debe usar una viga con alma más gruesa, o bien, reforzar un alma más delgada con placas atiesadoras verticales que usualmente se colocan a los dos lados, como se indica en las figuras 5.17c y e.

### Ejemplo 1

La reacción del extremo de una viga W 12 X 26 de acero A36 es de 28 kips. Determinar la longitud de apoyo mínima requerida en el extremo de la viga.

### Solución

1. El Manual AISC:  $t = 0.230$  pulg;  $k = \frac{7}{8}$  pulg = 0.875  $\approx$  0.88 pulg.
2. Resolviendo para  $N$

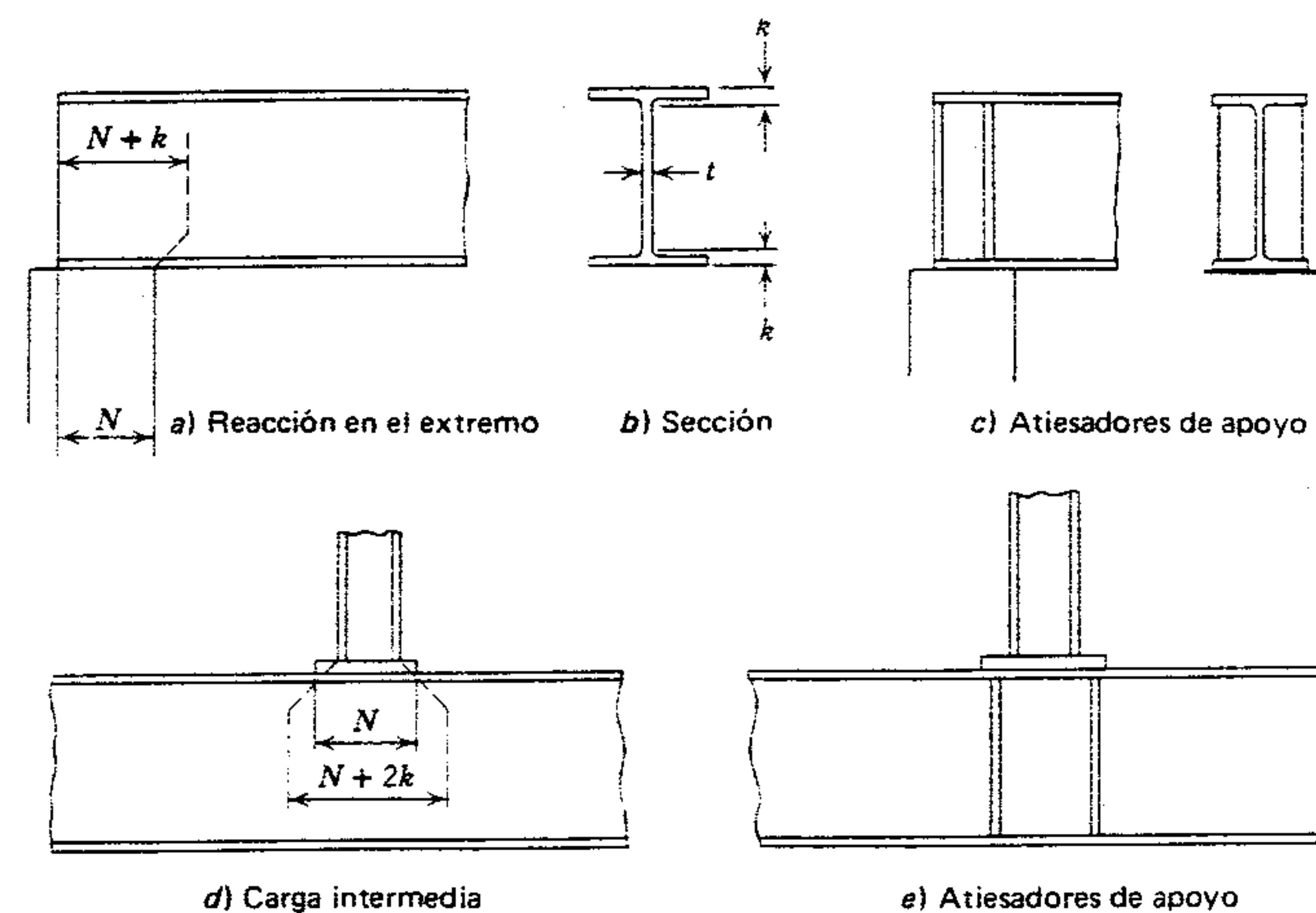


Figura 5.17 Diseño para pandeo local.

$$\begin{aligned} N &= \frac{R}{0.75F_y t} - k \\ &= \frac{28}{0.75(36)(0.230)} - 0.88 \\ &= 3.63 \text{ pulgs.} \end{aligned}$$

**Pandeo diagonal del alma.** En la figura 5.18a se muestra el pandeo diagonal, el cual constituye otro tipo de falla del alma de una viga de acero. Esta falla se podría deber a una combinación de esfuerzos resultantes del cortante y la flexión, denominada por lo general como esfuerzo principal. Entre mayor peralte tenga la sección y más delgada el alma, la viga será más susceptible al pandeo diagonal.

El análisis preciso del esfuerzo principal y su

propósito de este texto y ciertamente no se justifica en la mayoría de los casos que se dan en la práctica.

La resistencia al pandeo diagonal de una relación  $h/t$  dada se puede incrementar usando atiesadores intermedios de alma como se muestra en la figura 5.31. Estos atiesadores intermedios son similares

a los atiesadores de soporte que se ven en la figura 5.17 excepto que están espaciados a todo lo largo de la viga, en vez de estarlo en los puntos de cargas concentradas. El espaciamiento de atiesadores intermedios (a), el claro entre patines (h) y el espesor del alma (t) defienden completamente la geometría de la placa y, por tanto, controlan su capacidad para resistir la carga del cortante y el pandeo combinados (para cualquier grado específico de acero).

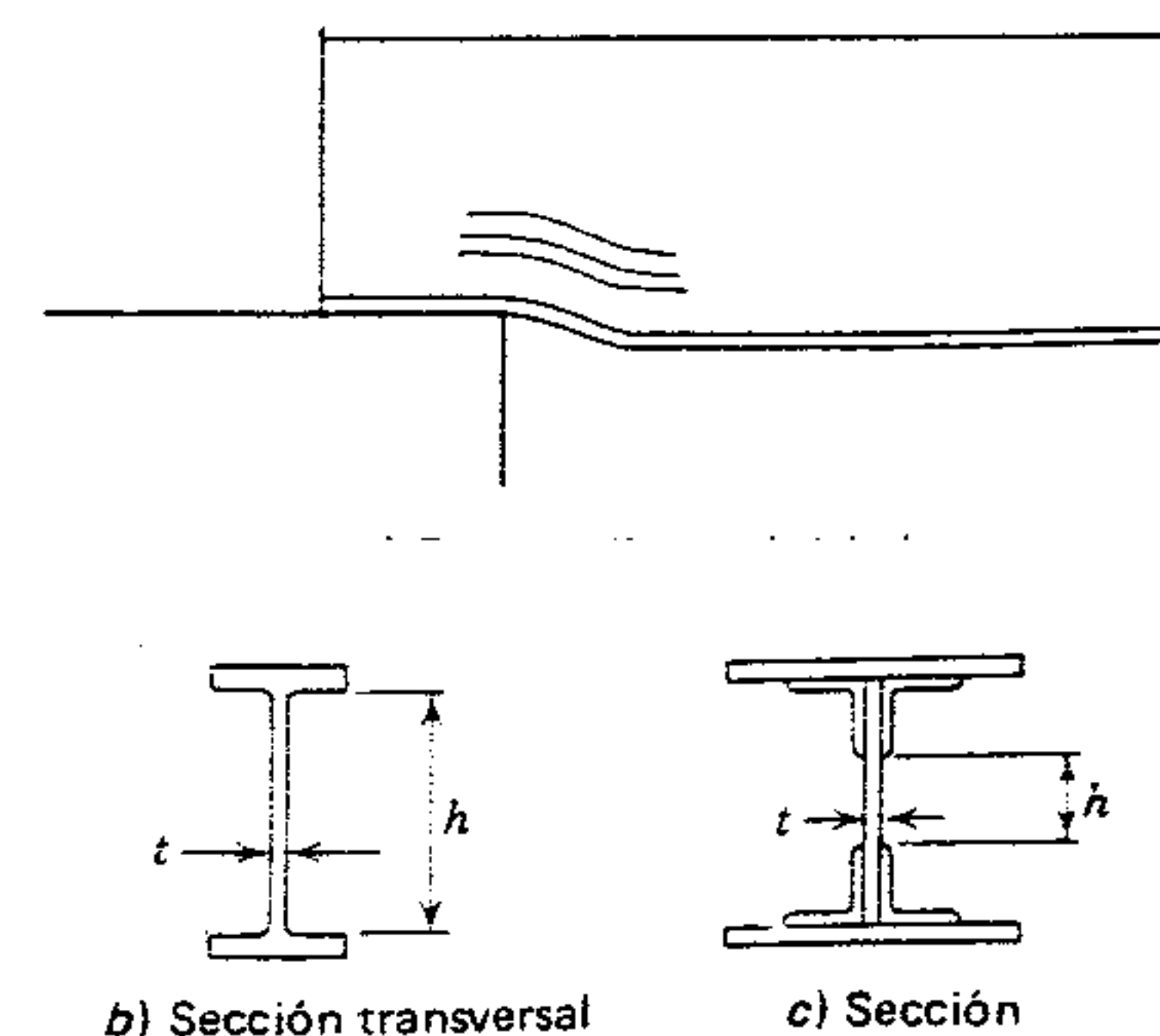


Figura 5.18 Pandeo diagonal local.



Si se aplica un factor razonable de seguridad al esfuerzo cortante y la relación  $h/t$  se mantiene dentro de cierto límite prescrito, el alma estará segura contra el pandeo diagonal y no necesitará atiesadores intermedios. La especificación de AISC de 1978 establece este límite

$$\frac{h}{t} \leq \frac{14,000}{\sqrt{F_y(F_y + 16.5)}}$$

se usen atiesadores intermedios. En estas condiciones, el alma se considera segura porque el esfuerzo cortante real ( $f_v$ ) es igual o menor que el permisible  $F_v = 0.4F_y$ .

Todas las formas laminadas cumplen con los requisitos de  $h/t$ , de modo que lo único que se necesita es una sencilla revisión del esfuerzo cortante, como se vio en el ejemplo anterior. Sin embargo, cuando se usan secciones compuestas (sección 5.13) o trabes armadas de placa (sección 5.14), es necesario comprobar tanto la relación  $h/t$  como el esfuerzo cortante ( $F_v$ ). Si no son satisfactorios, la relación  $h/t$  se debe reducir, o bien, usar atiesadores intermedios en el alma. El símbolo "a" se usa para denotar la distancia entre los atiesadores intermedios.

En caso de que se usen atiesadores transversales, espaciándose a no más de  $1\frac{1}{2}$  veces el peralte de la trabe, la relación  $h/t$  no necesita ser mayor de  $2000/\sqrt{F_y}$ . Asimismo, debe hacerse un ajuste adicional del esfuerzo cortante máximo permisible ( $F_v$ ), como se ve a continuación:

$$F_v = \frac{F_y}{2.89} (C_v) \leq 0.4F_y$$

donde,

$$C_v = \frac{45,000k}{F_y(h/t)^2} \quad \text{cuando } C_v < 0.8$$

$$\frac{190}{h/t \sqrt{F_y}} \quad \text{cuando } C_v > 0.8$$

$$k = 4.00 + \frac{5.34}{(a/h)^2} \quad \text{cuando } \frac{a}{h} < 1.0$$

$$= 5.34 + \frac{4.00}{(a/h)^2} \quad \text{cuando } \frac{a}{h} > 1.0$$

Obsérvese que  $k$  es un coeficiente que relaciona la resistencia al pandeo diagonal del alma con sus dimensiones. En vigas laminadas sin atiesadores,  $a/h$  es muy grande y  $k = 5.34$ . (Debe observarse que el símbolo  $k$ , tal como se usa aquí, tiene un significado totalmente diferente al anterior que se aplicó al aplastamiento del alma, donde expresaba una dimensión. Este uso dual está de acuerdo con la nomenclatura de AISC).

En el siguiente ejemplo se ilustra el hecho de que todas las vigas laminadas tienen relaciones  $h/t$  dentro de los límites prescritos y en tanto que el esfuerzo cortante real ( $F_v$ ) sea igual o menor que el esfuerzo cortante permisible  $F_v = 0.4F_y$ , no se necesita considerar el pandeo diagonal.

### Ejemplo 2

Comprobar si una viga W 12 X 26 es adecuada para resistir el pandeo diagonal del alma. La viga es de acero A36 y la reacción del extremo es de 28 kips.  $h = 11.46$  pulg;  $t = 0.230$  pulg;  $F_y = 36$  k/pulg<sup>2</sup>. No se usan atiesadores.

$$\text{máx } \frac{h}{t} = \frac{14,000}{\sqrt{36(36 + 16.5)}} = 322$$

$$\text{real } \frac{h}{t} = \frac{11.46}{0.230} = 49.8 < 322 \quad \text{CORRECTO}$$

Como,  $a/h \gg 1.0$ ,  $k = 5.34$

$$C_v = \frac{190}{49.8} \sqrt{\frac{5.34}{36}} = 1.47 > 0.8 \quad \text{CORRECTO}$$

$$F_v = \frac{36}{2.89} (1.47) = 18.3 \text{ ksi} > 0.4F_y \quad \text{INCORRECTO}$$

Use  $F_v = 14.5$  ksi

$$F_v = \frac{14.5}{12.22(0.230)} = 9.96 \text{ ksi} < 14.5 \quad \text{CORRECTO.}$$

De nuevo se debe remarcar que cuando se usan secciones no laminadas, puede necesitarse un cálculo más detallado del pandeo diagonal y se pueden requerir atiesadores intermedios. En estos casos se

deben aplicar los datos detallados de la Especificación AISC, de la sección 1.10.5.

### 5.9 TABLAS DE DISEÑO DE VIGAS

El Manual AISC proporciona tablas de "Constantes de Carga Uniforme" para vigas simples apoyadas lateralmente sin voladizos. Estas tablas son valiosas auxiliares para el diseñador, si éste conoce sus ventajas y limitaciones. Una vez determinada la constante requerida, la viga se selecciona directamente de las tablas.

En la tabla 5.1 se muestra una típica tabla de "Constantes de Cargas Uniformes" para vigas apoyadas lateralmente, de la octava edición del Manual AISC. En el manual se listan constantes para todas las formas de vigas laminadas de acero A36 y para formas W y M en grados en que  $F_y = 50$  k/pulg<sup>2</sup>. Cada forma de viga simple con carga uniformemente distribuida con apoyo lateral adecuado posee constantes únicas que se pueden usar para simplificar el proceso de diseño. Estas constantes se pueden ajustar para usarlas con condiciones de carga diferentes a las uniformes y para condiciones diferentes de  $L_b < L_c$ . Cuando se elabora el diseño, es más conveniente usar unidades de pies y kips. Por lo tanto, las constantes están desarrolladas para aplicación directa con estas unidades.

Cada sección de viga tiene un momento resistente  $M_R = F_b S$  que se puede igualar al momento máximo de la viga simplemente apoyada.

$$F_b S = \frac{wL^2}{8} (12) = \frac{WL}{8} (12)$$

El ajuste unitario (12) se usa de modo que  $L$  se pueda expresar en pies. Cuando esta ecuación se resuelve en función de  $WL$ , se convierte en la constante de diseño, es decir,

$$WL = W_c = \frac{8}{12} F_b S = \frac{2}{3} F_b S$$

Por ejemplo, una viga W 12 X 26 tiene una constante de carga uniforme de

$$W_c = \frac{2}{3}(24)33.4 = 534 \text{ kip-pie (Tabla 5.1)}$$

Por lo tanto, la carga segura que se puede soportar en un claro de 25 pies es

$$W = \frac{W_c}{L} = \frac{534}{25} = 21.4 \text{ kips}$$

y para un claro de 10 pies,

$$W = \frac{W_c}{L} = \frac{534}{10} = 53.4 \text{ kips}$$

Las constantes para cortante se pueden obtener de modo similar. Cada sección de viga tiene una capacidad de cortante resistente de  $V = 0.4F_y A_{alma}$  que se puede igualar a la reacción de la viga simplemente apoyada y la constante de carga uniforme que se dedujo previamente.

$$V = 0.4F_y(d)t_w = \frac{W}{2} = \frac{W_c}{2L_v}$$

Resolviendo la longitud de cortante  $L_v$ ,

$$L_v = \frac{W_c}{2V}$$

Esta longitud de cortante establece la longitud de claro, siendo el cortante quien determina el diseño en lugar del momento flexionante.

Por ejemplo, una viga W 12 X 26 tiene una capacidad máxima de cortante de  $V = 14.5 (12.22) 0.23 = 40.8$  kips (tabla 5.1). La longitud de cortante se puede calcular como sigue:

$$L_v = \frac{W_c}{2V} = \frac{534}{2(40.8)} = 6.54 \approx 6.6 \text{ pies (Tabla 5.1).}$$

Las tablas para constantes de vigas enlistan en grupos las secciones de vigas, en orden decreciente de peralte y peso, con sus correspondientes valores  $W_c$ . Este orden permite una fácil selección de vigas. Por ejemplo, una viga de acero A36 para una carga de 1.2 kps por pie sobre un claro simple de 25 pies necesita una constante de

$$W_c = 1.2(25)25 = 750 \text{ kip-pie}$$



Tabla 5.1 Tabla típica para el diseño de vigas\*

VIGAS										
Formas W										
Constantes de carga uniforme para vigas con apoyo lateral										
Para vigas sin apoyo lateral, véase la página 2-51										
Forma	$W_c$ Kip-pie	$V$ Kip	$L_c$ Pies	$L_u$ Pies	$R$ Kip	$R_t$ Kip	$N_c$ Pulg	$S$ Pulg <sup>3</sup>	$D_c$ Pulg/pie <sup>2</sup>	
W 12 x 87	1890	93.6	10.1	12.8	69.5	13.9	5.2	118	2.0	
x 79	1710	84.4	10.1	12.8	62.7	12.7	5.2	107	2.0	
x 72	1560	76.4	10.2	12.7	56.6	11.6	5.2	97.4	2.0	
x 65	1410	68.5	10.3	12.7	50.7	10.5	5.2	87.9	2.0	
W 12 x 58	1250	63.6	9.8	10.6	47.4	9.7	5.2	78.0	2.0	
x 53	1130	60.3	9.4	10.6	44.2	9.3	5.2	70.6	2.1	
W 12 x 50	1040	65.4	7.9	8.5	48.7	10.0	5.2	64.7	2.0	
x 45	930	58.6	7.9	8.5	43.0	9.0	5.2	58.1	2.1	
x 40	830	51.1	8.1	8.4	37.8	8.0	5.2	51.9	2.1	
W 12 x 35	730	54.4	6.7	6.9	36.5	8.1	5.7	45.6	2.0	
x 30	618	46.5	6.6	6.9	31.2	7.0	5.7	38.6	2.0	
x 26	534	40.8	6.6	6.9	27.2	6.2	5.7	33.4	2.0	
W 12 x 22	406	46.4	4.4	4.3	30.7	7.0	5.7	25.4	2.0	
x 19	341	41.4	4.1	4.2	27.4	6.3	5.7	21.3	2.0	
x 16	274	38.2	3.6	4.1	25.2	5.9	5.7	17.1	2.1	
x 14	238	34.5	3.5	3.5	22.6	5.4	5.7	14.9	2.1	
W 10 x 112	2020	124	8.1	11.0	110.0	20.4	4.2	126	2.2	
x 100	1790	109	8.2	10.9	96.4	18.4	4.2	112	2.2	
x 88	1580	95.1	8.3	10.8	83.7	16.3	4.2	98.5	2.3	
x 77	1370	81.5	8.4	10.8	71.6	14.3	4.2	85.9	2.3	
x 68	1210	70.9	8.5	10.7	61.9	12.7	4.2	75.7	2.4	
x 60	1070	62.2	8.6	10.6	54.6	11.3	4.2	66.7	2.4	
x 54	960	54.1	8.9	10.6	47.5	10.0	4.2	60.0	2.5	
x 49	874	49.2	8.9	10.6	43.0	9.2	4.2	54.6	2.5	
W 10 x 45	786	51.3	7.7	8.5	44.9	9.5	4.2	49.1	2.5	
x 39	674	45.3	7.4	8.4	39.3	8.5	4.2	42.1	2.5	
x 33	560	40.9	6.8	8.4	35.7	7.8	4.2	35.0	2.6	
W 10 x 30	518	45.5	5.7	6.1	35.9	8.1	4.7	32.4	2.4	
x 26	446	38.9	5.7	6.1	30.7	7.0	4.7	27.9	2.4	
x 22	371	35.4	5.2	6.1	27.5	6.5	4.7	23.2	2.4	
W 10 x 19	301	37.1	4.1	4.2	29.1	6.8	4.7	18.8	2.4	
x 17	259	35.2	3.7	4.2	27.5	6.5	4.7	16.2	2.5	
x 15	221	33.3	3.3	4.2	26.0	6.2	4.7	13.8	2.5	
x 12	174	27.2	3.2	3.9	21.2	5.1	4.7	10.9	2.5	

Notas:

Cuando  $L$  es el claro en pies:

Carga uniforme total permisible en kips =  $W_c/L$ .

Reacción en extremos en kips =  $W_c/2L$ .

Deflexión en el centro del claro en pulgadas =  $D_c \times L^2/1000$ .

Para longitudes no arriostradas mayores que  $L_c$  y menores que  $L_u$ , multiplicar las constantes  $W_c$  y  $D_c$  por la relación  $22/F_b$ , donde  $F_b = 24 \text{ k/pulg}^2$ .

\* Cortesía del American Institute of Steel Construction, "Manual of Steel Construction", octava edición, págs. 2-30.

$F_y = 36 \text{ ksi}$

TABLAS DE DISEÑO DE VIGAS / 111

En la tabla 5.1 se aprecia que las vigas W 12 X 40, W 10 X 45 y W 10 X 49 tienen constantes cercanas, pero mayores que la necesaria, 750. Por lo tanto, todas son satisfactorias; sin embargo, la primera sección adecuada (descendiendo de la parte superior a la inferior) es la de menor peso. La máxima carga uniforme que una viga W 12 X 40 puede soportar sobre un claro de 25 pies es

$$W = \frac{W_c}{L} = \frac{830}{25} = 33.2 \text{ kips}$$

En las explicaciones y cálculos anteriores, se supuso que  $L_b \leq L_c$  y que la sección es compacta de modo que  $F_b = 0.66F_y$ . Si la sección no es compacta, el esfuerzo flexionante se establece por medio de la fórmula denominada de transición y los valores de  $W_c$  en listados contienen ya el valor reducido, así que no se tienen que hacer ajustes adicionales. No obstante, cuando la longitud arriostrada  $L_b$  está entre  $L_u$  y  $L_c$ ,  $F_b = 0.6F_y$  y no  $0.66F_y$ , y es necesario hacer un ajuste. El valor  $W_c$  de la lista se debe multiplicar por la relación  $22/24$ , o bien, en el caso de secciones no compactas, el valor 24 se tiene que cambiar al valor reducido. Por ejemplo, en los cálculos anteriores para la viga W 12 X 40, supóngase que la longitud no arriostrada era de 12 pies y  $C_b = 1$ . Bajo estas condiciones, la constante uniforme viene a ser

$$W_c = \frac{22}{24} (830) = 761 \text{ kip-pie}$$

Y como  $761 > 750$ , la viga aún se consideraría segura.

Cuando  $L_b > L_u$  o  $L_b > C_b L_u$  (o  $\sqrt{C_b L_u}$ ), no se aplica la tabla de Constantes Uniformes.

La tabla también contiene una constante de deflexión  $D_c$ , que es muy útil para simplificar el trabajo de diseño. La deflexión máxima para la viga con carga uniforme y simplemente apoyada de la figura 4.15 es

$$\Delta = \frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI}$$

Sustituyendo  $W$  por  $wL$

$$\Delta = \frac{5}{384} \frac{WL^3}{EI}$$

Luego, factorizando por conveniencia y para facilitar el seguimiento

$$\Delta = \frac{5}{48} \left( \frac{WL}{8} \right) \frac{L^2}{EI}$$

Que el término entre paréntesis será el momento máximo para la viga, el cual se puede igualar al momento resistente, es decir,

$$\frac{WL}{8} = F_b S = F_b \frac{I}{d/2}$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula de deflexión,

$$\Delta = \frac{5}{48} \left( F_b \frac{I}{d/2} \right) \frac{L^2}{EI}$$

y simplificando y ajustando las unidades de modo que  $L$  esté en pies,

$$\Delta = \frac{5}{48} \left( F_b \frac{I}{d/2} \right) \frac{L^2(12)^2}{EI} = \frac{30 F_b L^2}{Ed}$$

Anteriormente se estableció que  $E$  es de 29,000 k/pulg<sup>2</sup> en todos los aceros; por lo tanto,

$$\Delta = \left( \frac{30 F_b}{29 d} \right) \frac{L^2}{1000}$$

La cantidad entre paréntesis es la  $D_c$  de cada sección de viga, y la deflexión real de la máxima carga uniforme sobre la sección se puede calcular

$$\Delta = D_c \frac{L^2}{1000}$$

Refiriéndose de nuevo a la viga W 12 X 40 se usó antes, la constante de deflexión es



$$D_c = \left( \frac{30 F_b}{29 d} \right) = \frac{30}{29} \left( \frac{24}{11.94} \right) \\ = 2.1 \text{ pulg/pie}^2 \text{ (Tabla 5.1)}$$

y en el claro de 25 pies, la deflexión máxima sería

$$\Delta = D_c \frac{L^2}{1000} = 2.1 \left( \frac{25^2}{1000} \right) = 1.31 \text{ pulg}$$

Los valores listados de  $D_c$  en las tablas se calcularon basándose en  $F_b = 24 \text{ k/pulg}^2$  para acero A36 y  $F_b = 33 \text{ k/pulg}^2$  para aceros con  $F_y = 50 \text{ k/pulg}^2$ , o en los valores reducidos de  $F_b$  si las secciones no fueran compactas. Cuando la longitud no arriostrada está entre  $L_c$  y  $L_u$  (o  $C_b L_u$ ), el esfuerzo flexionante ( $F_b$ ) es de  $22 \text{ k/pulg}^2$  y la constante de deflexión listada se debe reducir multiplicándola por  $22/24$ , o por  $30/33$  si  $F_y = 50 \text{ k/pulg}^2$ .<sup>11</sup>

Para resumir y verificar, se hará referencia de nuevo a la viga W 12 X 40 con  $W_c = 830 \text{ kip-pie}$  y  $D_c = 2.1 \text{ pulg/pie}^2$ , y un claro simple de 25 pies. De estas constantes, la carga máxima calculada fue de 33.2 kips. Con esta carga, el esfuerzo flexionante máximo sería de  $24 \text{ k/pulg}^2$  y la máxima deflexión calculada de 1.31 pulg. Usando las fórmulas más conocidas,

$$M = \frac{WL}{8} = \frac{33.2(25)}{8} = 103.8 \text{ kip-pie}$$

$$f_b = \frac{M}{S} = \frac{103.8(12)}{51.9} = 24 \text{ k/pulg}^2 \text{ (verificado)}$$

$$\Delta = \frac{5}{384} \left( \frac{WL^3}{EI} \right)$$

$$\Delta = \left( \frac{5}{384} \right) \left[ \frac{33.2 (25)^3 12^3}{29,000(310)} \right] = 1.30 \text{ pulg} \\ \text{(verificado)}$$

<sup>11</sup> Si la sección no es compacta, el denominador en la reducción de la relación debe ser la  $F_b$  calculada con la fórmula de transición. En el caso de secciones acanaiadas, la  $F_b$  siempre es  $22 \text{ k/pulg}^2$  (para vigas con apoyo lateral); las constantes en las tablas reflejan este hecho, de modo que nunca se requieren ajustes.

### Ejemplo 1

Una viga simple de piso de acero A36 y claro de 17 pies tiene una carga uniforme sobrepuesta de 2000 lb por pie. Tiene apoyo lateral completo. Diseñar la viga usando datos contenidos en la tabla 5.1.

### Solución

1. Determinar la constante de carga uniforme requerida.

$$W_c = 2(17)17 = 578 \text{ kip-pie}$$

2. Seleccionar una sección de viga de prueba. En la tabla 5.1, elegir la sección de menor peso con una constante ligeramente mayor que 578. Elegir la viga W 12 X 30.
3. Revisar la selección. Calcular la constante requerida incluyendo el peso de la viga.

$$W_c = 2.03(17)17 = 587 \text{ kip-pie}$$

Como  $587 < 618$ , la viga es segura ante la flexión.

4. Revisar el cortante. En la tabla 5.1, la viga W 12 X 30 tiene un claro de cortante ( $L_v$ ) de 6.6 pies, el cual es menor a 17 pies, y la flexión es determinante. Asimismo, como el valor  $R$  listado es de 31.2 kips y es mayor que la reacción de la viga cargada,  $2.03(17)/2 = 17.3$  kips, y un apoyo de  $3\frac{1}{2}$  pulg de longitud en el extremo es adecuado. (Usualmente, un apoyo de  $3\frac{1}{3}$  pulg de longitud se considera el mínimo.)
5. Calcular la deflexión máxima. En la tabla 5.1, la viga W 12 X 30 tiene una constante de deflexión ( $D_c$ ) de 2.0.

$$\Delta = \frac{587}{618} (2.0) \frac{17^2}{1000} = 0.55 \text{ pulg.}$$

Asimismo, si la relación entre carga viva y carga total fue de, por ejemplo, 0.75, la deflexión por carga viva sería  $0.75(0.55) = .41$  pulg.

Si esta deflexión no se considera excesiva (la real es menor que la limitante  $L/360 = 0.60$  pulg), y no hay objeciones para un peralte de viga de 12 pulg, se adoptaría la viga W 12 X 30.

La viga más económica se puede encontrar buscando vigas progresivamente más ligeras que también sean adecuadas. En las tablas de diseño del Manual AISC (octava edición) para secciones W 16, el lector debe verificar que una viga W 16 X 26 también cubrirá los requisitos establecidos en este ejemplo. Si no hubiera restricción para el peralte debido a la altura del plafón u otras exigencias de espacio libre se usaría la viga W 16 X 26.

### Ejemplo 2

En la tabla 5.1 calcular la carga uniforme total segura, incluyendo el peso de la viga, que una viga W 12 X 26 podrá sostener sobre un claro de 17 pies si tiene arriostramiento lateral solamente en el centro del claro.

### Solución

1. La longitud máxima no arriostrada en este caso es igual a la mitad del claro de 17 pies, o sea  $8\frac{1}{2}$  pies.
2. En la tabla 5.1 la  $L_c$  para esta sección es de 6.9 pies. Sin embargo, la longitud no arriostrada de  $8\frac{1}{2}$  pies es menor que el valor de  $L_u$  de 9.4 pies. Por lo tanto, la constante de carga uniforme que aparece en la lista se debe modificar por la relación  $22/24$ , es decir,

$$W_c = \frac{22}{24} (534) = 489.5$$

y la carga segura es

$$W = \frac{489.5}{17} = 28.8 \text{ kips}$$

**Equivalentes de carga concentrada.** Aunque las tablas de diseño están preparadas para vigas que soportan cargas uniformemente distribuidas, también se pueden usar para otros tipos de cargas, ya que se puede encontrar una carga uniforme equivalente. Por ejemplo, una viga apoyada lateralmente soportará una sola carga concentrada en el centro de su claro, igual a la mitad del valor de su carga uniforme. Esta relación se obtiene igualando la fórmula para momento flexionante máximo causado por una carga concentrada  $P$  en el centro del claro, a la de una carga uniforme  $W$  sobre el claro entero.

$$M(\text{máx}) \text{ carga concentrada} = \frac{PL}{4}$$

$$M(\text{máx}) \text{ carga uniforme} = \frac{WL}{8}$$

$$\frac{PL}{4} = \frac{WL}{8}$$

de lo cual

$$P = \frac{4WL}{8L} = \frac{W}{2}$$

Esto se puede plantear como

$$W = 2P$$

donde el número 2 se define como el coeficiente para obtener la carga uniforme equivalente. Por lo tanto, al diseñar en función de esta característica, es necesario multiplicar la constante de carga uniforme requerida ( $W_c$ ) por este coeficiente.

De manera similar se podría desarrollar un coeficiente de deflexión equivalente. La deflexión máxima para un claro simple con una carga concentrada en el centro, como se ve en la figura 4.14, es

$$\Delta = \frac{1}{48} \left( \frac{PL^3}{EI} \right)$$

Por conveniencia y analizándola visualmente, se puede factorizar para dar



$$\Delta = \frac{1}{12} \left( \frac{PL}{4} \right) \frac{L^2}{EI}$$

El término del centro entre paréntesis representa el momento máximo en el centro y se puede reemplazar por su equivalente, es decir,

$$M = \frac{F_b I}{d/2}$$

Simplificando y ajustando unidades de modo que  $L$  esté en pies

$$\Delta = \frac{1}{12} \left( \frac{F_b I}{d/2} \right) \frac{L^2 (12)^2}{EI} = \frac{24}{29} \left( \frac{F_b}{d} \right) \frac{L^2}{1000}$$

Comparando esta ecuación de deflexión máxima para carga concentrada con la de carga distribuida que se obtuvo antes, es decir,

$$\Delta = \left( \frac{30 F_b}{29 d} \right) \frac{L^2}{1000}$$

se ve que la única diferencia es el valor del numerador en el primer término, o sea 24 en comparación con 30. Por lo tanto, el coeficiente de deflexión viene a ser

$$\frac{24}{30} = 0.80$$

Cuando se calculan deflexiones usando la tabla de diseño de cargas uniformes es necesario multiplicar la constante de deflexión por este coeficiente si la carga es concentrada en el centro del claro. En la figura 5.19 se dan los coeficientes de carga y deflexión para tres tipos de carga concentrada, que se usan con frecuencia en soluciones de marcos. Se pueden desarrollar coeficientes similares para cargas aún más complejas; sin embargo, la solución de estos problemas por medio de coeficientes implica realmente mucho más trabajo que la aplicación directa del procedimiento básico de diseño de vigas. El Manual AISC contiene una "Tabla de equivalentes de carga concentrada" más completa. También se podrían desarrollar coefi-

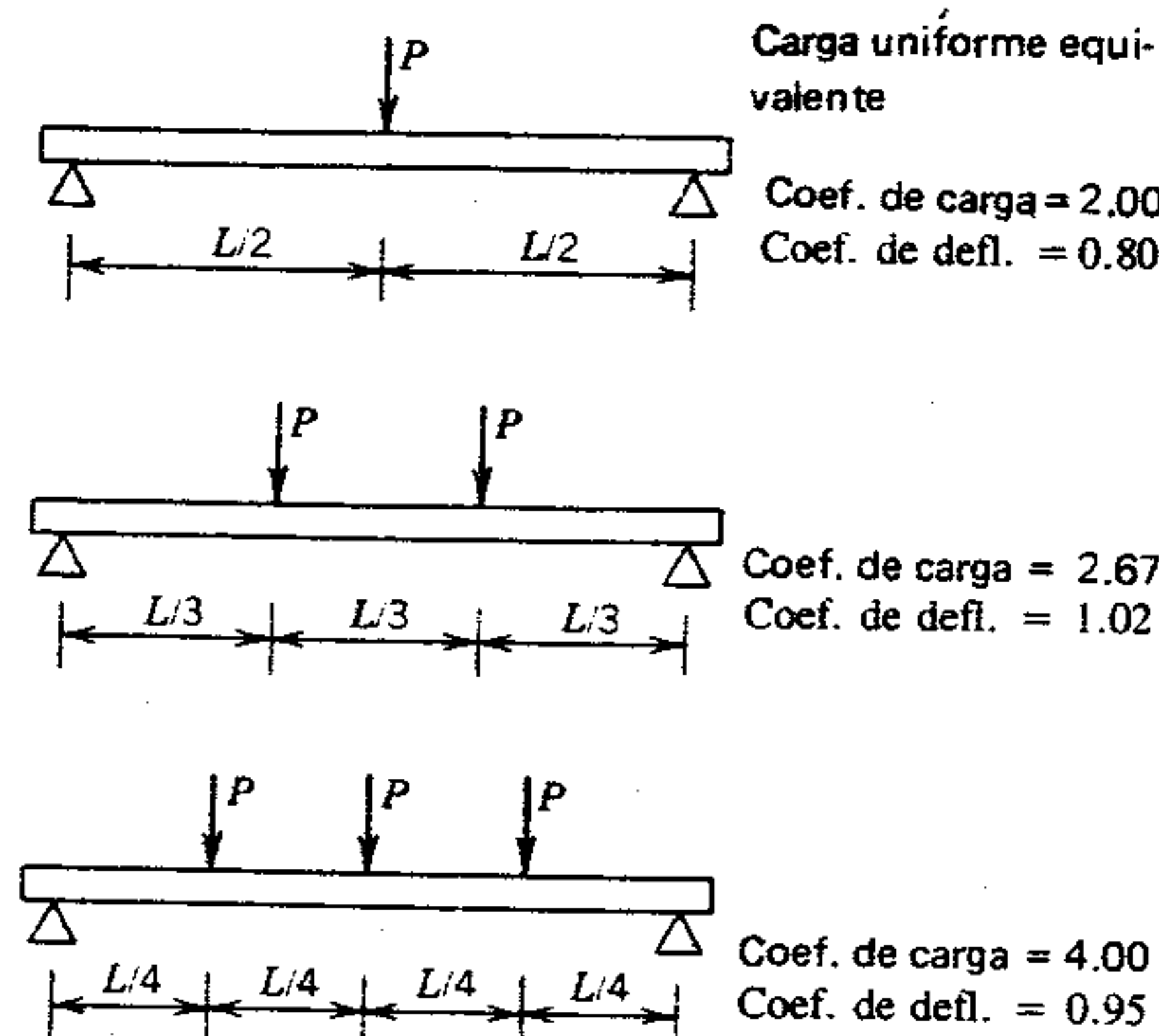


Figura 5.19 Equivalentes de carga concentrada.

cientes para esfuerzo cortante, pero como éste muy pocas veces es determinante en el diseño, no se recomienda su uso. No obstante, siempre se debe revisar el esfuerzo cortante antes de determinar que una viga es segura. En los siguientes ejemplos se muestra el uso de coeficientes de carga, junto con las tablas de diseño de vigas.

### Ejemplo 3

En las tablas de diseño de vigas del AISC, seleccionar una sección  $W$  que soporte cargas concentradas de 7 kips aplicadas en cada tercio de su longitud, y una carga uniforme de 19 kips (incluyendo un margen para el propio peso) sobre todo su claro de una viga de piso de 18 pies apoyada lateralmente.

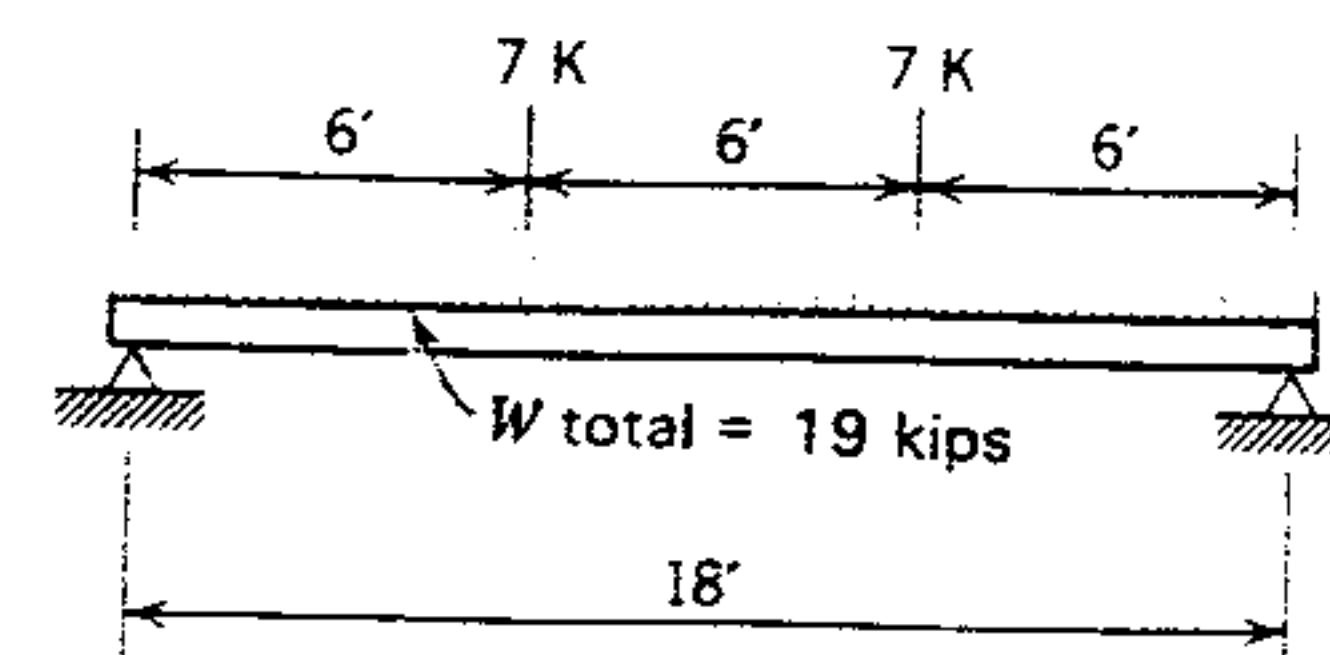


Figura 5.20

### Solución

1. Trazar el diagrama de cargas de la viga (figura 5.20).
2. Véase la figura 5.19 para los coeficientes de carga y deflexión para cargas concentradas iguales en cada tercera partes del claro (2.67 y 1.02, respectivamente).
3. Calcular la constante de carga uniforme requerida.

$$W_c = 2.67(7)18 + 19(18) = 336.4 + 342 = 678.4 \text{ kips/pies,}$$

4. Seleccionar la viga de la tabla 5.1 (ya se ha tomado en cuenta el propio peso de la viga). Elegir la viga  $W 12 \times 35$  con una  $W_c = 730$  kip-pie.
5. Revisar esfuerzo cortante. En la figura 5.20 se ve que la reacción máxima es de  $19/2 + 7 = 16.5$  kips, que es menor que el valor listado de  $V$  para la viga elegida; por lo tanto, la resistencia al cortante es adecuada. Obsérvese que  $L_v$  ya no es una constante válida en este ejemplo.
6. Revisar la deflexión. En la tabla 5.1,  $D_c = 2.0$ . La deflexión para la carga uniforme es

$$\Delta_1 = \frac{342}{730} \left( \frac{2.0(18)^2}{1000} \right) = 0.30 \text{ pulg.}$$

La deflexión para la carga concentrada es

$$\Delta_2 = \frac{336.4}{730} \left( \frac{1.02(2.0)18^2}{1000} \right) = 0.30 \text{ pulg.}$$

La deflexión total es  $\Delta = 0.30 + 0.30 = 0.60$  pulg.

### 5.10 GRÁFICAS DE VIGAS

la selección de formas  $W$  y  $M$  con diferentes longitudes no arriostradas. Se usan dos juegos separados de gráficas: uno para el acero A36 y otro para aceros con  $F_y = 50$  k/pulg<sup>2</sup>. En la figura 5.21 se muestra una gráfica típica del acero A36. Se puede ver que el momento resistente permisible de la

mayoría de las formas roladas  $W$  y  $M$  está trazado verticalmente para valores correspondientes de  $L_b$ , trazados horizontalmente. No aparecen algunas formas pesadas  $W 14$  porque su uso principal es como columnas.

Estas gráficas son importantes auxiliares para el diseño porque muestran el perfil de momento resistente de varias formas con grandes rangos de longitudes sin apoyo, permitiendo al diseñador observar a la vez diversas secciones adecuadas. Las longitudes no arriostradas en pies son para el patín a compresión. En todos los casos,  $C_b$  tiene el valor conservador de 1.0. Si hay alguna razón para creer que se puede hacer una mejor elección mediante el cálculo de valores precisos de  $C_b$ , se pueden seguir los procedimientos generales de las secciones 5.6 y 5.7, o bien, se puede hacer un ajuste en las especificaciones de longitud no arriostrada.

En la sección 5.6 se describe el efecto de  $C_b$  sobre  $L_u$  de una sección y su dependencia en caso de que la sección tenga proporciones tales que el pandeo o la torsión sean determinantes. La torsión es determinante en la mayoría de las secciones laminadas; por lo tanto, se sugiere que se identifiquen aquellas pocas secciones en que el pandeo es determinante. En la figura 5.21 sólo hay una, la  $W 16 \times 26$ . Por lo tanto, en todas las demás secciones, la longitud real no arriostrada se puede dividir por  $C_b$  cuando se fije la longitud a lo largo de la parte inferior de la gráfica. Si no, la longitud no arriostrada se podría dividir por  $\sqrt{C_b}$  antes de usar la gráfica. Estos ajustes se aplican únicamente a aquellas partes de la curva en que el esfuerzo es  $\leq 0.6F_y$ .

Se puede aprender bastante si se traza el perfil del momento de una sola forma de valores crecientes de  $L_b$ . Esto se hará con la  $W 14 \times 26$  que se muestra en la figura 5.21. Esta es una forma compacta y, si tiene apoyo lateral adecuado,  $F_b = 24$  k/pulg<sup>2</sup>. Por lo tanto,

$$M_R = SF_b = \frac{35.3}{12} (24) = 70.6 \text{ pie-kips}$$

Este momento resistente permanecerá constante a 70.6 pie-kips para valores de  $L_b$  de 0 a  $L_c$ , que es



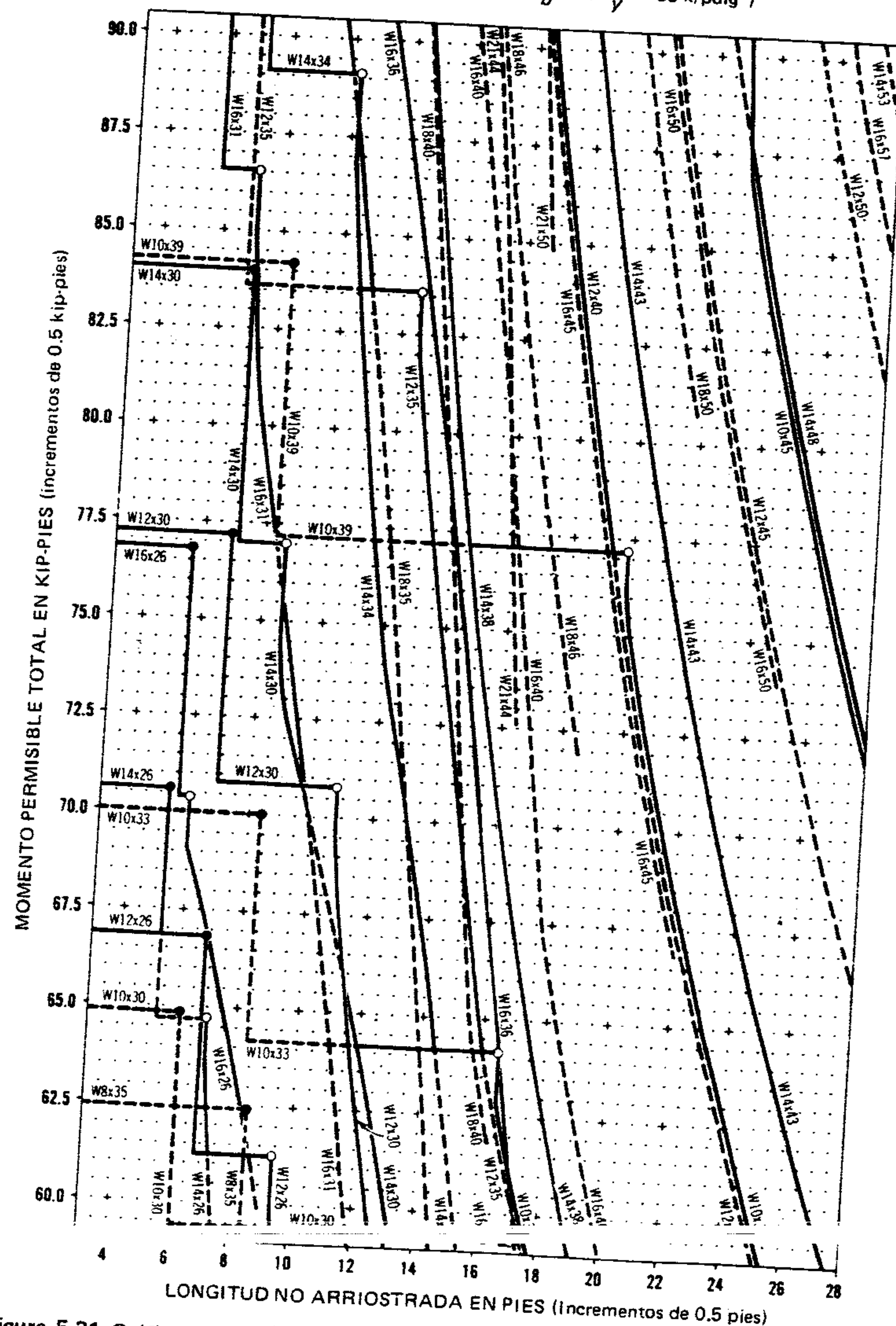


Figura 5.21 Gráfica típica de diseño de vigas (vigas sin apoyos laterales). Cortesía del American Institute of Steel Construction, "Manual of Steel Construction", octava edición, págs. 2-62.

$$M_R = SF_b = \frac{35.3}{12} (22) = 64.7 \text{ pie-kips}$$

Para longitudes no arriestradas mayores que 7.0 pies,  $F_b$  descende rápidamente. Su valor preciso se puede calcular con una de las tres fórmulas planteadas en la sección 5.7, a saber,  $F_{b1}$ ,  $F_{b2}$  o  $F_{b3}$ .

Después de calcular el momento flexionante máximo ( $M_b$ ) en pie-kips, y de calcular la longitud máxima no arriostrada del patín a compresión, se consulta la gráfica y se anota la intersección de las coordenadas. Cualquier curva de una que pase por encima de la intersección es satisfactoria. La curva más próxima de línea cerrada es la más económica en términos de peso de viga.

### Ejemplo 1

Tomando como base el momento flexionante, seleccionar (usando la gráfica de la figura 5.21) una viga de acero de 30 pies, que soporte una carga uniforme de 400 lb por pie, y cargas concentradas de 3 kips cada tercio de su longitud. La viga tiene apoyo lateral solamente en los puntos de aplicación de las cargas concentradas. El acero es A36. Revisar la sección elegida usando las especificaciones de claro-peralte  $F_v/800$ .

### Solución

- $$\begin{aligned} M_{\text{máx}} &= \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{3} \\ &= \frac{0.44(30)^2}{8} + \frac{3(30)}{3} \\ &= 49.5 + 30 = 79.5 \text{ pies-kips.} \end{aligned}$$

- $$d = \frac{F_y L}{800} = \frac{36(30)12}{800} = 16.2 \text{ pulg.}$$

- $$F_b = \frac{14}{16.2} (22) = 19.0 \text{ k/pulg}^2$$

- $$f_b = \frac{M}{S} = \frac{79.5(12)}{48.6} = 19.6 \text{ k/pulg}^2$$

Se ve que  $f_b$  es ligeramente mayor que el permisible, es decir, en un 3 por ciento, y se necesitará aplicar el criterio y juzgar la importancia de elegir la siguiente sección de mayor peso.

## PROBLEMAS

1. Una viga de acero A36 tiene 28 pies de longitud. Está simplemente apoyada pero tiene un vola-



- dizo de 8 pies en un extremo. Soporta una carga concentrada de 4 kips en el extremo del voladizo y una carga concentrada de 10 kips a la mitad de la distancia entre los apoyos. La viga elegida es una W 10 X 19. (Este es el problema 6 de la sección 5.7). Para evitar el aplastamiento del alma, determinar la longitud requerida de apoyo en el soporte que tenga la reacción mayor.
- Un miembro estructural descarga una carga vertical de 50 kips sobre el patín superior de una viga W 12 X 19 de acero A242. Determinar la longitud de apoyo requerido sobre el patín superior a fin de evitar el aplastamiento del alma. (La respuesta aparece en el apéndice G).
  - Con la tabla de Constantes de Carga Uniforme del Manual AISC, diseñar una viga de piso de acero A36 para cubrir un claro de 27 pies (apoyos simples). Soporta una carga muerta superpuesta de 500 lb por pie y una carga viva de 1 kip por pie a todo lo largo. La viga tiene apoyo lateral completo. Limitar la deflexión máxima por carga viva a  $L/360$ . (La respuesta se da en el apéndice G).
  - Usando la tabla de Constantes de Carga Uniforme del Manual AISC, diseñar una viga de acero A36 para cubrir un claro de 28 pies (simplemente apoyada). Soporta una carga uniforme de 500 lb por pie (incluyendo el propio peso de la viga) y tres cargas concentradas de 2 kips cada una, situadas en cada cuarta parte del claro. Tiene apoyo lateral en las reacciones y en cada cuarta parte del claro. Usar la especificación de claro-peralte  $F_y/800$ . (La solución en el apéndice G).
  - Usando la tabla de Constantes de Carga Uniforme del Manual AISC, diseñar una viga de piso (simplemente apoyada) de acero A588 para cubrir un claro de 26 pies. Soporta una carga muerta uniforme de 600 lb por pie (incluyendo el peso de la viga) y una carga viva concentrada de 10 kips en el centro del claro. La viga tiene apoyo lateral completo. Asimismo, limitar la deflexión máxima por carga viva a  $L/360$ .
  - Usando las gráficas de diseño de vigas del Manual AISC, diseñar una viga (simplemente apoyada) de acero A36 para cubrir un claro de 20 pies. Soporta una carga uniforme de 500 lb por pie (incluyendo el peso de la viga) y una carga concentrada de 10 kips situada a 8 pies de la reacción izquierda. Tiene apoyo lateral en las

reacciones y en el punto de la carga concentrada solamente. (La respuesta se da en el apéndice G).

- Usando las gráficas de diseño de vigas del Manual AISC, diseñar una viga de acero A36 de 27 pies de largo, con un claro simple de 18 pies, y un voladizo de 9 pies a partir de la reacción derecha. La viga soporta una carga uniforme de 1.8 kips por pie (incluyendo su propio peso). Tiene apoyo lateral solamente en las reacciones y en el extremo del voladizo.
- Usando las gráficas de diseño de vigas del Manual AISC, diseñar una viga de piso de acero A588, que estará simplemente apoyada sobre un claro de 27 pies y soporta una carga muerta de 500 lb por pies (incluyendo su propio peso) y dos cargas vigas concentradas iguales de 10 kips cada una situada en cada tercio de su claro. Tiene apoyo lateral solamente en las reacciones y en las cargas de 10 kips. Se recomienda la relación claro-peralte  $F_y/800$  y la deflexión máxima por carga viva está limitada a  $L/360$ . (La solución aparece en el apéndice G).

### 5.11 SECCIONES ASIMÉTRICAS

Varias de las secciones laminadas estándar son asimétricas respecto a uno o ambos ejes, es decir, los ángulos, las tes y las canales. Y cuando una sección de viga se compone de secciones laminadas y/o placas, la forma general resultante puede ser asimétrica. En ciertas aplicaciones, estas secciones pueden ser tanto necesarias como convenientes.

Por ejemplo, la Te se adapta muy bien a la construcción de techos en que el material de cubierta es de placas o losas precoladas. Las Tes con las almas hacia arriba se pueden usar como largueros; luego con las unidades de cubierta precoladas se puede cubrir el claro entre los largueros, apoyándose en los patines, quedando separadas por el alma.

res, se usan frecuentemente como dinteles para soportar mampostería sobre vanos.

La viga que es asimétrica en relación a su eje de flexión no es económica en el sentido en que este término se ha empleado hasta aquí. Debido a que el eje neutro de una sección como ésta no se encuentra a mitad del peralte, las fibras superior e

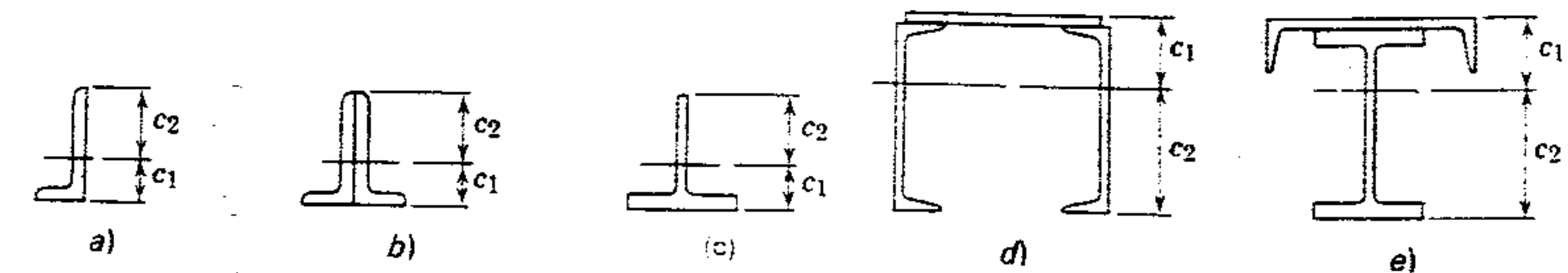


Figura 5.22 Secciones asimétricas.

inferior no estarán sometidas al mismo esfuerzo (figura 5.22). Se recordará que el módulo de sección es igual al momento de inercia dividido entre la distancia del eje neutro a la fibra extrema más distante. Para las secciones de la figura 5.22, éste es  $I/c_2$ . Si  $c_2$  es dos veces mayor que  $c_1$ , es evidente que el esfuerzo de la fibra extrema de cualquier sección dada será el doble del de la otra cara; es decir, cuando la fibra extrema de una sección de acero A36 está esforzada hasta un límite permisible de 24,000 lb/pulg<sup>2</sup>, la fibra de la otra cara estará esforzada sólo a 12,000 lb/pulg<sup>2</sup>.

En las siguientes secciones se tratará detalladamente el diseño de secciones asimétricas.

### 5.12 DINTELES

Siempre que hay un vano en un muro de mampostería, se debe aplicar algún medio para que la abertura o vano soporten la mampostería. Las vigas que se usan para este propósito se denominan dinteles y se usan más comúnmente sobre aberturas de puertas y ventanas.

En la figura 5.23 se muestran varios tipos. Los de a) y b), contruidos con ángulos, son para vanos relativamente pequeños en muros de ladrillo de 8 a 12 pulgadas. Algunas veces, los

ángulos, que se colocan espalda con espalda, se sueldan o atornillan entre sí, pero habitualmente son independientes. La viga W y la placa que se muestran en (c) son para vanos grandes.

En la mayoría de los casos, los dinteles no se diseñan en función del torcimiento o la torsión; por lo tanto, se debe hacer un esfuerzo especial para centrar la carga sobre ellos, o lo más cercana posible, al centroide de la sección del dintel.

No se sabe con certeza cuánta de la mampostería situada inmediatamente encima de un vano es soportada por el dintel. Cuando la altura de mampostería encima del vano es cuando menos igual al claro del dintel y cuando también hay un pilar entre los vanos, se puede suponer que habrá una acción de arco en la mampostería que transmita una parte de la carga al muro cerrado adyacente. La experiencia indica que en estos casos por lo general el dintel soporta sólo una pequeña sección triangular del muro (figura 5.24). Se supone que la altura de este triángulo es igual a cerca de la mitad del claro del dintel; formándose un triángulo isósceles con ángulos de base de 45° (figura 5.26).

En casos como el que se muestra en la figura 5.25a, donde la mampostería no alcanza la suficiente altura para que se forme una carga triangular, la mampostería que se soportará será la mostrada en el área sombreada. En casos similares como el

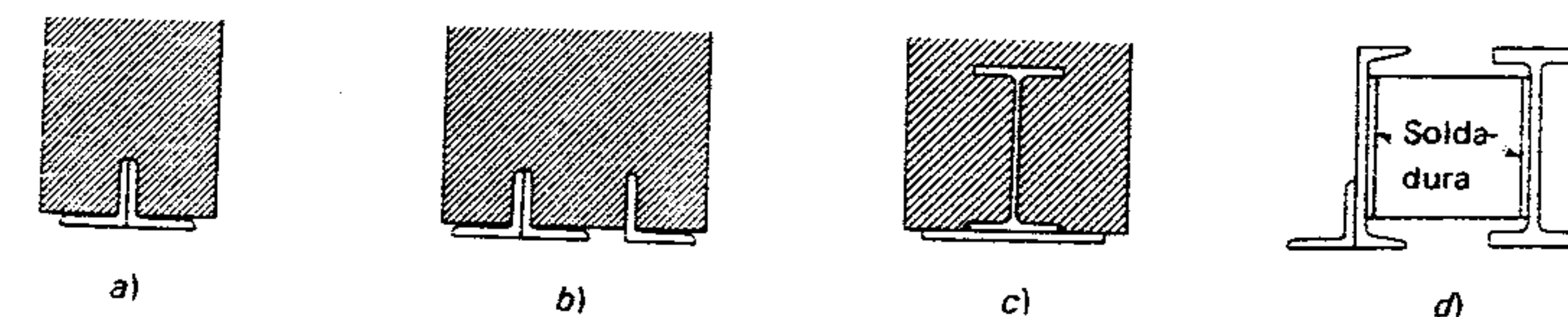


Figura 5.23 Dinteles típicos.



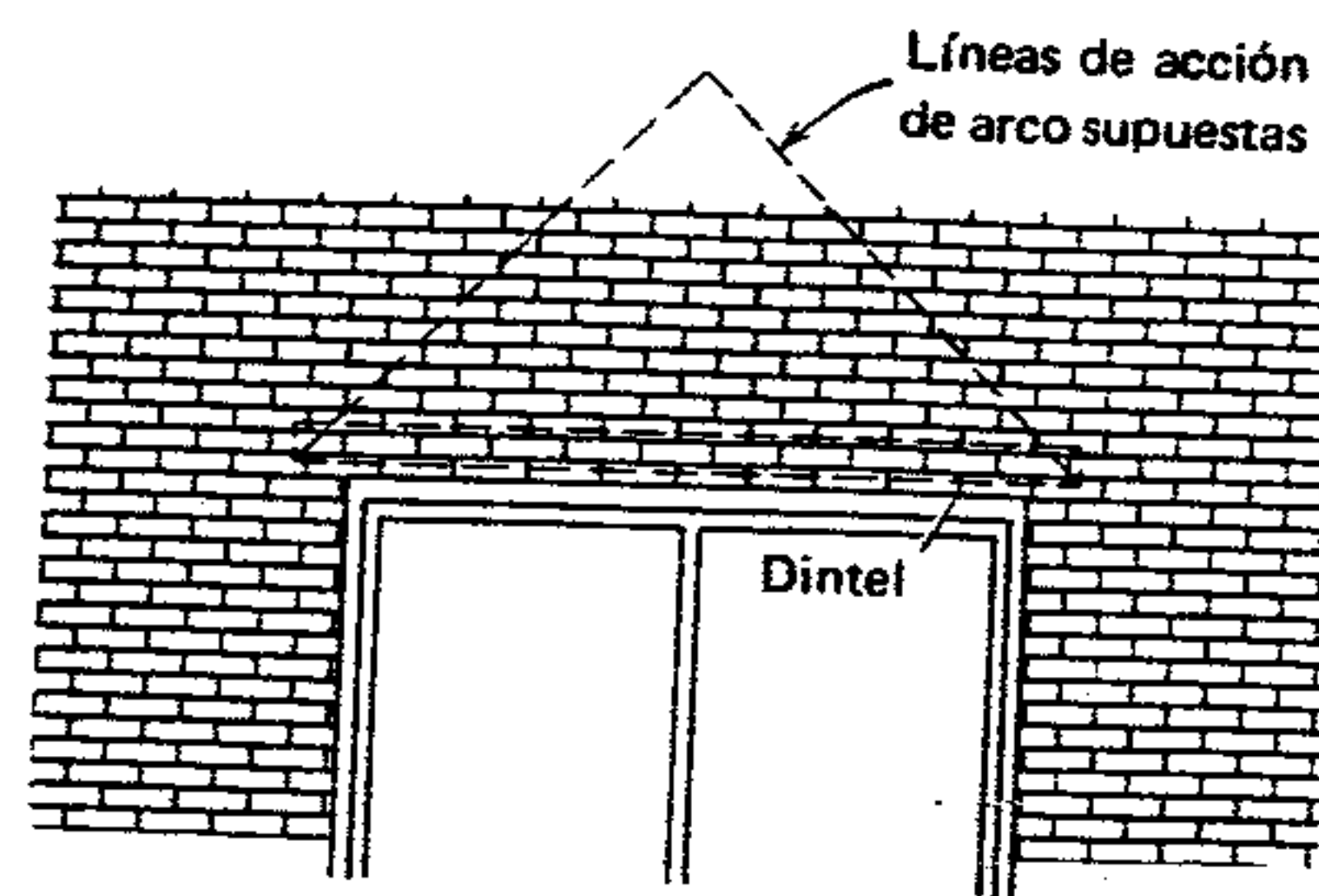


Figura 5.24 Efecto de arco sobre una ventana en un muro de ladrillo.

de la figura 5.25b, las aberturas de encima también evitarían cualquier acción de arco en la mampostería. Debe tenerse presente que un dintel puede recibir cierta carga del piso superior y este peso se debe agregar al de la mampostería que se va a soportar.

Habitualmente, los dinteles se diseñan mucho más grandes que lo necesario para resistir los esfuerzos flexionantes, con el fin de proporcionar suficiente superficie de soporte para la mampostería. Por ejemplo, las alas salientes de los ángulos de la figura 5.32a serían normalmente de cuando menos  $3\frac{1}{2}$  pulg. La altura de las alas verticales, por supuesto, variará con el claro. Los dinteles sobre vanos de muros de ladrillo deben extenderse cuando menos 4 pulgadas más allá del paño de cada lado del vano. Para grandes vanos, usualmente se necesita una mayor longitud de apoyo que se debe calcular (sección 5.16).

Siempre habrá alguna duda acerca de la eficacia del apoyo lateral que el muro proporciona al dintel.

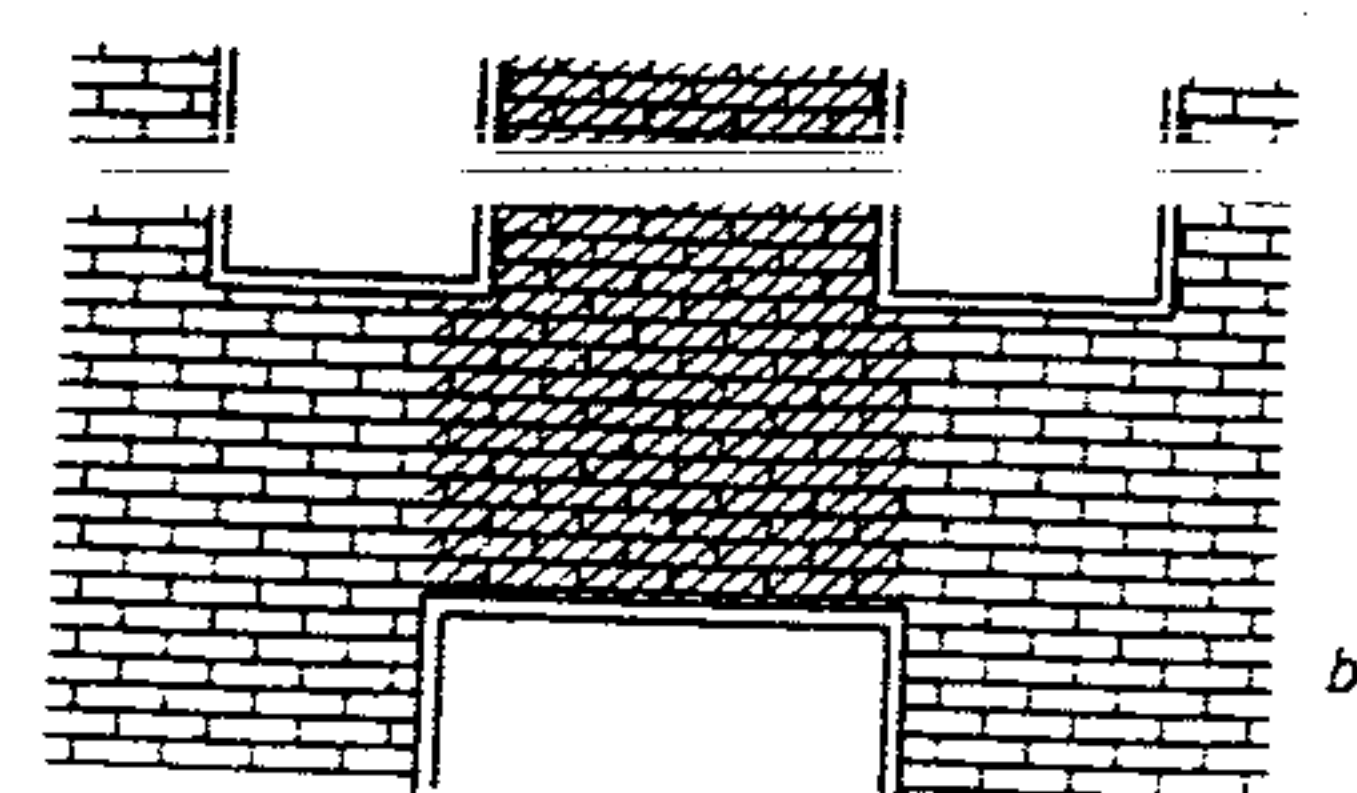
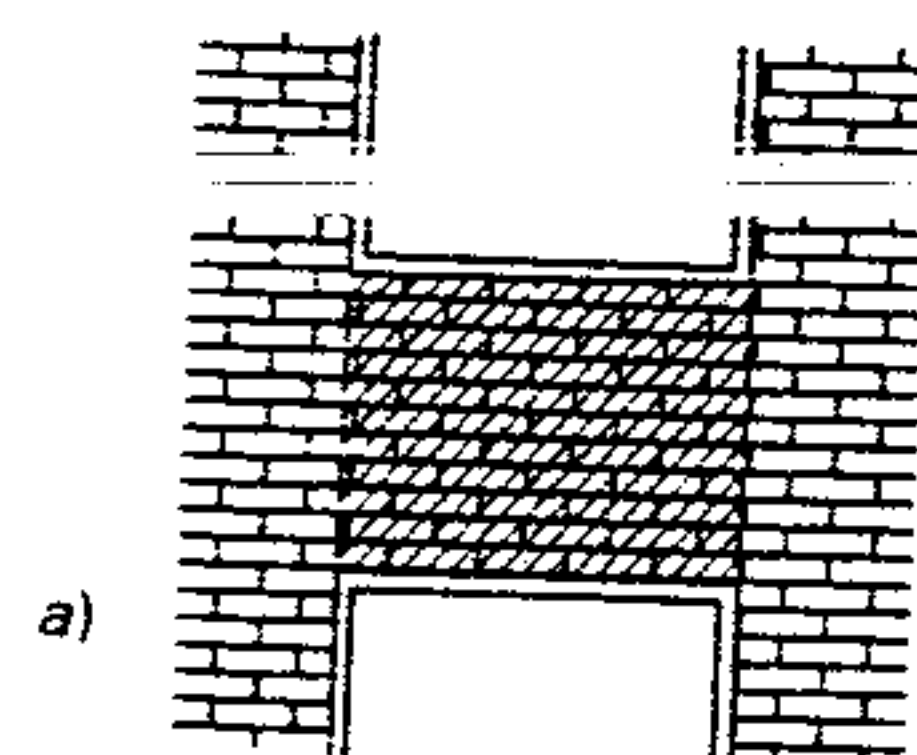


Figura 5.25 Aberturas en muros de ladrillo.

Es cierto que hay poco soporte lateral mientras no se ha fraguado el mortero, e incluso después de fraguado, la capacidad de la mampostería para proporcionar apoyo lateral al dintel dependería de su grosor y de la proximidad de los pisos, techos, pilastras, etc.

Cuando no existe apoyo lateral o se duda sobre su capacidad, se puede usar una viga de patines con una placa en la parte inferior para recibir la mampostería, como se ve en la figura 5.23a, y diseñarla del modo que se muestra en la sección 5.7. Por otra parte, los ángulos que no tienen patín a compresión son completamente diferentes. Las cargas permisibles que se dan en el Manual AISC están calculadas con base a una  $F_b$  que no excede de  $0.60F_y$ , y se deben reducir cuando no tienen apoyos laterales. Estos dinteles requieren de un cálculo especial.

### Ejemplo 1

Diseñar un dintel con dos ángulos de acero A36 para soportar un muro de ladrillo de 8 pulgadas

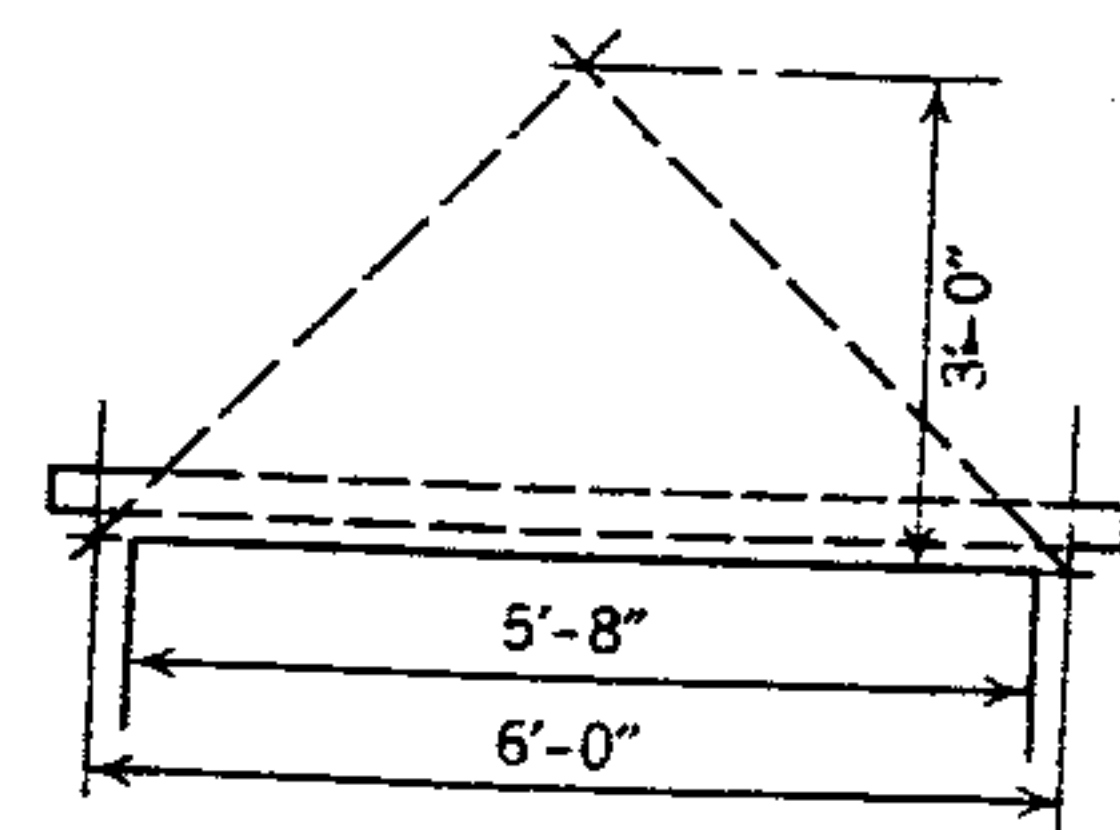


Figura 5.26 Ejemplo 1.

sobre un vano de 68 pulgadas. Las características son tales que se puede suponer que la carga es triangular, pero los ángulos no están unidos entre sí. Se supone que el peso del muro de ladrillo es de 130 lb por pie cúbico. Suponer que hay apoyo lateral. El dintel tendrá apoyos de 4 pulgadas en los muros laterales (figura 5.26).

### Solución

*Nota:* En el triángulo de carga, las distancias se basan en el vano del dintel, es decir, de centro a centro de los apoyos.

1. Calcular el claro y el área de muro de ladrillo que se va a soportar.

La longitud del apoyo es de 4 pulg; por lo tanto, las reacciones estarán en el centro de éste, y el claro es de  $68 + 2 + 2 = 72$  pulg. o sea 6 pies. El triángulo tiene una base de 6 pies y una altura de 3 pies. Por tanto, el área de muro soportada es

$$\frac{6(3)}{2} = 9.0 \text{ pies cuadrados}$$

2. Si el muro de ladrillo pesa 130 lb por pie cúbico, el peso de una sección de 1 pie cuadrado es de  $8/12(130)$ , o sea 86.7 lb.

Y el peso total es  $9.0(86.7) = 780$  lb

3. El momento flexionante máximo estará en el centro del claro. Cada reacción es de 390 lb. Tomando momentos con respecto al centro del claro,

$$M = [390(3)] - [390(\frac{1}{3})3] \\ = 780 \text{ pie-lb, ó } 9360 \text{ pulg-lb}$$

4. Calcular el módulo de sección requerido y elegir el tamaño del ángulo.

$$F_b = 0.60(F_y) \approx 22,000 \text{ k/pulg}^2$$

$$S = \frac{9360}{22,000} = 0.43 \text{ pulg}^3$$

Como se necesitan dos ángulos, el módulo de sección para cada uno debe ser

$$\frac{0.43}{2} \approx 0.22 \text{ pulg}^3$$

Para dar suficiente apoyo al ladrillo, considérense sólo los ángulos con un ala saliente de  $3\frac{1}{2}$  pulg. o mayor.

En el Manual AISC, el ángulo más pequeño de la lista que cumple con estos requisitos tiene dimensiones de  $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$  pulg. y un módulo de sección de  $0.412 \text{ pulg}^3$ . Se elige este ángulo.

Varios diseñadores tienen un ángulo mínimo estándar que usan para dinteles, como el de  $3\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5}{16}$ , o el de  $3\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{8}$ , con las alas cortas colocadas espalda con espalda. En estos casos, el diseño se efectúa para determinar si el dintel estándar tiene la resistencia necesaria.

### 5.13 SECCIONES COMPUESTAS

A menudo, resulta más económico reforzar secciones W o S con cubreplacas en las partes de momento flexionante máximo, en vez de colocar una sección más pesada sobre todo el claro lo cual puede hacer más pesada la sección en todo el claro. Cuando se usan estas placas se obtiene una sección compuesta simétrica, como la ilustrada en la figura 5.27. En las figuras 5.28a y b se muestran secciones compuestas asimétricas.

Para investigar la resistencia de secciones compuestas, es necesario determinar primero el momento de inercia de la sección respecto al eje de flexión. Los métodos para calcular el  $I$  de áreas planas se presentan en libros de texto estándar sobre mecánica, y en el Manual AISC se dan fórmulas para varias formas geométricas. Por supuesto, en el Manual también se dan los  $I$  de formas laminadas en las tablas de propiedades.

**Secciones simétricas.** La sección compuesta sencilla de la figura 5.27 está integrada por una forma S  $15 \times 50$  con dos placas de  $7 \times 1$  pulg. soldadas a sus patines. El momento de inercia de la sección compuesta respecto a su eje neutro es igual a la



suma de los momentos de inercia de todos los miembros respecto al mismo eje. El primer paso para determinar el  $I$  de la sección compuesta es encontrar el momento de inercia de la forma S 15 X 50, ya que su eje de gravedad coincide con el eje neutro de la sección compuesta. En las tablas de "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC se encuentra que éste es de 486 pulg<sup>2</sup>. El  $I$  de una de las placas respecto a su propio eje de gravedad paralelo al lado más largo ( $g\bar{g}$  en la figura 5.27), se encuentra con la fórmula para secciones rectangulares.

$$I = \frac{bt^3}{12} = \frac{7(1)^3}{12} = 0.583 \text{ pulg}^4$$

Ahora es necesario encontrar el momento de inercia de la placa con respecto al  $EN$  de la sección compuesta. Esto se hace por medio de la *ecuación de transferencia*, o de los ejes paralelos,<sup>12</sup> la cual se puede expresar como sigue: El momento de inercia de una sección transversal respecto a cualquier eje paralelo a un eje que pase por su propio centro de gravedad, es igual al momento de inercia de la sección transversal respecto a su pro-

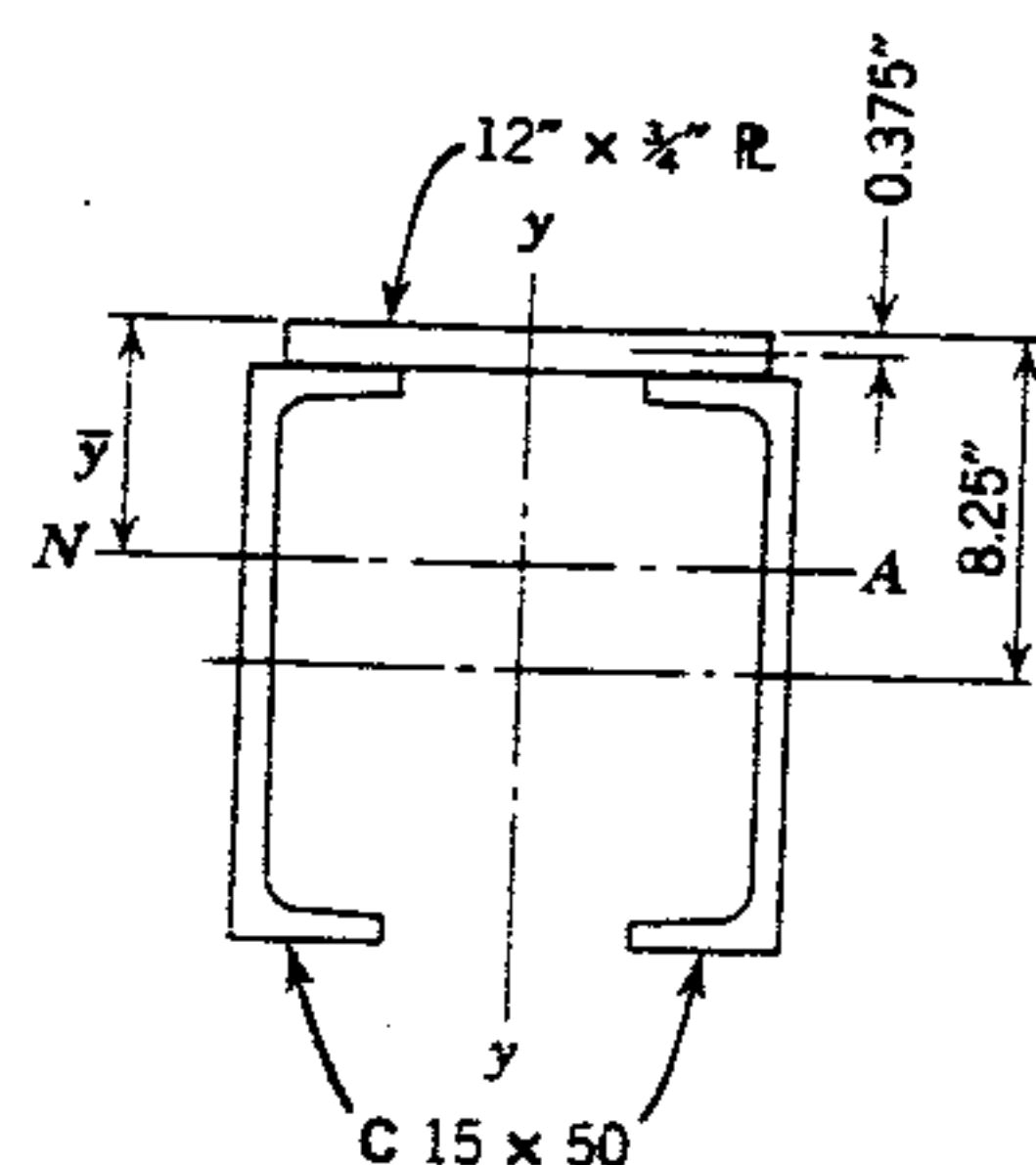


Figura 5.28 Secciones compuestas asimétricas.

<sup>12</sup> Para obtener la ecuación de los ejes paralelos, consúltese cualquier texto sobre mecánica de materiales.

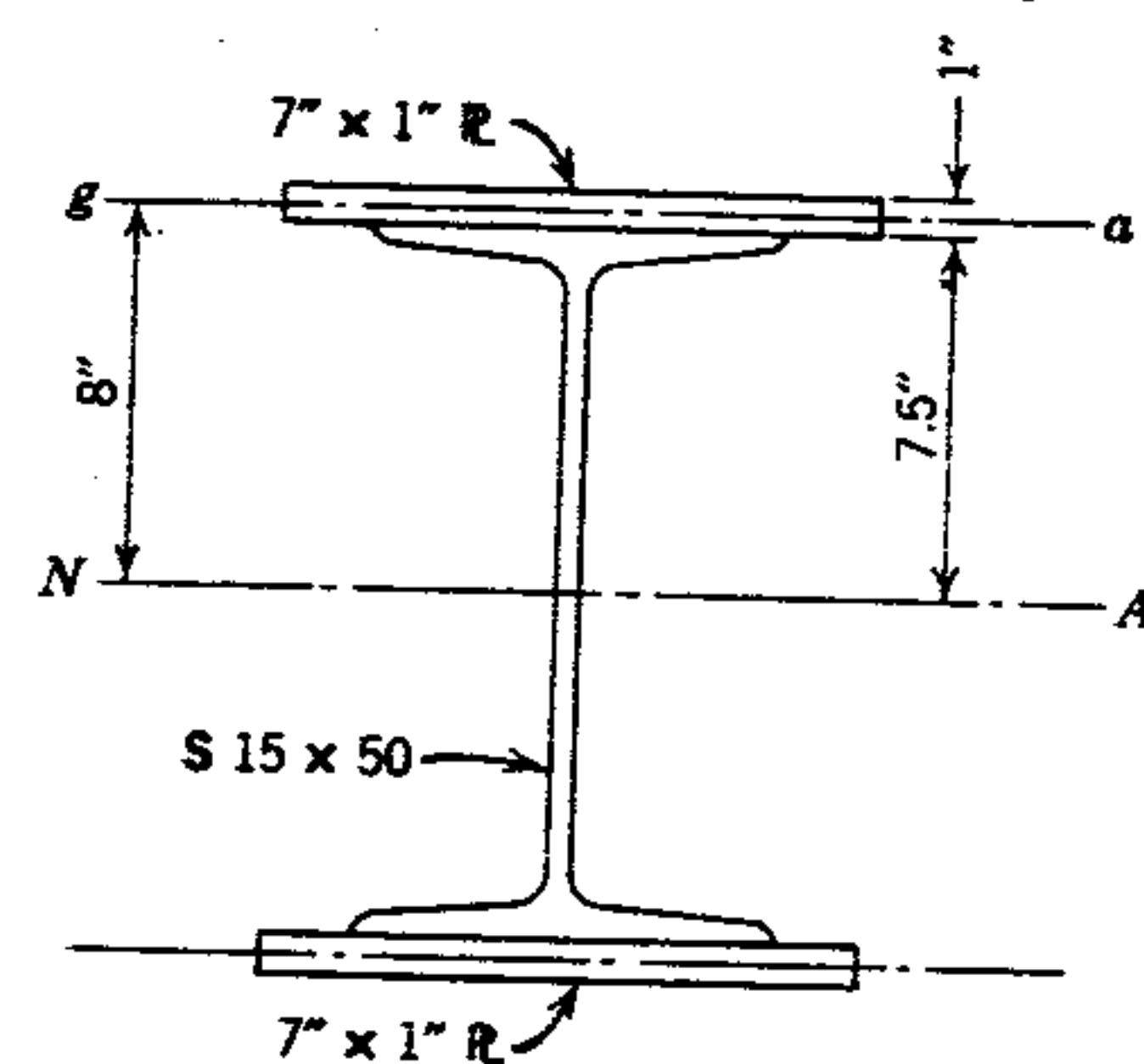


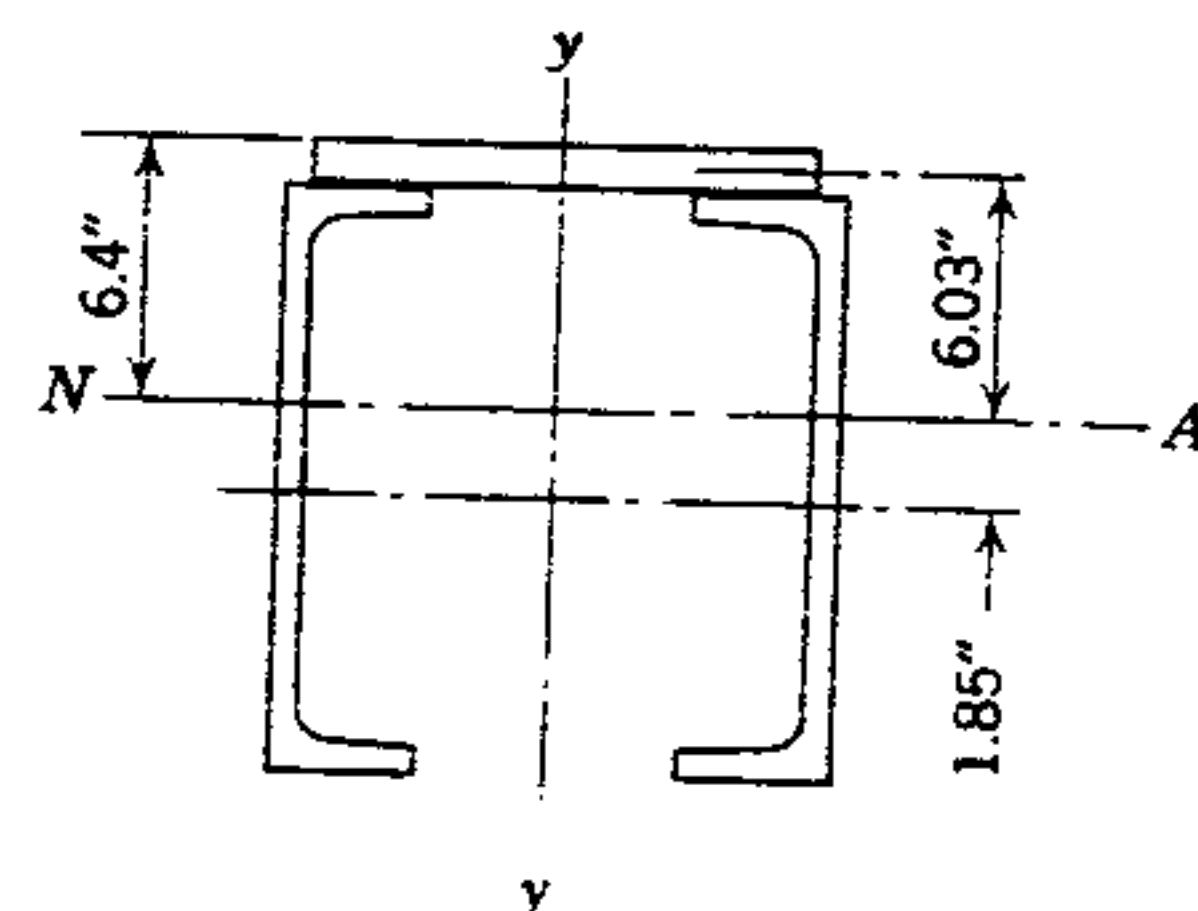
Figura 5.27 Secciones compuestas simétricas.

pio eje de gravedad más su área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes, o bien, expresado matemáticamente,

$$I = I_0 + Az^2$$

donde:

- $I$  = momento de inercia de la sección transversal respecto al eje requerido.
- $I_0$  = momento de inercia de la sección transversal respecto a su propio eje de gravedad paralelo al eje requerido.
- $A$  = área de la sección transversal.
- $z$  = distancia entre los dos ejes paralelos.



b) Datos para el cálculo de  $I$ .

Aplicando esta ecuación a las dos placas de la sección compuesta de la figura 5.27,

$$\begin{aligned} I &= 2[I_0 + Az^2] \\ &= 2[0.583 + 7(8)^2] \\ &= 2[0.583 + 448] = 2(448.583) \\ &= 897.166 \text{ or } 897 \text{ pulg}^4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el momento de inercia de toda la sección compuesta respecto a su eje neutro  $EN$  es  $486 + 897 = 1383 \text{ pulg}^4$ .

En esta explicación es evidente que el momento de inercia ( $I_0$ ) de una placa delgada respecto a su propio eje de gravedad se puede omitir cuando ese eje es paralelo al lado más largo de la placa. Sin embargo, cuando los miembros que se están considerando son ángulos u otras formas, el valor de  $I_0$  es importante y no se debe omitir.

**Secciones asimétricas.** Para determinar el momento de inercia de una sección asimétrica con respecto a su eje de flexión ( $EN$ ), se necesita localizar primero el centro de gravedad de toda la forma compuesta, ya que éste no se puede establecer mediante inspección como en las formas simétricas. De la mecánica se recordará que el centro de gravedad de un área es el punto respecto al cual el momento estático de todas las áreas componentes es igual a cero, y éste se puede encontrar igualando el momento del área de toda la sección compuesta respecto a un eje de referencia dado a la suma de los momentos de todas estas áreas componentes respecto al mismo eje. Como la sección ilustrada en la figura 5.28 es simétrica respecto al eje vertical, el c. g. estará en algún punto a lo largo de la línea  $y-y$ . Si cada uno de los dos canales es C 15 X 50, y la placa de  $12 \times \frac{1}{4}$  pulg, los diversos brazos de momento respecto al eje superior de la placa.

Como se indica en la figura 5.28a; donde la distancia desde el eje de gravedad de los canales hasta el eje superior de la placa, es 8.25, la distancia correspondiente desde el eje de gravedad de la placa es 0.375, y  $\bar{y}$  la distancia desde la parte superior de la placa al eje de gravedad ( $EN$ ) de la sección entera.

En las tablas de "Propiedades y dimensiones" del AISC, el área de una forma C 15 X 50 es 14.7 pulg<sup>2</sup>, y el área de la placa es 9 pulg<sup>2</sup>. Por lo tanto, el área total es

$$A_t = 2(14.7) + 9 = 38.4 \text{ pulg}^2$$

Igualando los momentos de áreas

$$38.4\bar{y} = 2[14.7(8.25)] + 9(0.375)$$

$$\bar{y} = \frac{243 + 3.38}{38.4} = \frac{246.4}{38.4} \approx 6.4 \text{ pulg}$$

Con el centro de gravedad (en consecuencia, el eje neutro) localizado, el momento de inercia de la sección compuesta respecto al  $EN$  se puede calcular ahora usando la ecuación de transferencia que se explicó en esta sección. Las distancias  $z$  para la placa y los canales, necesarias para la ecuación de transferencia, se calculan como se ve a continuación y se registran en la figura 5.28b:

$$z (\text{placa}) = 6.40 - 0.375 = 6.03 \text{ pulg.}$$

$$z (\text{canales}) = 8.25 - 6.40 = 1.85 \text{ pulg.}$$

Luego, omitiendo el  $I_0$  de la placa,

$$\begin{aligned} z (\text{placa}) &= I_0 + Az^2 \\ &= 0 + 9(6.03)^2 = 327 \text{ pulg}^4 \end{aligned}$$

En las mismas tablas, el momento de inercia de una C 15 X 50 respecto a su propio eje de gravedad es 404 pulg<sup>4</sup>. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I (2 \text{ canales}) &= 2[404 + 14.7(1.85)^2] \\ &= 2[404 + 50] = 908 \text{ pulg}^4 \end{aligned}$$

Y, el momento de inercia de toda la sección compuesta respecto al  $EN$  es  $327 + 908 = 1235 \text{ pulg}^4$ .

Las secciones compuestas se determinan por medio de la relación  $S = I/c$ , donde  $c$  es la distancia del eje neutro a la fibra extrema flexionada. Para la sección simétrica de la figura 5.27,

$$S = \frac{I}{c} = \frac{1383}{8.5} = 163 \text{ pulg}^3$$



Para la sección asimétrica de la figura 5.28, se observará que el peralte total de los canales más la placa es de 15.75 pulg. Como la distancia del *EN* a la fibra superior fue de 6.4 pulg, la distancia correspondiente a la fibra inferior es  $15.75 - 6.4 = 9.35$  pulg. Este es el mayor de los dos valores, y por tanto corresponde a la distancia  $c_2$  de la figura 5.22d. Por lo tanto, en esta sección  $S$  es

$$S = \frac{I}{c} = \frac{1235}{9.35} = 132 \text{ pulg}^3$$

#### 5.14 TRABES ARMADAS

Aunque las vigas *W* más pesadas son adecuadas para los claros más grandes que se encuentran en la construcción de edificios, sin embargo las traveses armadas de placa se usan con frecuencia cuando hay grandes cargas sobre grandes claros. Esta característica se muestra en la figura 5.29 donde dos columnas interiores del primer y segundo pisos se han omitido para obtener un espacio despejado mayor en la planta baja. En la figura 5.30 se muestran secciones transversales típicas para traveses armadas tanto atornilladas como soldadas, y en la figura 5.31 se indica el uso de atiesadores de alma para evitar el pandeo de las placas del alma que son relativamente delgadas.

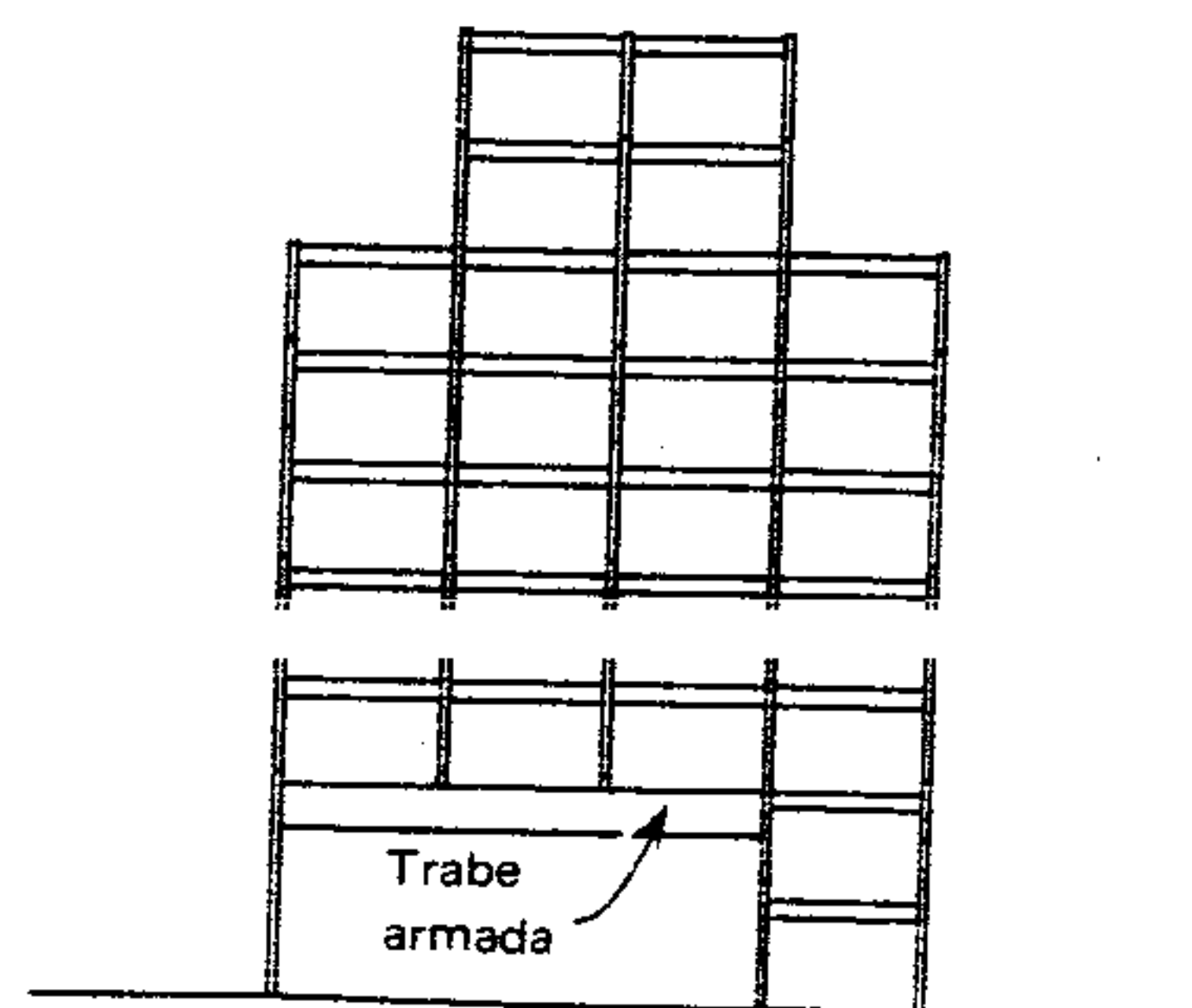


Figura 5.29 Sección transversal de un edificio.

En este texto no se incluyen procedimientos detallados para el diseño de traveses armadas de placa soldadas y atornilladas; sin embargo, la explicación sobre secciones compuestas en la sección anterior indica las bases para que las traveses armadas resistan la flexión, usando el método de momento de inercia total. En algunas especificaciones de diseño se indica todavía que las traveses armadas atornilladas se proporcionen con base al momento de inercia *neto*, es decir, el  $I$  bruto de la sección menos el  $I$  de los agujeros. Sin embargo, una extensa investigación ha confirmado que el método del área total es bueno, y éste es el procedimiento que se recomienda en la Especifica-

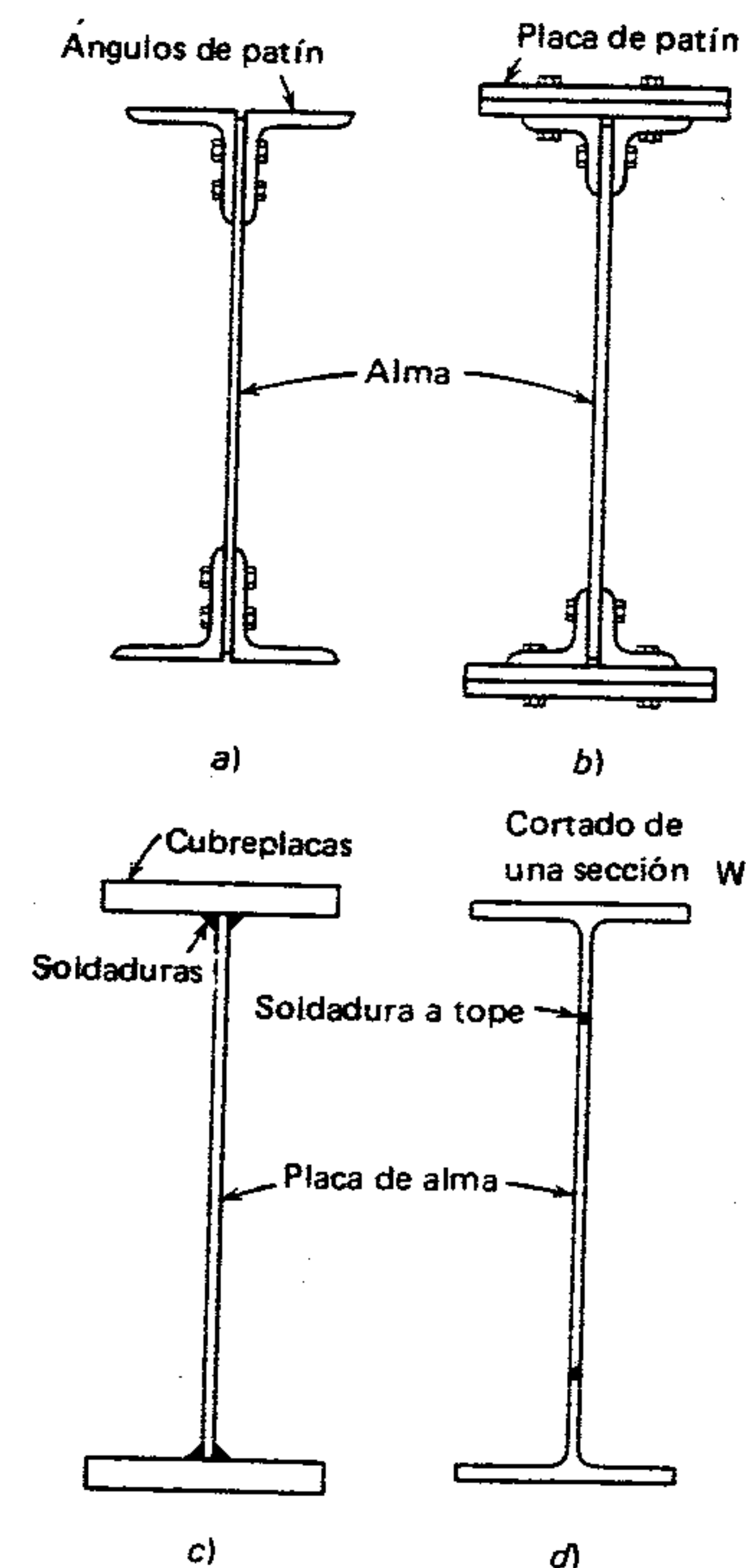


Figura 5.30 Secciones típicas de traveses armadas.

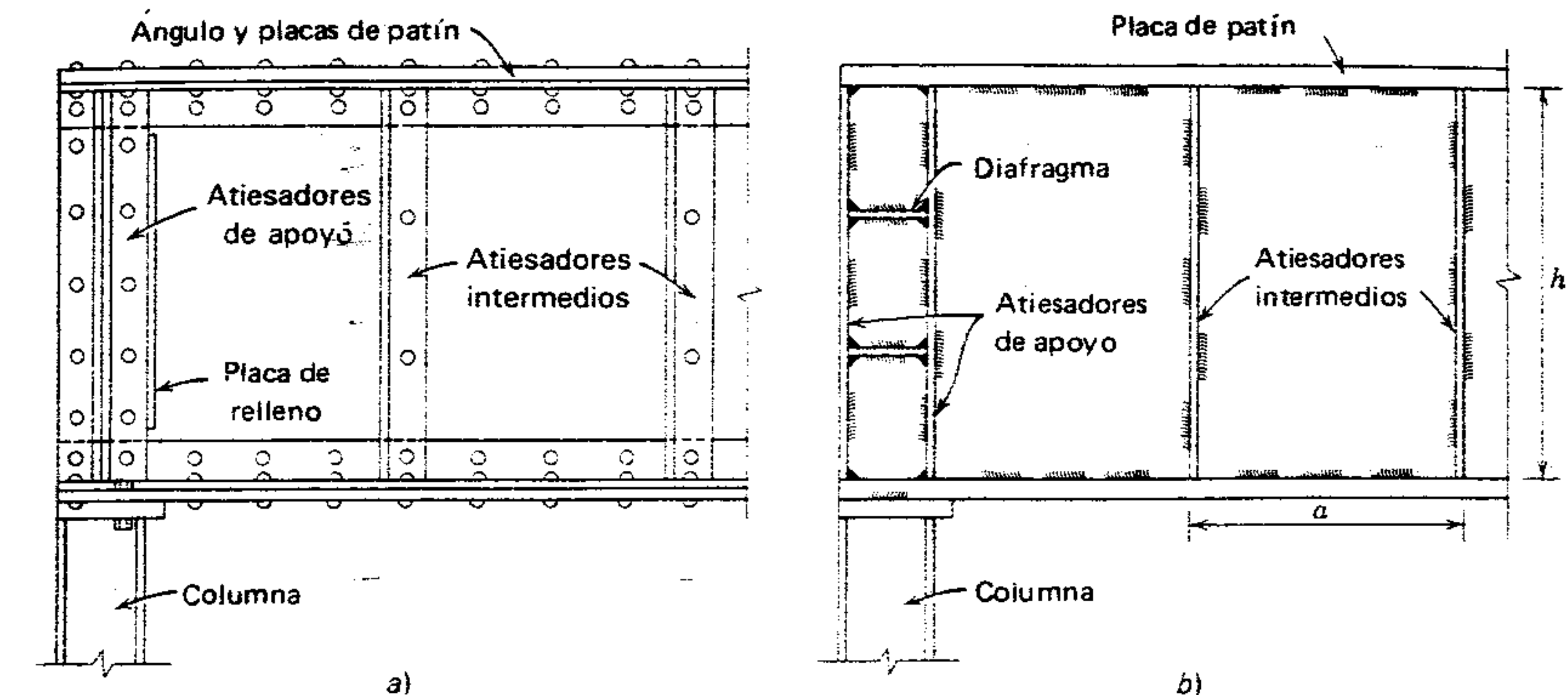


Figura 5.31 Elevaciones típicas de traveses armadas.

ción AISC de 1978 cuando los agujeros no exceden del 15 por ciento del área del patín. En la figura 5.32a se ilustra la distribución supuesta de esfuerzo.

Un método más antiguo de diseño, conocido como método del "área de patín" se basan en la proposición de que, como la mayor parte del área transversal de la trabe armada está situada en los patines, y como los mayores esfuerzos flexionantes ocurren en los patines, una relativamente adecuada distribución de esfuerzos se lograba, como la que se muestra en la figura 5.32b. Aquí, la resultante de los esfuerzos del patín se suponía que actuaba como centro de gravedad de la sección transversal del patín, compuesto por los ángulos de patín y las cubreplacas. El método del área de patín ya no se considera lo suficientemente exacto como para obtener un diseño preciso y económico,

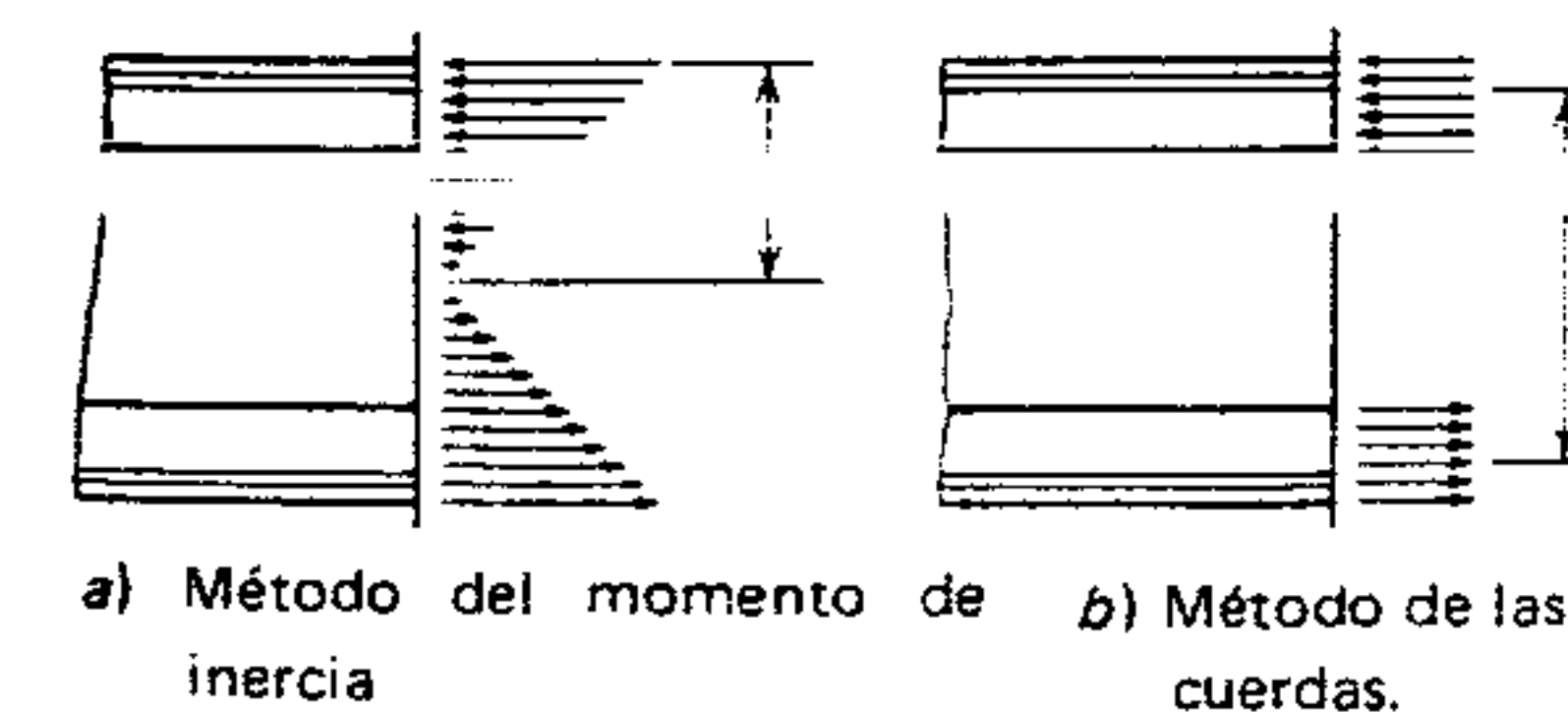


Figura 5.32 Distribución de esfuerzos.

pero es útil para elaborar una sección de prueba al diseñar traveses armadas atornilladas, las cuales se pueden revisar después mediante el método de momento de inercia.

El lector interesado en un estudio amplio del diseño de traveses armadas deberá consultar el Manual AISC. La octava edición del manual contiene un estudio extenso sobre este tema, incluyendo ejemplos ilustrados.

#### 5.15 FLEXIÓN RESPECTO A DOS EJES

Ocasionalmente se puede necesitar que una viga soporte cargas inclinadas respecto a sus ejes, o aplicadas perpendicularmente a ambos ejes. La primera puede ocurrir cuando la viga está inclinada y las cargas son verticales como en la figura 5.33a, y la segunda cuando hay dos o más fuerzas aplicadas a la viga en el mismo tiempo (figura 5.33b). En la figura 5.33b, el travesaño es un miembro estructural secundario que se usa principalmente en el perímetro exterior de las estructuras para que soporte los materiales que forman la cobertura envolvente. Cubren un claro de columna a columna y generalmente son canales o ángulos.



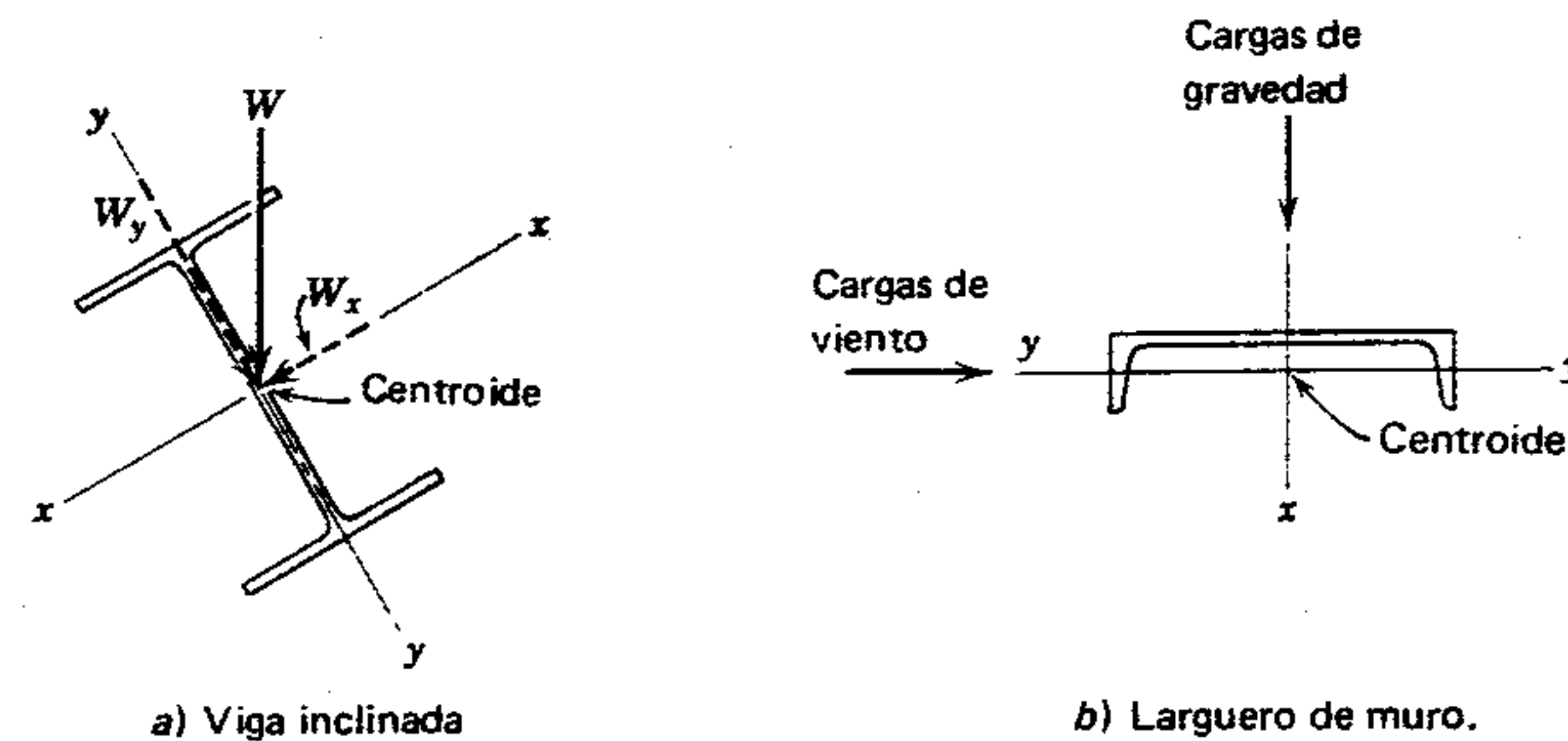


Figura 5.33 Flexión biaxial.

Todas las formas teóricas que se han usado hasta aquí se han apoyado sobre el supuesto de que el plano de las cargas pasa a través del centroide de la sección de la viga. Este es el caso de las dos vigas que se muestran en la figura 5.33, y por ello su diseño es relativamente sencillo. En el caso de la figura 5.33a, solamente se necesita descomponer la carga similar a la de la figura 5.33b. En cualquier punto a lo largo de la viga, el esfuerzo de fibra es entonces la suma algebraica de los esfuerzos resultantes de la flexión respecto a cada eje cuando se calculan independientemente. Expresado en forma de ecuación

$$f = \frac{M_x c_x}{I_x} \pm \frac{M_y c_y}{I_y}$$

donde:

- $M_x$  = momento resultante de la flexión respecto al eje x-x.
- $I_x$  = momento de inercia con respecto al eje x-x.
- $c_x$  = distancia del eje x-x a la fibra  $f$ , medida perpendicularmente respecto al eje x-x.
- $M_y$  = momento resultante de la flexión respecto al eje y-y.
- $I_y$  = momento de inercia con respecto al eje y-y.
- $c_y$  = distancia del eje y-y a la fibra  $f$ , medida perpendicularmente al eje y-y.

Muy pocas veces se encuentra en la realidad una viga inclinada, cargada en su centro de gravedad, como la que se muestra en la figura 5.33a. Casi siempre las cargas se aplican en el centro del patín superior. En tales casos, el plano de las cargas no pasa a través del ejemplo de la viga (figura 5.34). Como resultado hay torsión además de flexión. El análisis completo de la torsión está fuera de los límites de este libro; sin embargo, a continuación se presenta un método aproximado satisfactorio para tratar una condición como la mostrada en la figura 5.35.

El componente de carga  $W_y$  pasa por el centro de gravedad y los esfuerzos resultantes se calculan de la manera usual. El componente de carga  $W_x$  no

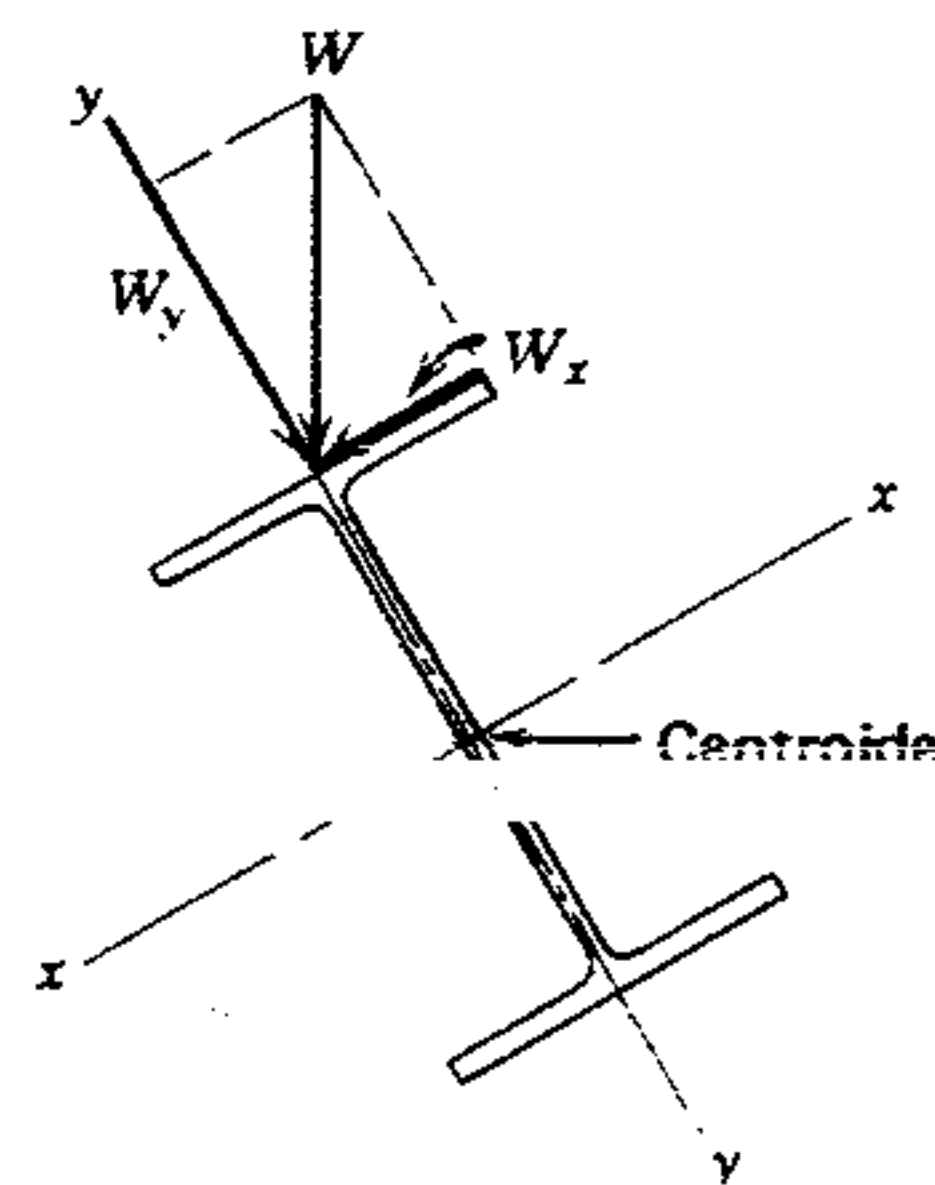


Figura 5.34 Método aproximado para la flexión biaxial.

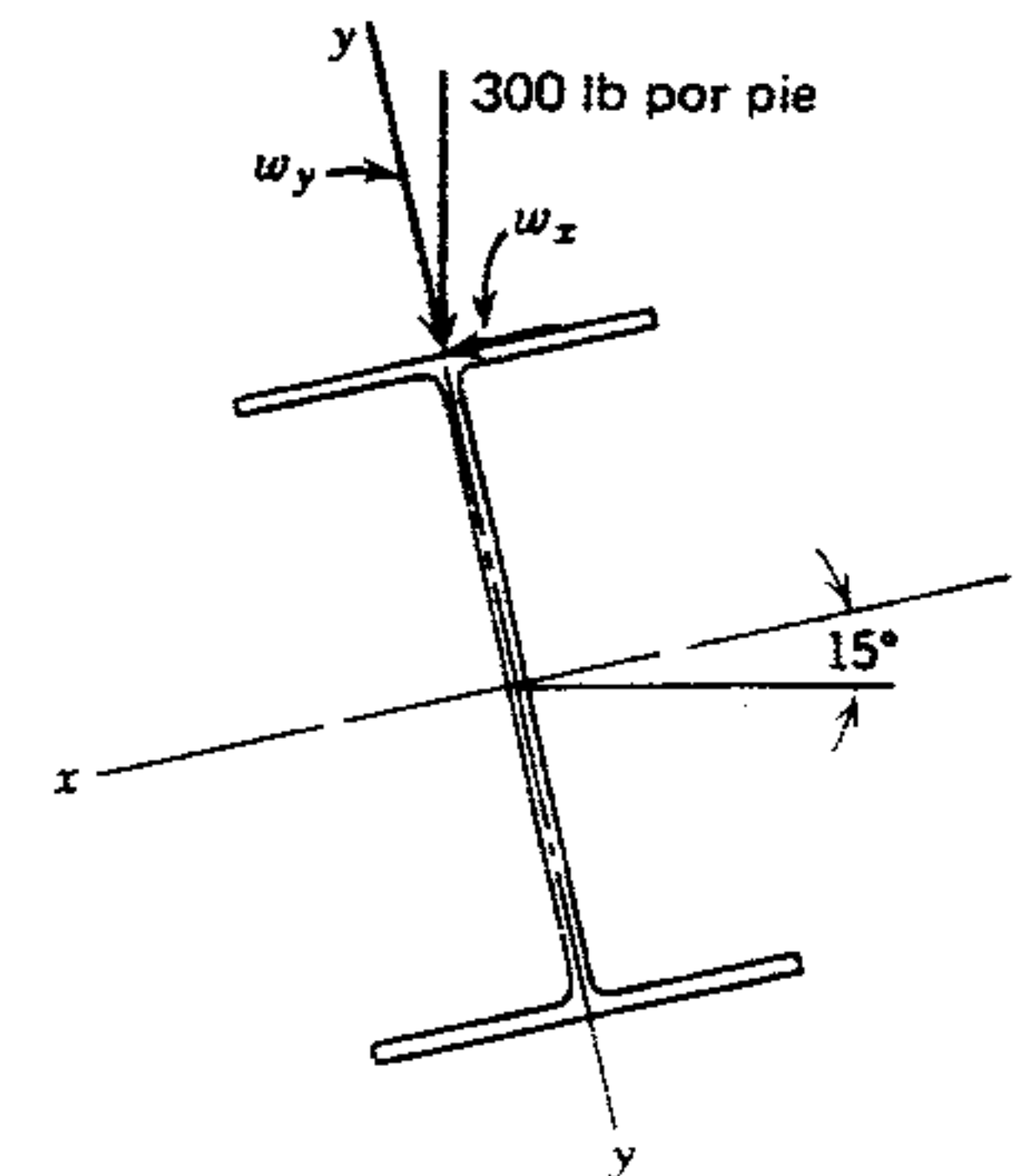


Figura 5.35

pasa por el centroide, y el patín superior proporciona casi toda la resistencia a la flexión resultante de este componente. Por lo tanto, el momento de inercia del patín superior sólo se puede usar para calcular los esfuerzos flexionantes resultantes de  $W_x$ . Como los patines son iguales y el alma aporta una cantidad insignificante al momento de inercia respecto al eje y-y, se debe usar la mitad del total de  $I_y$ .

En consecuencia, ahora la fórmula para el esfuerzo debe ser

$$f = \frac{M_x c_x}{I_x} \pm \frac{M_y c_y}{I_y/2}$$

Si la sección de la viga es simétrica respecto a ambos ejes, el módulo de sección se puede usar en lugar de  $I/c$ . El método de tanteo en el diseño es apropiado cuando se diseñan vigas con flexión respecto a dos ejes, teniendo presente el hecho de que la mayoría de las vigas ofrecen poca resistencia a la flexión respecto al eje y-y.

### Ejemplo 1

Una viga W 8 × 18 cubre un claro de 14 pies entre los dos largueros inclinados del techo. La

carga y el propio peso de la viga es de 300 lb por pie sobre todo el claro. Los largueros tienen una pendiente de 15 grados respecto a la horizontal. Revisar la W 8 × 18 para determinar si es segura ante la flexión;  $F_b = 24,000 \text{ k/pulg}^2$ .

### Solución

1. Trazar un diagrama de la sección transversal de la viga mostrando las cargas por gravedad (figura 5.35).
2. Determinar los respectivos componentes de cargas que actúan perpendicularmente respecto a los ejes x-x y y-y.

$$w_y = 300 (\cos 15^\circ) = 290 \text{ lb por pie}$$

$$w_x = 300 (\sin 15^\circ) = 77.6 \text{ lb por pie}$$

3. Analizar la flexión de la viga  $a$  respecto a los dos ejes x-x y y-y. Como el único medio de apoyo de la viga son las traveses inclinadas, se supondrá que la viga se apoya sobre las traveses y, además, que su patín superior está sujeto a la trabe (figura 5.36). Esto significa que ante la flexión, la viga está simplemente apoyada en 14 pies respecto a ambos ejes.

En la flexión respecto al eje x-x, el momento máximo en el centro del claro será:

$$M_x = \frac{w_y L^2}{8} = \frac{290(14)^2}{8} = 7110 \text{ pie-lb}$$

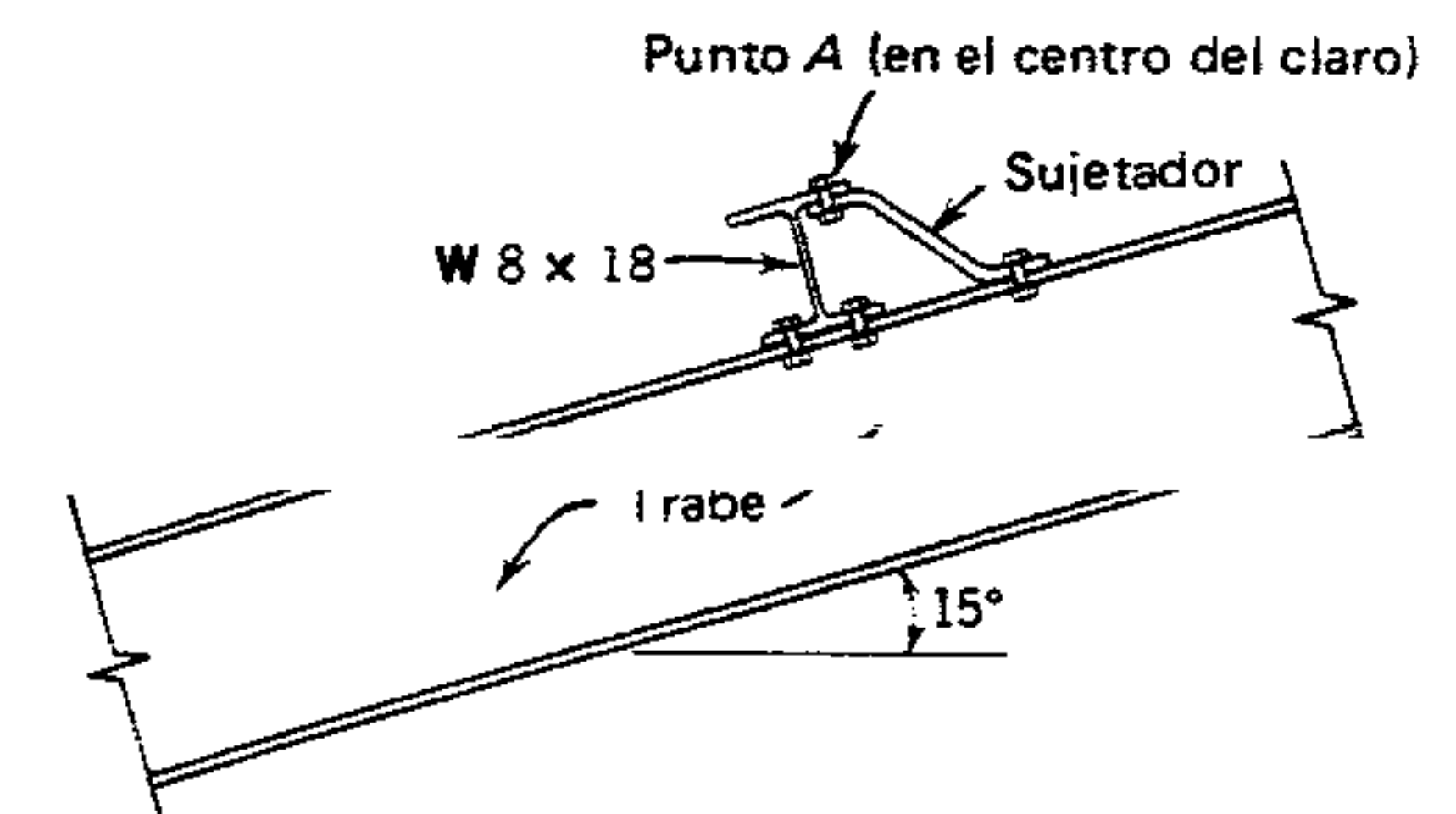


Figura 5.36 Detalle de soporte de larguero.



En la flexión respecto al eje  $y-y$ , el momento máximo también ocurre en el centro de la viga, o sea

$$M_y = \frac{w_x L^2}{8} = \frac{77.6(14)^2}{8} = 1900 \text{ pie-lb}$$

Como ambos momentos máximos ocurren en el centro de la viga, el esfuerzo máximo también ocurre en el centro del claro.

$$\begin{aligned} f_b &= \frac{M_x}{S_x} + \frac{M_y}{S_y/2} \\ &= \frac{7110(12)}{15.2} + \frac{1900(12)}{1.52} = 5613 + 15,000 \\ &= 20,613 \text{ psi (compresión)} \\ &< 24,000 \text{ psi (permisible)} \end{aligned}$$

El esfuerzo, tal como se calculó antes, ocurriría en el borde superior del patín superior (punto A en la figura 5.36).

## 5.16 PLACAS DE APOYO PARA VIGAS

Cuando el extremo de una viga se apoya sobre un muro de mampostería, usualmente se necesita colocar una placa de apoyo de acero para distribuir la reacción sobre un área adecuada para mantener la presión promedio sobre la mampostería dentro de límites permisibles.

El área necesaria de la placa se encuentra mediante la división de la reacción del extremo de la viga entre la presión unitaria de apoyo permisible sobre la mampostería. Cuando no hay un requisito específico en el reglamento de construcción, resultan útiles los valores de la tabla 5.2<sup>13</sup> para presiones de apoyo seguras en diversos tipos de muros de mampostería y concreto.

En la figura 5.37a, la dimensión C de la placa (paralela a la longitud de la viga) está limitada a

<sup>13</sup> En muchos reglamentos se especifica que el esfuerzo permisible de apoyo esté limitado al 25 por ciento de la resistencia límite a la compresión de la unidad o ensamble de mampostería.

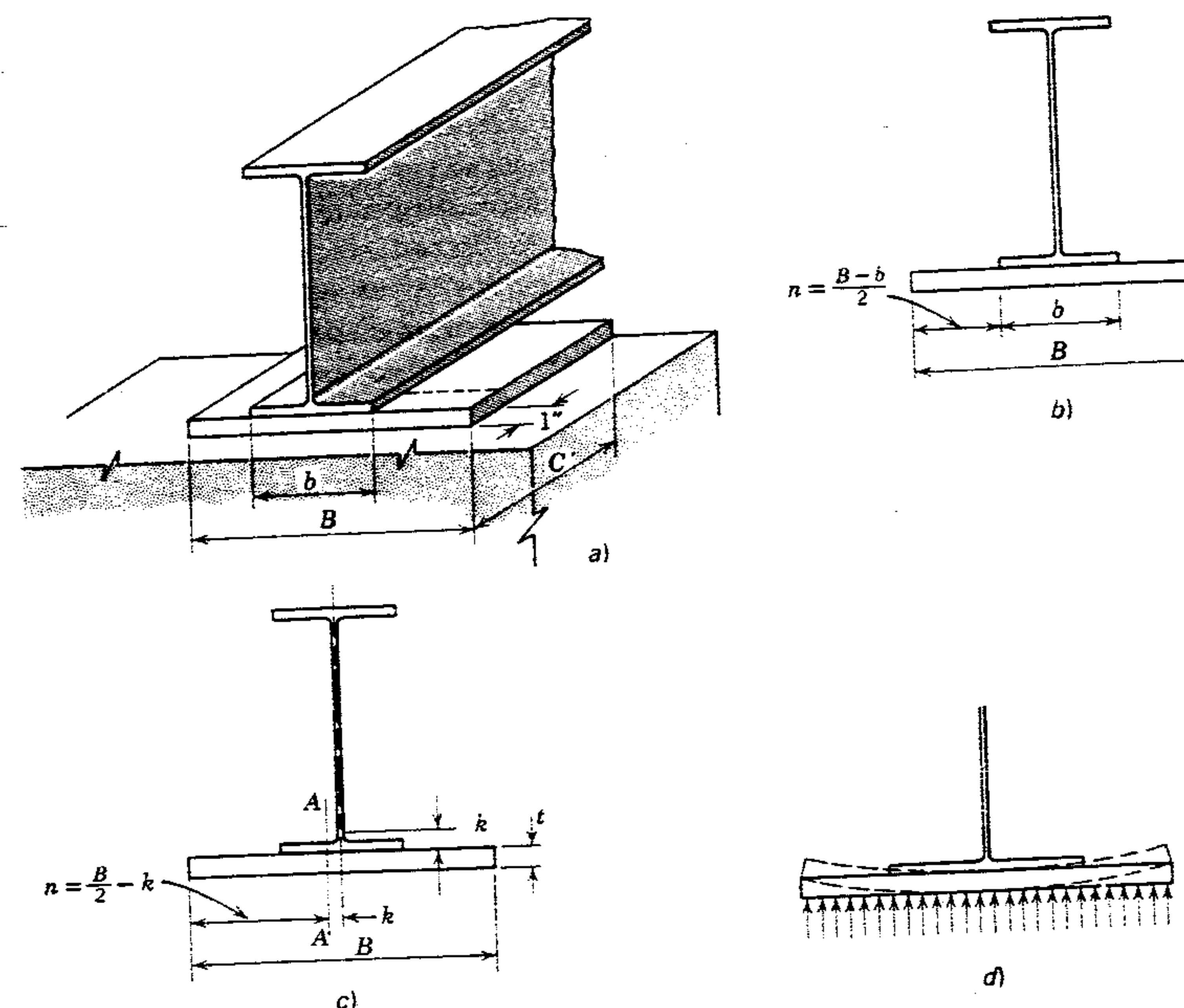
menudo por el espesor del muro. Incluso sobre un muro de ladrillo de 13 pulgadas, C estaría limitada a 8 pulgadas para no interferir con el paño exterior de la mampostería. La dimensión B de la placa (paralela a la cara del muro) se determina dividiendo el área requerida entre el valor establecido de C.

El espesor de la placa depende de la fuerza de flexión, que se puede definir como la tendencia de la presión uniforme del apoyo de la superficie inferior de la placa a flexionar hacia arriba la placa con respecto al alma de la viga, como se ilustra, exagerando, en la figura 5.37d. Si la placa de apoyo no es lo suficientemente gruesa para evitar la distorsión de este tipo, la reacción de la viga no estará uniformemente distribuida sobre el área de

**Tabla 5.2** Presión segura de apoyo sobre muros de mampostería y concreto

(Usando mortero de cemento normal y áreas completas)

Tipo de muro	Presión (lb/pulg <sup>2</sup> )
Ladrillo	
blando	150
mediano	200
duro	300
Bloques de concreto	
unidades huecas	150
unidades sólidas	260
Bloques de escoria volcánica	
unidades huecas	120
unidades sólidas	210
Piedra cortada y labrada	
arcillosa azul	400
arenisca	300
cauza	300
Cantera sin labrar	140
Muros de concreto colado	
concreto de 3000 lb/pulg <sup>2</sup>	650
concreto de 4000 lb/pulg <sup>2</sup>	850



**Figura 5.37** Datos para el diseño de placas de asiento.

contacto entre la placa y la mampostería y habrá mayor presión directamente abajo de la viga que en los bordes de la placa.

En la figura 5.37a y d se puede observar que las partes salientes de la placa a cada lado de la viga actúan como voladizos invertidos con una carga uniformemente distribuida. Sin embargo, existe cierta duda respecto al punto exacto en que ocurre el momento flexionante máximo. Si el patín de la viga es relativamente grueso y, por tanto rígido, se puede suponer que el patín no tenderá a flexionarse como se ve en la figura 5.37b. En estas condiciones, el momento flexionante máximo en la placa ocurriría en el borde del patín, y el voladizo  $n$  tendría el valor indicado en la figura 5.37b. No obstante, si el patín de la viga no permanece plano, el valor que se va a usar para la proyección del voladizo  $n$  tendrá, obviamente, un

mayor valor que el indicado en la figura 5.37b. Un procedimiento de uso muy común para determinar el valor de  $n$  se ilustra en la figura 5.37c. En las tablas de "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC se dan los valores de  $k$  (equivalentes a la distancia desde la parte inferior de la viga a la base del filete del alma) de secciones de vigas laminadas. En el AISC se recomienda este procedimiento, usando un esfuerzo permisible en la placa de apoyo de  $F_b = 0.75F_y$ . A continuación se ilustra con un ejemplo el diseño de placas de apoyo usando este procedimiento.

### Ejemplo 1

Diseñar una placa de viga para una W 10 X 22, ambas de acero A36, que transmite una reacción



de 24,000 lb a un muro de ladrillo duro pegado con mortero de cemento que proporciona una longitud de 8 pulgadas de apoyo. La presión unitaria de apoyo permisible sobre este muro es  $F_p = 225$  k/pulg<sup>2</sup>.

### Solución

1. El área adecuada de la placa se encuentra dividiendo la reacción  $R$  de la viga entre la presión unitaria permisible  $F_p$ .

$$A = \frac{R}{F_p} = \frac{24,000}{225} = 107 \text{ pulg}^2$$

2. Esta área necesita una placa de 8 por 13.5 pulgadas. En la figura 5.37a,  $C=8$  pulg,  $B=13.5$  pulg y la presión real de soporte es  $f_b = 24,000/8(13.5) = 222$  lb/pulg<sup>2</sup>.
3. En las tablas del Manual AISC se encuentra que el valor de  $k$  es de  $\frac{3}{4}$  ó 0.75 pulg. En la figura 5.37c, el voladizo es

$$n = \frac{B}{2} - k = \frac{13.5}{2} - 0.75 = 6.0 \text{ pulg.}$$

4. Considerando una franja de la placa de 1 pulgada de ancho (figura 5.37a), el momento flexionante máximo en la sección A-A (figura 5.37c) es

$$M = \frac{f_b n^2}{2} = \frac{222(6.0)^2}{2} = 3996 \text{ pulg-lb}$$

5. Determinar el esfuerzo flexionante permisible en la placa de soporte y calcular el módulo de sección necesario

$$F_b = 0.75(36) = 27 \text{ k/pulg}^2$$

$$\frac{M}{F_b} = \frac{3996}{27} = 148 \text{ pulg}^3$$

6. El espesor necesario es  $t = \sqrt{6S}$ . Esta expresión se deriva de la definición de módulo de sección ( $S = I/c$ ). El valor de  $I$  para una sección rectangular es  $bh^3/12$ , donde  $b$  es igual

al ancho de la sección y  $h$  el peralte o, en este caso, el espesor de la placa. Sustituyendo estos términos

$$S = \frac{I}{c} = \frac{bt^3}{12c}$$

Pero  $c$  es igual a la mitad del peralte de la sección o, en este caso, el espesor  $t/2$ . Sustituyendo este valor,

$$S = \frac{2bt^3}{12t} = \frac{bt^2}{6}$$

En este caso el ancho de la sección se considera de 1 pulg. Por tanto,

$$S = \frac{t^2}{6} \quad y \quad t = \sqrt{6S}$$

Sustituyendo el valor de  $S$  encontrado en el paso 5,

$$t = \sqrt{6S} = \sqrt{6(0.148)} = \sqrt{0.89} = 0.94 \text{ pulg.}$$

Se elige una placa de 8 × 13.3 × 1 pulg.

El procedimiento anterior se puede abreviar en la práctica usando la fórmula del AISC de 1978 para espesores que no implica el cálculo directo de momento flexionante y del módulo de sección. Aplicando la fórmula del AISC,

$$t = \sqrt{\frac{3f_b n^2}{F_b}} = \sqrt{\frac{3(222)(6.0)^2}{27,000}} = 0.94 \text{ pulg.}$$

El lector observará que

$$\sqrt{6S} = \sqrt{\frac{3f_b n^2}{F_b}}$$

se reduce a una igualdad sustituyendo  $Mc/I$  por  $F_b$ , y luego  $f_b n^2/2$  por  $M$  en el lado derecho de la ecuación.

En el caso en que se apoyen vigas pesadas sobre muros relativamente delgados, la di-

mensión  $C$  de la figura 5.37a está tan limitada que  $B$  se vuelve proporcionalmente muy grande. Esto produce un gran voladizo desde el borde del patín y un correspondiente incremento en el espesor. En la figura 5.38a se muestra un método para proporcionar apoyo en este caso. Se supone que la carga está igualmente dividida entre las vigas y éstas están diseñadas en forma de voladizos invertidos. También se deben investigar el esfuerzo cortante y el de apoyo en las almas de las vigas soportantes.

Usualmente las vigas que se apoyan en mampostería tienen anclas como un medio para unir entre sí la estructura. En las figuras 5.38b y c se muestran dos tipos comunes de anclaje. La varilla doblada, ilustrada en b, tiene usualmente un diámetro de  $\frac{3}{4}$  pulg. y los ángulos de  $c$ ,  $\frac{3}{8}$  pulg. de espesor. Algunas empresas acereras tienen sus propias anclas estándar, las cuales se listan en sus manuales. En el diseño para resistencia sísmica, las anclas tienen una gran importancia.

### 5.17 SISTEMAS DE PISO

En la figura 5.39 se ilustran dos métodos de estructuración que se emplean comúnmente en la construcción de edificios de oficinas ordinarias. En a)

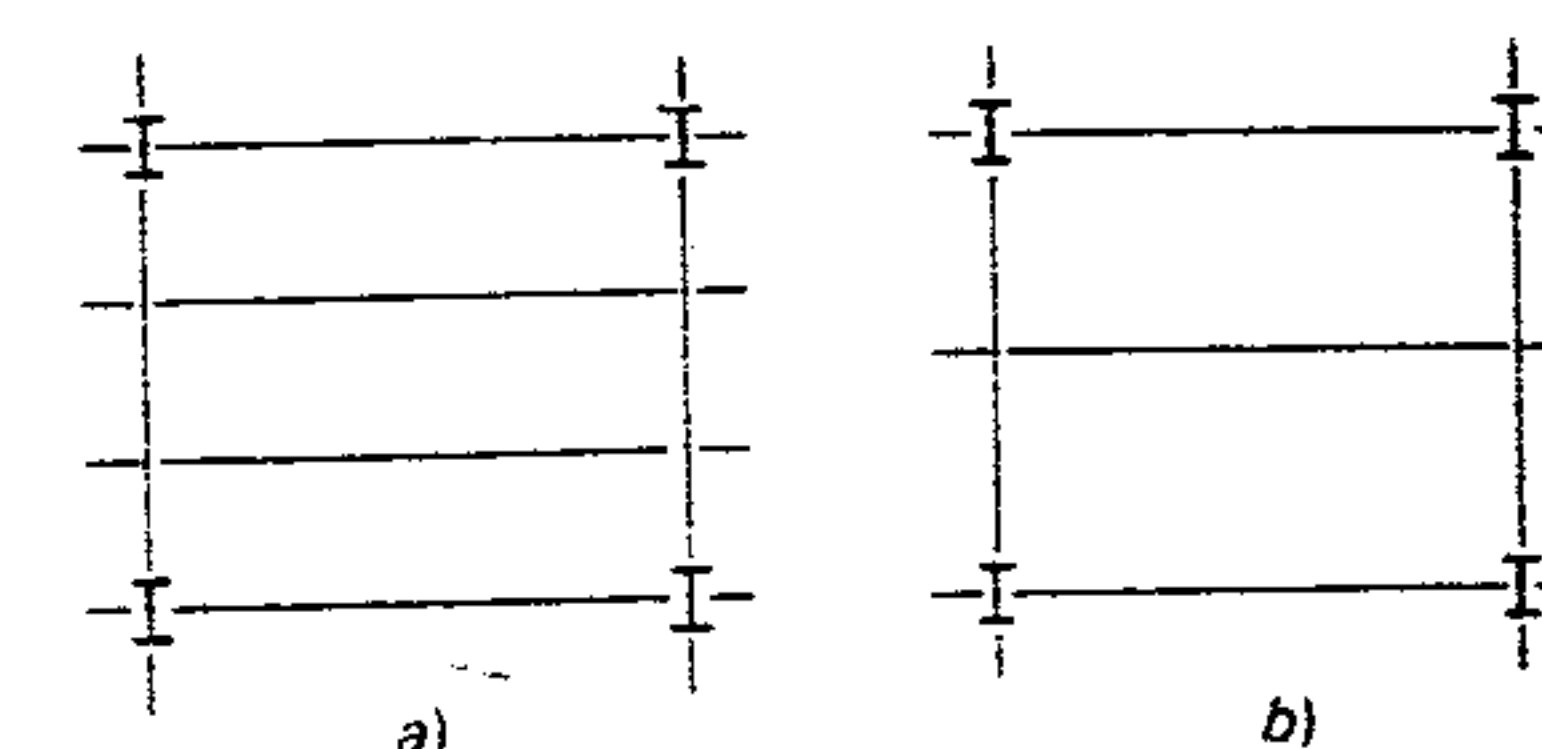


Figura 5.39 Típica estructuración de piso interior.

se muestra la concentración cada tercera parte y en b) la concentración en el centro. Cuando el claro de una trabe sobrepasa bastante los 16 pies, es conveniente la concentración cada tercera parte. El área de piso soportada por una viga se encuentra mediante la multiplicación de la longitud del claro por la suma de las medidas distanciadas a las vigas adyacentes. Generalmente se supone que las longitudes de los claros van de centro a centro de los miembros de apoyo, aunque a veces esta distancia se reduce cuando las vigas se conectan a los patines de grandes columnas. El arreglo y diseño de conexiones entre diversos miembros se tratan en el capítulo 7.

Comúnmente se usan conexiones flexibles que generan reacciones simples. Este es el caso en las figuras 5.39, 5.40 y 5.41.

La estructuración depende, en gran medida, del tipo de sistema de piso que se emplee. Por ejemplo, en edificios de oficinas, edificios de departamentos

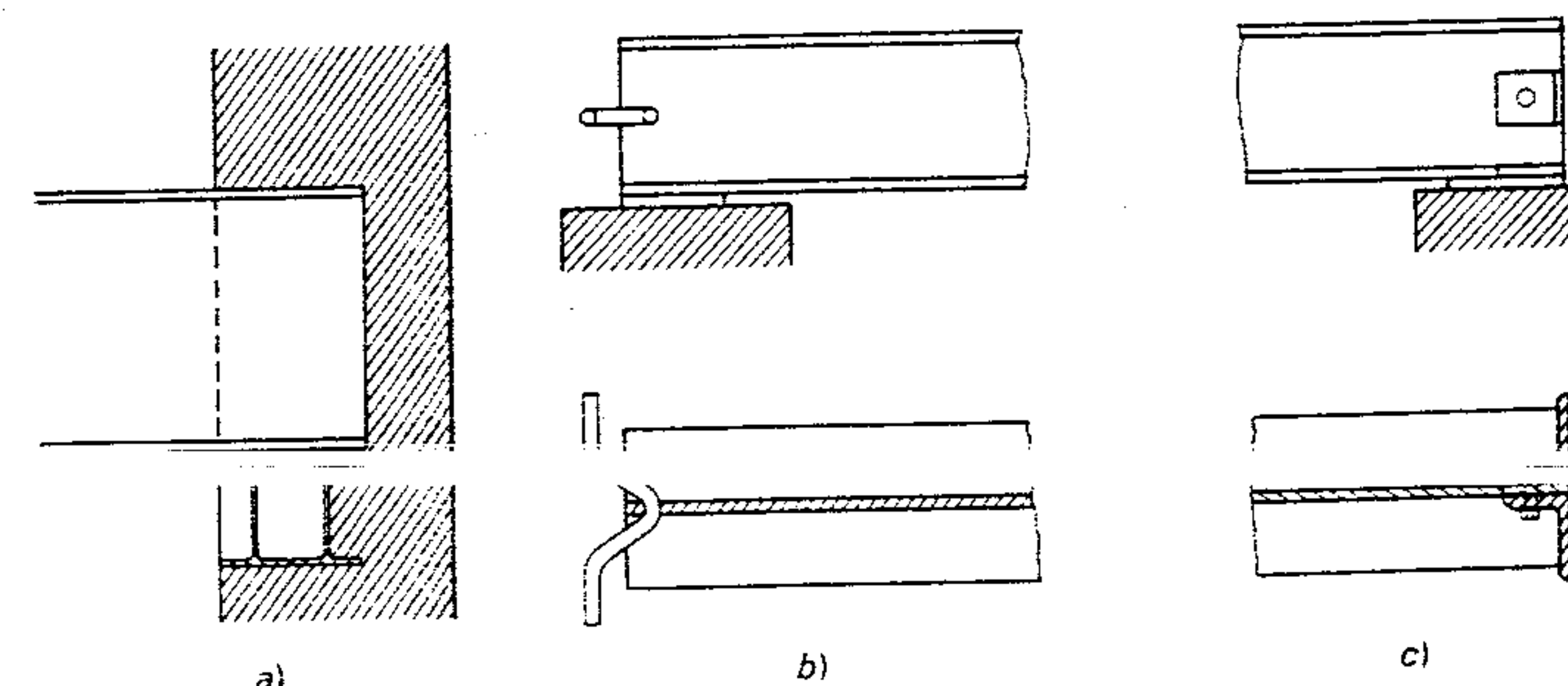


Figura 5.38 Detalles de asientos y anclas de muro.



y estructuras similares de acero, donde se usan con frecuencia losas de concreto reforzado con emparillado de alambre, una distancia conveniente entre las vigas es de 6 a 10 pies.

Otros factores que influyen en la estructuración son las aberturas en los pisos (es decir, escaleras y elevadores) y voladizos sobre vanos exteriores. En las figuras 5.40a y b se muestran dos estructuraciones típicas alrededor de aberturas. Las partes marcadas con x son aberturas y, en los ejemplos presentados, tienen dimensiones de 6 por 12 pies. Cada arreglo produce un tipo único de cargas sobre los miembros. Por ejemplo, en la figura 5.40c se muestran las cargas sobre el miembro A-B, y en la figura 5.40d las cargas sobre el miembro C-D, suponiendo que no hay cargas provenientes de las aberturas.

En la figura 5.41a y b se muestran dos arreglos estructurales con un voladizo por un lado, y en la figura 5.41c y d las cargas sobre las trabes A-B y C-D.

### 5.18 VIGAS DE ALMA ABIERTA

Además de los tipos estándar de construcción con losas de concreto reforzado y pisos con estructura

reticular de acero, se fabrican diversas formas de vigas de acero para soportar pisos y techos. Son muy conocidos los miembros de acero formados en frío para apoyar cargas ligeras.

En la figura 5.42 se muestran algunas típicas vigas de peso ligero y en la figura 5.43 dos tipos de cubierta metálica de calibre ligero que cubren los claros entre las vigas. La cubierta que se muestra tiene sólo  $1\frac{1}{2}$  pulgadas de espesor y, cuando se usa sola, el espaciamiento entre vigas debe ser pequeño. La cubierta de metal podría tener mayor espesor, o bien, podría servir como cimbra para concreto, lo que en cualquier caso permitiría un mayor espaciamiento entre vigas.

Las vigas de la figura 5.42a están hechas de metal de calibre ligero formado en frío y su peralte es generalmente de 6 a 14 pulgadas. Se usan con mayor frecuencia en edificios "prediseñados" que en general son íntegramente de metal con componentes diseñados y hechos por un mismo fabricante.

Las vigas de celosías del tipo que se muestra en la figura 5.42b las fabrican un gran número de fabricantes. El acero que se emplea en éstas, así como en las de mayores claros (figura 5.42c), usualmente es acero A36 y de algún otro con  $F_y = 50 \text{ k/pulg}^2$ . El acero de más alta resistencia se usa para las cuerdas superior e inferior; estas

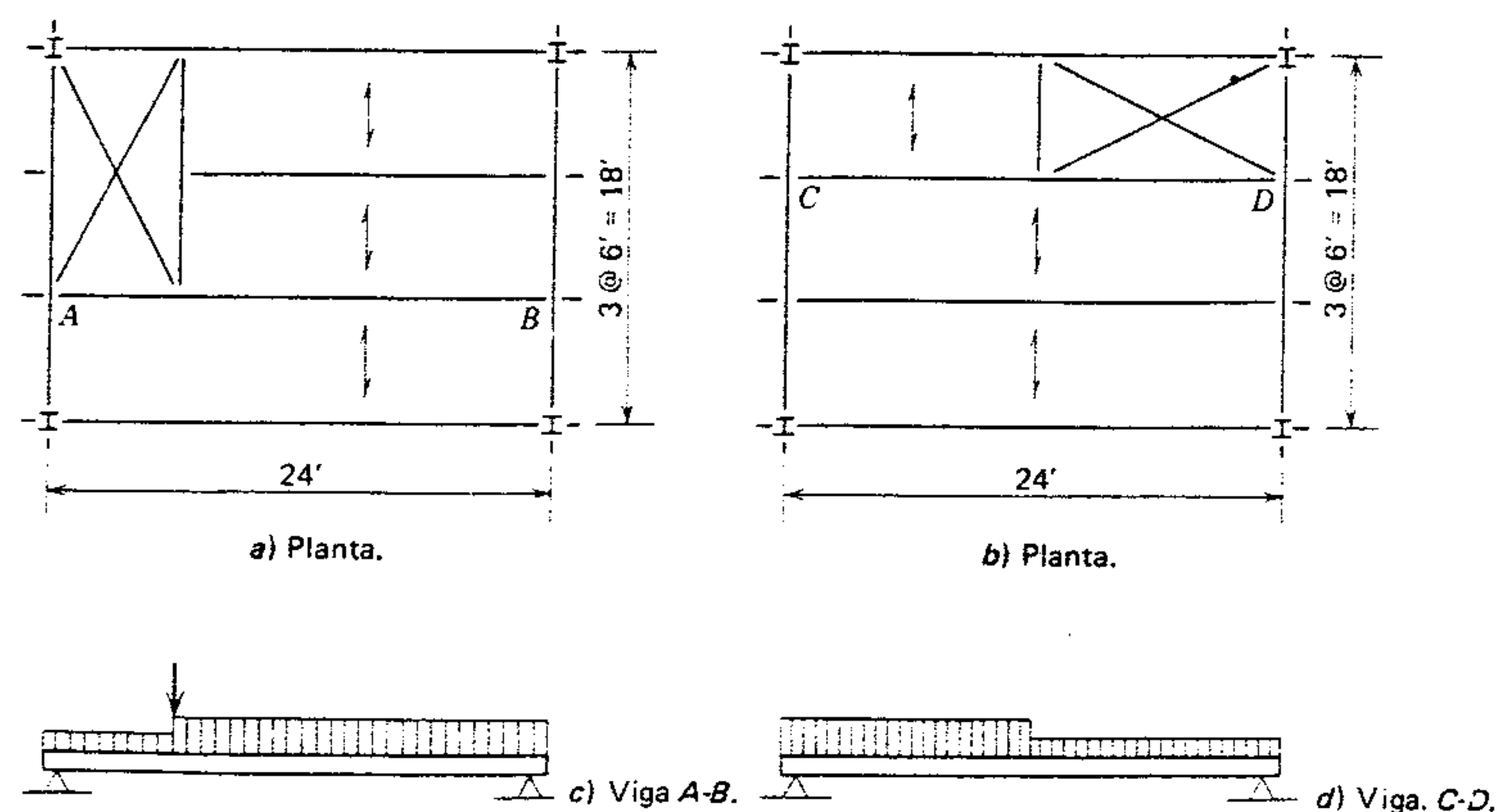


Figura 5.40 Estructuración alrededor de aberturas.

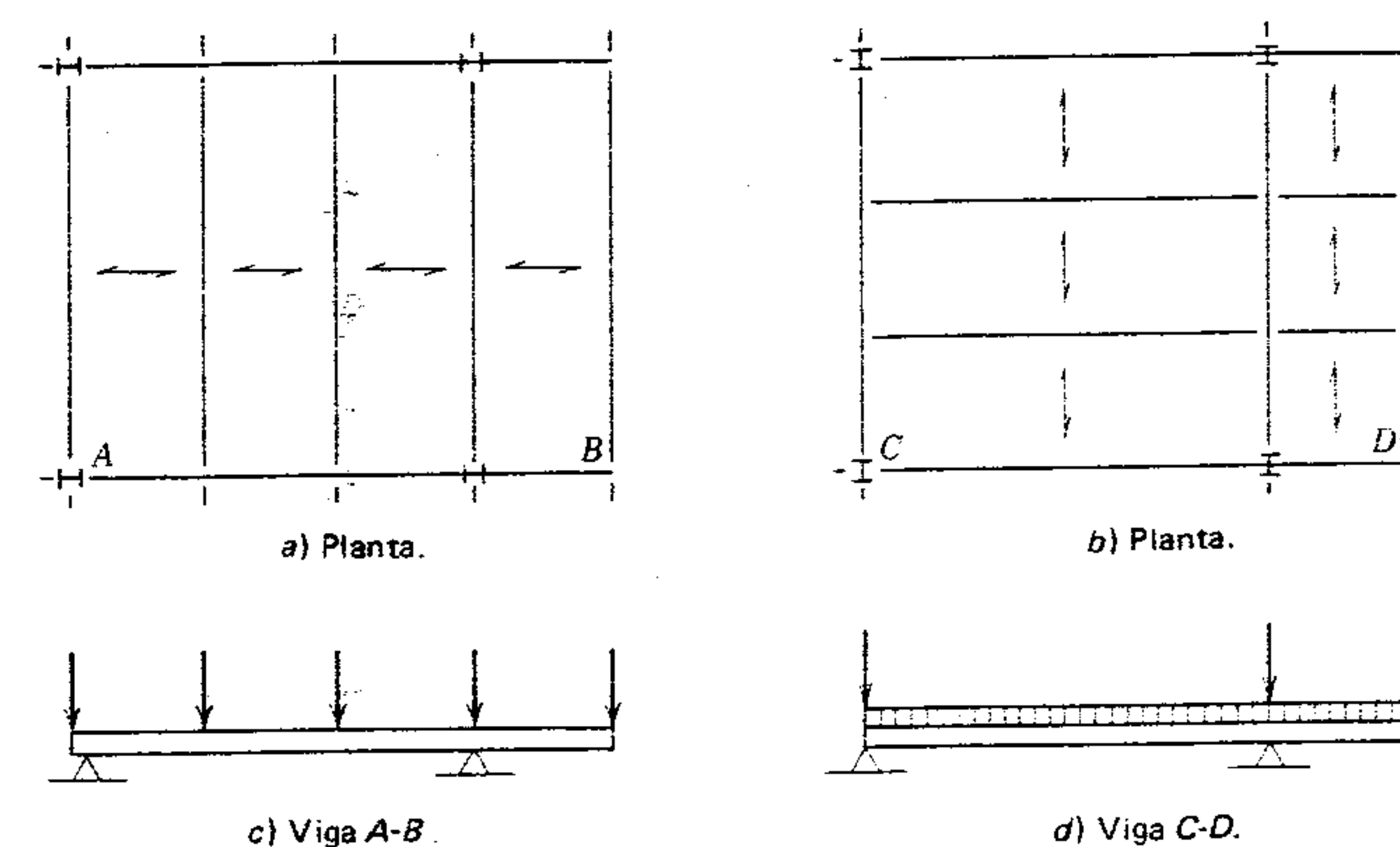


Figura 5.41 Estructuración con voladizo.

vigas se denominan como "Serie H". Las vigas de celosía son muy económicas y por lo tanto de uso muy común en estructuras de pisos y techos. Se pueden apoyar sobre muros de apoyo o trabes de acero de un sistema de marcos. Por lo general, entre más ligera sea la carga y mayor el claro, más

económico resulta este sistema. Las grandes cargas concentradas se deben evitar o tratar con cuidado especial.

El espaciamiento entre vigas de celosía generalmente va de 18 pulg. a 8 pies, dependiendo del tipo y resistencia de la cubierta que cubre el claro

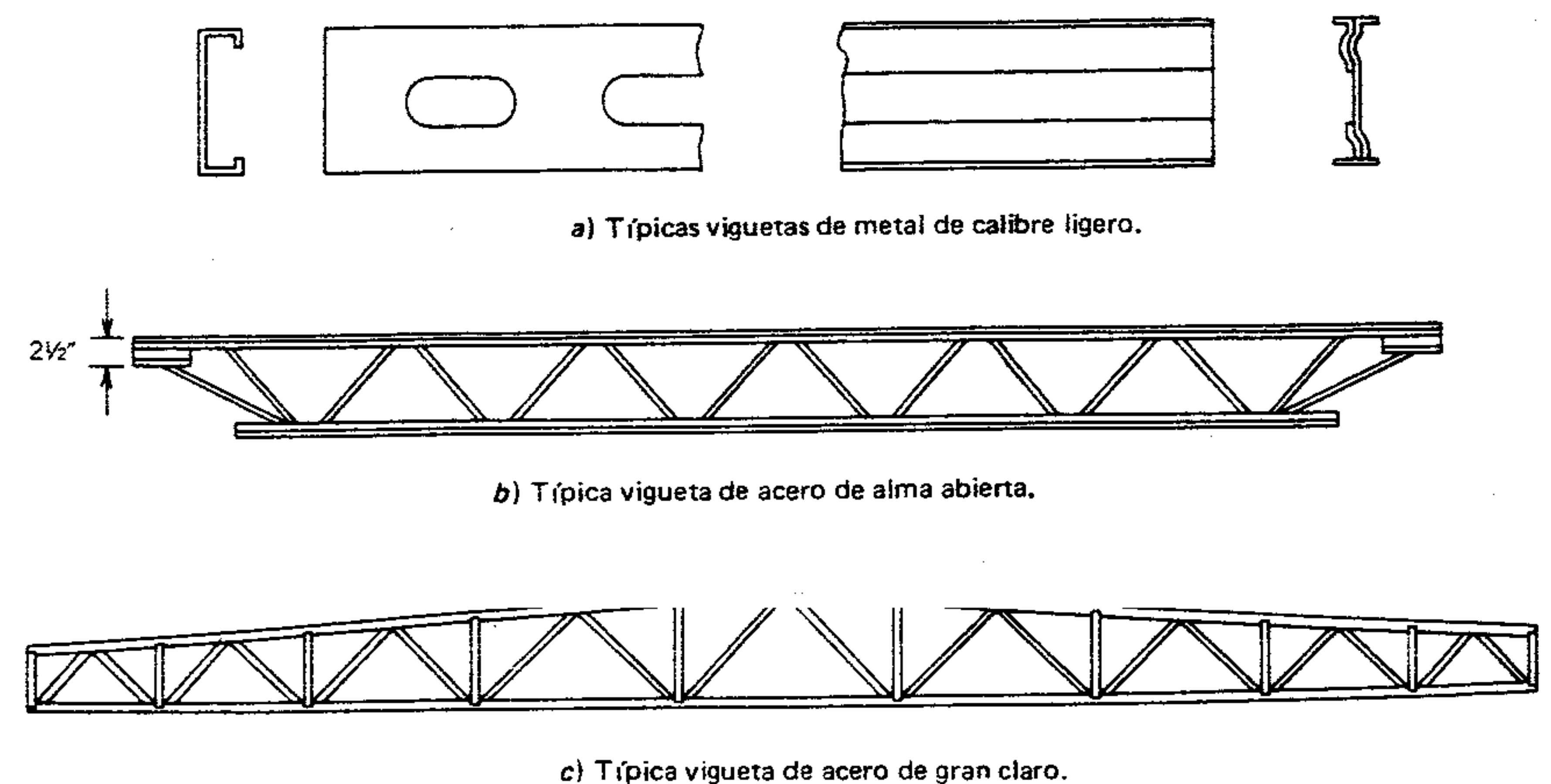
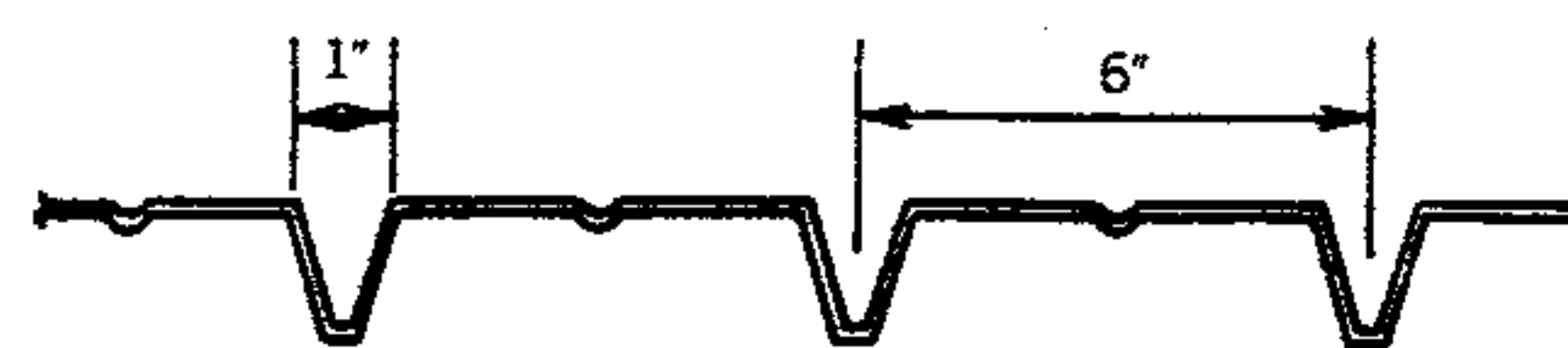
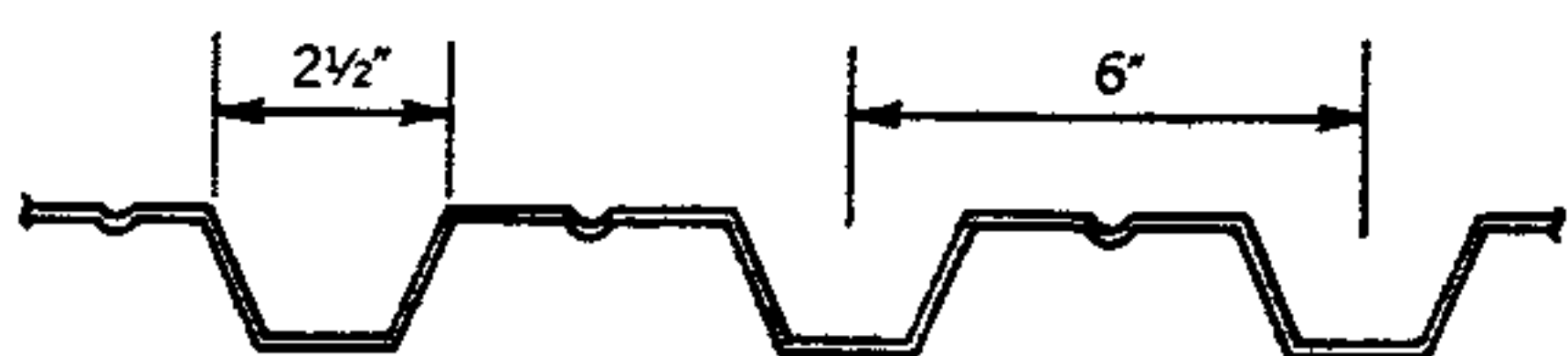


Figura 5.42 Tipos de vigas de celosía de acero.





a) Costilla angosta.



b) Costilla ancha.

Figuras 5.43 Cubierta metálica de calibre ligero.

entre las vigas, y de la capacidad de la viga para transmitir la carga de la cubierta a los muros o trabes de soporte. Las vigas de celosía se diseñan para resistir cargas uniformes aplicadas sobre su borde superior. A veces las vigas de celosía para grandes claros se usan como trabes que soportan cargas concentradas a intervalos que coinciden con las intersecciones verticales y diagonales en la parte superior de la viga de celosía. Este sistema se estudia con mayor detalle en el capítulo 9.

Las vigas de celosía normales de la serie H tienen peraltes desde 8 a 30 pulgadas (con incrementos de 2 pulg) y se usan para claros hasta de 60 pies. Para claros mayores (hasta de 96 pies), se dispone del tipo de claro grande perteneciente a la Serie LH, con peraltes de 18 pulgadas a 4 pies. El tipo más grande, denominado de gran peralte o DLH, tienen peraltes de hasta 6 pies y puede cubrir claros hasta de 144 pies.

Las vigas de acero de alma abierta se diseñan principalmente en forma de vigas-armaduras con apoyo simple y carga uniforme. Cuando no están apoyadas lateralmente de alguna otra manera, se requiere el uso de miembros estructurales de acero

e inferiores para fijar las vigas de alma abierta y evitar la torsión y el pandeo (situados a intervalos que dependen de la longitud del claro), y diagonalmente, en forma de miembros de acero sujetos a las cuerdas entre las líneas horizontales de puntales.

Las características de las secciones de vigas de celosía (así como de los entrepisos celulares de acero), junto con tablas de cargas límite y detalles de construcción, se dan en los catálogos de los diversos fabricantes.

Asimismo, en el apéndice F se proporcionan tablas de cargas límite para las series H, LH y DLH. Las cargas registradas en la tabla son la carga uniforme total en lb/pie a lo largo del borde superior de vigas de celosía simplemente apoyadas sin voladizos. El primer número que aparece en la tabla para un tamaño y un claro de viga dados (el mayor) es la carga máxima que la viga puede soportar, incluyendo su propio peso. El segundo número, para el mismo tamaño y espaciamiento de viga, es el de la carga que producirá una deflexión máxima en el centro del claro, de  $L/360$ . Multiplicando esta carga por 1.5 (es decir,  $360/240$ ), se puede obtener la carga que producirá una deflexión de  $L/240$ . Asimismo, cada diseño de viga debe incluir una revisión de cortante para asegurarse de que no se exceda la reacción máxima indicada para la viga.

### Ejemplo 1

Para el vano interior típico de la figura 5.10 y las características generales de diseño del ejemplo 5, sección 5.6, seleccionar vigas de alma abierta para reemplazar las vigas.

Las vigas de celosía cubrirán el claro de 28 pies y se apoyarán sobre las trabes de acero. En lugar de la cubierta especificada se usará una losa de concreto con un espesor mínimo de 2 pulg colada *in situ* reforzada con lámina metálica troquelada. Usar vigas de alma abierta de la serie H.

### Solución

$$1. \text{ Carga muerta impuesta total} = 43.0 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{bro de unión} = 45.0 \text{ lb/pie}^2$$

$$2. \text{ Cargas viva y ambiental totales} = 30.0 \text{ lb/pie}^2$$

3. Seleccionar un espaciamiento de vigas de celosía. Una losa de 2 pulgadas puede cubrir un claro de 3 pies pero no de 4 pies; por lo tanto, se seleccionará un claro de 24 pulgadas.

4. Calcular la carga claro por pie lineal (lb/pie lineal) de la viga de celosía.

$$2(45 + 30) = 150 \text{ lb/pie lineal}$$

5. En el apéndice F, en la *Tabla de carga estándar para vigas de alma abierta*, seleccionar una 14H4, con una carga límite de 180 lb/pie. El peso de la viga es de 6.5 por pie lineal; por lo tanto, su capacidad de sustentación de carga es

$$180 - 6.5 = 173.5 > 150 \text{ lb/pie lineal}$$

6. La reacción de extremo máxima es

$$\frac{156.5(28)}{2} = 2191 \text{ lb}$$

Como  $2191 < 3500 \text{ lb}$ , la viga tiene un cortante satisfactorio.

7. Revisar deflexión. La carga viva y ambiental uniforme combinada sobre la viga es de  $30(2) = 60 \text{ lb/pie lineal}$ , que es menor que el valor listado de 89; por lo tanto, se puede concluir que la deflexión para esta carga es menor que  $L/360$ .

8. Revisar soporte en extremos. Suponiendo que la trabe es la W 18 X 46 seleccionada en el ejemplo 5, sección 5.6, el patín de 6 pulgadas proporcionará una gran longitud de apoyo ( $2\frac{1}{2}$  pulg) para las vigas de celosía, aunque en estos casos no es necesario. Se usarán dos soldaduras de filete de  $\frac{1}{8}$  pulg (figura 5.3c y capítulo 7), de 1 pulgada de largo, para sujetar los extremos de las vigas de celosía a la trabe y proporcionar apoyo lateral.

9. Seleccionar miembros de unión. De nuevo en las especificaciones para vigas de celosía de la serie H, seleccionar miembros de unión horizontales, situados en cada cuarta parte del claro (es decir, 7 pies de separación) sobre las cuerdas inferiores y superiores y soldados en los puntos de contacto. La unión diagonal consistirá en arriostramiento transversal entre las cuerdas. (Los puntales deben

poder resistir una fuerza horizontal de 500 lb y tener una  $L/r < 300$ ; el arriostramiento diagonal debe tener una  $L/r < 200$ , véase la sección 6.11 para el diseño de puntales).

### Ejemplo 2

Diseñar una viga de celosía para piso de gran claro con una carga viva de  $30 \text{ lb/pie}^2$  y un claro de 85 pies. El espaciamiento entre vigas es de 4 pies y soporta la siguiente construcción.

Techumbre	$6\frac{1}{2} \text{ lb/pie}^2$
Aislamiento	$1\frac{1}{2}$
Cubierta metálica y relleno	12
Plafón	6
	<hr/>
	26 lb/pulg <sup>2</sup>

### Solución

1. Calcular la carga sobre la viga de celosía.

$$w = 4(26 + 30) = 224 \text{ lb/pie lineal}$$

2. Seleccionar una viga LH de prueba del apéndice F. Seleccionar una 44LH11 con una capacidad de  $247 \text{ lb/pie lineal}$ . Obsérvese que el peso de esta viga es de  $27 \text{ lb/pie lineal}$ , dando una carga total de  $224 + 27 = 251 \text{ lb/pie lineal}$ . Es demasiado grande y se debe seleccionar otra viga. Probar la 44LH12 y observar que  $300 > 224 + 31$ .

3. Revisar la deflexión. La carga viva es  $30(4) = 120 \text{ lb/pie lineal}$ , que es menor que 149. CORRECTO.

4. Revisar cortante. La carga total es  $255(85) = 21,675 \text{ lb}$ ; por lo tanto, cada reacción es de  $10,837 \text{ lb}$ , que es menor que  $29,600 \text{ lb}$ . CORRECTO.

5. Diseñar los puntales. El espaciamiento máximo entre puntales para este tamaño de viga es 16 pies (comprobarlo en la especificación del fabricante o en las especificaciones del Instituto de Vigas de Celosía de Acero). Usar seis puntales.



## 5.19 TORSIÓN

Ocasionalmente las vigas de acero se someten a cargas torsionales que generan esfuerzos cortantes de torsión. Siempre que esto ocurra, el esfuerzo cortante combinado causado por flexión y torsión se debe investigar a fin de asegurarse de que el valor máximo permanezca dentro de los límites prescritos por el AISC.

En esta sección se trata solamente el aspecto del diseño aplicado y simplificado de la torsión. Para un estudio teórico más completo, consúltese cualquier texto sobre resistencia de materiales. Y para un estudio a fondo, consúltese *Torsional Analysis of Rolled Steel Sections* de C.P. Heins, Jr. y P.A. Seaburg, que es un libro de diseño en acero, que se puede obtener en la Bethlehem Steel Corporation.

La carga torsional ocurre cuando la línea de acción de la carga no pasa por el centro de esfuerzo cortante de la viga. El centro de cortante para vigas en forma de I, así como el cajón, tubular y circular, coincide con el centro de gravedad. Sin embargo, no coincide con el centro de gravedad de formas acanaladas y otras vigas de sección abierta no simétrica. El momento o par de torsión inducido por carga torsional es similar a un momento flexionante cuyo valor sea el producto de la carga y su distancia perpendicular al centro de cortante. En la figura 5.44 se ve que es  $T = Pe$  y permanece constante a todo lo largo de la viga.

Cuando la carga torsional no se puede evitar mediante un diseño adecuado o si parece constituir la mayor parte del sistema de cargas, se recomienda el uso de una viga sólida de forma circular, cajón o tubular. De éstas, la forma más efectiva para resistir el esfuerzo cortante torsional es la forma circular, que puede ser sólida o tubular. La naturaleza de los esfuerzos cortantes en secciones circulares sólidas y secciones tubulares es un poco diferente, como se ve en la figura 5.45.

Las formas circulares no se alaban y los esfuerzos de torsión consisten solamente en esfuerzos cortantes. La magnitud de estos esfuerzos cortantes es proporcional a la distancia desde el centro de cortante y varía linealmente de cero en el centro de cortante a un máximo en la fibra más alejada. El valor del esfuerzo cortante de torsión de secciones circulares está dado por la fórmula.

$$f_v = \frac{Tc}{J}$$

donde

$T$  = par de torsión en pulgadas-libras o pulgadas-kips.

$c$  = distancia radial del centro de cortante al punto en consideración.

$J$  = momento polar de inercia en pulgadas a la cuarta potencia.

Las formas circulares sólidas tienen un valor de  $J$  de  $\pi d^4/32$ , mientras que la forma circular hueca tiene un valor de  $J$  de  $\pi[d^4 - (d-T)^4]/32$  (véase la figura 5.45). Una fórmula distinta para calcular el valor de  $J$  de una sección tubular circular es

$$J = \frac{\pi d_o^3 t}{4}$$

donde  $d_o$  es el diámetro medio de la sección (figura 5.45b).

Cuando una sección no circular de pared delgada (figura 5.45c) se somete a torsión, habrá alabeo en cada sección a lo largo del miembro. Sin embargo, si los extremos del miembro no están restringidos, el alabeo se efectúa de tal manera que no se

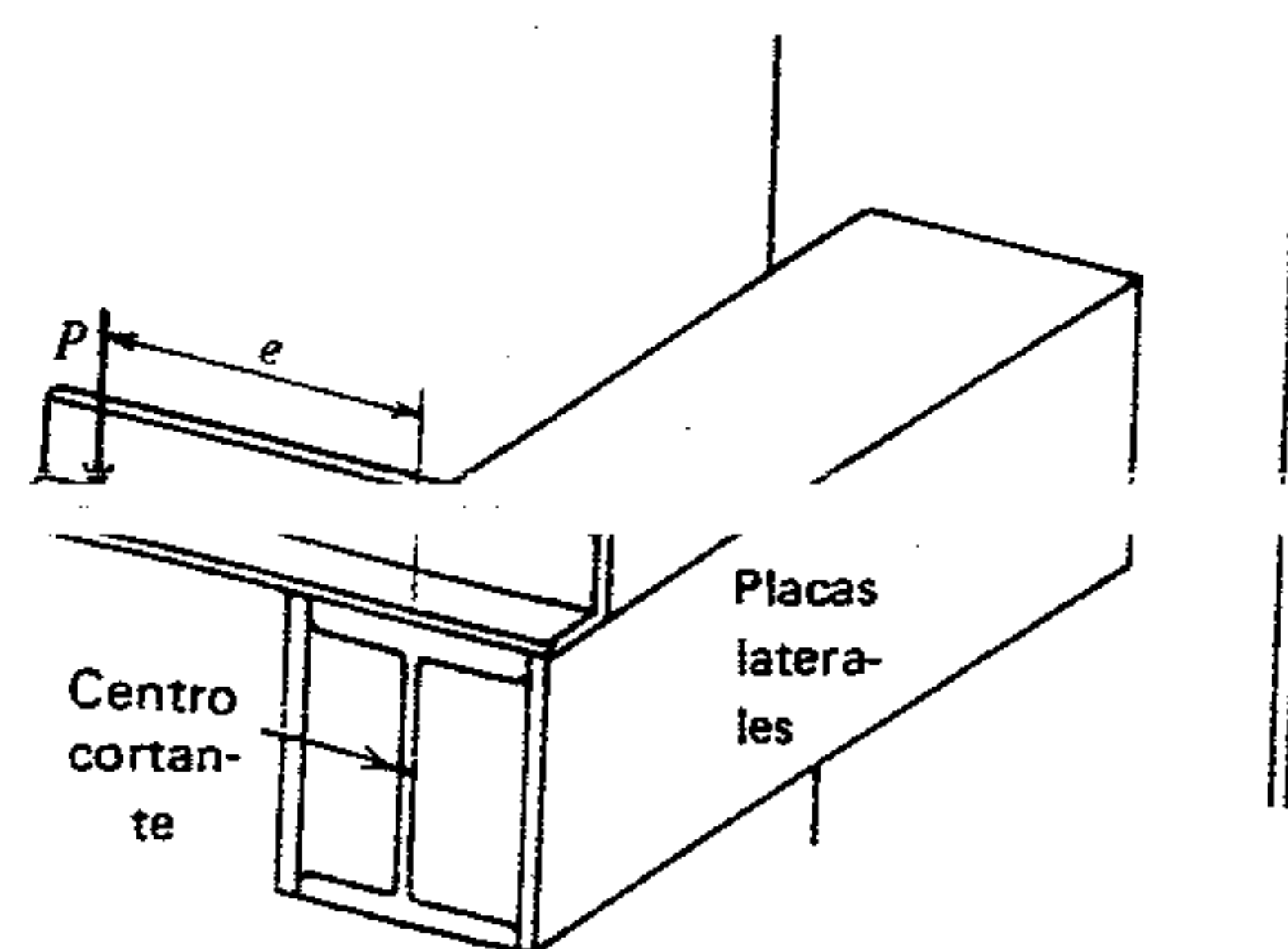


Figura 5.44 Carga de torsión.

producen esfuerzos de alabeo; sólo hay esfuerzos cortantes y permanecen constantes en todo el espesor del tubo. La magnitud de estos esfuerzos cortantes se puede determinar con la fórmula de Bredt<sup>14</sup>

$$f_v = \frac{T}{2tA_o}$$

donde  $A_o$  es el área del tubo abarcada por la línea media de la pared.

Los esfuerzos cortantes calculados por las fórmulas que se presentaron antes se deben agregar a otros esfuerzos causados por la acción de la viga. Por lo tanto, la dirección de los esfuerzos calculados independientemente se convierte en una estimación importante.

En la figura 5.46 se ve que en un lado del alma vertical los esfuerzos cortantes debidos a la flexión y los esfuerzos cortantes debidos a la torsión son directamente sumados. Debe recordarse que el valor del esfuerzo cortante debido a la flexión se calcula con la fórmula y es el máximo en el eje neutro.

$$f_{vb} = \frac{VQ}{Ib}$$

Por lo tanto, se hace necesario agregar el esfuerzo cortante torsional ( $f_v$ ) al cortante flexionante ( $f_{vb}$ ) en el eje neutro para obtener un valor máximo.

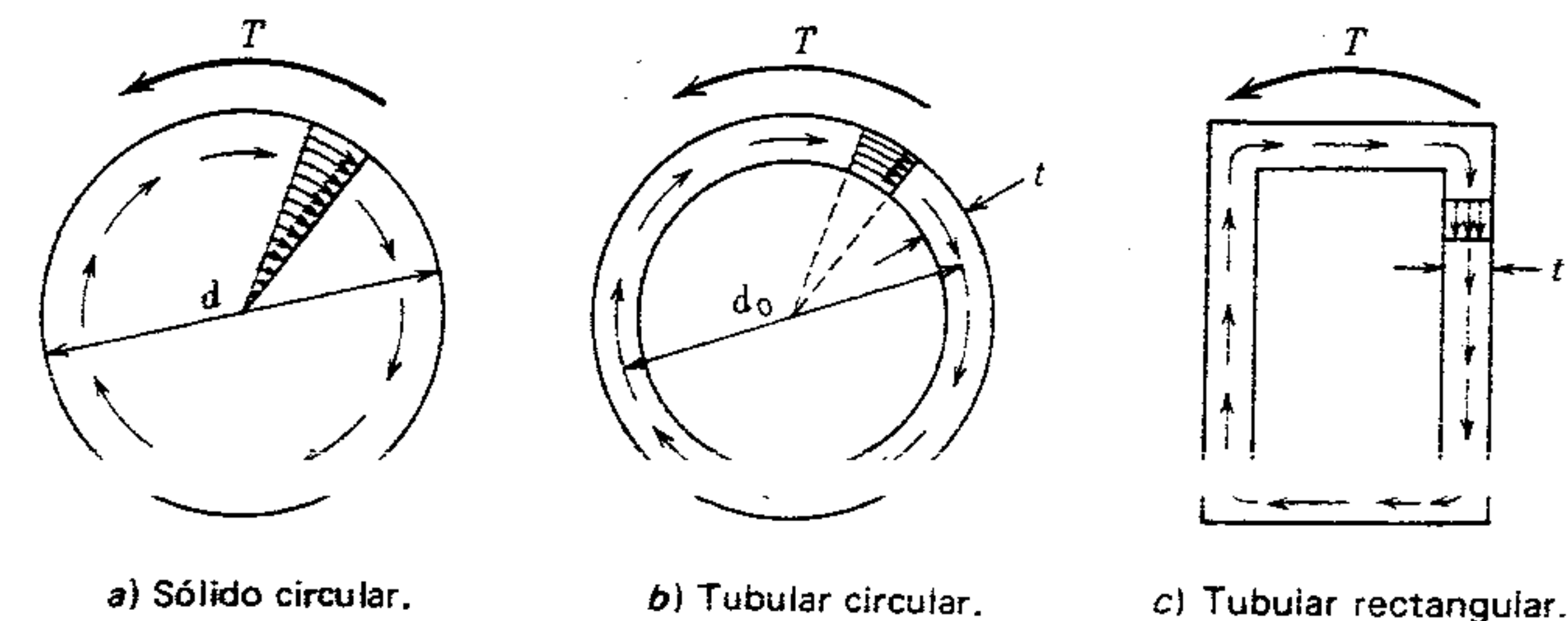


Figura 5.45 Esfuerzo cortante torsional.

<sup>14</sup> W. Flugge, editor, *Handbook of Engineering Mechanics*, primera edición, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1962, págs. 36-13.

Siempre que se use una forma abierta, como las conocidas vigas I y acanaladas, cuando la torsión se considera crítica, el proceso de diseño es considerablemente más complejo y se debe consultar el libro de diseño en acero y análisis torsional citado anteriormente. El efecto de la forma abierta provoca una significativa acción de alabeo, la cual, a su vez, puede generar esfuerzos de mayor magnitud que los esfuerzos cortantes torsionales que se explicó ya.

La torsión en sección abierta provoca tres diferentes tipos de esfuerzos: esfuerzo cortante torsional, esfuerzo cortante de alabeo y esfuerzo normal de alabeo, los cuales se deben agregar algebraicamente a los esfuerzos causados por la flexión en la viga.

La distribución de esfuerzo cortante torsional en una forma rectangular sólida, y en la típica sección en forma de I se muestra en la figura 5.47 y la magnitud de sus valores se puede calcular en la fórmula

$$f_{vt} = \frac{Tt}{J}$$

La constante de torsión  $J$  de la forma rectangular es aproximadamente  $(1/3)bt^3$ ; para la sección en I, se puede aproximar agregando los tres valores  $(1/3)bt^3$  de cada uno de los rectángulos que componen la forma. Asimismo, en las tablas de "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC se dan listas de valores de  $J$  para formas I y canales. Esta



## 5.19 TORSIÓN

Ocasionalmente las vigas de acero se someten a cargas torsionales que generan esfuerzos cortantes de torsión. Siempre que esto ocurra, el esfuerzo cortante combinado causado por flexión y torsión se debe investigar a fin de asegurarse de que el valor máximo permanezca dentro de los límites prescritos por el AISC.

En esta sección se trata solamente el aspecto del diseño aplicado y simplificado de la torsión. Para un estudio teórico más completo, consúltese cualquier texto sobre resistencia de materiales. Y para un estudio a fondo, consúltese *Torsional Analysis of Rolled Steel Sections* de C.P. Heins, Jr. y P.A. Seaburg, que es un libro de diseño en acero, que se puede obtener en la Bethlehem Steel Corporation.

La carga torsional ocurre cuando la línea de acción de la carga no pasa por el centro de esfuerzo cortante de la viga. El centro de cortante para vigas en forma de I, así como el cajón, tubular y circular, coincide con el centro de gravedad. Sin embargo, no coincide con el centro de gravedad de formas acanaladas y otras vigas de sección abierta no simétrica. El momento o par de torsión inducido por carga torsional es similar a un momento flexionante cuyo valor sea el producto de la carga y su distancia perpendicular al centro de cortante. En la figura 5.44 se ve que es  $T = Pe$  y permanece constante a todo lo largo de la viga.

Cuando la carga torsional no se puede evitar mediante un diseño adecuado o si parece constituir la mayor parte del sistema de cargas, se recomienda el uso de una viga sólida de forma circular, cajón o tubular. De éstas, la forma más efectiva para resistir el esfuerzo cortante torsional es la forma circular, que puede ser sólida o tubular. La naturaleza de los esfuerzos cortantes en secciones circulares sólidas y secciones tubulares es un poco diferente, como se ven en la figura 5.45.

Las formas circulares no se alaban y los esfuerzos de torsión consisten solamente en esfuerzos cortantes. La magnitud de estos esfuerzos cortantes es proporcional a la distancia desde el centro de cortante y varía linealmente de cero en el centro de cortante a un máximo en la fibra más alejada. El valor del esfuerzo cortante de torsión de secciones circulares está dado por la fórmula.

$$f_v = \frac{Tc}{J}$$

donde

$T$  = par de torsión en pulgadas-libras o pulgadas-kips.

$c$  = distancia radial del centro de cortante al punto en consideración.

$J$  = momento polar de inercia en pulgadas a la cuarta potencia.

Las formas circulares sólidas tienen un valor de  $J$  de  $\pi d^4/32$ , mientras que la forma circular hueca tiene un valor de  $J$  de  $\pi[d^4 - (d-T)^4]/32$  (véase la figura 5.45). Una fórmula distinta para calcular el valor de  $J$  de una sección tubular circular es

$$J = \frac{\pi d_o^3 t}{4}$$

donde  $d_o$  es el diámetro medio de la sección (figura 5.45b).

Cuando una sección no circular de pared delgada (figura 5.45c) se somete a torsión, habrá alabeo en cada sección a lo largo del miembro. Sin embargo, si los extremos del miembro no están restringidos, el alabeo se efectúa de tal manera que no se

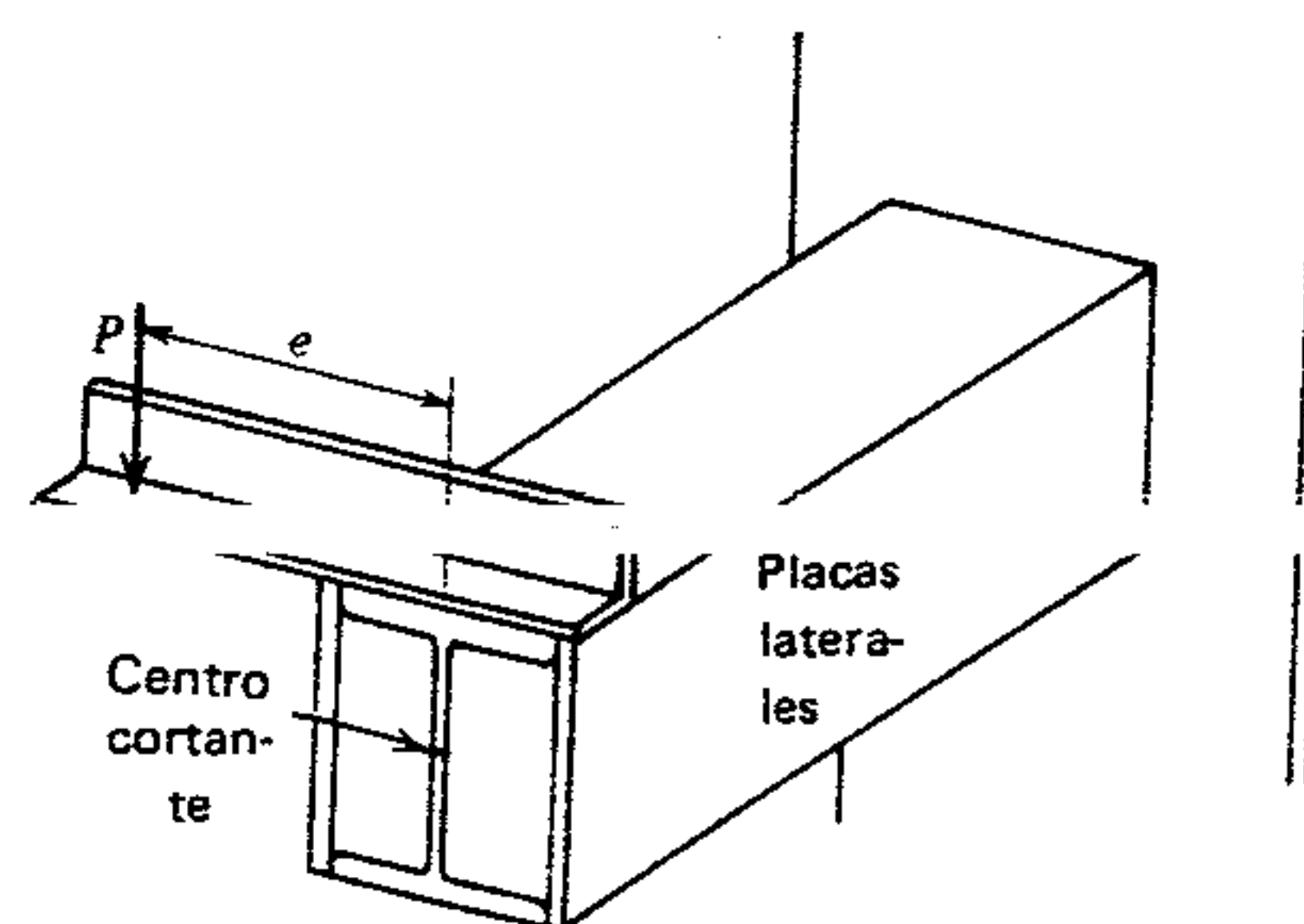


Figura 5.44 Carga de torsión.

producen esfuerzos de alabeo; sólo hay esfuerzos cortantes y permanecen constantes en todo el espesor del tubo. La magnitud de estos esfuerzos cortantes se puede determinar con la fórmula de Bredt<sup>14</sup>

$$f_v = \frac{T}{2tA_o}$$

donde  $A_o$  es el área del tubo abarcada por la línea media de la pared.

Los esfuerzos cortantes calculados por las fórmulas que se presentaron antes se deben agregar a otros esfuerzos causados por la acción de la viga. Por lo tanto, la dirección de los esfuerzos calculados independientemente se convierte en una estimación importante.

En la figura 5.46 se ve que en un lado del alma vertical los esfuerzos cortantes debidos a la flexión y los esfuerzos cortantes debidos a la torsión son directamente sumados. Debe recordarse que el valor del esfuerzo cortante debido a la flexión se calcula con la fórmula y es el máximo en el eje neutro.

$$f_{vb} = \frac{VQ}{Ib}$$

Por lo tanto, se hace necesario agregar el esfuerzo cortante torsional ( $f_v$ ) al cortante flexionante ( $f_{vb}$ ) en el eje neutro para obtener un valor máximo.

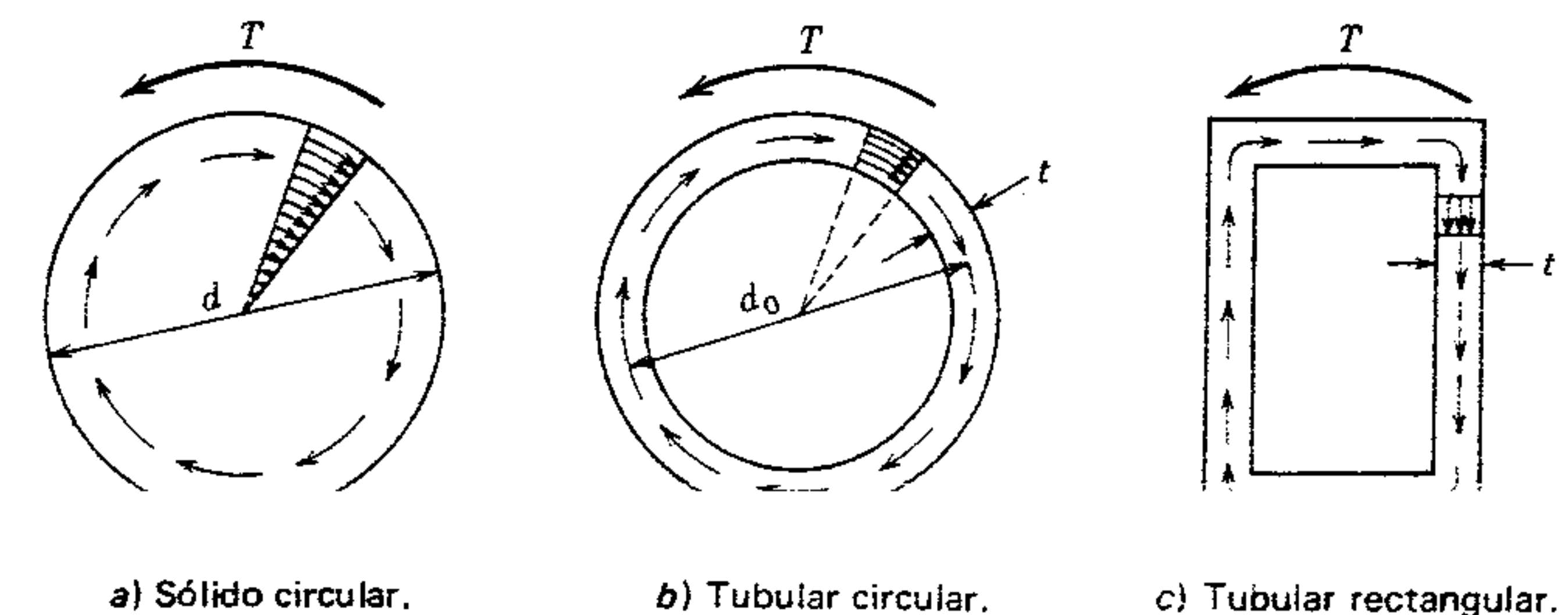


Figura 5.45 Esfuerzo cortante torsional.

<sup>14</sup> W. Flugge, editor, *Handbook of Engineering Mechanics*, primera edición, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1962, págs. 36-13.

Siempre que se use una forma abierta, como las conocidas vigas I y acanaladas, cuando la torsión se considera crítica, el proceso de diseño es considerablemente más complejo y se debe consultar el libro de diseño en acero y análisis torsional citado anteriormente. El efecto de la forma abierta provoca una significativa acción de alabeo, la cual, a su vez, puede generar esfuerzos de mayor magnitud que los esfuerzos cortantes torsionales que se explicó ya.

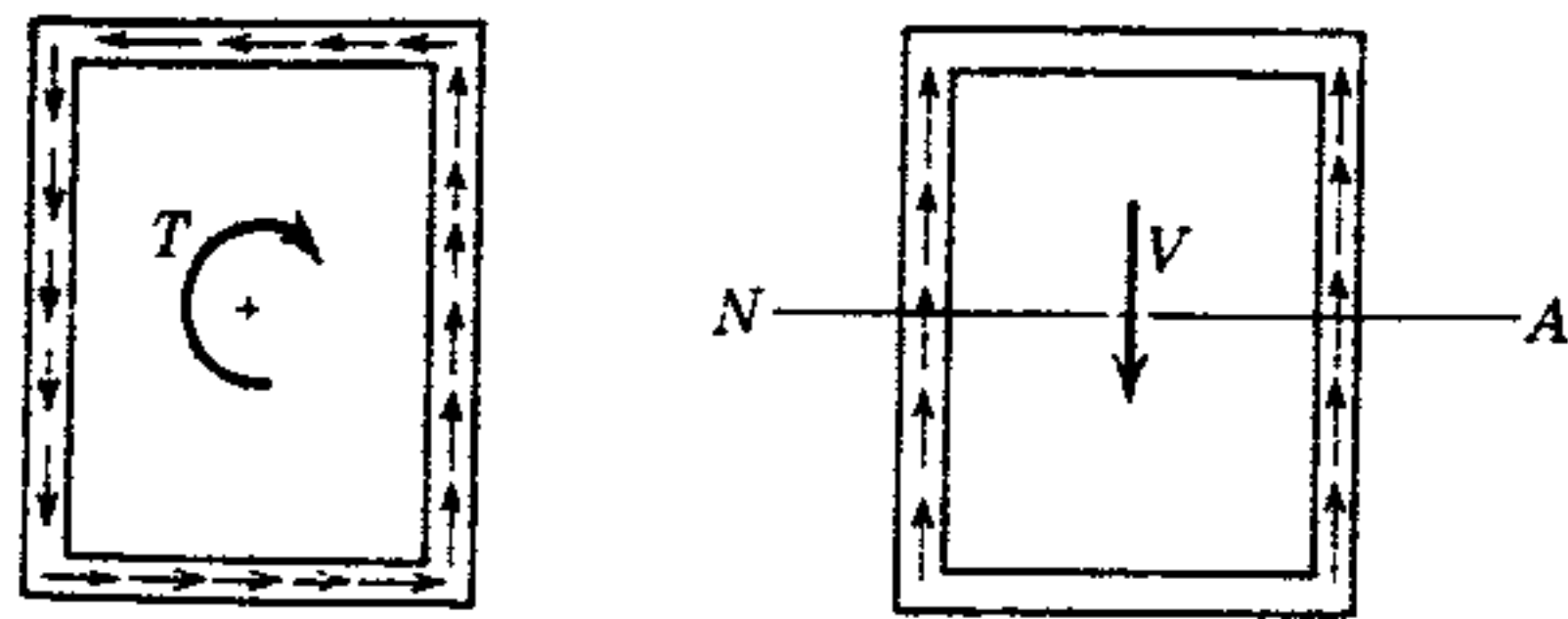
La torsión en sección abierta provoca tres diferentes tipos de esfuerzos: esfuerzo cortante torsional, esfuerzo cortante de alabeo y esfuerzo normal de alabeo, los cuales se deben agregar algebraicamente a los esfuerzos causados por la flexión en la viga.

La distribución de esfuerzo cortante torsional en una forma rectangular sólida, y en la típica sección en forma de I se muestra en la figura 5.47 y la magnitud de sus valores se puede calcular en la fórmula

$$f_{vt} = \frac{Tt}{J}$$

La constante de torsión  $J$  de la forma rectangular es aproximadamente  $(1/3)bt^3$ ; para la sección en I, se puede aproximar agregando los tres valores  $(1/3)bt^3$  de cada uno de los rectángulos que componen la forma. Asimismo, en las tablas de "Dimensiones y propiedades" del Manual AISC se dan listas de valores de  $J$  para formas I y canales. Esta





a) Cortante torsional. b) Cortante flexionante (vertical).

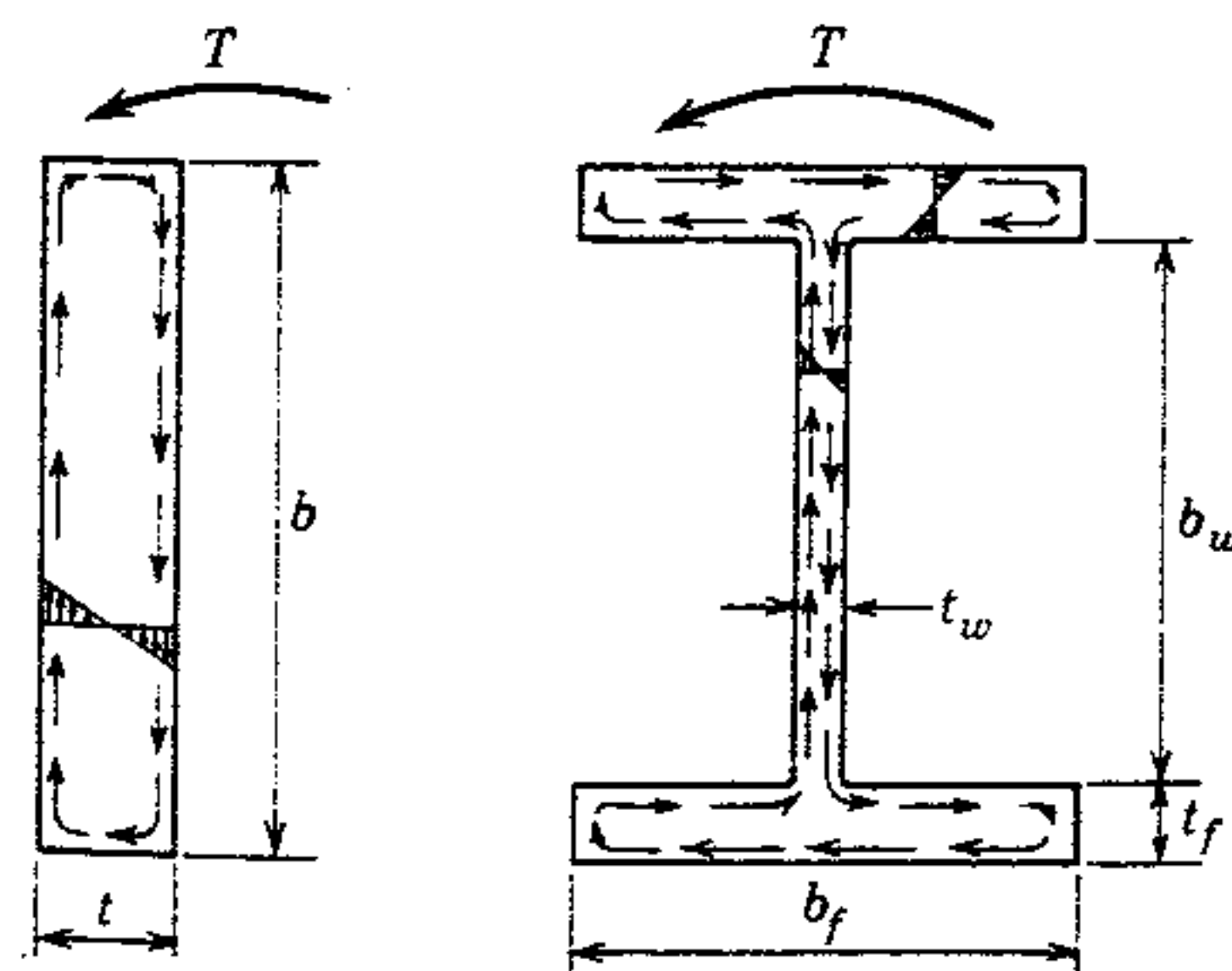
Figura 5.46 Dirección de los esfuerzos cortantes.

distribución de cortante se llama torsión de San Venant.

Cuando se producen esfuerzos cortantes de alabeo y esfuerzos normales de alabeo, sus magnitudes se pueden calcular resolviendo la ecuación diferencial para la torsión no uniforme<sup>15</sup>

$$\frac{T}{EC_w} = \left[ \frac{1}{a^2} \right] \left[ \frac{d\phi}{dx} \right] - \frac{d^3\phi}{dx^3}$$

donde  $C_w$  es la constante de alabeo de la sección transversal (una propiedad listada en la tabla



a) Rectangular sólido. b) Forma I.

Figura 5.47 Esfuerzo cortante torsional (sin alabeo).

<sup>15</sup> Para un desarrollo completo de esta ecuación, véase S. Timoshenko, "Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-Walled Members of Open Cross Section", Journal of the Franklin Institute, Filadelfia, marzo-abril-mayo, 1945.

"Propiedades de Torsión" del Manual del AISC), y  $a^2 = (EC_w)/(GJ)$ , donde  $G$  es el módulo de elasticidad en cortante y  $J$  es la constante de torsión definida previamente. Esta ecuación diferencial relaciona derivadas del ángulo de torsión  $\phi$  con el par de torsión  $T$  aplicados a la viga y se puede usar para cualquier viga que tenga una sección transversal abierta y pared delgada.

Un enfoque más práctico para el cálculo de esfuerzos de alabeo comprende el uso de diagramas en que el ángulo de torsión y sus derivadas se calculan en diversas combinaciones de cargas torsionales y restricciones de extremos. Estos diagramas, junto con una explicación completa sobre su uso, se pueden encontrar en el ya citado *Steel Design File* de Heins y Seaburg.

## PROBLEMAS

1. Diseñar un dintel compuesto por dos ángulos que pueda soportar un muro de mampostería de 8 pulgadas sobre un vano de 10 pies. Los ángulos se colocarán espalda con espalda y asegurados adecuadamente entre sí para que actúen como una unidad. El peso de la mampostería es de 140 lb por pie cúbico. Se tendrá un soporte en cada extremo del dintel de 6 pulgadas. Las características son tales que se puede suponer que la carga es triangular como la de la figura 5.24. Hay soporte lateral adecuado y el acero es A36.
2. Una viga compuesta consta de una W 10 X 22 con su alma vertical, y una C 8 X 11.5 con su alma horizontal con la forma indicada en la figura 5.22e. La canal está soldada al patín superior de la sección W. Determinar la carga uniforme máxima que puede soportar esta viga sobre un claro apoyado lateralmente de 20 pies si se usa acero A36. ¿Cuál será la deflexión máxima bajo esta carga? (Las respuestas se dan en el Apéndice G).
3. Calcular la carga uniforme total, incluyendo el peso propio, que puede soportar la sección compuesta simétrica que se examinó con la figura 5.27, sobre un claro de 28 pies. Suponer que se usa acero A242 y tiene apoyo lateral completo.

4. Determinar la carga uniforme total, incluyendo el propio peso de la viga, que puede soportar la sección compuesta simétrica estudiada en la figura 5.28, sobre un claro de 22 pies. Suponer que se usa acero A36 y no tiene apoyo lateral. ¿Cuáles son los valores del esfuerzo en las partes superior e inferior de la viga en el punto de momento flexionante máximo bajo esta carga?
5. Un travesaño acanalado de acero A242 cubrirá el claro entre dos columnas separadas 16 pies entre sí. Los patines de la canal estarán orientados hacia abajo. La carga horizontal del viento es de 240 lb por pie, y la carga vertical del recubrimiento lateral y el travesaño es de 60 lb por pie. Suponer que la carga vertical actúa en el centro del alma. Diseñar el travesaño usando un esfuerzo flexionante máximo permisible de 30 k/pulg<sup>2</sup> a la tensión y 15 k/pulg<sup>2</sup> a compresión.
6. Una viga W 10 X 33 de acero A36 cubre un claro de 20 pies entre las trabes inclinadas 12° respecto a la horizontal. No tiene apoyo lateral. La carga uniforme de 550 lb por pie (incluyendo el peso de la viga) es vertical y se supone que actúa en el centro del patín superior. Calcular el esfuerzo máximo crítico extremo. ¿Es segura la viga? (La respuesta se da en el Apéndice G).
7. Diseñar una placa de acero para una viga de acero A36, S 10 X 35 que transmita una reacción de 13 kips a un muro construido con ladrillo blando. La longitud del asiento de la viga sobre el muro es de 8 pulg. (Respuesta en el Apéndice G).
8. Una viga W 14 X 30 de acero A36 transmite 34 kips a un muro de bloque de arena volcánica (enlechada). La construcción es tal que sólo se dispone de 6 pulgadas para su asiento y se requiere del uso de una viga de parrilla. Diseñar la viga de Acero A36 (Respuesta en el Apéndice G).
9. En la figura 5.39a, suponer que la mayor dimensión del vano típico mostrado es de 24 pies, y la menor de 18 pies. Las vigas tienen un claro de 24 pies. La carga total a que se someterá el piso (incluyendo carga viva, peso de la construcción de piso de concreto y una tolerancia para el peso de las vigas y las trabes) es de 150 lb/pie<sup>2</sup>. La deflexión por carga está limitada en todos los casos a  $\frac{1}{240}$  del claro. La relación de la construcción del piso de concreto con la estructura de acero es la que se indica en la figura 5.3b. La losa está reforzada de tal manera que transmite toda su carga a las vigas que la soportan (y ninguna a las trabes). Los vanos adyacentes son idénticos al que se está considerando; por lo tanto, las vigas correspondientes tomarán las mismas cargas y tendrán las mismas reacciones. Todas las conexiones de acero son del tipo flexible y crean reacciones simples (no empotradas). Usar acero A36, y:
  - a) Diseñar los miembros de la figura mostrada, usando las secciones W de menor peso que soporten las cargas.
  - b) Rediseñar los miembros, colocando las trabes sobre el claro de 24 pies, con las vigas sobre el claro de 18 pies; las trabes van a recibir a las vigas en cada tercer punto del claro, como antes.
  - c) Comparar el peso del acero necesario en cada diseño, reduciendo las cifras a libras de acero por pie cuadrado de área de piso.
10. Diseñar la viga A-B de la figura 5.40a (acero A36) para una carga uniforme total de 100 lb/pies (incluyendo tolerancia para el peso de todos los miembros de acero). Suponer que tiene apoyo lateral completo y usar la especificación de claro-peralte de  $F_y/800$ .



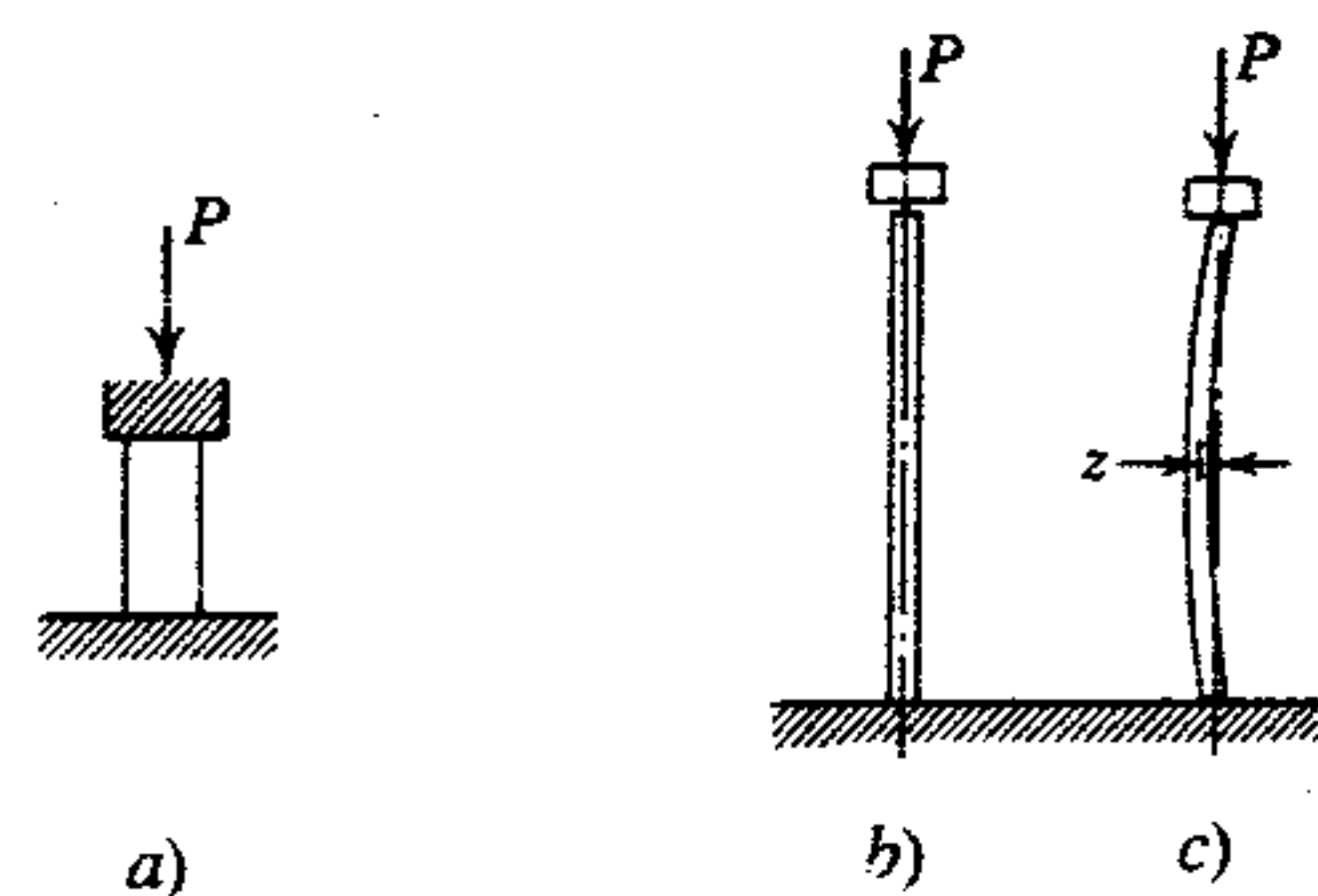


Figura 6.1 Compresión.

tricas y/o esfuerzos residuales. Se debe recordar que los esfuerzos de pandeo se dan además del esfuerzo de compresión directo debido a las fuerzas aplicadas.

En la figura 6.1b, supóngase que  $P$  es una carga ligera. A medida que la carga aumenta, la columna empieza a pandearse (figura 6.1c). Si no se aumenta la carga que causa el pandeo, la columna continuará soportando la carga y la deflexión  $z$  permanecerá constante. Sin embargo, la columna está en un estado de equilibrio inestable, y cualquier pequeño incremento en la carga o incluso la aplicación de una fuerza horizontal provocada por un sacudimiento accidental, puede destruir esta condición. Entonces aumentaría la deflexión  $z$ , incrementando los esfuerzos de pandeo debidos al momento  $Pz$ , el que a su vez haría que  $z$  aumentara aún más. Los esfuerzos de pandeo seguirían aumentando de esta manera hasta que la columna fallara.

En general, la tendencia al pandeo de una columna varía con la relación entre la longitud y la menor dimensión lateral. En las columnas esbeltas esta relación es grande; por lo tanto, si hay falla, ésta se deberá casi por completo al pandeo. Por otra parte, en columnas cortas en que esta relación es pequeña, si hay falla se deberá principalmente a la compresión.

Existen tres tipos de columnas: columnas intermedias en las que, si la falla ocurre, se deberá a una combinación de pandeo y aplastamiento. La mayoría de las columnas que se usan en la construcción de edificios son del nivel intermedio. Hasta la sección 6.14, el estudio se limitará a columnas con cargas axiales, es decir, cargas aplicadas paralelamente al eje largo de la columna, de tal manera

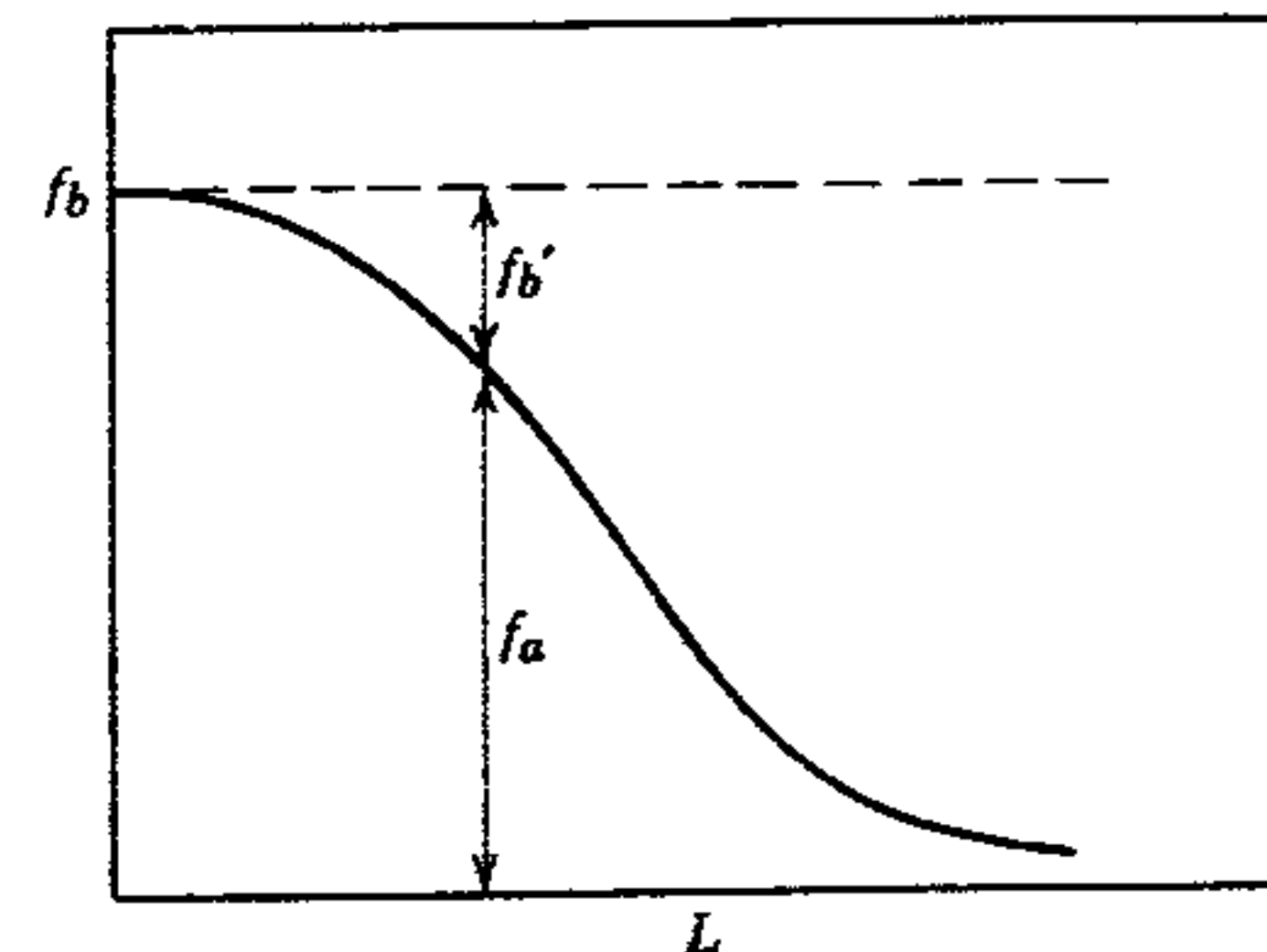


Figura 6.2 Esfuerzos de pandeo.

que sean *concéntricas* respecto al centro de gravedad de la sección transversal de la columna.

## 6.2 ESFUERZOS DE PANDEO

Es difícil calcular el valor del esfuerzo máximo unitario real de una columna, pero es evidente que el esfuerzo unitario promedio,  $f_a = P/A$ , será menor que la resistencia al aplastamiento del material, por una cantidad que depende de la tendencia al pandeo.

Si se pudieran medir estos esfuerzos de pandeo, serían  $f'_b = Mc/I = Pzc/I$ . La figura 6.2 representa lo anterior en una columna de determinado tamaño. La ordenada  $f'_b$  es el esfuerzo promedio máximo permisible y se supone que permanece constante<sup>1</sup> en cualquier longitud ( $L$ ) de una columna dada. Sin embargo, a medida que aumenta la longitud,  $f_a$  se debe reducir para permitir la presencia de  $f'_b$ . Las "fórmulas de reducción" para esto se basan en gran medida en los resultados de datos experimentales de prueba, más que en una derivación matemática directa. Esto se verá en la sección 6.5.

## 6.3 FORMAS DE COLUMNAS

Por lo anterior es evidente que la resistencia de cualquier columna (debido a su tendencia al pan-

<sup>1</sup> Ésta es una sobresimplificación que se modificará más adelante. En realidad, la Especificación del AISC requiere un factor de seguridad que cambie con la longitud, como se vio en la sección 6.5.

deo) dependerá del área y forma de la sección transversal, así como del grado del acero con que está hecha.<sup>2</sup>

Una útil propiedad de una sección, que se debe enteramente a su forma, es el momento de inercia. Las columnas no arriostradas tienden a pandearse en un sentido perpendicular al eje respecto al cual es menor el momento de inercia. Por lo tanto, la sección transversal ideal es la que tiene el mismo momento de inercia respecto a cualquier eje que pase por su centro de gravedad. Obviamente, ésta tiene forma de círculo.

Como el material cercano al centro de gravedad de una sección contribuye poco al momento de inercia, la columna más eficiente es la que tiene la menor cantidad de material posible cerca del eje. Una sección circular hueca (un tubo) se acerca a este ideal; sin embargo, las columnas tubulares se usan sólo de manera limitada en edificios y muy pocas veces como miembros principales de los marcos de estructuras de varios pisos. Una dificultad que representa el uso de columnas de tubo es la de obtener conexiones efectivas de vigas.

En la figura 6.3a se ilustra una columna de forma W laminada, y en b) la misma sección reforzada con placas de patín. Las columnas compuestas de ángulos, placas y canales que se muestran en c) y d), pueden ser soldadas, atornilladas o remachadas. En e), f) y g) se muestran secciones de ángulos que se usan como puntales.

Las formas tubulares expuestas se usan cada vez más. Las formas tubulares estructurales (TS) disponibles en el mercado son cuadradas, redondas o rectangulares, y las hay para diversos espesores de pared y en todos tamaños. En el Manual AISC se incluyen datos sobre las formas cuadradas y rectangulares de uso más frecuente, y si se desean datos más completos se pueden obtener de los fabricantes. La mayoría del tubo de acero disponible es de acero A53, grado B ( $F_y = 35 \text{ k/pulg}^2$ ) o tubo de acero A 500, grado B ( $F_y = 46 \text{ k/pulg}^2$ ), del ASTM.

<sup>2</sup> El grado del acero no es un factor determinante si la columna es muy larga y esbelta, colocándose en la categoría de "pandeo elástico". Véase la sección 6.5.

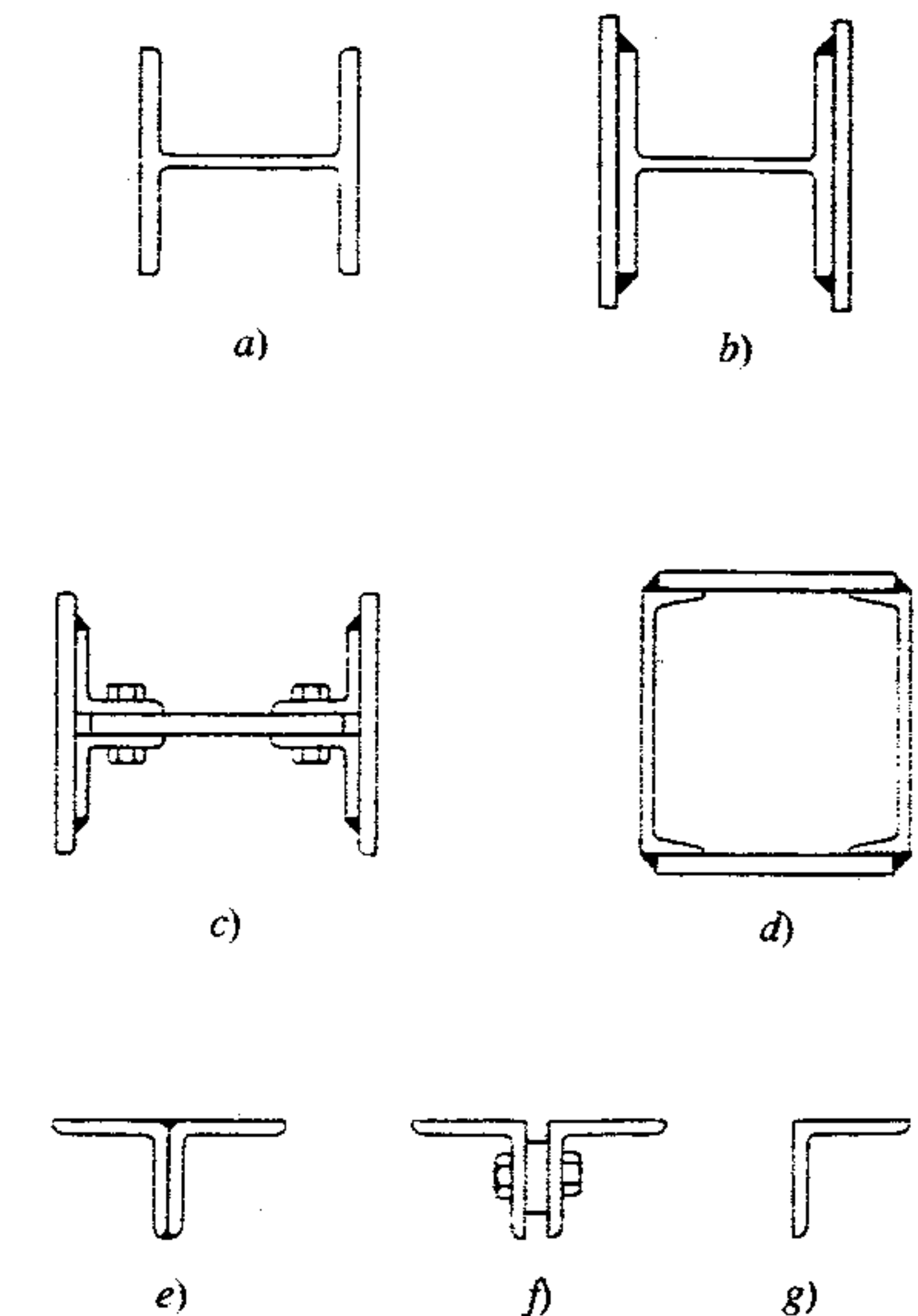


Figura 6.3 Secciones habituales de columnas y puntales.

## 6.4 RADIO DE GIRO Y RELACIÓN DE ESBELTEZ

En el diseño de vigas (sección 3.5), se encontró que el módulo de sección es un índice de la resistencia de un miembro a la flexión. Por su definición ( $S = I/c$ ), es evidente que el valor del módulo de sección depende del tamaño y la forma de la sección. En el diseño de columnas, el término análogo es el radio de giro. También depende del tamaño y la forma de la sección y sirve para medir la efectividad para resistir el pandeo. El radio de giro se expresa como  $r = \sqrt{I/A}$ , en el que  $I$  es el momento de inercia de la sección respecto al eje dado y  $A$  es el área.<sup>3</sup> En la sección 6.1 se estableció que en general la tendencia al pandeo

<sup>3</sup> Para un tratamiento más amplio del radio de giro, consúltese cualquier libro de texto estándar sobre mecánica.



Se estima razonablemente que el límite superior de la falla por pandeo ocurrirá cuando el esfuerzo promedio de la columna es igual a la mitad del esfuerzo de fluencia; por lo tanto,

$$\frac{F_y}{2} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

y, despejando  $L/r$

$$\frac{L}{r} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

Esta es la fórmula que establece la relación de esbeltez que separa el pandeo elástico del inelástico. Variará con el esfuerzo de fluencia del acero, y el símbolo para este valor de  $L/r$  es  $C_c$ . Por tanto,

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

En el apéndice de las Especificaciones del AISC (parte 5 del Manual AISC) se dan estos valores para los diversos tipos de acero. Por ejemplo, el valor para el acero A36 es 126.1, y para aceros con un límite de fluencia de 50 k/pulg<sup>2</sup> es 107.0.

En conclusión, si la relación de esbeltez real  $KL/r > C_c$ , el modo de falla supuesto sería pandeo elástico. Si, por otra parte,  $KL/r < C_c$ , el modo de falla sería pandeo inelástico. Las Especificaciones del AISC proporcionan una fórmula de reducción para  $F_a$  en cada caso.

**Pandeo inelástico.** El esfuerzo unitario promedio máximo no debe exceder de

$$F_a = \left[ 1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] F_y$$

F.S.

donde F. S. es el factor de seguridad.

Este factor de seguridad refleja las inconsistencias en el comportamiento de la columna bajo las pruebas ya mencionadas. La fórmula recomendada

para el factor de seguridad deducido de estas consideraciones es

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}$$

Nótese que cuando  $KL/r = 0$ , F. S. = 1.67, y cuando  $KL/r = C_c$ , F. S. = 23/12 = 1.92.

**Pandeo elástico.** El esfuerzo unitario promedio máximo no debe exceder al que resulte de la fórmula de Euler cuando se usa un factor constante de seguridad de 23/12. Por lo tanto,

$$F_a = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2 F.S.} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2}$$

Debe señalarse que esta fórmula no incluye un factor que represente el grado del acero. Esto se debe al hecho de que  $E$  no varía apreciablemente con  $F_y$  y  $E$  determina el pandeo. Por lo tanto, el mismo esfuerzo limitante será el mismo para todos los grados de acero.

**Puntales.** La mayoría de estos elementos estructurales (sección 6.1) se clasifican como miembros secundarios, y como tales las Especificaciones del AISC permiten esfuerzos ligeramente mayores para las columnas, cuando la relación de esbeltez es mayor que 120. Al determinar la relación de esbeltez,  $K$  siempre se toma como uno.

El esfuerzo permisible incrementado  $F_{as}$  se calcula dividiendo el esfuerzo unitario promedio máximo aplicable  $F_a$  (para pandeo elástico o inelástico según sea el caso) por  $1.6 - L/200r$ , es decir,

$$F_{as} = \frac{F_a}{1.6 - \frac{L}{200r}}$$

En la figura 6.5 se muestran las tres fórmulas de esfuerzo límite para acero A36. Nótese que el límite superior de la relación de esbeltez es 200, que es la máxima permitida por las Especificaciones del AISC.

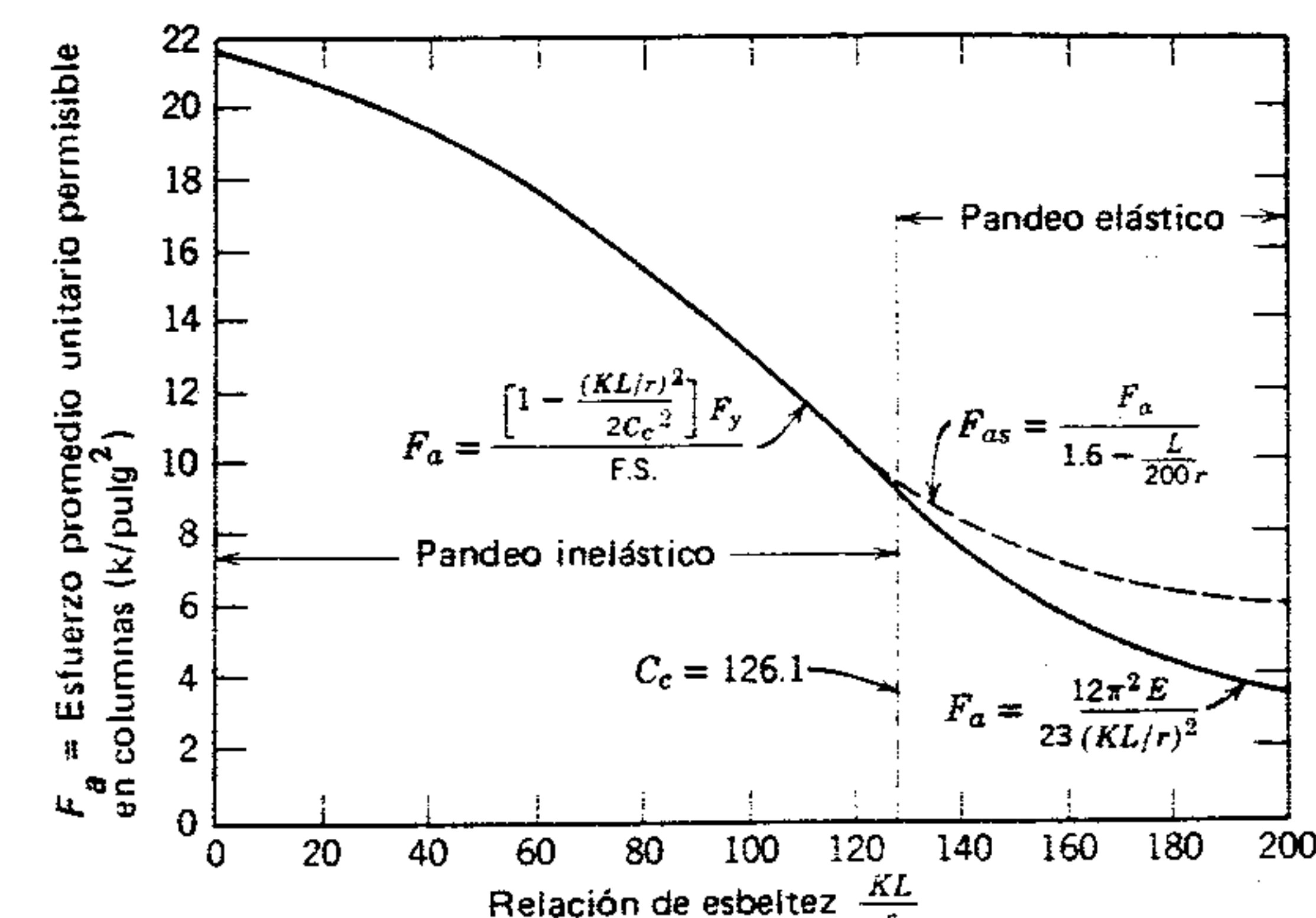


Figura 6.5 Esfuerzo de compresión permisible para acero ASTM A36. Fuente original: Column Research Council.

## 6.6 INVESTIGACIÓN DE COLUMNAS

Para calcular la carga axial que una columna puede soportar seguramente de acuerdo con alguna especificación particular, usualmente conviene calcular primero la relación de esbeltez y compararla con el  $C_c$  del grado de acero especificado. Al hacerlo, la columna se ubica en una de las dos categorías, es decir, pandeo inelástico si  $KL/r < C_c$ , o pandeo elástico si  $KL/r > C_c$ . Luego se elige la fórmula apropiada de columna y la relación de esbeltez se sustituye en esa fórmula para calcular el esfuerzo promedio permisible  $F_a$ . La carga que la columna puede soportar seguramente será igual al esfuerzo promedio permisible por el área de la sección de la columna.

Determinar la carga axial total que resiste seguramente una columna W 12 × 72 con una altura no arriostrada de 14 pies. Se supone que los extremos están articulados y arriostrados contra la traslación. Usar acero A36.

### Solución

1. En las tablas del Manual AISC, "Dimensiones y Propiedades", el área y los radios de giro de esta sección son

$$A = 21.1 \text{ pulg}^2$$

$$r_x = 5.31 \text{ pulg}$$

$$r_y = 3.04 \text{ pulg}$$

2. El acero A36 tiene un límite de fluencia  $F_y = 36,000 \text{ k/pulg}^2$ ; por lo tanto,

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 (29,000)}{36}} = 126.1$$

3. La máxima relación de esbeltez es

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(14)(12)}{3.04} = 55.3$$

4. Como la relación de esbeltez real es menor que 126.1, la columna pertenece a la clase que



fallará debido al pandeo inelástico. En las Especificaciones del AISC, el factor de seguridad es

$$\text{F.S.} = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8(C_c)} - \frac{(KL/r)^3}{8(C_c)^3}$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{3(55.3)}{8(126.1)} - \frac{(55.3)^3}{8(126.1)^3} = 1.82$$

y el esfuerzo promedio permisible es

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2}\right] F_y}{\text{F.S.}}$$

$$= \frac{\left[1 - \frac{(55.3)^2}{2(126.1)^2}\right] 36,000}{1.82} \approx 17,900 \text{ lb/pulg}^2$$

5. La carga axial permisible sobre la columna, incluyendo su propio peso, es igual al esfuerzo permisible por el área, o sea

$$P = F_a A = 17,900(21.1)$$

$$= 378,000 \text{ lb} \quad \text{o} \quad 378 \text{ kips}$$

### Ejemplo 2

Determinar la carga axial total que resiste seguramente una columna W 6 X 20 con una altura no arriostrada de 18 pies. Se supone que los extremos de la columna están articulados y arriostrados contra la translación. Usar acero A36.

### Solución

1. En las tablas de "Dimensiones y Propiedades" del Manual AISC, el área y radios de giro de la sección son

$$A = 5.87 \text{ pulg}^2$$

$$r_x = 2.66 \text{ pulg}$$

$$r_y = 1.50 \text{ pulg}$$

2. El acero A36 tiene un límite de fluencia  $F_y = 36,000 \text{ k/pulg}^2$ . Entonces,

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(29,000)}{36}} = 126.1$$

3. La relación de esbeltez real es

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(18)12}{1.50} = 144$$

4. Como la relación real es mayor a 126.1, la columna pertenece a la clase que fallaría debido al pandeo elástico. En las Especificaciones del AISC, el esfuerzo permisible promedio es

$$F_a = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2}$$

$$= \frac{12(3.14)^2 29,000}{23(144)^2}$$

$$= 7.2 \text{ k/pulg}^2$$

5. La carga axial permisible sobre la columna, incluyendo su propio peso es

$$P = F_a A = 7.2(5.87)$$

$$= 42.3 \text{ kips}$$

Existen tablas para hacer más rápido el análisis de columnas. Basándose en la fórmula de la columna en particular y en el grado especificado del acero, estas tablas proporcionan el esfuerzo permisible para los diferentes valores de la relación de esbeltez. Éstas se encuentran en la parte 5 del Manual AISC, en el apéndice de la Especificación. En la octava edición del Manual AISC, hay dos tablas, una para el acero A36.

$F_y = 50 \text{ k/pulg}$ . Los valores calculados de  $F_a$  para cada fórmula (casos elástico e inelástico) están tabulados para cada valor de  $KL/r$  de 1 a 200. Con esta tabla como referencia, se puede encontrar  $F_a$  sin hacer cálculos de los pasos 2 y 4 de los ejemplos 1 y 2 anteriores.

## 6.7 SECCIONES COMPUESTAS

En el ejemplo 1 de la sección 6.6, la columna usada tenía una sección laminada W o M como la mostrada en la figura 6.3a. Las secciones de este tipo son las de uso más frecuente en la construcción de edificios de acero. Sin embargo, a veces es necesario reforzar las secciones laminadas ordinarias con placas, como se ve en la figura 6.3b y d, e incluso puede necesitarse o ser conveniente fabricar una columna usando placas y ángulos o algunas otras formas estándar. La resistencia de las columnas compuestas se investiga de la misma manera que las bosquejadas en la sección 6.6. En los manuales del acero se pueden encontrar las características de las secciones compuestas de mayor uso, como área y radios de giro, tan fácilmente como las de las secciones laminadas. Cuando no se dispone de estas tablas, se debe calcular el momento de inercia de una sección compuesta de la misma manera que las vigas compuestas (sección 5.13). Por lo general es necesario encontrar el momento de inercia respecto a los dos ejes principales de la sección y luego calcular el menor radio de giro sustituyendo el menor  $I$  en la ecuación  $r = \sqrt{I/A}$ . Una vez calculados el menor radio de giro y el área, se aplican los métodos de la sección 6.6.

Al diseñar secciones compuestas, se debe tener cuidado de ajustarse a los límites de las relaciones entre ancho y espesor establecidas en la sección

1.9 de las Especificaciones del AISC de 1978. Estos límites son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada del esfuerzo de fluencia  $F_y$ . Se establecen dos categorías: elementos no rigidizados (salientes) y elementos rigidizados (apoyados a lo largo de dos bordes).

En la figura 6.6a se muestran tres elementos no rigidizados típicos y se indica cómo determinar las dimensiones  $b$  y  $t$ . Para elementos no rigidizados, la relación  $b/t$  debe limitarse a  $95/\sqrt{F_y}$  excepto para puntales de un solo ángulo y las almas de las tes (véase la Especificación AISC). En la figura 6.6b se muestran tres elementos rigidizados típicos. Las dimensiones  $b$  y  $t$  se calculan como se muestra. Para el caso general, la relación  $b/t$  debe estar limitada a  $253/\sqrt{F_y}$ ; sin embargo, si el elemento rigidizado es el patín de una sección cuadrada o rectangular y tiene un espesor uniforme, el límite de la relación se reduce a  $238/\sqrt{F_y}$ .

Mayores relaciones entre ancho y espesor son permisibles siempre que la sección neta, eliminada la cantidad en exceso, satisfaga la limitación de esfuerzo de la Especificación AISC.

## 6.8 ALTURA NO ARRIOSTRADA

En edificios de varios pisos y con marcos de acero, usualmente la altura no arriostrada de una columna se toma como la distancia de piso a piso. No obs-

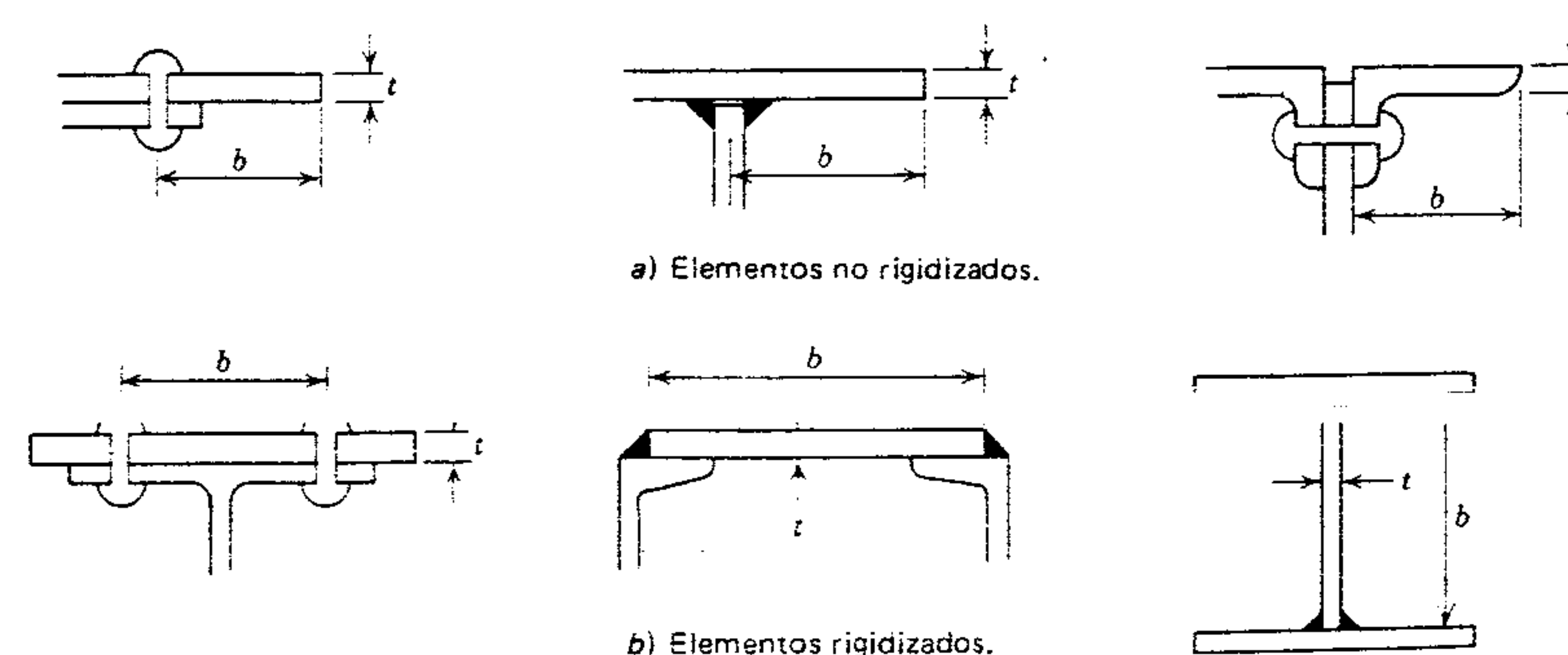


Figura 6.6 Relaciones entre ancho y espesor, del AISC.



tante, hay ocasiones en que se necesita arriostrar una columna a intervalos menores y cuando menos en una dirección para evitar el pandeo. En la sección 6.4 se dijo que la relación de esbeltez  $KL/r$  se calcula usando el menor radio de giro. Esto es válido sólo cuando la columna tiene alturas no arriostradas iguales para ambos ejes, y las condiciones de los extremos son las mismas en ambos ejes. Cuando la altura no arriostrada es distinta en cada eje, la tendencia de la columna al pandeo es mayor para el eje que tiene la mayor relación de esbeltez. En la figura 6.7, la relación de esbeltez apropiada para el diseño sería  $KL_1/r_x$  o  $KL_2/r_y$ , según cuál sea la mayor. Es obvio que siempre que sea posible poner apoyos intermedios, sería deseable orientar la columna de modo que el eje con el menor radio de giro sea el arriostrado.

En la figura 6.8 se muestra el efecto del extremo en la tendencia al pandeo. En este ejemplo, la trabe está sujeta rígidamente a la columna, restringiendo así la rotación del extremo respecto al eje  $x-x$  en la parte superior de la columna. Sin embargo, debido a la falta de arriostramiento en esta dirección, no está restringida la translación del extremo. La viga del alero está sujeta a la columna de tal manera que no restringe la rotación de la columna respecto al eje  $y-y$ , pero el arriostramiento sí evita la translación del extremo. La parte inferior de la columna se clasificaría como articulada simple, restringida contra la translación en ambas direcciones. Por lo tanto, el valor  $K$  para el eje  $x-x$  es 2.0 y para el eje  $y-y$ , 1.0 (sección 6.4 y figura 6.4).

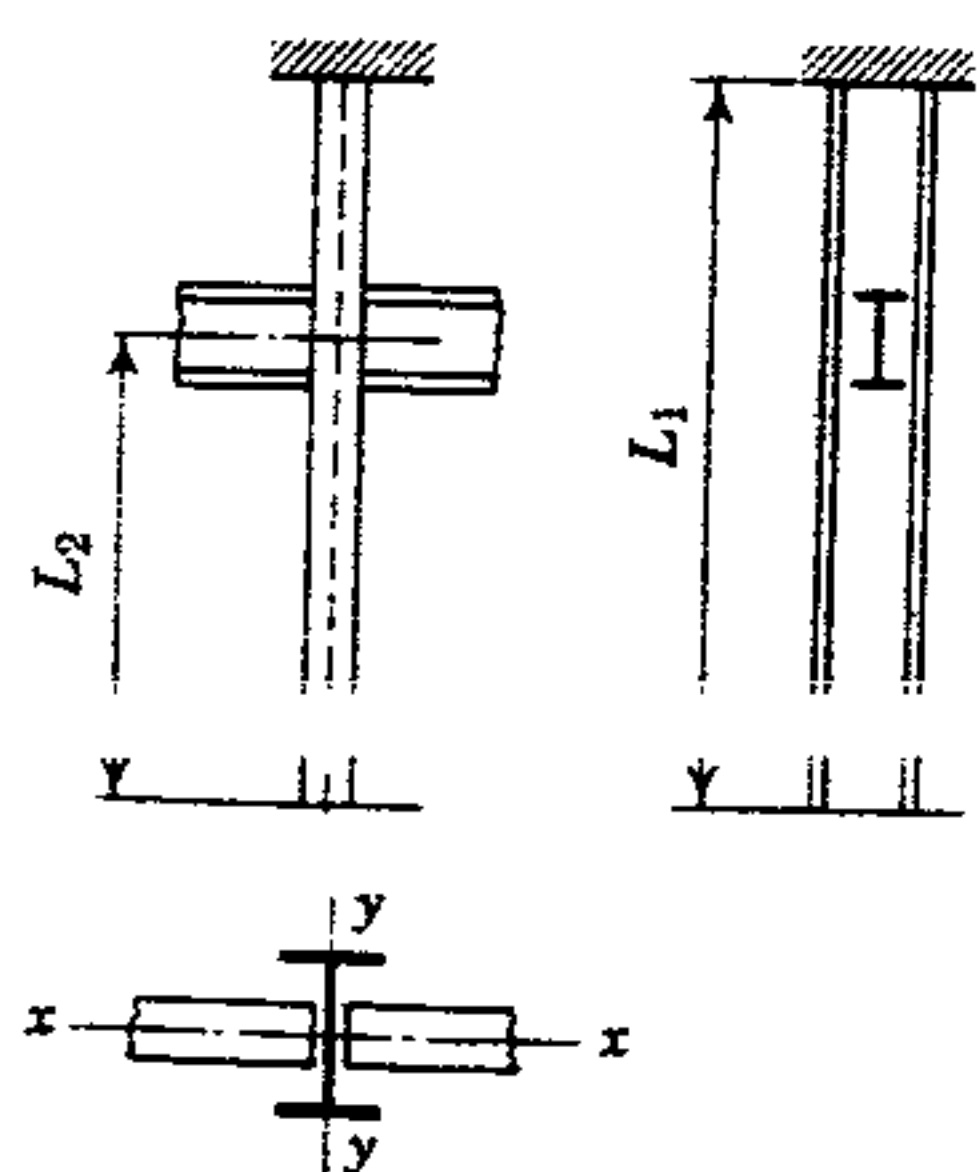


Figura 6.7 Alturas no arriostradas.

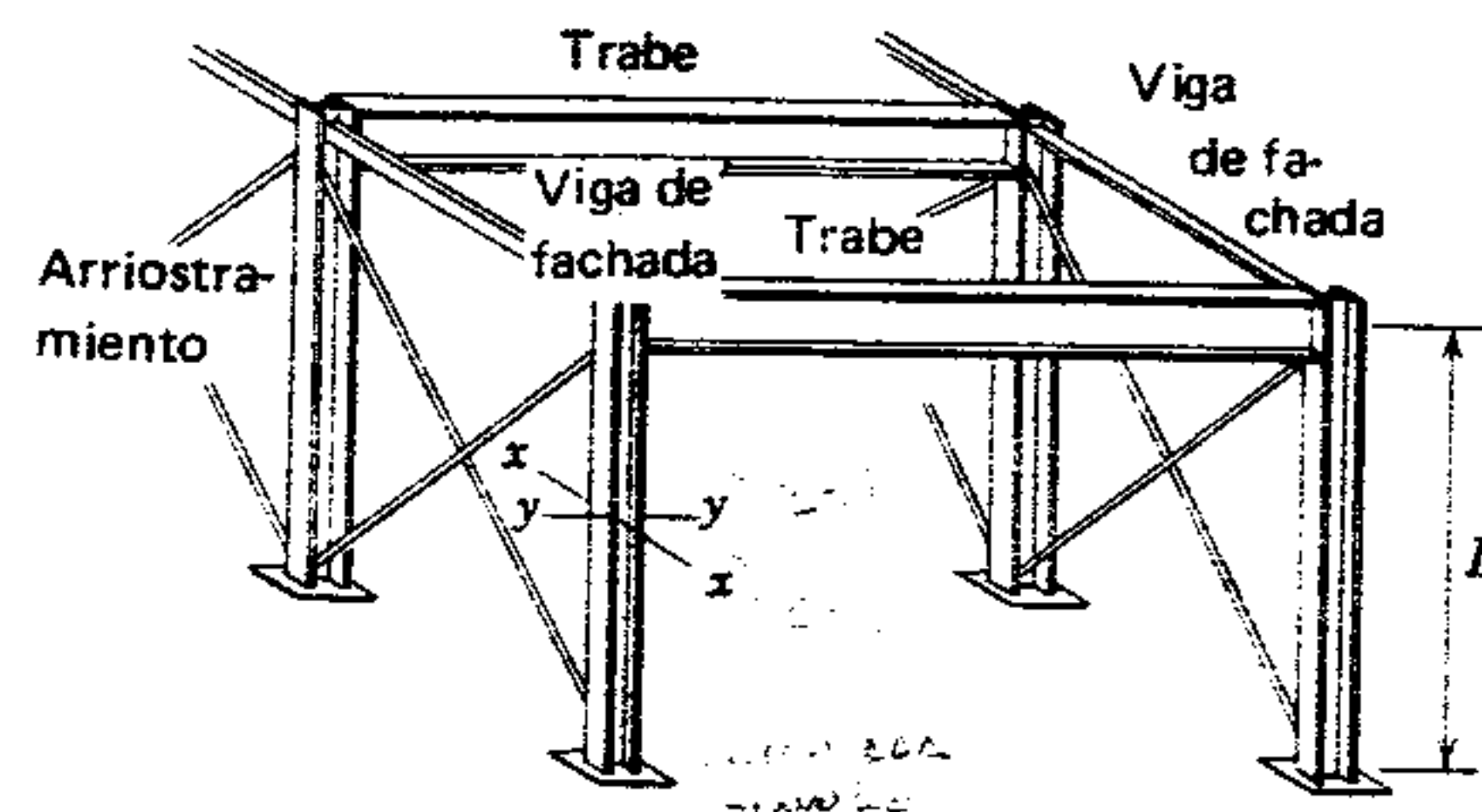


Figura 6.8 Marco: condiciones de extremos.

Existen otros procedimientos para calcular un valor más preciso de  $K$  de una columna. En estos procedimientos se considera que la base de columna estándar no funciona como una articulación verdadera y que el extremo superior de la columna no está completamente protegido contra la rotación. Asimismo, los valores  $K$  y las formas flexionadas de la figura 6.4 son para condiciones elásticas; si una columna tiene un modo de falla inelástica, se permite hacer un nuevo ajuste. Se deben consultar las Especificaciones del Manual AISC; sin embargo, el proyecto de diseño de un edificio en el capítulo 13 también incluye estos procedimientos.

Para calcular la máxima relación de esbeltez en un diseño, se debe hacer un cálculo para ambos ejes, es decir,

$$\frac{KL_x}{r_x}, \text{ donde } K = 2.0$$

y

$$\frac{KL_y}{r_y}, \text{ donde } K = 1.0$$

También es posible encontrar situaciones en que los tres términos  $K$ ,  $L$  y  $r$  sean diferentes. El valor máximo de  $KL/r$  siempre determina la tendencia de la columna a pandearse y se usa para establecer  $F_a$ .

### Ejemplo 1

Una columna está compuesta de una  $S 6 \times 12.5$  con placas de  $1/2 \times 6$  pulgadas soldadas en cada patín.

Para elementos apoyados a lo largo de dos bordes

$$(b/t)_{\text{máx}} = \frac{253}{\sqrt{F_y}} = \frac{253}{\sqrt{36}} = 42.1$$

$$(b/t)_{\text{real}} = \frac{3.33}{0.5} = 6.66$$

En ambas condiciones, la relación real es menor que la máxima permisible.

3. Determinar el área total de la columna.

$$A = 3.67 + 2(0.5)6 = 9.67 \text{ pulg}^2$$

4. Calcular el momento de inercia en cada eje principal

$$I_x = 22.1 + 2[(0.5)6(3.25)^2] = 85.5 \text{ pulg}^4$$

$$I_y = 1.82 + 2\left[\frac{(0.5)6^3}{12}\right] = 19.8 \text{ pulg}^4$$

Nótese que  $I_x = I(S 6 \times 12.5) + 2 [I_{\text{(placa)}} + Az^2]$ , pero que  $I_{\text{(placa)}}$  se ha omitido (sección 5.13); y que  $I_y = I(S 6 \times 12.5) + 2 [bd^3/12]$  (placa).

5. Calcular el radio de giro de cada eje.

$$r_x = \sqrt{\frac{85.5}{9.67}} = 2.97 \text{ pulg}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{19.8}{9.67}} = 1.43 \text{ pulg}$$

6. Determinar la máxima relación de esbeltez

$$\frac{KL_x}{r_x} = \frac{1(16)12}{2.97} = 64.6$$

$$\frac{KL_y}{r_y} = \frac{1(8)12}{1.43} = 67.1$$

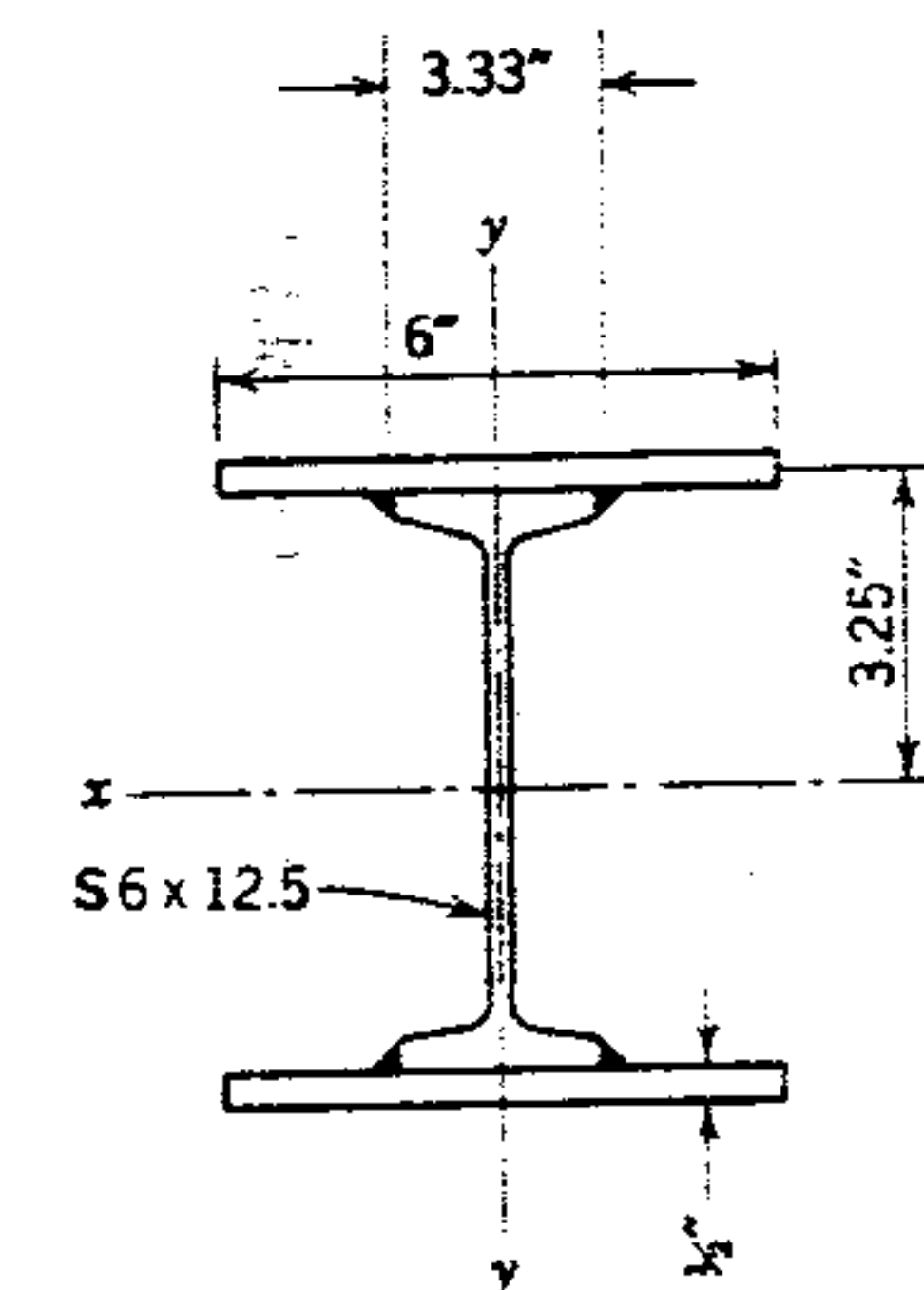


Figura 6.9 Ejemplo 1.

como se ve en la figura 6.9. La altura no arriostrada para el eje  $x-x$  es de 16 pies y para el eje  $y-y$ , de 8 pies. El valor  $K$  para cada eje es de 1.0. Usando acero A36, determinar la máxima carga axial permitida por la Especificación AISC de 1978.

### Solución

1. En el Manual AISC, el área, el ancho de patín, los momentos de inercia y el peralte de la  $S 6 \times 12.5$  son

$$A = 3.67 \text{ pulg}^2 \quad I_x = 22.1 \text{ pulg}^4$$

$$b_f = 3.332 \text{ pulg} \quad I_y = 1.82 \text{ pulg}^4$$

$$d = 6.00 \text{ pulg}$$

2. Revisar la relación ancho-espesor en función de la limitación de la sección 1.9 de la Especificación AISC. (Sólo se tienen que considerar las placas de cubierta, ya que todas las formas laminadas  $W$  y  $S$  cumplen con los requisitos de esta sección de la Especificación).

Para elementos de voladizo,

$$(b/t)_{\text{máx}} = \frac{95}{\sqrt{F_y}} = \frac{95}{\sqrt{36}} = 15.8$$

$$(b/t)_{\text{real}} = \frac{(6 - 3.33)/2}{0.5} = 2.67$$



7. Usando la mayor relación de esbeltez, calcular el esfuerzo axial promedio permisible. (Ya sea consultando una tabla apropiada o resolviendo la fórmula aplicable para esta relación de esbeltez). Nótese que como  $KL/r < C_c$ , la fórmula para pandeo no elástico es la determinante, y

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3(67.1)}{8(126.1)} - \frac{(67.1)^3}{8(126.1)^3} = 1.85$$

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(67.1)^2}{2(126.1)^2}\right] 36,000}{1.85}$$

$$= 16,700 \text{ lb/pulg}^2$$

8. Calcular la carga máxima axial permisible, incluyendo el peso de la columna, multiplicando el esfuerzo permisible por el área total de la columna.

$$P = 16,700(9.67)$$

$$\approx 161,500 \text{ lb}$$

### Ejemplo 2

Se usa una W 10 × 100 como columna, con una altura  $L = 18$  pies. Usando acero A242 de alta resistencia y baja aleación, calcular la carga axial aplicada permitida por la Especificación del AISC,  $K_x = 2.0$  y  $K_y = 1.0$ .

### Solución

1. En el Manual AISC, el área y los radios de giro son:

$$A = 29.4 \text{ pulg}^2 \quad r_x = 4.60 \text{ pulg}$$

$$r_y = 2.65 \text{ pulg}$$

En la tabla 2, parte 1 del Manual AISC, la W 10 × 100 está en el grupo 2, y de la tabla 1,  $F_y = 50 \text{ k/pulg}^2$ .

2. Calcular la máxima relación de esbeltez.

$$\frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{2(18)12}{4.60} = 93.9$$

y

$$\frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1(18)12}{2.65} = 81.5$$

3. Usando la mayor relación de esbeltez, calcular el esfuerzo promedio permisible. Esto se puede hacer fácilmente consultando las tablas de esfuerzo de compresión permisible para aceros de diferentes esfuerzos de fluencia, en el apéndice de la Especificación AISC, parte 5 del Manual AISC. Interpolando de la tabla,  $F_a = 16,080 \text{ lb/pulg}^2$ .
4. Determinar la carga axial máxima permisible.

$$P = 16,080(29.4)$$

$$= 473,000 \text{ lb}$$

5. Restar el peso de la columna para calcular la carga máxima aplicada permisible.

$$P = 473,000 - 100(18) = 471,000 \text{ lb}$$

### PROBLEMAS

- Una W 8 × 31 de acero A36 se usa como columna no arriostrada con altura de 14 pies.  $K = 1.0$ . Calcular la carga axial máxima. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una W 6 × 12 de acero A36 se usa como columna no arriostrada con altura de 12 pies.  $K = 1.0$ . Calcular la carga axial máxima.
- Una W 10 × 33 de acero A242 no arriostrada en su eje menor. Calcular la carga axial máxima si  $K$  para ambos ejes es 1.0. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una columna W 8 × 24 de acero A36 no arriostrada tiene una altura de 14 pies.  $K = 1.0$ . Se desea que la máxima carga posible se apoye en esta columna, utilizando arriostramiento inter-

medio sólo en el eje menor. Calcular el intervalo de arriostramiento del eje menor y la carga axial aplicada.

- Una columna no arriostrada compuesta de canales y placas de acero A36, similar a la mostrada en la figura 6.3d, tiene una altura de 13.5 pies. Está compuesta de dos C 9 × 13.4 y dos placas de 1/2 × 9 pulgadas. Los canales están colocados de modo que sus espaldas están separadas 10 pulgadas, y el tamaño total de la columna es de 10 × 10 pulg.  $K = 10$ . Calcular la carga axial máxima. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una columna no arriostrada compuesta de placas y ángulos de acero A36, similar a la mostrada en la figura 6.3c, tiene una altura de 20 pies en su eje mayor y de 10 pies en su eje menor. Está compuesta por una placa de alma de 12 × 1/2 pulgadas, cuatro ángulos de 6 × 4 × 9/16 pulgadas, y dos cubreplacas de 13 × 5/16 pulgadas. Cada par de ángulos está colocado a 1/2 pulgadas más allá del borde de la placa de alma, con las alas de 6 pulgadas sobresaliendo.  $K$  para ambos ejes es 0.80. Calcular la carga axial máxima.

### 6.9 DISEÑO DE COLUMNAS

El diseño de columnas es un proceso indirecto. Generalmente se conocen ya la longitud de la columna y la carga aplicada que soporta, y el diseñador debe seleccionar una sección de forma laminada o compuesta en que el esfuerzo promedio (real) no exceda al esfuerzo permisible indicado en las especificaciones. Las dos incógnitas son  $A$  y  $r$ , y el valor de una no se puede calcular si se desconoce el de la otra. Por lo tanto, el diseño se debe hacer por tanteos. Se elige una sección de prueba y se investiga por el método descrito en las secciones 6.6 y 6.7. Si se encuentra que la capacidad de soportar carga de la sección de prueba es menor que la requerida, o que es mas grande que la necesaria, y la primera es muy costosa, se elige otra sección de prueba usando como guía la primera. Este proceso se repite hasta encontrar una sección satisfactoria. Los manuales del acero contienen tablas de cargas límite para diferentes secciones de columnas y longitudes. Estas tablas constituyen una espléndida ayuda en

el diseño, pero no se deben usar hasta haber comprendido los principios implícitos. En la sección 6.14 se estudian las tablas y se explica su uso.

### 6.10 RESUMEN: PROCEDIMIENTO DE DISEÑO DE COLUMNAS

Los pasos esenciales para el diseño de una columna, cuando no se usan tablas, son los siguientes:

- Suponer una sección de prueba. (Se conocen la carga aplicada, las alturas no arriostradas y las condiciones de los extremos en cada eje).
- Encontrar el área y los radios de giro de la sección de prueba, en las tablas de propiedades para diseñar.
- Calcular la relación de esbeltez máxima ( $KL/r$ ).
- Calcular el esfuerzo promedio permisible mediante la fórmula apropiada que se vio en la sección 6.5.
- Calcular la carga permisible que se puede apoyar sobre la columna, multiplicando el esfuerzo encontrado en el paso 4 por el área de la sección.
- Comparar la carga permisible encontrada en el paso 5 con la carga aplicada más el propio peso de la columna. Si el resultado es incorrecto, repetir el proceso hasta encontrar una sección adecuada.

### 6.11 DISEÑO E INVESTIGACIÓN DE PUNTALES

Los puntales, incluidos los miembros a compresión más ligeros de las armaduras de techo, se diseñan de la misma manera que las columnas. Las secciones de puntales se muestran en la figura 6.3 e), f) y g). En e), se muestran dos ángulos en contacto y conectados por soldaduras. En f), se muestran los mismos ángulos separados mediante una placa de relleno y tornillos o remaches. En g) se muestra un puntal de un solo ángulo.



Si la relación de esbeltez excede de 120, la Especificación AISC de 1978 permite incrementar el esfuerzo promedio permisible en los miembros principales (sección 6.5). En estas condiciones el valor mínimo recomendado de  $K$  es 1.0.

### Ejemplo 1

Un puntal de 9 pies de acero A36 está compuesto por dos ángulos de  $5 \times 3 \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  pulg. con las alas de 5 pulgadas espalda con espalda. Los ángulos están espaciados  $\frac{3}{8}$  pulg, como se ve en la figura 6.10;  $K = 1.0$ . Encontrar la carga permisible del puntal.

### Solución

1. En las tablas de puntales de doble ángulo del AISC, para dos ángulos desiguales de alas largas espalda con espalda,

$$A = 8.0 \text{ pulg}^2$$

$$r_x = 1.58 \text{ pulg}$$

$$r_y = 1.49 \text{ pulg}$$

Si no se dispone de tablas o no incluyen la combinación particular de ángulos y espaciamientos seleccionada, se pueden calcular  $r_x$  y  $r_y$  de manera similar a la mostrada en las columnas compuestas de la sección 6.7.

2. La relación de esbeltez es

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(9)12}{1.49} = 72.5$$

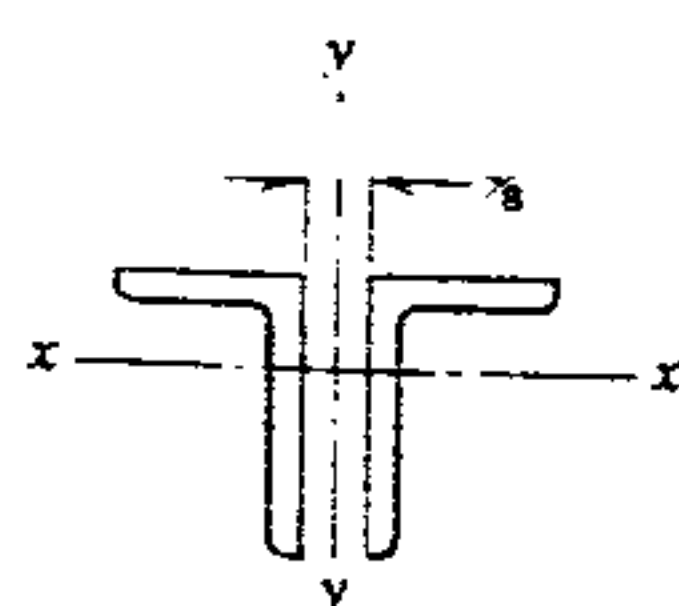


Figura 6.10 Ejemplo 1.

3. El esfuerzo promedio permisible es

$$F_a = \frac{\left[1 - \frac{(72.5)^2}{2(126.1)^2}\right] 36,000}{\frac{5}{3} + \frac{3(72.5)}{8(126.1)} - \frac{(72.5)^3}{8(126.1)^3}} = 16,100 \text{ lb/pulg}^2$$

4. La carga permisible sobre el puntal es igual al esfuerzo promedio por el área, o sea

$$P = F_a A = 16,100(8.0) = 129,000 \text{ o } 129 \text{ kips}$$

Debe notarse que cuando se diseña un puntal de un solo ángulo, el menor radio de giro es respecto a un eje diagonal, denominado generalmente eje  $z-z$  (véanse las tablas de características de los ángulos en la parte I del Manual AISC).

El diseño de puntales compuestos por dos ángulos se facilita en gran medida mediante las tablas de cargas como las que se vieron en la sección 6.14. En el capítulo 9 se verán con mayor detalle los miembros a compresión de dos ángulos.

## 6.12 CARGAS SOBRE COLUMNAS

La carga de diseño sobre una columna dada en un edificio generalmente consiste en: 1) la carga viva y la carga muerta sobre el área del piso inmediatamente encima de la columna que se está diseñando, o bien, en el caso de una columna que sostiene un techo, las cargas muerta, viva y ambiental sobre la columna; 2) la carga transmitida por la columna de arriba, si hay alguna, y 3) el propio peso de la columna. La parte de la carga de la columna ocasional por el piso o el techo que soporta se encuentra sumando las reacciones de las vigas y las trabes u otros miembros del marco que confluyen en ella, o bien, multiplicando el área tributaria del vano soportado, por las cargas muertas y vivas impuestas por pie cuadrado. La carga de diseño para la columna se toma como la carga total en la base.

En ciertas condiciones, y cuando el carácter de la ocupación es tal que no todos los pisos de un edificio estarán sujetos simultáneamente a toda la carga viva, la mayoría de los reglamentos de construcción permiten una reducción.

Las recomendaciones del Instituto Nacional Norteamericano de Normas (ANSI) para "reducción de cargas vivas", aparecen en su norma A58.1 de 1982, y se refieren a cualquier miembro estructural: viga, trabe o columna que tenga un área de influencia de 400 pies cuadrados o más. En el capítulo 13 se trata sobre la aplicación de estas especificaciones del reglamento para el diseño de vigas y largueros de piso; la aplicación al diseño de columnas se tratará en el siguiente ejemplo.

Las columnas se clasifican de acuerdo al piso que atraviesan. Por ejemplo, una columna entre el cuarto y quinto pisos de un edificio, que soporta el quinto piso, se cataloga como columna de cuarto piso. La carga de diseño sobre una columna de cuarto piso es la carga sobre su base justo arriba del cuarto piso. En la figura 6.11 se muestra este plano de aplicación de carga mediante la línea  $A-A$ .

### Ejemplo 1

Un edificio de oficinas construido a base de marcos de acero tiene vanos de 20 pies cuadrados. La carga viva del piso es de 70 libras por pie cuadrado, y la carga muerta, incluyendo una tolerancia para el propio peso de vigas, trabes y columnas, es de 60 lb/pie<sup>2</sup>. El edificio tiene ocho pisos y un techo. La carga viva y ambiental combinada sobre el techo es

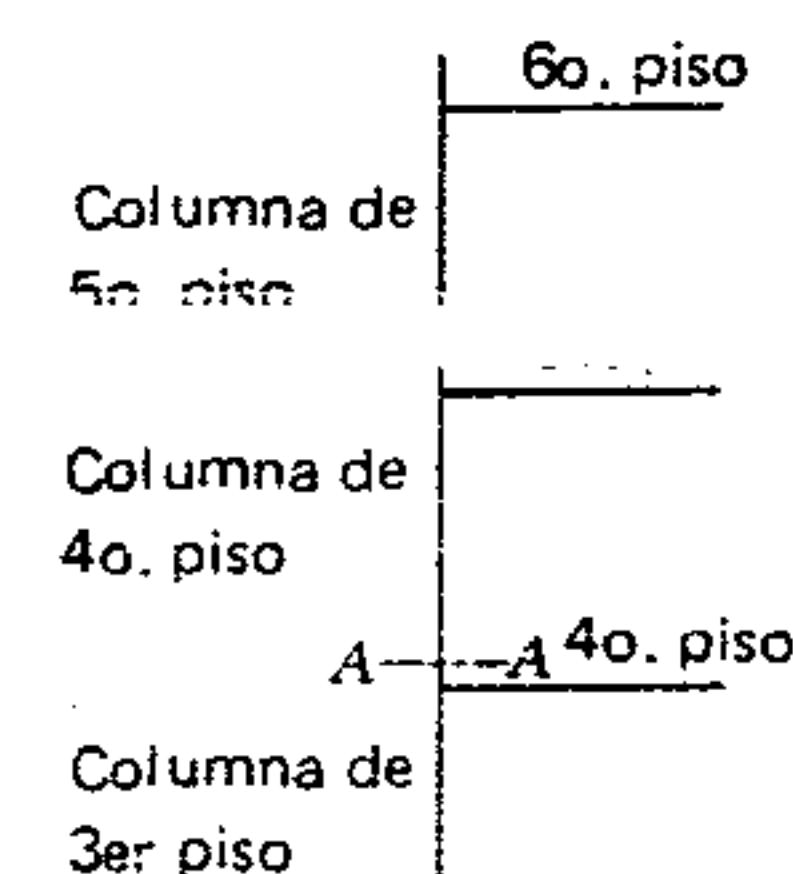


Figura 6.11 Columna de cuatro pisos.

de 40 lb/pie<sup>2</sup>, y la carga muerta de 50 lb/pie<sup>2</sup>. Calcular la carga de diseño sobre una columna interior de quinto piso típica (se usarán las especificaciones de reducción de carga viva del ANSI A-58.1 de 1982).

### Solución

1. Calcular el área tributaria total por piso soportado por la columna típica.

$$A = 20(20) = 400 \text{ pies cuadrados}$$

Se aplica la especificación para reducción de carga viva.

2. Calcular la carga muerta total por vano.

$$DL = 400(60) = 24,000 \text{ lb}$$

3. Calcular la reducción de carga viva permitida para el área de piso soportada y revisar si excede a la máxima reducción permisible. El área de influencia es  $(A_I) = 4(400) = 1600$  pies cuadrados. Usando la ecuación 1 del ANSI A58.1 de 1982, la carga viva reducida implica

$$\begin{aligned} L &= L_0 \left( 0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_I}} \right) \\ &= 70 \left( 0.25 + \frac{15}{\sqrt{1600}} \right) \\ &= 70(0.625) \\ &= 43.75 \approx 43.8 \text{ lb/pie}^2 \end{aligned}$$

una reducción del 37.4 por ciento, y por tanto menor que el 60 por ciento máximo permitido para miembros que soportan más de un piso.

Como la columna del quinto piso soporta tres pisos de 400 pies cuadrados cada uno, la carga viva total es  $43.8(400) = 17,520$  lb.

4. Calcular la carga total sobre el techo, sin reducción de la carga viva.

$$LL + EL = 400(40) = 16,000 \text{ lb}$$

$$DL = 400(50) = 20,000$$

$$W = 36,000 \text{ lb}$$



5. La carga  $P$  sobre una columna de quinto piso típica es la siguiente:

Techo	= 36,000 lb
Carga viva	= 52,600
Carga muerta = 3(24,000)	= 72,000

$$P = 160,600 \text{ lb} \\ \approx 161 \text{ kips}$$

### 6.13 EMPALMES DE COLUMNAS

Usualmente las columnas se empalman más o menos a 1 pie 6 pulgadas sobre el nivel del piso, y el tipo del empalme depende de los tamaños de los miembros que se van a conectar. En la construcción de edificios, una práctica usual es fresar los extremos de las columnas, ya que la mayor parte de los esfuerzos se transmite por apoyo directo. Cuando toda el área de la sección transversal de la columna

superior se apoya sobre la columna inferior, las placas de empalme sólo sirven para sujetar la columna en su posición o para transmitir esfuerzos flexionantes (figuras 6.12a, b y d). Cuando no se puede asegurar el apoyo total, se deben diseñar empalmes especiales, similares a los mostrados en las figuras 6.12c y e).

### PROBLEMAS

- Una columna de acero A36 no arriostrada tiene una altura de 14 pies y debe soportar una carga axial de 175 kips, incluyendo su propio peso. Seleccionar la sección más ligera de columna laminada que se pueda usar si  $K$  para ambos ejes es igual a 1.0. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una columna de acero A441 no arriostrada tiene una altura de 12 pies y debe soportar una

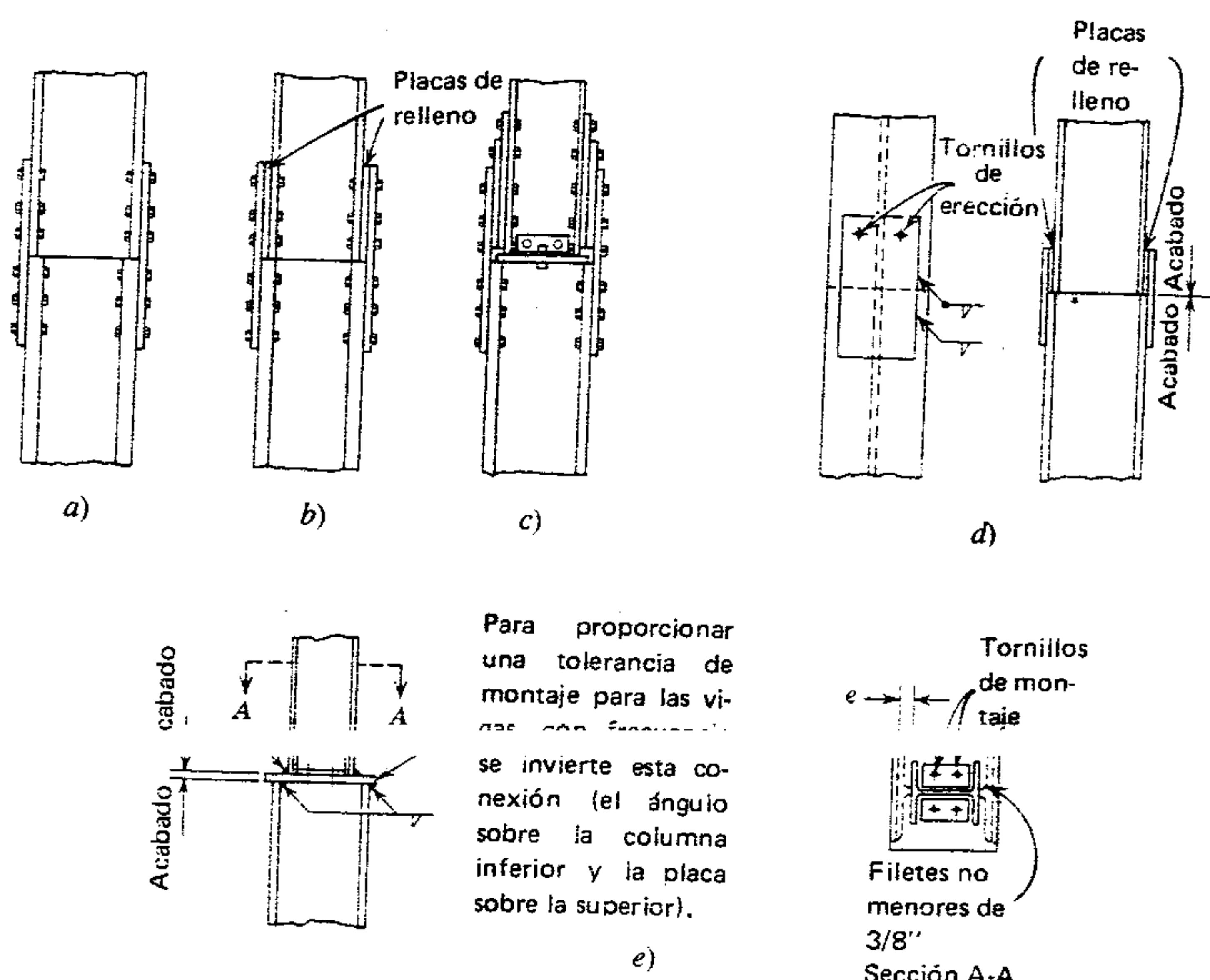


Figura 6.12 Empalmes habituales de columnas.

carga axial de 50 kips, incluyendo su propio peso. Seleccionar la sección de columna laminada de menor peso que se pueda usar si  $K$  en ambos ejes es igual a 1.0. (La respuesta se da en el apéndice G).

- Una columna de acero A36 no arriostrada tiene una altura de 12 pies. La carga axial aplicada es de 200 kips. Seleccionar las secciones de columna laminadas de menor peso, de 8, 10 y 12 pulgadas que se puedan usar.  $K$  en ambos ejes es igual a 1.0.
- Un puntal de doble ángulo (miembro secundario) de acero A36, de 7 pies de largo, debe sostener una carga axial de 35 kips, incluyendo el propio peso del puntal. Los ángulos están colocados espalda con espalda con una separación de 3/8 pulg. entre las alas. Seleccionar los ángulos de menor peso que se puedan usar con seguridad. No usar ángulos menores de 1/4 pulg. de espesor. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una columna de acero A36 tiene una altura total de 18 pies. Hay miembros de arriostramiento perpendiculares a su alma a intervalos de 6 pies. La carga axial aplicada es de 175 kips. Seleccionar la sección de columna laminada de menor peso que se pueda usar.  $K$  en ambos ejes es igual a 1.0. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una columna de acero A588 tiene una altura total de 12 pies. Un miembro de arriostramiento llega perpendicularmente a su alma, a 3 pies 6 pulg. sobre el piso. La carga axial, incluyendo el peso de la columna, es de 120 kips. Seleccionar la sección laminada de menor peso que se pueda usar.  $K$  en el eje  $y-y$  es igual a 1.0 y en el eje  $x-x$ , 1.2.
- Una columna soporta una carga axial de 100 kips y tiene una altura sin apoyos de 10 pies en ambos ejes ( $K_x = K_y = 1.0$ ).

- a) Seleccionar la sección tubular de acero estructural de menor peso (acero A501) que se pueda usar con seguridad.

estructural de acero A500, grado B. Usar una sección cuadrada con las mismas dimensiones de lado que el diámetro de la sección de tubo seleccionada en a).

- Un edificio de marco de acero tiene diez pisos y un techo. Las medidas de un vano interior típico son 24 X 24 pies. La carga viva sobre un piso

típico es de 80 lb/pie<sup>2</sup>, y la carga muerta, incluyendo una tolerancia para vigas y trabes, es de 65 lb/pie<sup>2</sup>. Usando la reducción de carga viva permitida por ANSI A-58.1 de 1982, calcular la carga de diseño para una columna típica de sexto piso, omitiendo el propio peso de la columna. La carga viva y ambiental combinada, y la carga muerta del techo suman 110 lb/pie<sup>2</sup>. (Las respuestas se dan en el apéndice G).

### 6.14 TABLAS DE CARGAS ADMISIBLES, COLUMNAS Y PUNTALES

El Manual del AISC proporciona tablas que dan la carga axial total admisible que las columnas y puntales a diversas alturas pueden soportar no arriostrados. Estas tablas son muy útiles para el diseñador. Una vez determinada la carga axial total a soportar, y establecida la longitud no arriostrada, se selecciona directamente de las tablas la columna o el puntal. Aunque estas tablas tienen diferentes colocaciones en los diversos manuales, por lo general después de un breve repaso se descubre el método de selección.

Las tablas de carga admisible sobre columnas del tipo que se presenta en el Manual AISC son las que más se encuentran en la práctica, e incluyen solamente formas **W**, **M** y **S**, y ángulos dobles, en aceros con resistencia límite de 36 y 50 k/pulg<sup>2</sup>, en tubo estructural de acero con una resistencia límite de 46 k/pulg<sup>2</sup> y tubo de acero de 36 k/pulg<sup>2</sup>. La tabla 6.1, obtenida de la octava edición del Manual del AISC, muestra una típica tabla de cargas admisibles. Se verá que esta tabla en particular es para formas **W** de 10 pulgadas de acero A36 y  $F_y = 50$  k/pulg<sup>2</sup>, y que las cargas axiales permisibles (concéntricas) están dadas en kips.

La primera columna vertical de números incluye la longitud de la altura no arriostrada con respecto al menor radio de giro. Si la columna está arriostrada de modo que el pandeo ocurra respecto al eje mayor, esta tabla no es aplicable directamente.

Los listados de cargas en la tabla terminan cuando  $L/r$  para una columna dada excede de 200. Para facilitar su consulta las características se listan en la parte inferior de la tabla. Estas características son útiles de un modo indirecto. Por ejemplo, nótese



5. La carga  $P$  sobre una columna de quinto piso típica es la siguiente:

Techo	= 36,000 lb
Carga viva	= 52,600
Carga muerta = 3(24,000)	= 72,000

$$P = 160,600 \text{ lb} \\ \approx 161 \text{ kips}$$

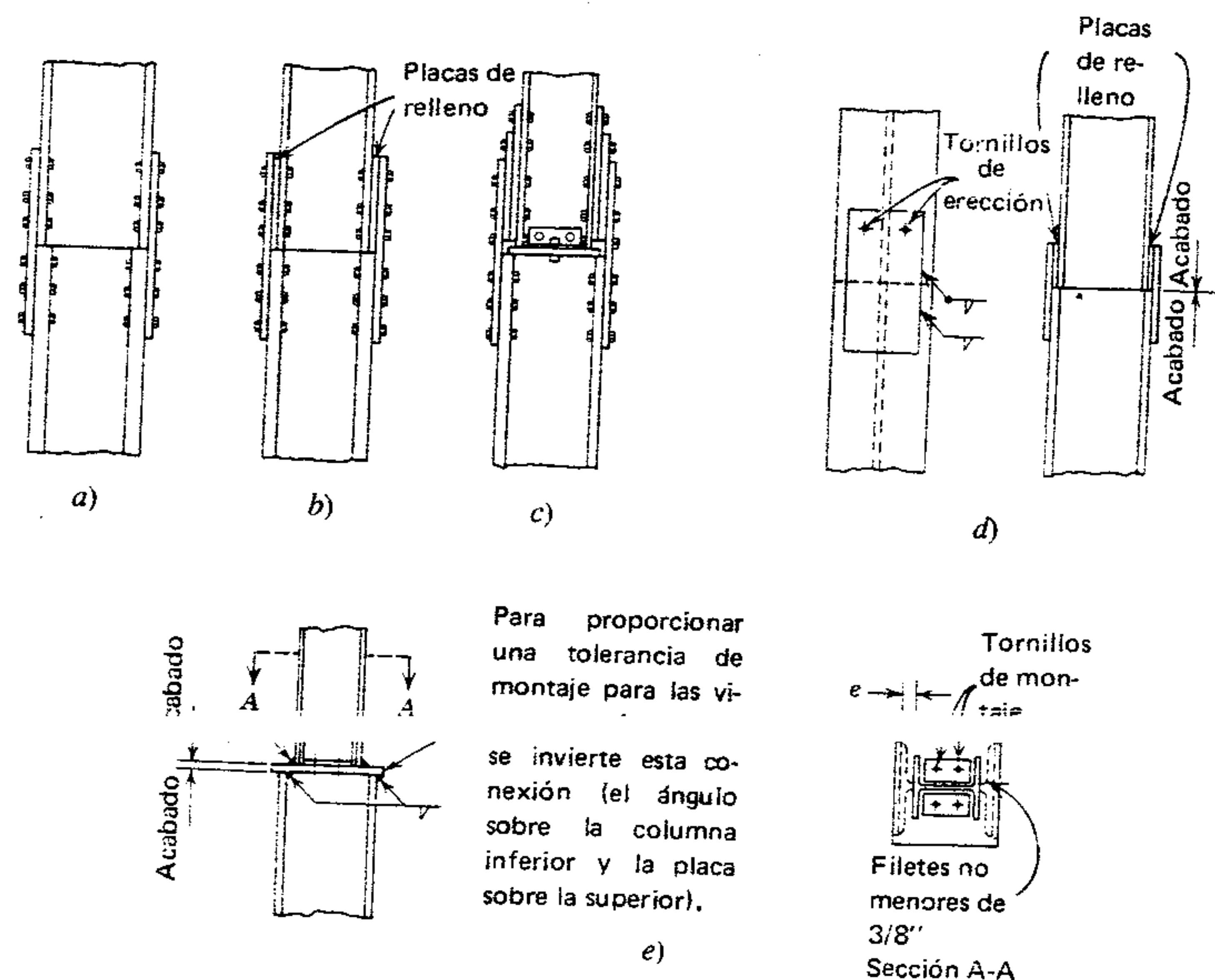
### 6.13 EMPALMES DE COLUMNAS

Usualmente las columnas se empalman más o menos a 1 pie 6 pulgadas sobre el nivel del piso, y el tipo del empalme depende de los tamaños de los miembros que se van a conectar. En la construcción de edificios, una práctica usual es fresar los extremos de las columnas, ya que la mayor parte de los esfuerzos se transmite por apoyo directo. Cuando toda el área de la sección transversal de la columna

superior se apoya sobre la columna inferior, las placas de empalme sólo sirven para sujetar la columna en su posición o para transmitir esfuerzos flexionantes (figuras 6.12a, b y d). Cuando no se puede asegurar el apoyo total, se deben diseñar empalmes especiales, similares a los mostrados en las figuras 6.12c y e).

### PROBLEMAS

1. Una columna de acero A36 no arriostrada tiene una altura de 14 pies y debe soportar una carga axial de 175 kips, incluyendo su propio peso. Seleccionar la sección más ligera de columna laminada que se pueda usar si  $K$  para ambos ejes es igual a 1.0. (La respuesta se da en el apéndice G).
2. Una columna de acero A441 no arriostrada tiene una altura de 12 pies y debe soportar una



carga axial de 50 kips, incluyendo su propio peso. Seleccionar la sección de columna laminada de menor peso que se pueda usar si  $K$  en ambos ejes es igual a 1.0. (La respuesta se da en el apéndice G).

3. Una columna de acero A36 no arriostrada tiene una altura de 12 pies. La carga axial aplicada es de 200 kips. Seleccionar las secciones de columna laminadas de menor peso, de 8, 10 y 12 pulgadas que se puedan usar.  $K$  en ambos ejes es igual a 1.0.
4. Un puntal de doble ángulo (miembro secundario) de acero A36, de 7 pies de largo, debe soportar una carga axial de 35 kips, incluyendo el propio peso del puntal. Los ángulos están colocados espalda con espalda con una separación de 3/8 pulg. entre las alas. Seleccionar los ángulos de menor peso que se puedan usar con seguridad. No usar ángulos menores de 1/4 pulg. de espesor. (La respuesta se da en el apéndice G).
5. Una columna de acero A36 tiene una altura total de 18 pies. Hay miembros de arriostramiento perpendiculares a su alma a intervalos de 6 pies. La carga axial aplicada es de 175 kips. Seleccionar la sección de columna laminada de menor peso que se pueda usar.  $K$  en ambos ejes es igual a 1.0. (La respuesta se da en el apéndice G).
6. Una columna de acero A588 tiene una altura total de 12 pies. Un miembro de arriostramiento llega perpendicularmente a su alma, a 3 pies 6 pulg. sobre el piso. La carga axial, incluyendo el peso de la columna, es de 120 kips. Seleccionar la sección laminada de menor peso que se pueda usar.  $K$  en el eje  $y-y$  es igual a 1.0 y en el eje  $x-x$ , 1.2.
7. Una columna soporta una carga axial de 100 kips y tiene una altura sin apoyos de 10 pies en ambos ejes ( $K_x = K_y = 1.0$ ).

a) Seleccionar la sección tubular de acero estructural de menor peso (acero A501) que se pueda usar con seguridad

b) Rediseñar de nuevo la columna usando tubo estructural de acero A500, grado B. Usar una sección cuadrada con las mismas dimensiones de lado que el diámetro de la sección de tubo seleccionada en a).

8. Un edificio de marco de acero tiene diez pisos y un techo. Las medidas de un vano interior típico son 24 X 24 pies. La carga viva sobre un piso

típico es de 80 lb/pie<sup>2</sup>, y la carga muerta, incluyendo una tolerancia para vigas y trabes, es de 65 lb/pie<sup>2</sup>. Usando la reducción de carga viva permitida por ANSI A-58.1 de 1982, calcular la carga de diseño para una columna típica de sexto piso, omitiendo el propio peso de la columna. La carga viva y ambiental combinada, y la carga muerta del techo suman 110 lb/pie<sup>2</sup>. (Las respuestas se dan en el apéndice G).

### 6.14 TABLAS DE CARGAS ADMISIBLES, COLUMNAS Y PUNTALES

El Manual del AISC proporciona tablas que dan la carga axial total admisible que las columnas y puntales a diversas alturas pueden soportar no arriostrados. Estas tablas son muy útiles para el diseñador. Una vez determinada la carga axial total a soportar, y establecida la longitud no arriostrada, se selecciona directamente de las tablas la columna o el puntal. Aunque estas tablas tienen diferentes colocaciones en los diversos manuales, por lo general después de un breve repaso se descubre el método de selección.

Las tablas de carga admisible sobre columnas del tipo que se presenta en el Manual AISC son las que más se encuentran en la práctica, e incluyen solamente formas W, M y S, y ángulos dobles, en aceros con resistencia límite de 36 y 50 k/pulg<sup>2</sup>, en tubo estructural de acero con una resistencia límite de 46 k/pulg<sup>2</sup> y tubo de acero de 36 k/pulg<sup>2</sup>. La tabla 6.1, obtenida de la octava edición del Manual del AISC, muestra una típica tabla de cargas admisibles. Se verá que esta tabla en particular es para formas W de 10 pulgadas de acero A36 y  $F_y = 50$  k/pulg<sup>2</sup>, y que las cargas axiales permisibles (concéntricas) están dadas en kips.

La primera columna vertical de números incluye

al menor radio de giro. Si la columna está arriostrada de modo que el pandeo ocurra respecto al eje mayor, esta tabla no es aplicable directamente.

Los listados de cargas en la tabla terminan cuando  $L/r$  para una columna dada excede de 200. Para facilitar su consulta las características se listan en la parte inferior de la tabla. Estas características son útiles de un modo indirecto. Por ejemplo, nótese



Tabla 6.2 Tabla típica de cargas admisibles para puntales.\*

COLUMNAS

Ángulos dobles

Cargas concéntricas permisibles en kips

Alas desiguales

Alas largas de 3/8 pulg espalda con espalda de los ángulos

$$F_y = 36 \text{ k/pulg}^2$$

$$F_u = 58 \text{ k/pulg}^2$$

Longitud efectiva en pies KL respecto al eje indicado

Tamaño			3 x 2 1/2						3 x 2									
Espesor			3/8		1/4		3/16		3/8		5/16		1/4		3/16			
Peso/pie			13.2		9.0		6.77		11.8		10.0		8.2		6.1			
F <sub>y</sub>			36		50		36		50		36		50		36		50	
Longitud efectiva en pies KL respecto al eje indicado	EJE X	0	83	115	57	76	39	50	EJE Y	0	75	104	63	88	51	69	35	45
		2	78	106	53	70	37	46		2	70	96	59	81	48	64	33	42
		3	74	100	51	66	35	44		3	67	90	57	77	46	60	32	40
		4	70	92	48	62	34	41		4	63	84	54	71	44	56	30	38
		5	65	84	45	56	32	38		5	59	77	50	65	41	51	29	35
		6	60	75	41	51	29	35		6	55	68	46	58	38	46	27	32
		7	54	65	38	44	27	31		7	50	59	42	51	34	41	25	29
		8	48	53	34	37	24	27		8	44	49	38	42	31	35	22	25
		9	41	42	29	30	22	23		9	38	39	33	34	27	28	20	21
		10	34	34	24	24	19	19		10	32	32	27	27	23	23	17	17
		11	28	28	20	20	16	16		11	26	26	23	23	19	19	14	14
	EJE Y	12	24	24	17	17	13	13		12	22	22	19	19	16	16	12	12
		13	20	20	14	14	11	11		13	19	19	16	16	13	13	10	10
		14	17	17	12	12	10	10		14	16	16	14	14	12	12	9	9
		15	15	15	11	11	8	8		15	14	14	12	12	10	10	8	8
		16								16							7	7
		0	83	115	57	76	39	50	EJE X	0	75	104	63	88	51	69	35	45
		2	79	108	54	71	37	47		2	70	96	59	81	48	63	33	42
		3	76	104	52	68	36	45		3	67	90	56	76	46	59	32	39
		4	73	98	50	65	35	43		4	63	83	53	70	43	55	30	37
		5	70	92	48	61	33	41		5	59	76	49	63	40	50	28	34
		6	66	86	45	56	31	38		6	54	67	45	56	36	44	26	30
		7	62	79	42	52	29	35		7	49	58	41	48	33	38	23	26
		8	58	71	39	46	27	32		8	43	47	36	39	28	31	20	22
		9	53	62	36	41	25	29		9	37	37	30	31	24	24	17	18
		10	48	53	32	35	23	25		10	30	30	25	25	20	20	14	14
		11	43	44	28	29	21	21		11	25	25	20	20	16	16	12	12
	EJE Y	12	37	37	24	24	18	18		12	21	21	17	17	14	14	10	10
		13	32	32	21	21	15	15		13	18	18	15	15	12	12	9	9
		14	27	27	18	18	13	13		14	15	15	13	13	10	10	7	7
		15	24	24	15	15	12	12		15	13	13	11	11				
		16	21	21	14	14	10	10										
		17	19	19	12	12	9	9										
		18	17	17	11	11	8	8										
		19	15	15														

Características de 2 ángulos de 3/8 pulg. espalda con espalda

r <sub>x</sub> (pulg)	0.928	0.945	0.954	0.947	0.940	0.948	0.957	1.80
r <sub>y</sub> (pulg)	1.16	1.13	1.12	1.12	0.917	0.903	0.891	0.879

Las líneas gruesas indican K/r de 200.

Características de 2 ángulos de 3/8 pulg. espalda con espalda

$r_x$ (pulg)	0.928	0.945	0.954	0.940	0.948	0.957	0.966
$r_y$ (pulg)	1.16	1.13	1.12	0.917	0.903	0.891	0.879

Las líneas gruesas indican  $KL/r$  de 200.

\* Cortesía del American Institute of Steel Construction, "Manual of Steel Construction", octava edición, págs. 3-64.

## COLUMNAS CON CARGAS EXCÉNTRICAS / 161

Como  $85 < 120$ , no se permite un incremento en la carga tabulada.

Para determinar si ésta es la combinación de ángulos de peso más ligero que se puede usar, se deben estudiar las tablas más completas del Manual AISC. En realidad, dos ángulos de  $3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$  pulg., con las alas cortas espalda con espalda soportarían con seguridad esta carga de diseño con un peso de puntal de 9.0 lb por pie.

## 6.15 COLUMNAS CON CARGAS EXCÉNTRICAS

Hasta aquí se ha supuesto que todas las cargas sobre columnas son concéntricas, es decir, aplicadas a lo largo del eje de la columna. Este supuesto es válido cuando la carga se aplica uniformemente sobre la parte superior de la columna o cuando vigas que tienen iguales reacciones se conectan en columnas opuestas entre sí, como sería el caso en la figura 6.13a si las reacciones de las vigas A y B fueran las mismas, y las de las vigas C y D también. Sin embargo, si se omitiera la viga B como se ve en la figura 6.13b, o si la reacción de B fuera mucho menor que la de A en la figura 6.13a, es evidente que las cargas sobre la columna ya no serían simétricas, y que el patín izquierdo de la columna estaría sujeto a un mayor esfuerzo unitario que el derecho. Este tipo de carga excéntrica se presenta con frecuencia en columnas de muros de edificios, donde una viga de piso se apoya sobre la cara interior sin tener una carga correspondiente sobre la cara exterior. (En la figura 6.14 se muestra sencillamente un método de estructuración que se puede usar para reducir esta excentricidad, e incluso para balancear

La tabla 6.2, tomada del Manual del AISC, muestra una típica tabla de carga admisible para puntales. Nótese que esta tabla en particular es para dos tamaños de ángulos con alas desiguales, con las alas largas espalda con espalda, con una separación de 3/8 pulg. Las cargas admisibles están tabuladas para diferentes longitudes en cada caso, y la longitud sin apoyos se da para ambos ejes. Las cargas tabuladas son para miembros primarios que se usan como columnas. Para puntales que se usan como miembros secundarios con relaciones  $KL/r$  mayores de 120 ( $K$  siempre con valor de uno), la carga tabulada se puede incrementar como se explica en la sección 6.5. Para obtener esta carga incrementada, la carga tabulada se divide entre 1.6-200r. Las características listadas en la parte inferior de la tabla son para la combinación de los dos ángulos.

## Ejemplo 3

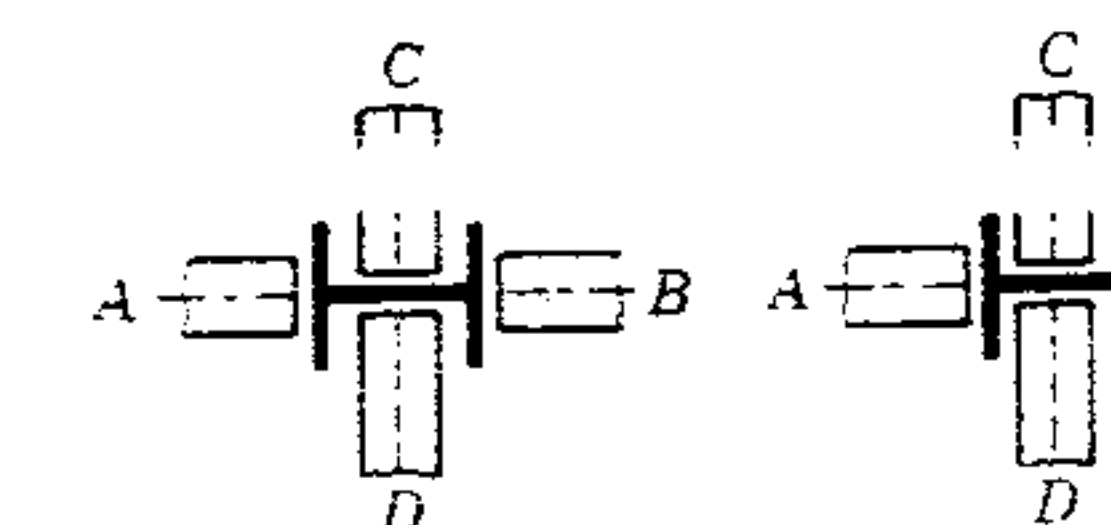
Diseñar un puntal secundario de doble ángulo de acero A36 que soporte una carga axial de 44 kips, incluyendo el peso del puntal. La longitud sin apoyos sobre el eje x-x es de 4 pies y sobre el eje y-y, de 8 pies.

## Solución

- En la tabla 6.2, dos ángulos de  $3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$  pulg. con las alas largas espalda con espalda y separadas 3/8 pulg. soportarán 70 kips según el eje x-x (4 pies) y 58 kips según el eje y-y (8 pies).

Probar enseguida los ángulos de  $3 \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$  pulg. Los ángulos son adecuados para el eje x-x, pero sólo soportan 39 kips para el eje y-y. Como la carga es de 44 kips, se requiere una carga de diseño. Calcular la  $L/r$  para determinar si se permite un incremento en la carga para miembros secundarios.

$$\frac{L_u}{r_y} = \frac{8(12)}{1.13} = 85$$



a) Carga concéntrica. b) Carga excéntrica.

Figura 6.13 Cargas de columna.



Tabla 6.2 Tabla típica de cargas admisibles para puntales.\*

										COLUMNAS										$F_y = 36 \text{ k/pulg}^2$			
										Ángulos dobles													
										Cargas concéntricas permisibles en kips													
										Alas desiguales													
										Alas largas de 3/8 pulg espalda con espalda de los ángulos													
Tamaño			3 x 2 1/2												3 x 2								
Espesor			3/8		1/4		3/16								3/8		5/16		1/4		3/16		
Peso/pie			13.2		9.0		6.77								11.8		10.0		8.2		6.1		
$F_y$			36	50	36	50	36	50							36	50	36	50	36	50	36	50	
Longitud efectiva en pies KL respecto al eje indicado	EJE X	0	83	115	57	76	39	50	EJE Y	0	75	104	63	88	51	69	35	45					
		2	78	106	53	70	37	46		2	70	96	59	81	48	64	33	42					
		3	74	100	51	66	35	44		3	67	90	57	77	46	60	32	40					
		4	70	92	48	62	34	41		4	63	84	54	71	44	56	30	38					
		5	65	84	45	56	32	38		5	59	77	50	65	41	51	29	35					
		6	60	75	41	51	29	35		6	55	68	46	58	38	46	27	32					
		7	54	65	38	44	27	31		7	50	59	42	51	34	41	25	29					
		8	48	53	34	37	24	27		8	44	49	38	42	31	35	22	25					
		9	41	42	29	30	22	23		9	38	39	33	34	27	28	20	21					
		10	34	34	24	24	19	19		10	32	32	27	27	23	23	17	17					
		11	28	28	20	20	16	16		11	26	26	23	23	19	19	14	14					
		12	24	24	17	17	13	13		12	22	22	19	19	16	16	12	12					
		13	20	20	14	14	11	11		13	19	19	16	16	13	13	10	10					
		14	17	17	12	12	10	10		14	16	16	14	14	12	12	9	9					
		15	15	15	11	11	8	8		15	14	14	12	12	10	10	8	8					
	EJE Y	0	83	115	57	76	39	50	EJE X	0	75	104	63	88	51	69	35	45					
		2	79	108	54	71	37	47		2	70	96	59	81	48	63	33	42					
		3	76	104	52	68	36	45		3	67	90	56	76	46	59	32	39					
		4	73	98	50	65	35	43		4	63	83	53	70	43	55	30	37					
		5	70	92	48	61	33	41		5	59	76	49	63	40	50	28	34					
		6	66	86	45	56	31	38		6	54	67	45	56	36	44	26	30					
		7	62	79	42	52	29	35		7	49	58	41	48	33	38	23	26					
		8	58	71	39	46	27	32		8	43	47	36	39	28	31	20	22					
		9	53	62	36	41	25	29		9	37	37	30	31	24	24	17	18					
		10	48	53	32	35	23	25		10	30	30	25	25	20	20	14	14					
		11	43	44	28	29	21	21		11	25	25	20	20	16	16	12	12					
		12	37	37	24	24	18	18		12	21	21	17	17	14	14	10	10					
		13	32	32	21	21	15	15		13	18	18	15	15	12	12	9	9					
		14	27	27	18	18	13	13		14	15	15	13	13	10	10	7	7					
		15	24	24	15	15	12	12		15	13	13	11	11									
		16	21	21	14	14	10	10															
		17	19	19	12	12	9	9															
		18	17	17	11	11	8	8															
		19	15	15																			
	Características de 2 ángulos de 3/8 pulg. espalda con espalda																						
$r_x$ (pulg)		0.928	0.945	0.954					0.940	0.948	0.957	0.966											
$r_y$ (pulg)		1.16	1.13	1.12					0.917	0.903	0.891	0.879											
Las líneas gruesas indican $Kl/r$ de 200.																							

\* Cortesía del American Institute of Steel Construction, "Manual of Steel Construction", octava edición, págs. 3-64.

## COLUMNAS CON CARGAS EXCÉNTRICAS / 161

La tabla 6.2, tomada del Manual del AISC, muestra una típica tabla de carga admisible para puntales. Nótese que esta tabla en particular es para dos tamaños de ángulos con alas desiguales, con las alas largas espalda con espalda, con una separación de 3/8 pulg. Las cargas admisibles están tabuladas para diferentes longitudes en cada caso, y la longitud sin apoyos se da para ambos ejes. Las cargas tabuladas son para miembros primarios que se usan como columnas. Para puntales que se usan como miembros secundarios con relaciones  $KL/r$  mayores de 120 ( $K$  siempre con valor de uno), la carga tabulada se puede incrementar como se explica en la sección 6.5. Para obtener esta carga incrementada, la carga tabulada se divide entre 1.6-200r. Las características listadas en la parte inferior de la tabla son para la combinación de los dos ángulos.

### Ejemplo 3

Diseñar un puntal secundario de doble ángulo de acero A36 que soporte una carga axial de 44 kips, incluyendo el peso del puntal. La longitud sin apoyos sobre el eje x-x es de 4 pies y sobre el eje y-y, de 8 pies.

### Solución

- En la tabla 6.2, dos ángulos de 3 x 2 1/2 x 3/8 pulg. con las alas largas espalda con espalda y separadas 3/8 pulg. soportarán 70 kips según el eje x-x (4 pies) y 58 kips según el eje y-y (8 pies).

Probar enseguida los ángulos de 3 x 2 1/2 x 1/4 pulg. Los ángulos son adecuados para el eje x-x, pero sólo soportan 39 kips para el eje y-y. Como los 44 kips de carga de diseño. Calcular la  $L/r$  para determinar si se permite un incremento en la carga para miembros secundarios.

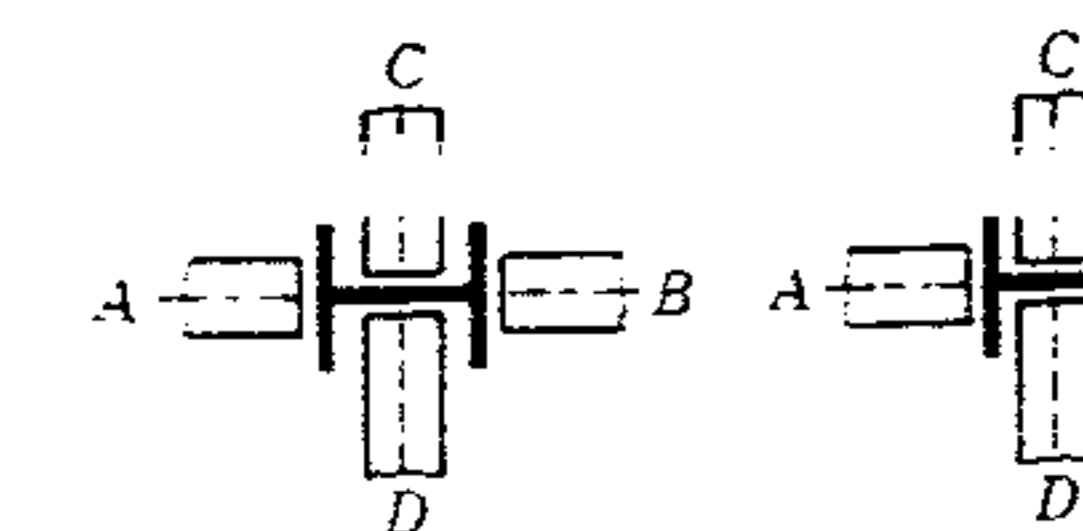
$$\frac{L_u}{r_y} = \frac{8(12)}{1.13} = 85$$

Como  $85 < 120$ , no se permite un incremento en la carga tabulada.

Para determinar si ésta es la combinación de ángulos de peso más ligero que se puede usar, se deben estudiar las tablas más completas del Manual AISC. En realidad, dos ángulos de 3 x 2 1/2 x 1/4 pulg., con las alas cortas espalda con espalda soportarían con seguridad esta carga de diseño con un peso de puntal de 9.0 lb por pie.

## 6.15 COLUMNAS CON CARGAS EXCÉNTRICAS

Hasta aquí se ha supuesto que todas las cargas sobre columnas son concéntricas, es decir, aplicadas a lo largo del eje de la columna. Este supuesto es válido cuando la carga se aplica uniformemente sobre la parte superior de la columna o cuando vigas que tienen iguales reacciones se conectan en columnas opuestas entre sí, como sería el caso en la figura 6.13a si las reacciones de las vigas A y B fueran las mismas, y las de las vigas C y D también. Sin embargo, si se omitiera la viga B como se ve en la figura 6.13b, o si la reacción de B fuera mucho menor que la de A en la figura 6.13a, es evidente que las cargas sobre la columna ya no serían simétricas, y que el patín izquierdo de la columna estaría sujeto a un mayor esfuerzo unitario que el derecho. Este tipo de carga excéntrica se presenta con frecuencia en columnas de muros de edificios, donde una viga de piso se apoya sobre la cara interior sin tener una carga correspondiente sobre la cara exterior. (En la figura 6.14 se muestra sencillamente un método de estructuración que se puede usar para reducir esta excentricidad, e incluso para balancear



a) Carga concéntrica. b) Carga excéntrica.

Figura 6.13 Cargas de columna.



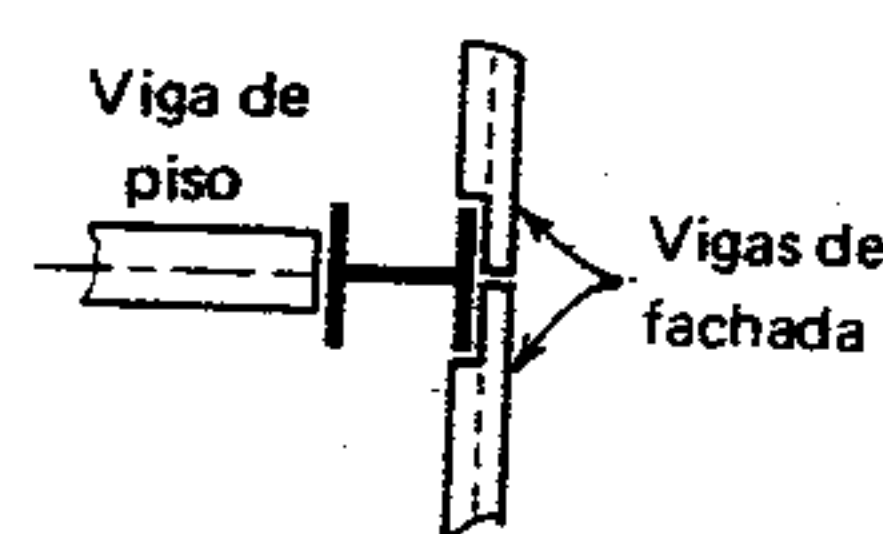


Figura 6.14 Carga de columna exterior.

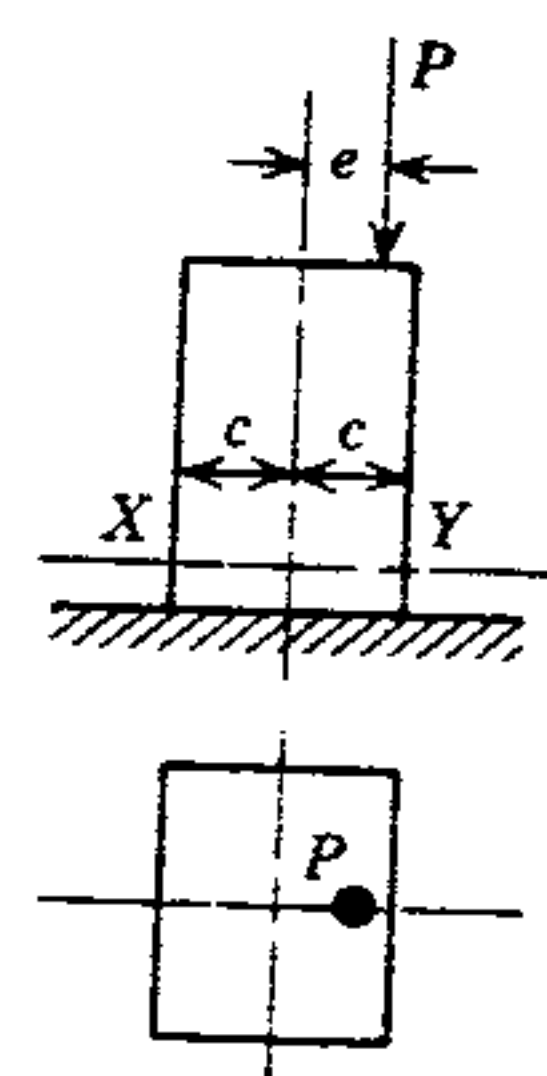


Figura 6.15 Pequeño bloque de compresión.

Las expresiones anteriores son aplicables a secciones simétricas respecto a dos ejes, como rectángulos, secciones W y secciones S. Se puede plantear en la forma general

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{Pec}{I}$$

donde  $f$  es el esfuerzo unitario en cualquier borde de la sección, dependiendo de si se usa signo más o signo menos,  $e$  es la distancia del eje del bloque a las fibras más alejadas. El esfuerzo en cualquier fibra, en cualquier sección del bloque, como  $X-Y$ , se puede considerar como la suma del esfuerzo promedio  $P/A$ , y un esfuerzo causado por el momento  $Pe$ . A la derecha del eje del bloque, es decir, sobre el mismo lado que  $P$ , este momento causa un esfuerzo de compresión en la sección, y a la izquierda del eje, un esfuerzo de tensión. El esfuerzo unitario en  $Y$  es igual al esfuerzo promedio  $P/A$ , más el esfuerzo de la fibra extrema  $Mc/I$  causado por el momento  $Pe$ . Sustituyendo  $Pe$  por  $M$ , la intensidad del esfuerzo en  $Y$  se expresa con la fórmula<sup>5</sup>

$$f_y = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I}$$

y la intensidad del esfuerzo en  $X$  es

$$f_x = \frac{P}{A} - \frac{Pec}{I}$$

<sup>5</sup> En las fórmulas desarrolladas en esta sección se han considerado los esfuerzos resultantes de la deflexión lateral de la columna, ya sea que tal deflexión sea causada por momentos flexionantes inducidos en el extremo de la columna o por la tendencia al pandeo bajo carga axial. Estos últimos efectos se toman en cuenta en la sección 6.17, donde se ejecutan procedimientos de diseño para columnas cargadas excéntricamente.

donde  $P$  es la carga vertical total incluyendo la carga excéntrica, y  $P'$  es la carga excéntrica sola. El cálculo de una columna que soporta una carga excéntrica se muestra en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo

Una columna W 10 × 68, de 13 pies de largo, soporta la carga que se ve en la figura 6.16. El punto de aplicación de la carga de 50,000 lb está, supuestamente, a 8 pulgadas del eje de la columna. No se considere el propio peso de la columna. Suponiendo que el efecto de pandeo y de deflexión lateral se omiten, calcular el máximo esfuerzo unitario de compresión.

### Solución

1. La carga vertical total es  $P = 134,000 + 20,000 + 20,000 + 50,000 = 224,000$  lb. La carga excéntrica es  $P' = 50,000$  lb.
2. Las siguientes características de la sección W 10 × 68 se encuentran en el Manual AISC:

$$\begin{aligned} I_x &= \text{pulg}^4 & r_x &= 4.44 \text{ pulg.} \\ I_y &= \text{pulg}^4 & r_y &= 2.59 \text{ pulg.} \\ A &= \text{pulg}^2 & D &= 10.40 \text{ pulg.} \\ & & c &= 5.20 \text{ pulg.} \end{aligned}$$

3. El valor máximo del esfuerzo unitario de compresión es

$$\begin{aligned} f &= \frac{P}{A} + \frac{P'ec}{I} \\ &= \frac{224,000}{20.0} + \frac{50,000(8)(5.20)}{394} \\ &= 11,200 + 5280 = 16,480 \text{ k/pulg}^2 \end{aligned}$$

Por supuesto, el cálculo no revelará si la columna es segura a menos que haya un esfuerzo permisible conocido para este tipo de carga, el cual se pueda comparar  $16,480 \text{ k/pulg}^2$ . Esto se verá en la sección 6.17, donde se presenta el método del AISC para diseñar columnas

### 6.16 MOMENTOS INDUCIDOS EN COLUMNAS

Los avances en la teoría y métodos de soldadura de arco permiten restringir los extremos de las vigas

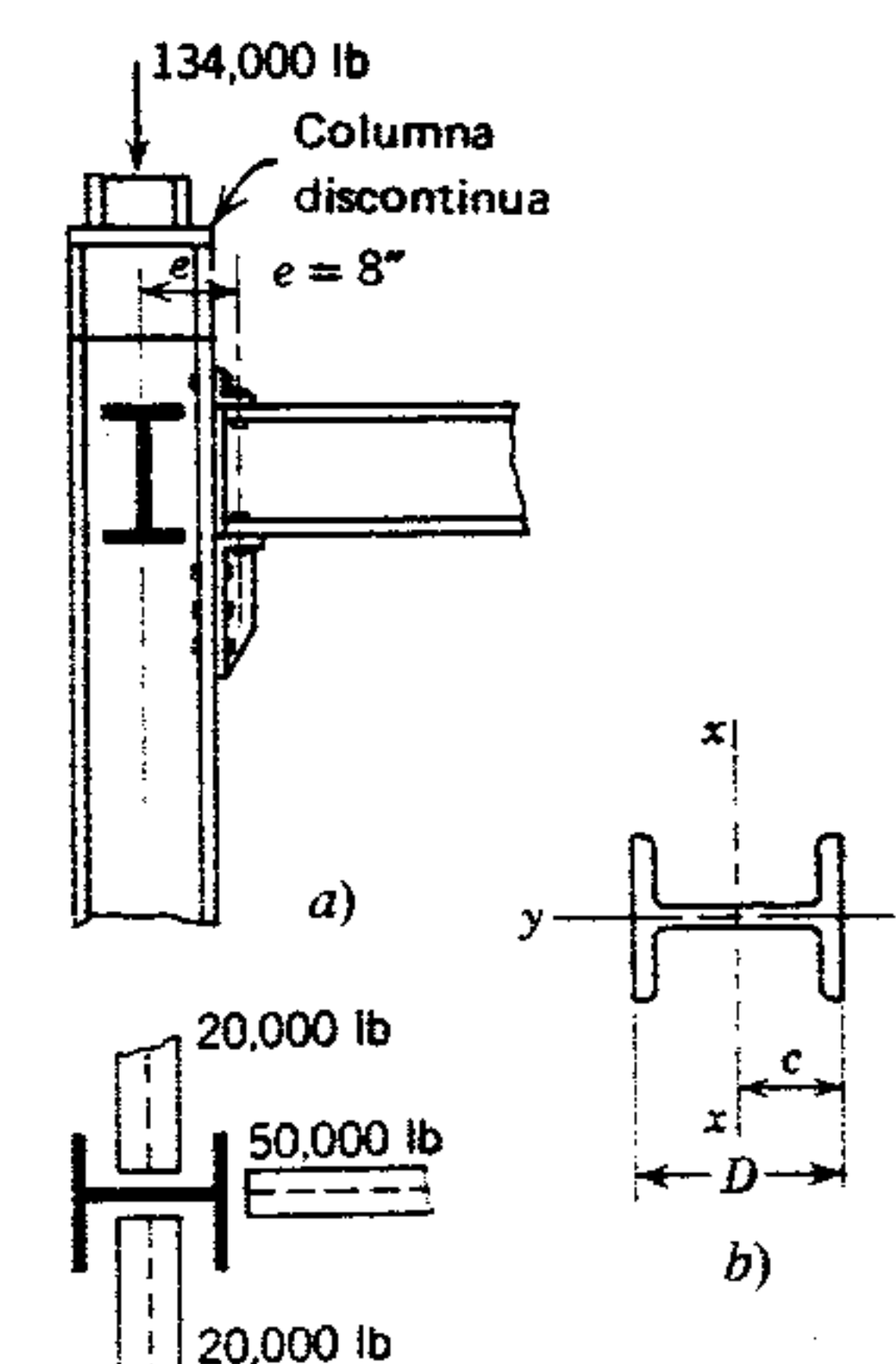


Figura 6.16 Ejemplo.

contra la rotación cuando están conectadas a columnas. Con esto, la viga no sólo transmite una reacción de extremo a la columna, sino que induce un momento flexionante también. En casos en que la columna continúa por encima y por abajo del piso en cuestión, se induce un momento de extremo en la columna de abajo, así como en la de arriba de la viga en cuestión. El momento en la junta, causado por el extremo restringido de la viga, es resistido por todos los miembros que confluyen rigidamente a la junta, cada uno recibiendo una parte del momento flexionante, proporcional a su rigidez. Este tema se estudia con mayores detalles en el capítulo 10, Vigas y Marcos Continuos, y se presenta aquí sólo para demostrar cómo se generan los momentos flexionantes de extremo de columna.

En la figura 6.17 se ilustra un tipo de diseño con un viga con extremo restringido, y una columna discontinua arriba (es decir, en la columna de arriba no se induce el momento de extremo de la viga). El esfuerzo de fibra en la columna abajo de la viga en cualquier sección se puede expresar como sigue:<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Véase la nota de pie de página número 5, sección 6.15.



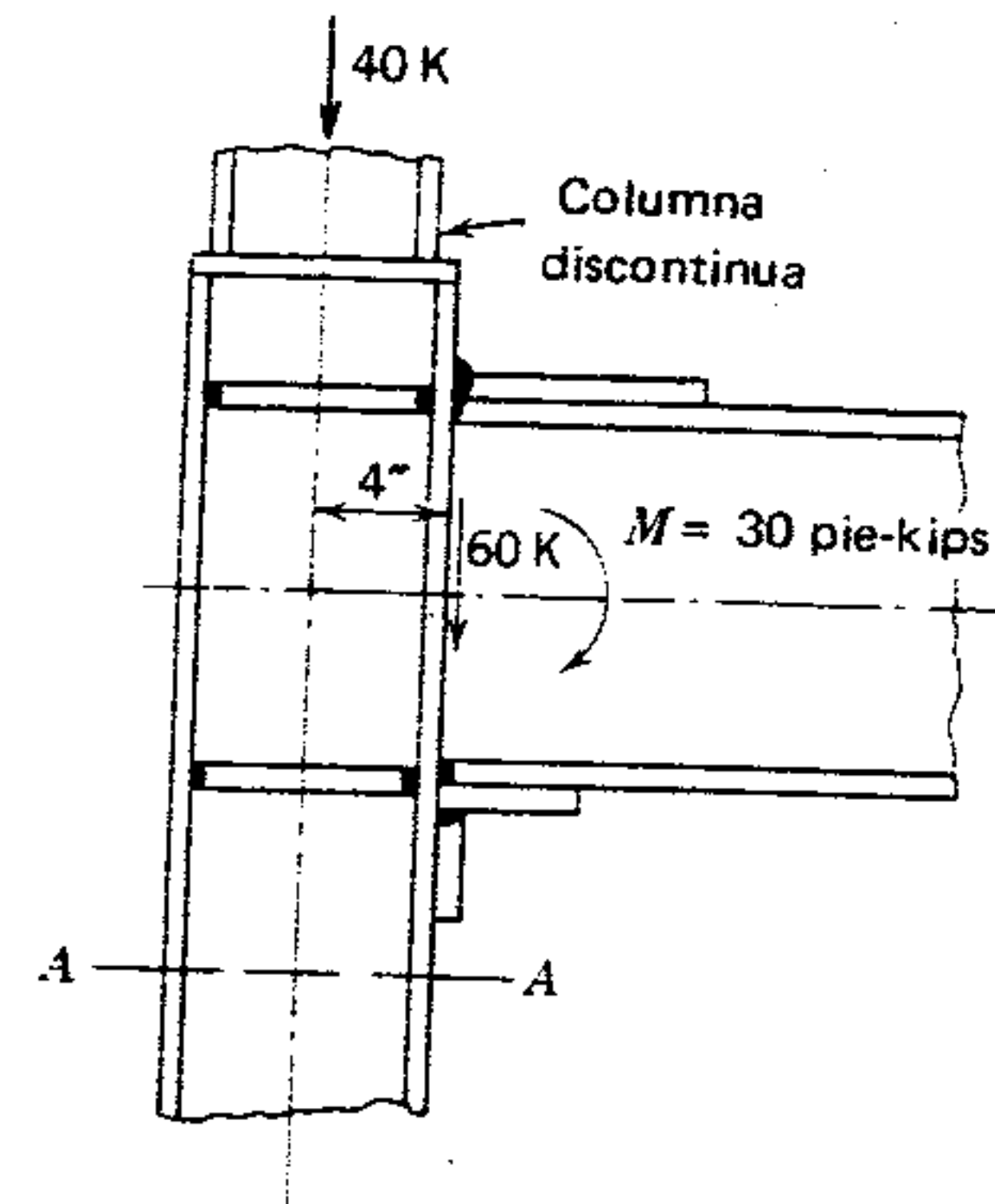


Figura 6.17 Momentos inducidos.

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{P'ec}{I} \pm \frac{Mc}{I}$$

En particular en la figura 6.17,  $P$  es  $40 + 60 = 100$  kips;  $P'$  es 60 kips;  $e$  es 4 pulgadas, y  $M$  es 30 kips-pie.

Este tipo de diseño también se puede expresar como se muestra en la figura 6.18, donde el momento debido a la carga excéntrica  $P'$  y el momento de extremo de columna se han combinado. Es decir,

$$M = \frac{60(4)}{12} + 30 = 50 \text{ kips-pie}$$

y

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I}$$

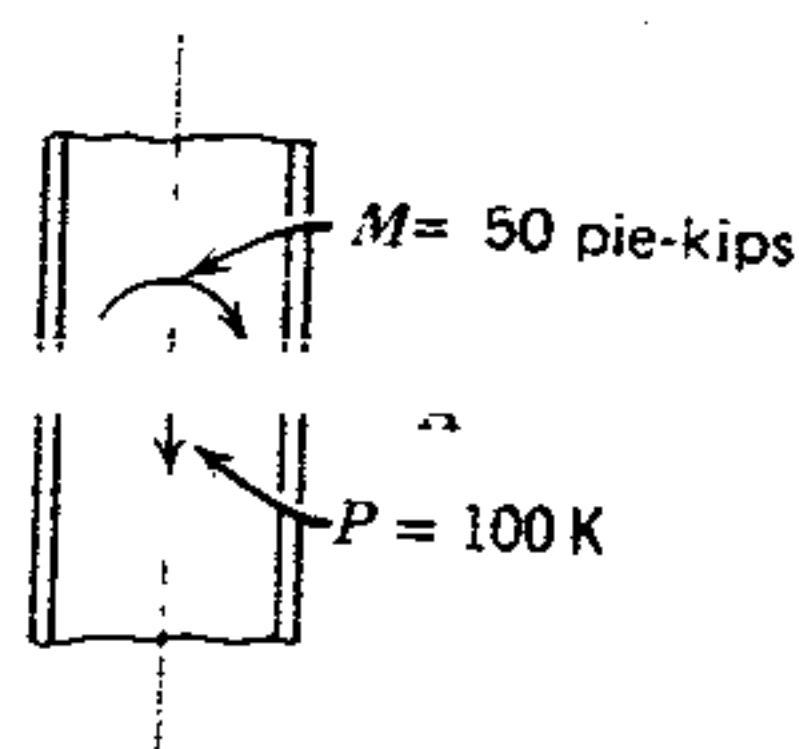


Figura 6.18 Condición combinada.

donde  $P$  representa de nuevo la carga vertical *total*, y  $M$  los momentos combinados.

Como ambas expresiones representan la misma situación, la elegida es simplemente cuestión de preferencia por parte del diseñador.

### 6.17 DISEÑO DE COLUMNAS CON CARGAS EXCÉNTRICAS

Como se dijo anteriormente, el cálculo de columnas con cargas excéntricas con el método mostrado en el ejemplo de la sección 6.15 requiere un esfuerzo flexionante y axial combinado permisible para compararlo con el esfuerzo real calculado. Algunas antiguas especificaciones estipulan que este esfuerzo combinado permisible esté limitado al que se permitiría si sólo hubiera esfuerzo axial. Esto parecería demasiado conservador, sobre todo en casos en que el esfuerzo flexionante es producido por las cargas de gravedad de vigas que confluyen a una columna con una conexión de restricción similar a la de la figura 6.17. El procedimiento de diseño que se da aquí se basa en valores separados para esfuerzo flexionante permisible y esfuerzo axial permisible, y es lo suficientemente importante para merecer un examen detallado de cada parte relacionada.

El objetivo principal es aislar el esfuerzo flexionante real y el esfuerzo directo real e identificar cada uno con esfuerzos flexionantes y axiales permisibles controlados independientemente ( $F_a$  y  $F_b$ ). Los esfuerzos permisibles de las vigas varían en gran medida. El enfoque de diseño consiste en ajustar porcentajes, limitando la suma del porcentaje de esfuerzo axial ( $f_a/F_a$ ) y el porcentaje de esfuerzo flexionante ( $f_b/F_b$ ) al 100 por ciento. La tarea se complica por el hecho de que los esfuerzos flexionantes reales ( $f_b$ ) de las vigas se incrementan cuando una columna ya flexionada (con un momento flexionante) se sujeta a una carga axial. Con un factor de amplificación se ajusta el porcentaje de esfuerzo flexionante en esta columna. Finalmente, el esfuerzo flexionante ( $f_b$ ) se debe ajustar aún más para tomar en consideración las condiciones de extremo; para este propósito se usa un factor de reducción ( $C_m$ ).

El procedimiento de diseño se inicia suponiendo una sección de prueba y calculando el porcentaje del esfuerzo axial permisible de las cargas, es decir,  $f_a/F_a$ . En seguida se calcula el porcentaje del esfuerzo flexionante permisible ( $f_b/F_b$ ). Todos los valores se establecen conforme a los procedimientos previamente estudiados. El porcentaje del esfuerzo flexionante se ajusta más para permitir el incremento del esfuerzo debido a la flexión inicial y para las condiciones de extremo. Esto se hace multiplicando el porcentaje de esfuerzo flexionante por el factor de amplificación y el factor de reducción. Luego se suman los porcentajes y si el valor resultante es menor que el 100 por ciento, el diseño se considera seguro.

En el siguiente párrafo se da una explicación y una derivación detalladas de fórmulas aplicables necesarias para el diseño. La nomenclatura es la siguiente:

$F_a$  = esfuerzo unitario axial permisible.

$F_b$  = esfuerzo flexionante unitario permisible.<sup>7</sup>

$f_a$  = esfuerzo unitario axial real desarrollado.

$f_b$  = esfuerzo unitario flexionante real desarrollado.

Los demás símbolos serán los que se usaron en las secciones 6.15 y 6.16. Debe observarse en la definición de radio de giro (sección 6.4) que el momento de inercia se expresa como  $Ar^2$ . Entonces, cuando se calcula una columna cargada excéntricamente,

$$f_a = \frac{P}{A}$$

y

$$f_b = \frac{P'ec}{I} = \frac{P'ec}{Ar^2}$$

En el diseño, si una columna se somete solamente a carga axial, el área de la sección transversal necesaria ( $A_a$ ) será

<sup>7</sup>  $F_b$  se obtiene como se describió en las secciones 5.6 y 5.7, y es completamente independiente de la acción y especificaciones relacionadas con la carga axial.

$$A_a = \frac{P}{F_a}$$

Si una columna se somete sólo a acción flexionante, el área de la sección transversal necesaria ( $A_b$ ) será

$$A_b = \frac{P'ec}{F_b r^2}$$

Si una columna se sujeta tanto a carga axial como a acción flexionante, el área total necesaria sería

$$A_a + A_b = A = \frac{P}{F_a} + \frac{P'ec}{F_b r^2}$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre  $A$ ,

$$1 = \frac{P}{F_a A} + \frac{P'ec}{F_b Ar^2}$$

Y esto se puede plantear así

$$\frac{P/A}{F_a} + \frac{P'ec/Ar^2}{F_b} = 1$$

o bien, por sustitución,

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} = 1$$

Esto se conoce como fórmula de interacción fundamental. Cuando se traza gráficamente como en

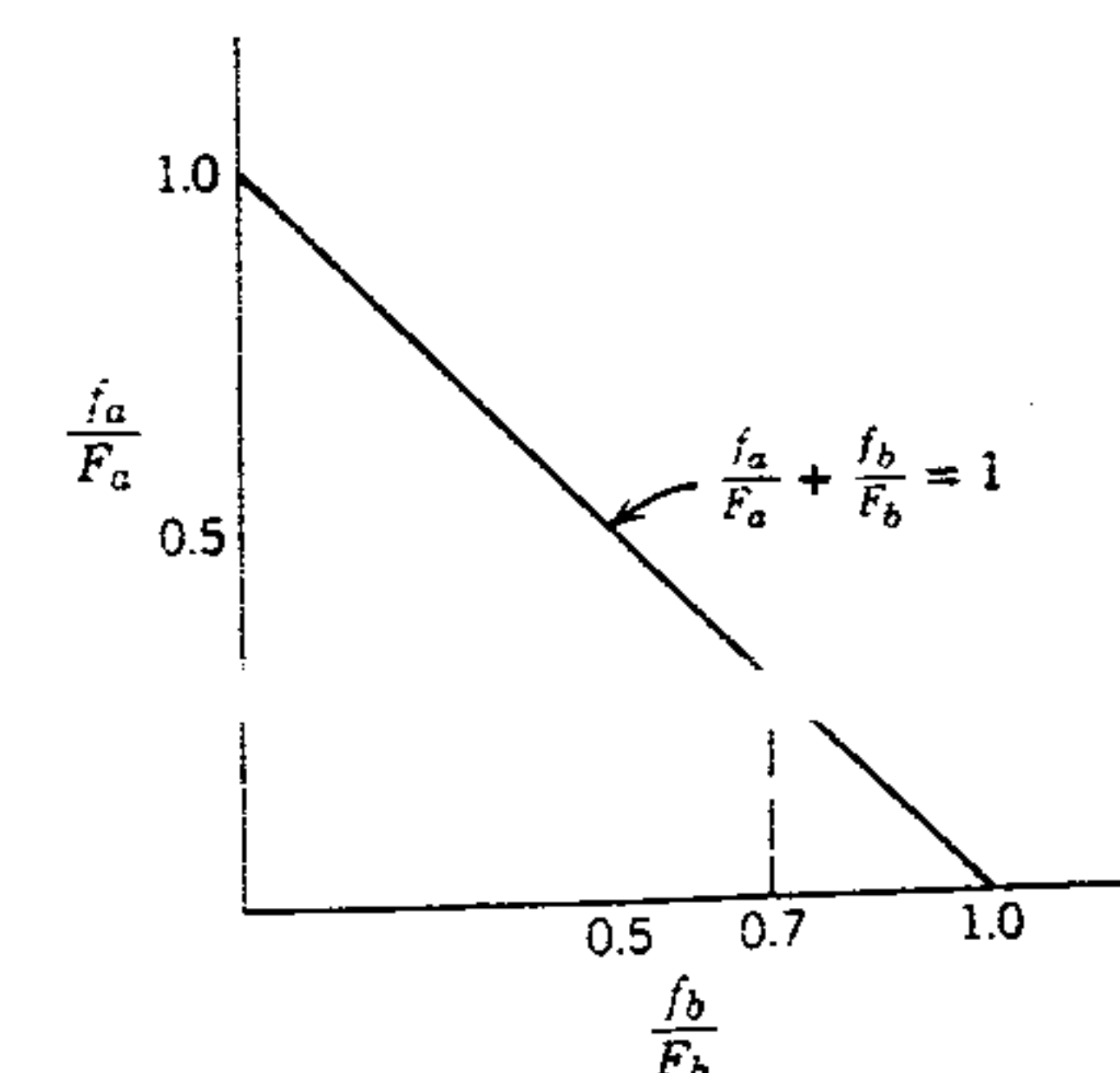


Figura 6.19 Fórmula fundamental de interacción.



la figura 6.19, forma una línea recta. Una explicación sencilla de su significado sería: cuando la relación  $f_b/F_b$  es, por ejemplo, 0.7, la relación  $f_a/F_a$  no puede exceder de 0.3.

La fórmula de interacción fundamental sirve para calcular los esfuerzos adicionales causados por el pandeo de columna bajo carga axial, reduciendo el valor de  $F_a$  cuando aumenta la mayor  $KL/r$ . Sin embargo, en la fórmula *no* se toman en cuenta los esfuerzos adicionales causados por la deflexión lateral debida a momentos de extremo inducidos.

**Esfuerzos de momento de extremo.** Este fenómeno se puede describir por la secuencia de carga de columna de la figura 6.20. En la primera, figura 6.20a, se muestra un miembro vertical con iguales momentos de extremo,  $M_o$ , que se deflexiona hasta una forma que parece exagerada por la línea punteada. La deflexión lateral máxima es  $\Delta_m$ , y el momento a mitad de la altura es  $M_o$ . Cuando la carga axial  $P$  se aplica a la forma ya deflexionada (figura 6.20b), se provocará un momento adicional a la mitad de la altura igual a  $P\Delta_m$ . Éste, a su vez, causa más deflexión lateral, provocando un mayor momento, y así sucesivamente. Por lo tanto, el esfuerzo flexionante final a mitad de la altura de la columna será la suma de los esfuerzos causados por cada acción, o sea

$$f_b = \frac{M_o c}{I} + \frac{\Delta_m P c}{I}$$

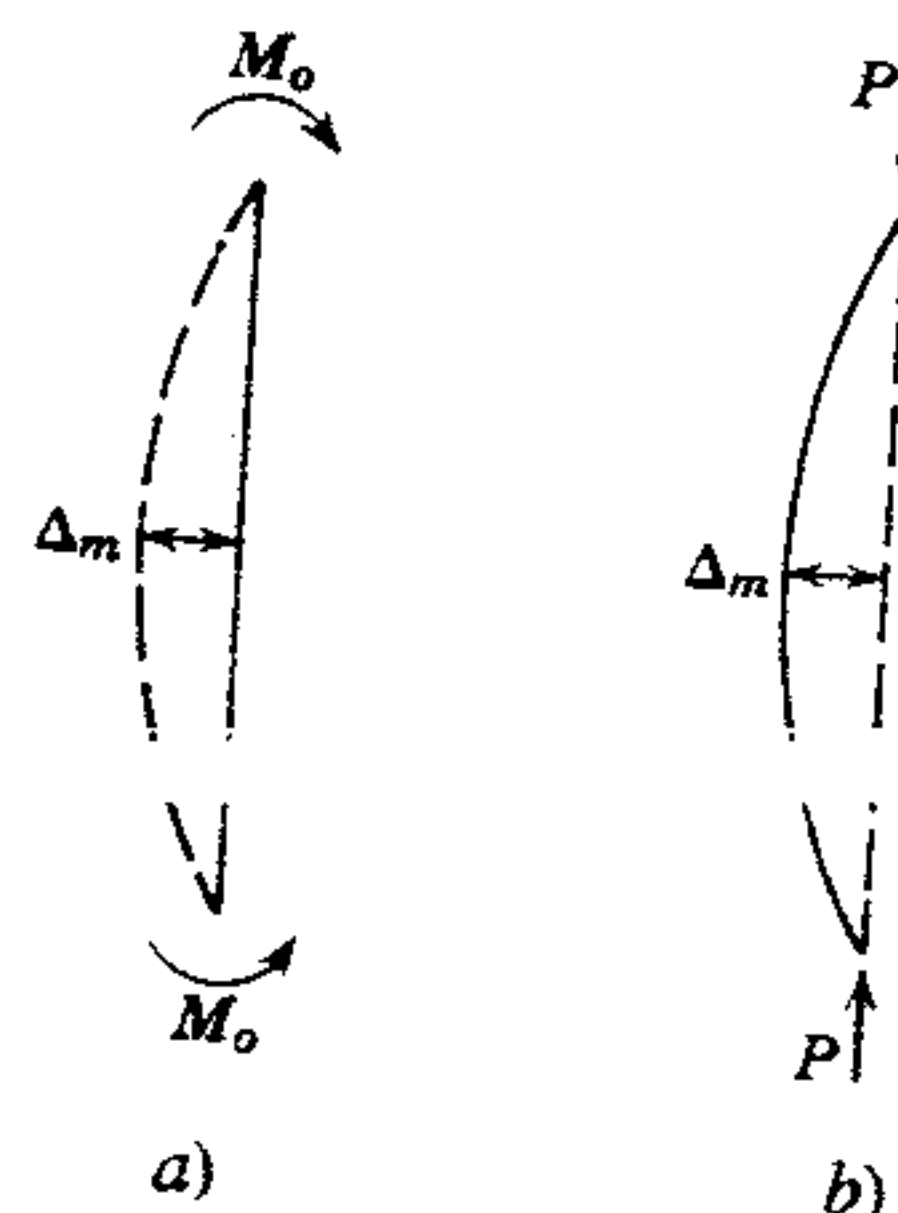


Figura 6.20 Efecto del momento en el extremo.

Los esfuerzos adicionales causados por  $P\Delta_m$  son muy difíciles de calcular con precisión, y habitualmente se requiere recurrir a complejos procesos matemáticos conocidos como integración numérica. Estos procedimientos y fórmulas implicadas no son adecuadas para aplicarlas al diseño de rutina. No obstante, se pueden derivar algunas conclusiones de la acción estructural que se describió. Se ha visto que para una condición constante de extremo, como la mostrada en la figura 6.20 (iguales momentos de extremo), la deflexión lateral  $\Delta_m$  dependerá de la relación de esbeltez de la columna con respecto a la dirección de la flexión. Una relación de esbeltez amplia permite una mayor deflexión lateral. Los esfuerzos flexionantes correspondientes de la deflexión aumentarán al incrementarse los valores de la carga axial  $P$ .

Para simplificar el procedimiento de diseño, la Especificación del AISC recomienda un método basado en la aplicación de la fórmula de interacción modificada en la medida necesaria para concordar con datos de prueba experimental.

En la figura 6.21 se muestran curvas típicas de datos de prueba. Se probaron columnas con momentos de extremo iguales ( $M_o$ ) para determinar qué carga axial adicional  $P$  se podría aplicar antes de que ocurriera la falla. Esto se repitió con colum-

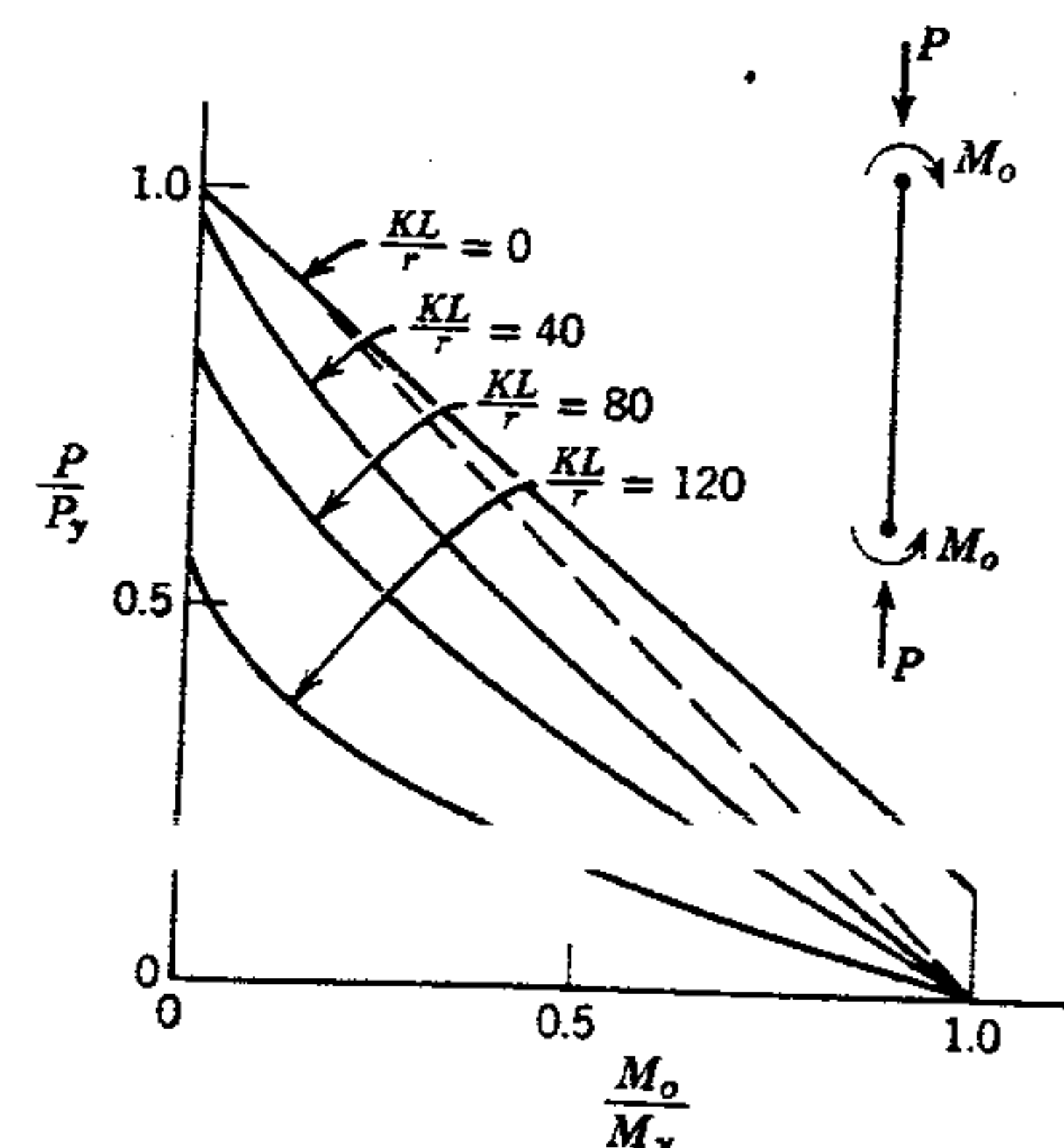


Figura 6.21 Modificación de datos de prueba de la fórmula de interacción.

nas con diferentes relaciones de esbeltez, calculadas en relación a la dirección del momento aplicado. Estos valores, de varias combinaciones de  $P$  y  $M_o$ , se hicieron adimensionales dividiéndolos entre  $P_y$  y  $M_y$ , respectivamente.  $P_y$  es la carga axial que causa fluencias si ocurre sola.  $M_y$  es el momento flexionante que causa fluencia si ocurre en ausencia de una carga axial. La similitud de las relaciones de carga axial  $P/P_y$  y las relaciones de esfuerzo axial  $f_a/F_a$  debe ser notada. La misma similitud existe entre las relaciones de momento  $M_o/M_y$  y las relaciones de esfuerzo flexionante  $f_b/F_b$ . La línea punteada superpuesta a estas curvas de datos de prueba de la figura 6.21 representa la fórmula de interacción de línea recta.

En todos los casos, excepto en columnas con muy pequeños valores de  $KL/r$ , las curvas de datos experimentales quedan en el lado inseguro de la línea recta de la curva de interacción. Las curvas se vuelven cada vez más inseguras a medida que aumenta  $KL/r$ .

La fórmula con la que se obtienen curvas que se aproximan bastante a las mostradas en la figura 6.21 es

$$\frac{P}{P_y} + \left[ \frac{1}{1 - \frac{P}{P_e}} \right] \frac{M_o}{M_y} = 1.0$$

donde  $P_e$  es la carga de pandeo elástico de la columna (sección 6.5), cuando el pandeo ocurre respecto al mismo eje que la flexión y es igual a

$$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = F'_e A$$

Los demás términos de la fórmula se pueden interpretar como sigue:<sup>8</sup>

$$P = f_a A \quad M_o = \frac{f_b I}{c}$$

$$P_y = F_a A \quad M_y = \frac{F_b I}{c}$$

<sup>8</sup> Como la fórmula derivada se va a usar para diseño, los esfuerzos permisibles,  $F_a$  y  $F_b$ , deben admitir un factor de seguridad.

Sustituyendo estos valores en la fórmula básica de la curva,

$$\frac{f_a A}{F_a A} + \left[ \frac{1}{1 - \frac{f_a A}{F'_e A}} \right] \frac{f_b \left( \frac{I}{c} \right)}{F_b \left( \frac{I}{c} \right)} = 1.0$$

que fácilmente se reduce a

$$\frac{f_a}{F_a} + \left[ \frac{1}{1 - \frac{f_a}{F'_e}} \right] \frac{f_b}{F_b} = 1.0$$

El término entre paréntesis se denomina *factor de amplificación*.  $F'_e$  se define como esfuerzo límite de Euler (dividido entre un factor de seguridad) y se calcula como sigue:<sup>9</sup>

$$F'_e = \frac{12\pi^2 E}{23(K_b L_b/r_b)^2}$$

donde la relación de esbeltez se mide con respecto al eje en el cual ocurre la flexión y  $F'_e$  se expresa en lb/pulg<sup>2</sup> o k/pulg<sup>2</sup>.

Cuando  $F'_e$  es muy grande y/o el esfuerzo axial  $f_a$  es muy pequeño, el factor de amplificación se puede omitir. Cuando son significativos, el factor de amplificación aumenta la relación  $f_b/F_b$  y toma en cuenta el esfuerzo flexionante adicional mostrado en la figura 6.20.

**Factor de reducción.** Las curvas básicas de columnas de la figura 6.21 y el factor de amplificación ya descrito se basaron en momentos iguales de extremos de columnas, que causan una curvatura simple. Estas condiciones de extremo son las más severas. Cualquier otra combinación de condiciones de extremo permitiría una mayor amplitud en la forma de un factor de reducción  $C_m$ , que se multiplicaría por la relación de esfuerzo flexionante amplificado. Por tanto, la fórmula de interacción

<sup>9</sup> Esta fórmula se derivó en la sección 6.5.



ajustada establecida por la Especificación del AISC de 1978 es

$$\frac{f_a}{F_a} + \left[ \frac{C_m}{1 - \frac{f_a}{F'_e}} \right] \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

y se deben cumplir todos los puntos sobre una columna entre apoyos laterales cuando  $f_a/F_a \geq 0.15$ .

El factor de reducción  $C_m$  necesita una explicación más amplia. Su valor se establece por el tamaño y dirección relativos de los momentos de extremo de las columnas, y nunca es mayor a 1.0. La Especificación del AISC de 1978 establece  $C_m$  para columnas arriostradas, como sigue:

$$C_m = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2}$$

donde  $M_1$  es el menor momento de extremo y  $M_2$  el mayor momento de extremo.

La relación  $M_1/M_2$  es negativa si los momentos de extremo actúan en la misma dirección y originan una sola curva. La relación  $M_1/M_2$  es positiva si los momentos de extremo son de dirección opuesta y causan una doble curva de deflexión.

En la figura 6.22 se muestran tres condiciones de extremo que se encuentran frecuentemente en edificios de acero. La Especificación del AISC de 1978 estipula que  $C_m$  nunca debe ser menor que 0.4, lo cual sucede en el caso que se muestra en la figura 6.22e.

Para el caso en que no hay arriostramiento contra pandeo lateral, la longitud efectiva  $KL$  es mayor que la altura del piso. Esto se tiene que tomar en cuenta al calcular  $F_a$  mediante la selección de  $K$  (sección 6.8). Se necesita protección contra la influencia de momentos adicionales causados por la fuerza axial multiplicada por la deflexión lateral del piso. Por lo tanto, la Especificación del AISC de 1978 sitúa el límite menor de  $C_m$  en 0.85 en este caso; es decir,  $C_m$  puede ser mayor, pero no menor que 0.85.

Existe otro tipo más de "cargas combinadas"<sup>10</sup> significativamente diferente de los que establecen

<sup>10</sup> "Carga combinada" es un término estructural común que se refiere al miembro sujeto al efecto combinado de momento y carga axial.

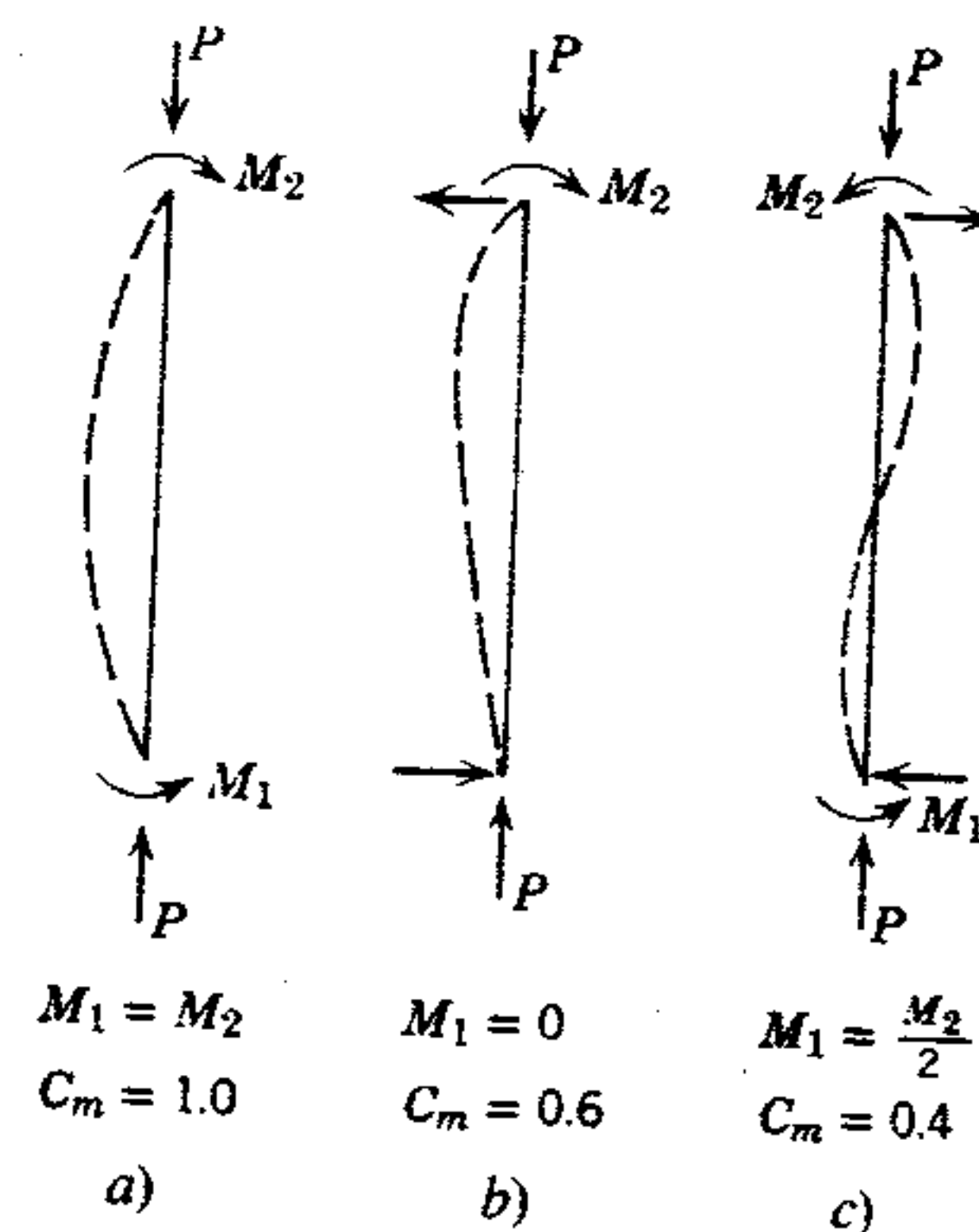


Figura 6.22 Factores de reducción para columnas arriostradas en los extremos.

las curvas de la figura 6.21. Este es el caso en que la columna recibe cargas transversales además de fuerzas axiales. Este tipo se muestra en la figura 6.23. La magnitud de la carga y el tipo de carga transversal afectarán apreciablemente a  $\Delta_m$ . También podría influir en el efecto del momento de extremo y con frecuencia provoca un mayor momento entre los extremos.

Como en la Especificación AISC hay referencia específica al hecho de que  $f_b$  se debe calcular en el punto bajo consideración, se debe usar el  $M$  mayor. En estas condiciones,  $C_m$  se puede estimar conserva-



Figura 6.23 Carga transversal sobre una columna.

doramente en 1.0, o bien se puede calcular mediante cualquier análisis racional. En la Especificación AISC (parte 5 del Manual) se proporciona información adicional para calcular  $C_m$ , incluyendo una tabla en que se listan seis diferentes casos y los valores correspondientes de  $C_m$ .

Cuando la carga axial es pequeña en relación con el momento flexionante, los esfuerzos adicionales causados por deflexión lateral son omitidos. Esto se puede comprobar estudiando las curvas de columnas en la figura 6.21. La Especificación AISC permite la aplicación directa de la fórmula de interacción de línea recta cuando  $f_a/F_a \leq 0.15$ . Por lo tanto, en estas condiciones, se usa

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

Se necesita establecer un criterio adicional de seguridad en todas las columnas con cargas combinadas. Las fórmulas de diseño que se examinaron eran aplicables a posiciones cercanas al centro de una columna, donde el pandeo y la deflexión lateral son mayores. También existe la posibilidad (dependiendo de la relación de esbeltez de una columna no arriostrada en el plano de flexión) de que el esfuerzo combinado calculado en un extremo exceda al de todos los puntos en que se crea deflexión lateral por los momentos de extremo, aun cuando se haya modificado el esfuerzo flexionante en esos puntos. Para este caso, la Especificación AISC indica que se use la fórmula de interacción de línea recta, sustituyendo  $0.6 F_y$  por  $F_a$ . Por lo tanto, esto sería

$$\frac{f_a}{0.6 F_y} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

cumplir en los puntos en que la columna esté arriostrada en el plano de flexión.

**Resumen del procedimiento.** Calcular la relación entre el esfuerzo axial directo y el esfuerzo axial permisible ( $f_a/F_a$ ).  $F_a$  se establece por el valor máximo de  $KL/r$  y es independiente del efecto del

momento flexionante. Si la relación es menor que 0.15, se debe cumplir la condición de que

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

Si la relación  $f_a/F_a$  es mayor que 0.15, se debe cumplir la condición de que

$$\frac{f_a}{F_a} + \left[ \frac{C_m}{1 - \frac{f_a}{F'_e}} \right] \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

Además, se debe cumplir la siguiente condición en puntos de apoyo lateral en el plano de flexión:

$$\frac{f_a}{0.6 F_y} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

### Ejemplo 1

Mediante el anterior procedimiento de diseño, investigar la columna W 10 × 68 seleccionada en el ejemplo de la sección 6.15, para determinar si la sección está sobreesforzada. Se supone que el extremo superior y el inferior están sujetos para prevenir la translación, pero sí pueden rotar. Se especifica acero A36. (El paso 3 del ejemplo referido se repite a continuación, y a las operaciones subsecuentes se numeran en la misma secuencia).

3. El valor máximo del esfuerzo de compresión unitario es

$$f = \frac{P}{A} + \frac{P'ec}{I} = 11,200 + 5,280 = 16,480 \text{ lb/pulg}^2$$

son

$$f_a = 11,200 \text{ lb/pulg}^2 \quad f_b = 5,280 \text{ lb/pulg}^2$$

5. El esfuerzo axial permisible se encuentra de la misma manera que en la sección 6.5. Si la altura no arriostrada en ambos ejes de la co-



lumna es de 13 pies y  $K=1.0$  para ambos ejes, se obtendrá la máxima relación  $KL/r$  usando el  $r$  menor de la columna, es decir,

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{1(13)12}{2.59} = 60.2$$

y el esfuerzo axial permisible se puede calcular con la fórmula de columna apropiada, o se puede seleccionar de las tablas apropiadas como se hizo aquí, es decir,

$$F_a = 17,410 \text{ lb/pulg}^2$$

6. Como la columna W 10 X 68 es compacta para acero A36, el esfuerzo flexionante permisible depende de la tendencia del patín de la columna a pandearse lateralmente (sección 5.7). Si sólo hay apoyo lateral en los extremos inferior y superior, la distancia lateral no soportada es de 13 pies. En las tablas de vigas del AISC de 1978 se ven los límites de  $L_c = 10.7$  pies y  $L_u = 34.9$  pies. Como  $13.0 > 10.7 < 34.8$ ,  $F_b = 0.6 F_y = 22,000 \text{ lb/pulg}^2$ .
7. Calcular la relación de esfuerzos axiales.

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{11,200}{17,410} = 0.643$$

Como  $0.643 > 0.15$ , se debe satisfacer la fórmula de interacción modificada.

8. Calcular el factor de amplificación; éste está controlado por la relación de esbeltez de la sección con relación al plano de flexión.

$$\frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{1(13)12}{4.44} = 35.1$$

$$F'_e = \frac{12\pi^2 29,000,000}{23(35.1)^2} = 121,200 \text{ psi}$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_e} = 1 - \frac{11,200}{121,200} = 0.908$$

9. Determinar el factor de reducción. Como los extremos de la columna están sujetos contra desplazamiento lateral,

$$C_m = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2} = 0.6$$

10. Probar las relaciones de esfuerzo para estabilidad (entre los extremos de la columna),

$$\frac{f_a}{F_a} + \left[ \frac{C_m}{1 - \frac{f_a}{F'_e}} \right] \frac{f_b}{F_b} = \frac{11.2}{17.41} + \frac{0.6}{0.908} \left( \frac{5.3}{22} \right) = 0.802$$

Como  $0.802 < 1.0$ , la sección es estable.

11. Probar las relaciones de esfuerzo en el extremo superior de la columna, donde está sujeta en el plano de flexión,

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{11.2}{22} + \frac{5.3}{22} = 0.750$$

Como este valor también es menor que 1.0, la columna se considera segura y satisface la especificación del AISC.

En el procedimiento anterior se puede ver que el diseño de columnas con cargas excéntricas en gran medida se hace por tanteo, es decir, se selecciona primero una sección de prueba y luego se examinan las relaciones de esfuerzo. Por supuesto, las tablas facilitan bastante el diseño. El apéndice de la Especificación AISC (parte 5 del Manual del AISC) proporciona una tabla de valores de  $F'_e$  para diversas relaciones  $KL/r$  para todos los grados de acero. Estas tablas son similares a las que contienen valores de  $F_a$ . un método alternativo para diseñar columnas con cargas excéntricas se presenta en la sección 6.18.

En columnas de esquina o en vanos asimétricos se puede encontrar otro tipo de carga excéntrica (figura 6.24). La viga A transmite una reacción ex-

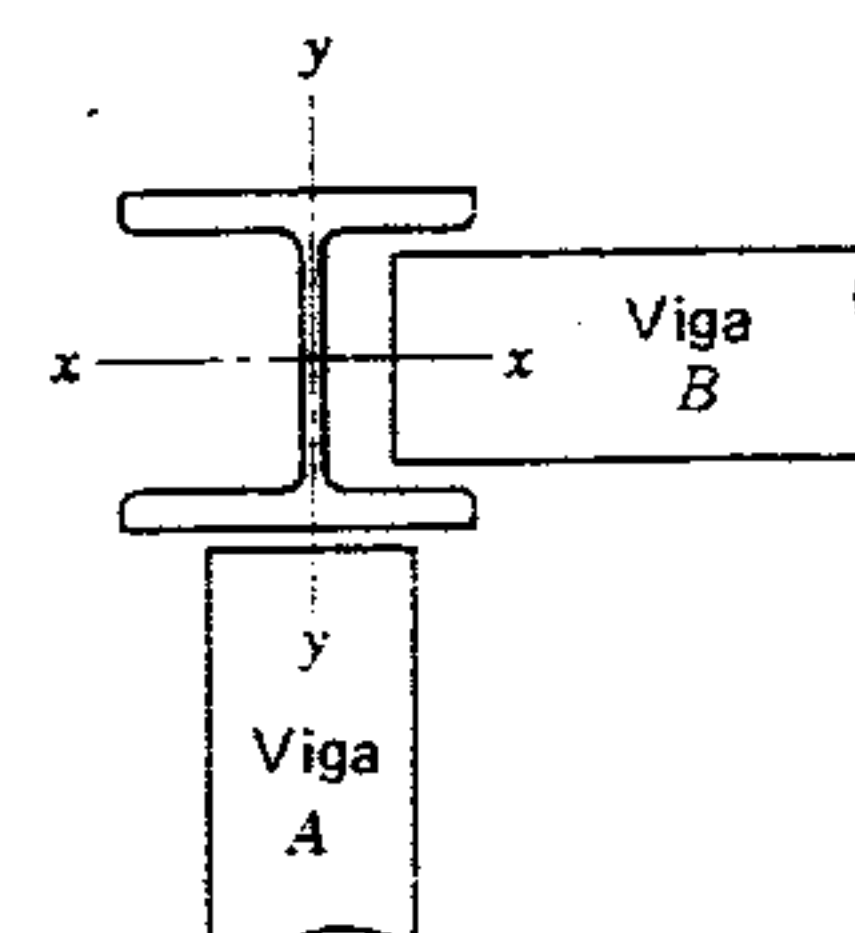


Figura 6.24 Columna de esquina.

céntrica a la columna, la cual causa flexión en relación al eje x-x, y la viga B transmite una reacción excéntrica a la columna, causando flexionamiento respecto al eje y-y. Si la viga B está directamente conectada al alma, el grado de excentricidad en relación al eje y-y podría ser muy pequeño y el efecto imperceptible; si la conexión fuera tal que la reacción actuara a distancia de la cara del alma, el efecto podría ser muy significativo. Mediante el procedimiento que se acaba de presentar, pero agregando un término más a la fórmula de relaciones entre esfuerzos,

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0$$

cuando

$$\frac{f_a}{F_a} \leq 0.15$$

$$\frac{f_a}{F_a} + \left[ \frac{C_{mx}}{1 - \frac{f_a}{F'_{ex}}} \right] \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \left[ \frac{C_{my}}{1 - \frac{f_a}{F'_{ey}}} \right] \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0$$

cuando

$$\frac{f_a}{F_a} > 0.15$$

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0$$

en los puntos arriostrados, donde los subíndices x y y se refieren a los planos respectivos de flexión.<sup>11</sup>

Además, la especificación del AISC de 1978 establece que al calcular los valores para  $F_{bx}$  y  $F_{by}$  el término  $C_b$  se puede tomar conservadoramente como una unidad o, en el caso de marcos no arriostrados, se puede calcular mediante la conocida fórmula.

$$C_b = 1.75 + 1.05 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) + 0.3 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2.3$$

Esta fórmula, su definición y su aplicación se presentaron y describieron en la sección 5.6.

## Ejemplo 2

Una columna W 12 X 40 tiene una altura total de 12 pies. El eje y-y está sujeto a mitad de la altura. La base de la columna está articulada y permite la libre rotación, también está sujeta contra la translación. El extremo superior de la columna está articulado y arriostrado en el eje y-y, y está restringido contra rotación, pero no contra translación respecto al eje x-x. Hay una carga axial de 30 kips, incluyendo el propio peso de la columna, y un momento en relación al eje x-x de 80 kips-pie en el extremo superior, y en el inferior no hay momento. Usando acero A36, calcular si la columna es segura de acuerdo con la Especificación del AISC de 1978.

## Solución

1. Las siguientes características de la sección W 12 X 40 se encuentran en el Manual del AISC:

<sup>11</sup> Véase también "Commentary on the Specification for the Design, Fabrication & Erection of Structural Steel for Buildings", parte 5 del Manual del AISC.



$$A = 11.8 \text{ pulg}^2 \quad r_x = 5.13 \text{ pulg}$$

$$S_x = 51.9 \text{ pulg}^3 \quad r_y = 1.93 \text{ pulg}$$

2. Calcular el esfuerzo axial unitario y el esfuerzo flexionante real.

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{30}{11.8} = 2.54 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{M}{S} = \frac{80(12)}{51.9} = 18.5 \text{ k/pulg}^2$$

3. Determinar la máxima relación de esbeltez. El valor  $K$  para el eje  $x$ - $x$  es 2.0 y para el eje  $y$ - $y$ , 1.0 (véase la figura 6.4).

$$\frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{2(12)12}{5.13} = 56.1$$

$$\frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1(6)12}{1.93} = 37.3$$

4. Usando la mayor relación de esbeltez, calcular el esfuerzo axial unitario permisible. En las tablas del AISC.

$$F_a = 17.8 \text{ k/pulg}^2$$

5. Determinar la relación de esfuerzos axiales

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{2.54}{17.8} = 0.143$$

Como  $0.143 < 0.15$ , usar la fórmula de interacción de línea recta para determinar la estabilidad.

6. Determinar el esfuerzo flexionante unitario permisible máximo. La  $W 12 \times 40$  es compacta para acero A36.  $L_c = 8.4$  pies y  $L_u = 16.0$  pies. La riorra a mitad de la altura establece la longitud de pandeo lateral de la viga de 6.0 pies.

Como  $6.0 < 8.4$ , usar  $F_b = 0.66 F_y = 24 \text{ k/pulg}^2$ .

7. Probar las relaciones de esfuerzo para comprobación de estabilidad.

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{2.54}{17.8} + \frac{18.5}{24} = 0.914$$

8. Probar la relación de esfuerzo en el extremo superior de la columna donde está sujeta en el plano de flexión.

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{2.54}{22} + \frac{18.5}{24} = 0.886$$

Como ambas revisiones de relación de esfuerzo dan valores menores que 1.0, la columna se considera segura.

### Ejemplo 3

Una columna  $W 14 \times 48$  de acero A242, con una longitud total de 14 pies, está cargada como se ve en la figura 6.25. La carga de 90 kips incluye una tolerancia para el propio peso de la columna. Los momentos flexionantes se aplican respecto al eje mayor de la columna. Los extremos inferior y superior de la columna están sujetos a ambos ejes. Los valores de  $K$  se han estimado en 1.0 para el eje menor y 0.65 para el eje mayor. Calcular si la columna es segura de acuerdo con la Especificación del AISC.

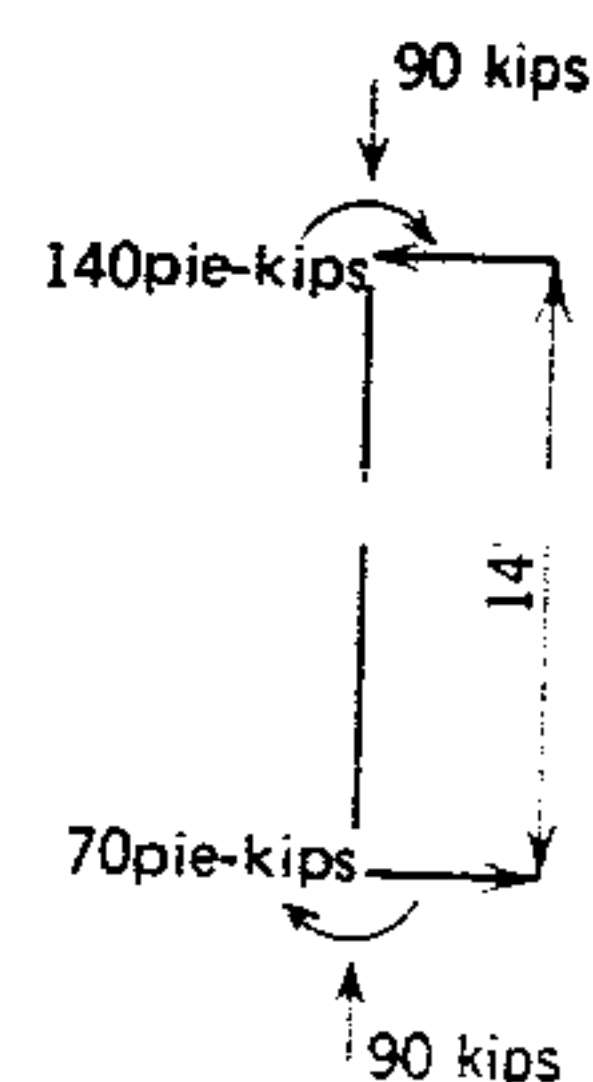


Figura 6.25 Ejemplo 3.

### Solución

1. Las siguientes características de la sección  $W 14 \times 48$  se encuentran en el Manual AISC:

$$A = 14.1 \text{ pulg}^2 \quad r_x = 5.85 \text{ pulg} \quad L_c = 7.2 \text{ pies}$$

$$S_x = 70.3 \text{ pulg}^3 \quad r_y = 1.91 \text{ pulg} \quad L_u = 11.5 \text{ pies}$$

2. Determinar el esfuerzo axial unitario real y el esfuerzo flexionante.

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{90}{14.1} = 6.38 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{M}{S} = \frac{140(12)}{70.3} = 23.9 \text{ k/pulg}^2$$

3. Determinar la relación de esbeltez en cada eje.

$$\frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{0.65(14)12}{5.85} = 18.7$$

$$\frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1(14)12}{1.91} = 88$$

4. Usando la mayor relación de esbeltez, calcular el esfuerzo axial unitario permisible (nótese que la sección está en el grupo estructural 1, por lo tanto  $F_y = 50 \text{ k/pulg}^2$ ). En las tablas del AISC.

$$F_a = 17.37 \text{ k/pulg}^2$$

5. Determinar la relación de esfuerzos axiales.

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{6.38}{17.37} = 0.367$$

Como  $0.367 > 0.15$ , se debe usar la fórmula de interacción modificada para calcular la estabilidad.

6. Calcular el factor de amplificación.

$$F'_c = \frac{12\pi^2 29,000}{23(18.7)^2}$$

$$= 427 \text{ ksi}$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_c} = 1 - \frac{6.38}{427} = 0.985$$

7. Determinar el factor de reducción.

$$C_m = 0.6 - 0.4\left(\frac{70}{140}\right) = 0.4$$

8. Determinar el esfuerzo flexionante permisible. La sección se podría revisar para comprobar su idoneidad como sección compacta, pero como la longitud lateral sin apoyo es de 14 pies, cantidad mayor que  $L_c$  (7.2 pies), no satisface la especificación que permite  $F_b = 0.66 F_y$ . Asimismo, como 14 pies es mayor que  $L_u$  (11.5 pies), el esfuerzo flexionante permisible podría ser menor que 0.60  $F_y$  y se debe calcular mediante el procedimiento descrito en la sección 5.7 mostrado en la figura 5.5.

El modificador de gradiente de momento es

$$C_b = 1.75 + 1.05\left(\frac{M_1}{M_2}\right) + 0.3\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$$

$$= 1.75 + 1.05\left(\frac{70}{140}\right) + 0.3\left(\frac{70}{140}\right)^2$$

$$= 2.35$$

Sin embargo, el límite superior del modificador 2.3.

Por lo tanto, usar  $C_b = 2.3$ .

Calcular si  $L_u$  es determinada por el pandeo o la torsión.

$$r_T \frac{d}{A_f} = 2.13(2.89) = 6.16 < \frac{62.62}{\sqrt{50}} = 8.86$$

Por lo tanto, la torsión es determinante y

$$L_{eff} = C_b L_u = 2.3(11.5) = 26.45 \text{ pies}$$

Como 14 pies < 26.45 pies,  $F_b = 0.66 F_y = 30 \text{ k/pulg}^2$ .

9. Revisar las relaciones de esfuerzo para comprobar la estabilidad.

$$\frac{6.38}{17.37} + \frac{0.4}{0.985} \left(\frac{23.9}{30}\right) = 0.691$$



Como  $0.691 < 1.0$ , la columna se considera estable.

10. Revisar las relaciones de esfuerzo en el extremo superior de la columna, donde está sujeta en el plano de flexión.

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{6.38}{30} + \frac{23.9}{30} = 1.01$$

Como  $1.01 > 1.0$ , la sección no es segura según la Especificación AISC.

### PROBLEMAS

- Una columna W 8 X 31 de acero A36 tiene una altura no arriostrada de 14 pies en ambos ejes. Está arriostrada en los extremos superior e inferior de modo que  $K_x = K_y = 1.0$ . Una carga de 60 kips está situada a 2 pulgadas de la cara del patín. Omitir el propio peso de la columna. Calcular la suma de relaciones de esfuerzo. ¿Es segura la columna? (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una sección W 14 X 43 de acero A36 tiene una altura no arriostrada de 10 pies en el eje y-y, y de 24 pies en el eje x-x. El arriostramiento en los extremos superior e inferior es tal que  $K_x = K_y = 1.0$ . Hay una carga de 90 kips aplicada directamente sobre la cara exterior del patín de la columna. Sin considerar el peso de la columna, calcular la suma de las relaciones de esfuerzo. ¿Es segura la columna?
- Una sección W 8 X 18 de acero A242 tiene una altura total no arriostrada de 14 pies.  $K_x = K_y = 1.0$ . Calcular la carga máxima aplicada  $P$  que se puede situar con seguridad en la cara exterior del patín de la columna. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una columna cuadrada de acero A36 está compuesta por dos ángulos de 6 X 6 X 5/8 pulg. soldados entre sí en las aristas exteriores. La altura no arriostrada es de 12 pies y  $K_x = K_y = 1.0$ .
  - Calcular la carga axial máxima que puede soportar con seguridad la columna, incluyendo su propio peso.
  - Calcular la máxima carga aplicada permisible si ésta se va a aplicar a una de las caras exteriores.

- Una sección W 6 X 25 de acero A36 sirve como columna para un edificio de dos pisos. Abarca los dos pisos, y las alturas de piso a piso son de 11 pies 6 pulgadas.  $K_x = K_y = 1.0$ . El techo aplica una carga axial de 18 kips en la columna. El segundo piso transmite un total de 50 kips, de los cuales 25 tienen una excentricidad de 8 pulgadas (con respecto al eje x-x). No considerar el propio peso de la columna. Calcular la suma de las relaciones de esfuerzo. ¿Es segura la columna? Nota: como la columna es continua, el momento flexionante se divide en partes iguales entre la columna de arriba y la de abajo. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Una sección W 8 X 28 de acero A36 sirve como columna en un edificio de un piso. Está articulada y arriostrada en ambos ejes. La carga aplicada en el extremo superior es la mostrada en la figura 6.26. La altura no arriostrada es de 14 pies. Suponer que la carga de 30 kips actúa en el patín de la columna, y la carga de 20 kips a 3 pulgadas del eje y-y. Sin considerar el peso de la columna, calcular la suma de las relaciones de esfuerzo. ¿Es segura la columna?

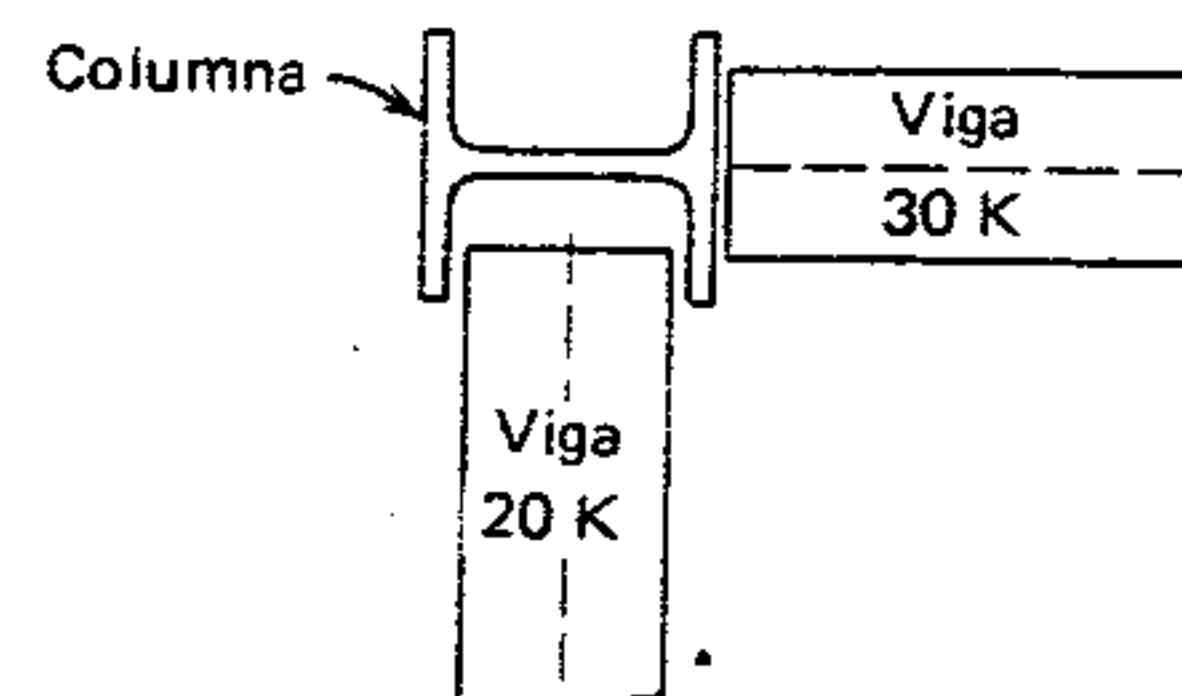


Figura 6.26

- Seleccionar la sección W de menor peso de acero A36 que actúe como columna que soporte con seguridad una carga vertical de 100 kips, con una excentricidad de 6 pulgadas con respecto al eje x-x.  $K_x = K_y = 1.0$  y la altura no arriostrada es de 18 pies. (La respuesta se da en el apéndice G).
- Seleccionar la sección W de menor peso, que actúe como columna de un solo piso con una altura no arriostrada en ambos ejes de 20 pies, que se someterá a cargas como las de la figura 6.27. Los extremos inferior y superior están articulados y arriostrados de modo que  $K_x = K_y = 1.0$ . No considerar el propio peso de la columna. (La respuesta se da en el apéndice G).

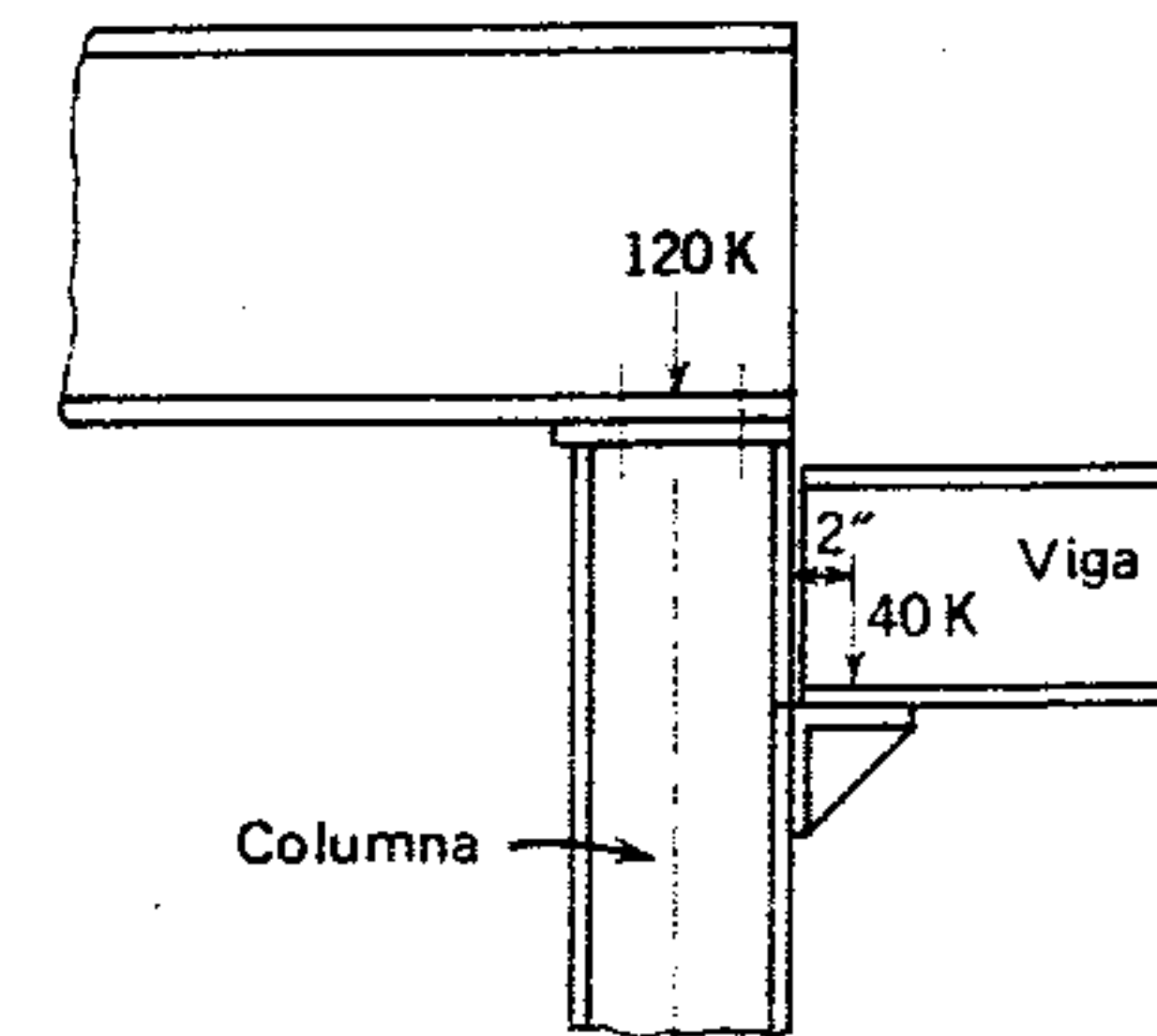


Figura 6.27

- Una columna de un solo piso tiene una altura de 16 pies y debe soportar una carga axial de 200 kips, incluyendo su propio peso. Además, tiene una viga de acero soldada a la cara del patín de la columna que transmite a este patín una reacción de 30 kips y un momento de 80 kips-pie. La columna está articulada y arriostrada en los extremos superior e inferior del eje y-y. El extremo superior es resistente al momento respecto al eje x-x, pero puede desplazarse. El extremo inferior está fijo contra translación y rotación respecto al eje x-x. Seleccionar la sección W de acero A36 de 12 pulgadas que se pueda usar con seguridad. (Nota: la base de la columna tiene un momento igual a la mitad del momento del extremo superior y de sentido opuesto).

### 6.18 MÉTODO DE LA CARGA CONCÉNTRICA EQUIVALENTE

Un método común para calcular el esfuerzo flexionante unitario en una columna sometida a cargas excéntricas consiste en considerar el efecto de excentricidad como una carga concéntrica equivalente; es decir, la carga excéntrica se reemplaza por una carga concéntrica que produzca un esfuerzo igual al máximo esfuerzo producido por la carga excéntrica.

Este método tiene diversas aplicaciones, una de las cuales consiste en ayudar a seleccionar la primera sección de prueba de columnas que luego se revisarán con el método de relación de esfuerzo. Si

$P_{eq}$  es la carga concéntrica equivalente, y  $A$  es el área de la sección transversal de la columna, el esfuerzo unitario producido por  $P_{eq}$  se puede igualar al esfuerzo flexionante unitario producido por la carga excéntrica, es decir,

$$\frac{P_{eq}}{A} = \frac{M}{S}$$

de donde

$$P_{eq} = \frac{A}{S} M$$

En las ecuaciones anteriores,  $M$  es el momento flexionante originado por el momento en el extremo de la viga (sección 6.16) o por la carga excéntrica ( $P'_e$ ). Asimismo,  $S$  es el módulo de sección respecto al eje en el cual se efectúa la flexión.

La relación  $A/S$  se denomina factor de flexión y se encuentra tabulado en el Manual del AISC. Por conveniencia, los factores de flexión se listan con las tablas de cargas admisibles para columnas, y no con las otras características de las secciones. La relación  $A/S$  se simboliza con  $B_x$ , y hay dos valores para cada sección de columna, identificados por los subíndices  $x$  o  $y$ , según el eje de la columna a que pertenezca. En el resto de esta exposición, éste será el eje mayor x-x. Por lo tanto, la expresión de carga concéntrica equivalente sería

$$P_{eq} = B_x M$$

Las unidades de  $B_x$  son 1/pulg; por lo tanto  $M$  se debe expresar en pulg-lb o en pulg-kips.

Aplicando este método en el paso (3) del ejemplo de la sección 6.15, el valor listado de  $B_x$  para la sección W 10 X 68 es 0.264, y

$$P_{eq} = 0.264(50,000)8 = 105,600 \text{ lb}$$

entonces

$$f = \frac{P + P_{eq}}{A} = \frac{224,000 + 105,600}{20.0} = 16,480 \text{ k/pulg}^2$$



Esto concuerda con el resultado obtenido anteriormente.

El método de la carga concéntrica equivalente facilita en gran medida el diseño cuando se usan tablas de cargas admisibles. El objeto es seleccionar al primer intento una sección tan precisamente como sea posible. Sin embargo, cada sección de prueba se debe revisar mediante el cálculo de la suma de relaciones de esfuerzo, como se vio en la sección 6.17; por lo tanto, no se justifica la exactitud y la integridad del cálculo de esta carga axial equivalente. El siguiente procedimiento se considera adecuado y permite que el diseñador aplique su criterio.

Se ha mostrado que el *esfuerzo* obtenido por el método anterior también se encontró usando el método de carga concéntrica equivalente. Sin embargo, el método de la carga concéntrica equivalente produce resultados que se aproximan a un diseño exacto sólo cuando el esfuerzo permisible para la carga axial se aproxima al esfuerzo permisible para el momento flexionante, o  $F_a \rightarrow F_b$ . De esto también se puede concluir que entre mayor sea la carga axial y menor el momento flexionante, más exacto será el diseño elaborado al usar el método de la carga concéntrica equivalente.

La exactitud de la carga axial equivalente se puede mejorar multiplicando ésta por la relación  $F_a/F_b$ . Por supuesto, esto requiere saber de antemano cuáles serán estos valores finales. La relación puede ser pequeña en casos en que domina la influencia del pandeo axial; no obstante, sucede lo contrario en casos en que la columna funciona principalmente como elemento a flexión. En todos los casos se puede tomar conservadoramente como 1.0.

El procedimiento usual consiste en calcular la carga equivalente total aproximada, basándose en los requisitos de la revisión de estabilidad (fórmula de interacción modificada). La carga equivalente total sería la carga axial total que se representa por  $J_a$ , mas la carga concéntrica equivalente que representaría el efecto de la excentricidad. En la revisión de estabilidad, el efecto de excentricidad se mide en la relación de esfuerzo flexionante  $f_b/F_b$ , que se modifica aún más por el factor de reducción  $C_m$ .

Similarmente, la carga concéntrica equivalente se debe multiplicar por  $C_m$  antes de agregar su efecto al de la carga axial. Por lo tanto, la carga axial equivalente sería

$$P_{\text{total}} = P_{\text{axial}} + P_{\text{eq}}$$

$$P_{\text{total}} = P_{\text{axial}} + B_x C_{mx} M_x \frac{F_a}{F_b}$$

El único factor no incluido en la ecuación anterior es el factor de amplificación. Es necesario hacer otra modificación para incluir su influencia.

En las tablas de cargas admisibles, se selecciona un factor de flexión de prueba, el cual, cuando se usa y modifica como se dijo antes, producirá una carga total que se puede comparar con las dadas en la tabla de cargas admisibles.

Para el tipo de carga de la figura 6.16,  $P = 134 + 20 + 20 + 50 = 224$  kips. La altura efectiva no arriostrada en ambos ejes es de 13 pies y se supone que se usa acero A36. En las tablas de cargas admisibles del Manual AISC para columnas de 10 pulgadas (similares a la tabla 6.1), y usando como guía las cargas mayores a 224 kips y  $KL = 13$  pies, una  $B_x$  promedio es aproximadamente 0.266. El arriostamiento es tal que  $C_m = 0.6$ . El momento flexionante es  $50(8) = 400$  kips-pulg. También se puede estimar que  $F_a/F_b = 0.8$ . Por lo tanto, la carga axial equivalente aproximada es

$$P_{\text{total}} = 224 + 0.266(400)0.6(0.8) = 275 \text{ kips}$$

Consultando de nuevo las tablas de cargas admisibles con una altura no arriostrada efectiva de 13 pies y una carga axial de 275 kips, se observa que la sección W 10 × 54 parece constituir una elección limítrofe y que la sección W 10 × 60 es más razonable. Ambas se deben evaluar con exactitud mediante el método de relación de esfuerzo. En este

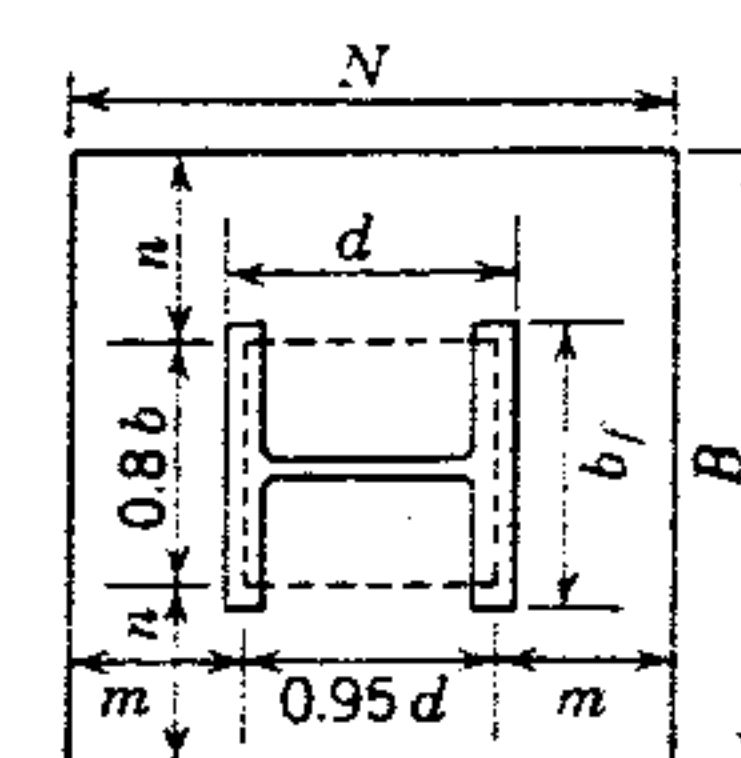
Se selecciona la W 10 × 60 como sección de prueba, y la fórmula de interacción modificada muestra que la relación de esfuerzos es de 0.91. La revisión del extremo de la columna muestra que la relación de esfuerzos es 0.85. Como ambas son menores que 1.0, la selección es adecuada.

También se puede observar que en este caso la relación final  $F_a/F_b$  se vuelve 0.79, mientras que el factor de amplificación es 1/0.89.

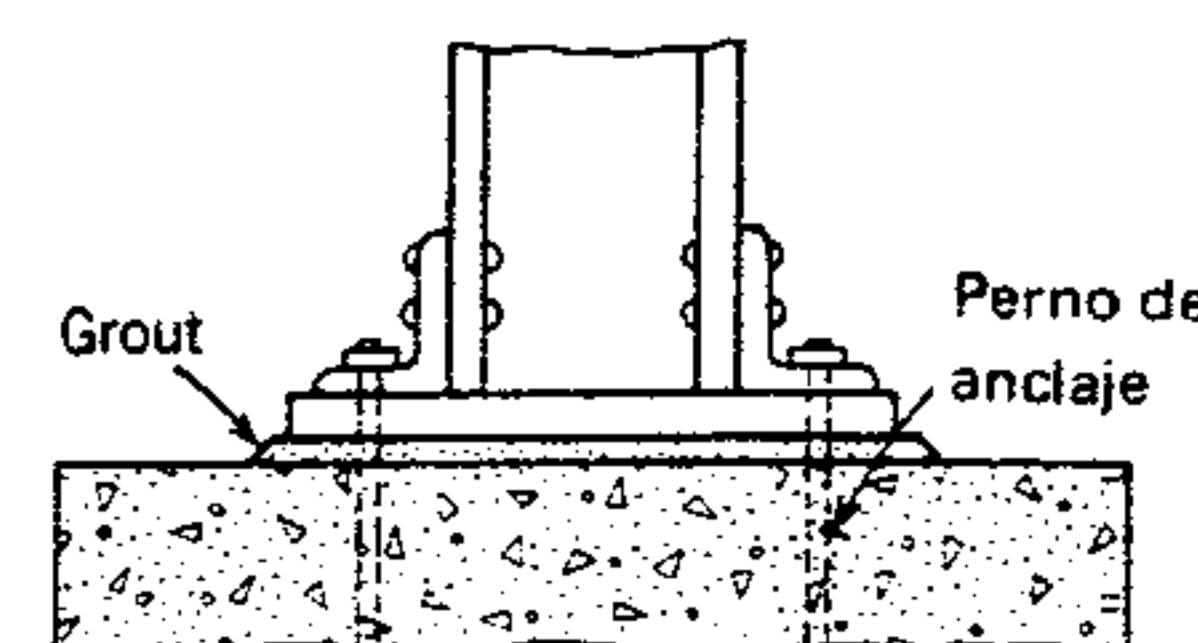
El método de la carga concéntrica equivalente también se podría aplicar a columnas sujetas a flexión en relación a ambos ejes. Sin embargo, para hacerlo se requiere calcular una carga concéntrica equivalente para la flexión según el eje  $x-x$  ( $P_{eq-x}$ ) y una carga concéntrica equivalente para el eje  $y-y$  ( $P_{eq-y}$ ), y luego sumar ambos a la carga axial total para compararlo con cargas listadas en las tablas de cargas admisibles.

### 6.19 PLACAS DE BASE DE COLUMNAS

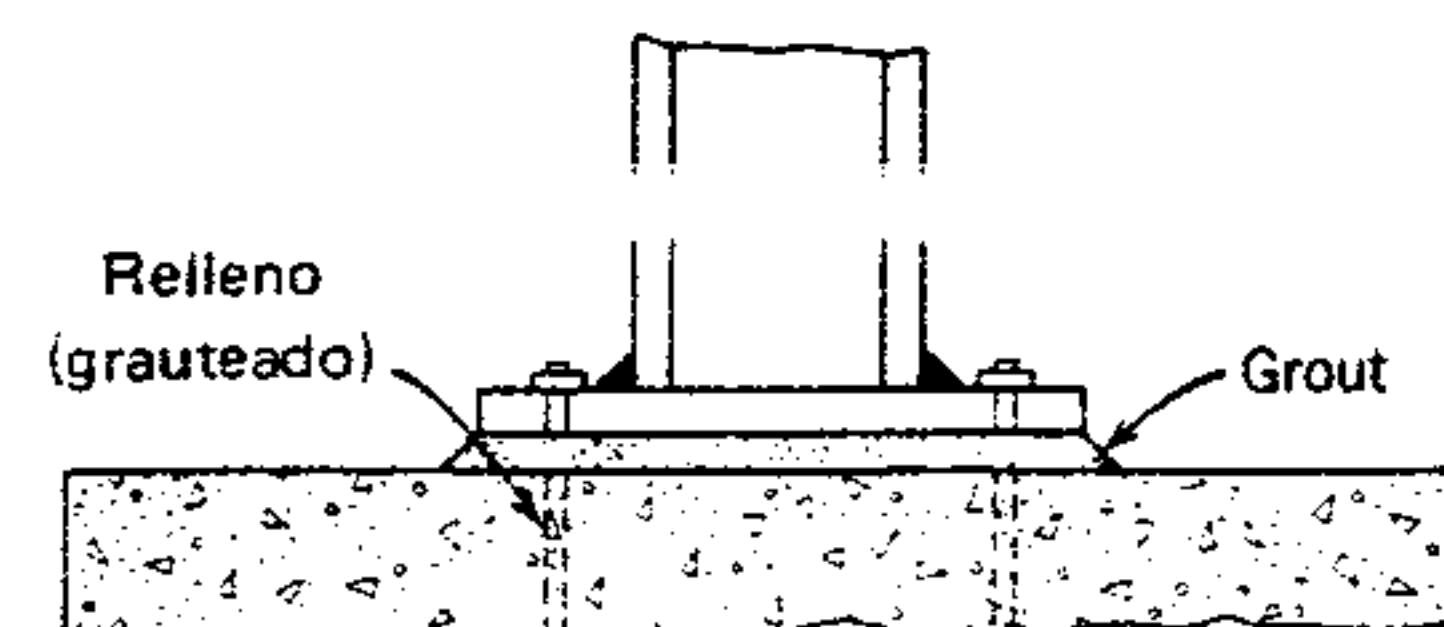
Cuando una columna se va a apoyar sobre una zapata de concreto, dado o pedestal, generalmente se



a)



b)



c)

Figura 6.28 Placas de base de acero de columnas.

usa una placa de acero laminada para distribuir la carga de la columna sobre el apoyo de concreto (figura 6.28). El extremo inferior de la columna y la superficie de la placa de acero bajo la columna son alisados para que la carga se transmita a la placa por apoyo directo. La superficie inferior de la placa no se alisa, pero se apoya sobre un "grout" de cemento de aproximadamente 1 pulgada de espesor sobre la parte superior de la zapata. Se pueden usar ángulos para conectar la columna a la placa y, por medio de tornillos de anclaje, la placa a la zapata. Los ángulos se pueden omitir cuando la placa ha sido soldada a la columna en el taller (figura 6.28c).

El área requerida de placa se obtiene dividiendo la carga de la columna entre la presión unitaria de apoyo permisible del concreto. El Manual de Especificaciones AISC proporciona dos fórmulas para obtener la presión de apoyo del concreto, siendo la más pequeña de éstas  $F_p = 0.35 f'_c$  (siendo  $f'_c$  la resistencia del concreto a la compresión). Los reglamentos de construcción reales y modelos pueden tener límites inferiores, es decir, el Reglamento de Construcción Uniforme de 1982 (Uniform Building Code) limita la capacidad de apoyo a  $0.3 f'_c$ . Además, la mayoría de los reglamentos de construcción permiten que la resistencia de compresión se incremente si la superficie de concreto no está cubierta totalmente por la placa base. En la mayoría de los casos, incluso la más pequeña área de apoyo es más que adecuada, y las dimensiones  $N$  y  $B$  de la placa se calculan mediante procedimientos prácticos.

Se supone que la presión de apoyo sobre el fondo de la placa es de una intensidad uniforme y que la carga de la columna está uniformemente distribuida sobre un área rectangular sobre la parte superior de la placa. Las dimensiones de este "rectángulo equivalente" se obtienen multiplicando 0.95 por el peralte de la sección de la columna y 0.8 por el ancho del patín de la columna. La parte de la placa que sale más allá de los lados del rectángulo equivalente actúa como voladizo invertido, con el momento máximo en el lado en que el voladizo, ya sea  $n$  o  $m$ , sea mayor (figura 6.28a). Éste no es un método de análisis exacto, pero los resultados obtenidos han mostrado ser satisfactorios en la práctica, excepto en casos en que el valor determi-



nante de  $m$  o  $n$  sea muy pequeño. Por lo tanto, la octava edición del Manual del AISC contiene una tabla en la sección 3 en que se listan los valores mínimos a usar en diversos grupos de secciones. El símbolo usado para designar este voladizo mínimo es  $n'$ .

En la obtención de las fórmulas se usa la siguiente simbología:

$P$  = carga total sobre la columna (lb).

$N$  = longitud de la placa (pulg).

$B$  = ancho de la placa (pulg).

$d$  = peralte de la sección de la columna (pulg).

$b_f$  = ancho del patín de la columna (pulg).

$A$  = área de la placa (pulg<sup>2</sup>).

$F_p$  = presión de apoyo unitaria permisible sobre el concreto (lb/pulg<sup>2</sup>).

$f_p$  = presión de apoyo unitaria real sobre la carga inferior de la placa ( $f_p = P/NB$ ), en lb/pulg<sup>2</sup>.

$F_b$  = esfuerzo a la flexión permisible (lb/pulg<sup>2</sup>).

$t$  = espesor de la placa (pulg).

El área requerida de la placa es  $A = P/F_p$ . Las dimensiones  $N$  y  $B$  se eligen para obtener esta área, y la presión de apoyo real se calcula ( $f_p = P/NB$ ).

Si se considera que la franja de la placa de acero tiene una pulgada de ancho, el momento flexionante sobre la franja en el borde del rectángulo equivalente es

$$M = f_p(m) \frac{m}{2} = \frac{f_p m^2}{2}$$

$$M = f_p(n) \frac{n}{2} = \frac{f_p n^2}{2}$$

El módulo de sección necesario es

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{f_p m^2}{2F_b}$$

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{f_p n^2}{2F_b}$$

Pero el módulo de sección también es igual a  $I/c$ , y el momento de inercia de un rectángulo de una pulgada de ancho y  $t$  pulgadas de espesor es

$$I = \frac{1(t)^3}{12} = \frac{t^3}{12}$$

El valor de  $c$  es  $t/2$ ; por lo tanto,

$$S = \frac{I}{c} = \frac{t^3/12}{t/2} = \frac{2t^3}{12t} = \frac{t^2}{6}$$

Igualando  $I/c$  a  $M/f_b$ ,

$$\frac{t^2}{6} = \frac{f_p m^2}{2F_b} \quad \text{y} \quad \frac{t^2}{6} = \frac{f_p n^2}{2F_b}$$

$$t^2 = \frac{6f_p m^2}{2F_b} = \frac{3f_p m^2}{F_b} \quad \text{o} \quad \frac{3f_p n^2}{F_b}$$

Cualquiera es mayor. Por tanto, el espesor necesario es

$$t = \sqrt{\frac{3f_p m^2}{F_b}} \quad \text{o} \quad \sqrt{\frac{3f_p n^2}{F_b}}$$

pero en ningún caso  $n$  o  $m$  debe ser menor que  $n'$ , según las listas del Manual del AISC. La Especificación del AISC de 1978 limita el esfuerzo permisible en placas de apoyo a  $F_b = 0.75 F_y$ .

Las operaciones comprendidas en el diseño de bases de columna a base de placas de acero se muestran en los siguientes ejemplos.

### Ejemplo

Diseñar una placa de base de acero laminado para una columna W 14 X 90 que transmite una carga de 383,000 lb. Se especifica acero A36. La presión de apoyo unitaria permisible sobre la zapata de concreto es de 500 lb/pulg<sup>2</sup>.

### Solución

1. El área necesaria es

$$A = \frac{P}{F_p} = \frac{383,000}{500} = 766 \text{ pulg}^2$$

lado. Redondeando, se selecciona una placa de 28 X 28 pulg, y la presión de apoyo real es

$$f_p = \frac{P}{NB} = \frac{383,000}{(28)^2} = 489 \text{ lb/pulg}^2$$

3. Los valores de  $d$  y  $b$  para la sección de la columna se obtienen de un manual, y en la figura 6.29 se presenta un croquis. Entonces

$$n > m = 8.2 \text{ in.}$$

En el Manual del AISC,  $n' = 4.43$  pulg.

$$4. \quad t = \sqrt{\frac{3f_p n^2}{F_b}} = \sqrt{\frac{3(489)(8.2)^2}{27,000}} = \sqrt{3.65} = 1.91 \text{ pulg.}$$

5. Si el espesor se toma al siguiente cuarto de pulgadas mayor, las dimensiones finales de la placa requerida son 28 X 28 X 2 pulg.

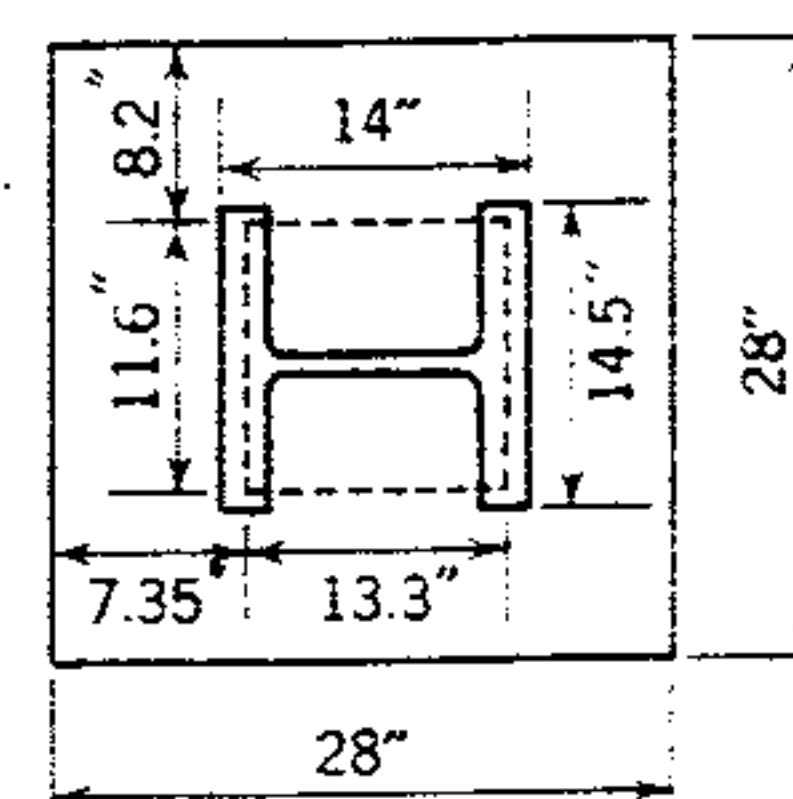


Figura 6.29 Placa de base: Ejemplo.

## 6.20 CIMENTACIÓN DE EMPARRILLADO

Es práctica común distribuir cargas de columnas sobre el terreno de cimentación, usando zapatas aisladas. Sin embargo, los emparrillados de acero se usan a veces para este propósito, y son particularmente valiosos en casos en que se tienen que soportar cargas sumamente altas sobre roca. Las ci-

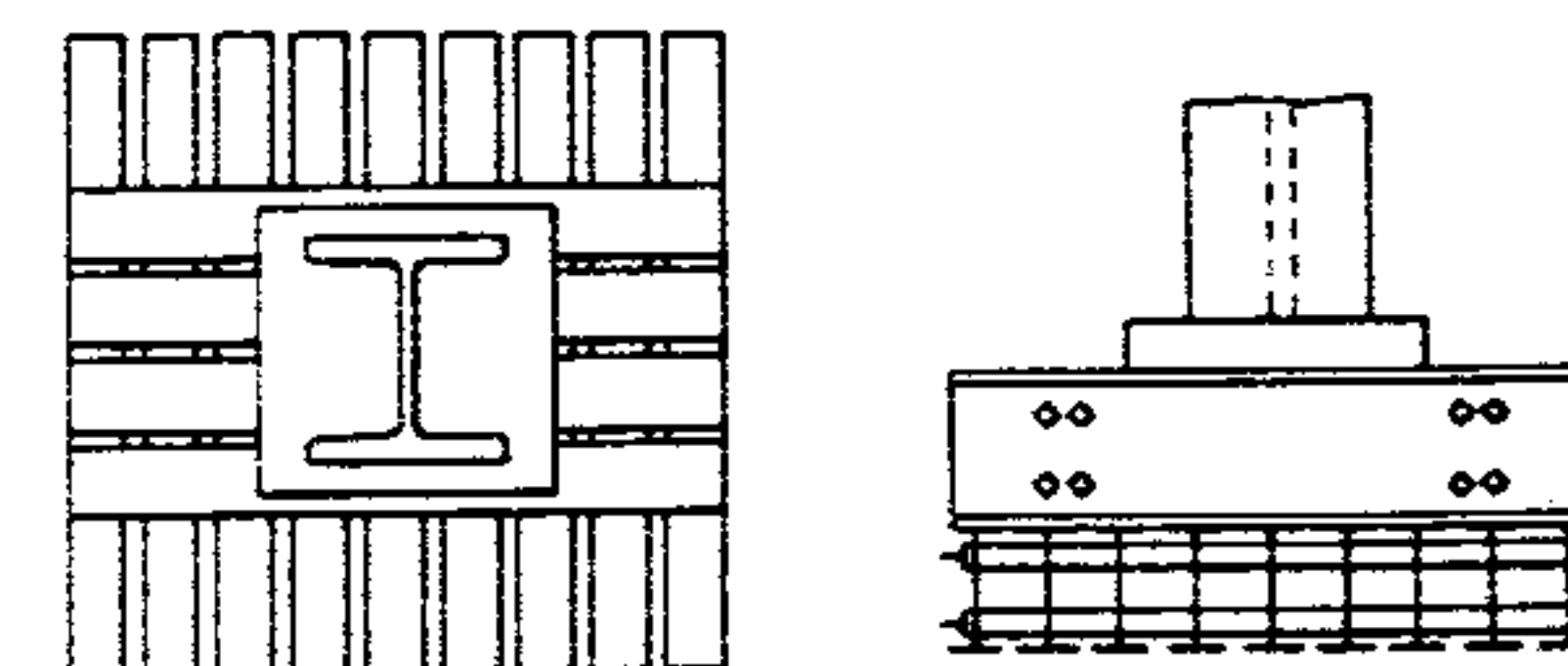


Figura 6.30 Cimentación de emparrillado.

mentaciones de emparrillado se construyen de una o más capas de vigas de acero distribuidas como se ve en la figura 6.30 y se recubren con concreto. Los separadores de tubo se sitúan cerca de los extremos de las vigas y bajo puntos en que hay concentraciones de cargas, o se emplean diafragmas soldados como distribuidores. Se deja suficiente espacio entre los patines de las vigas en cada capa para permitir el colado correcto del concreto.

La presión de soporte unitario sobre el fondo del emparrillado se limita a la capacidad de apoyo del concreto, ya que generalmente se cuela una delgada losa de concreto bajo el emparrillado, incluso cuando el material soportante sea un manto rocoso.

## PROBLEMAS

- 1-3. Resolver de nuevo los problemas 7, 8 y 9 de la sección 6.17, usando el método de la carga concéntrica equivalente, para llegar a la primera sección de prueba.
4. Una columna W 10 X 39 transmite una carga de 122 kips. Se va a usar una placa de base de 16 X 16 pulgadas. Determinar el espesor requerido de la placa de base si se especifica acero A36. (La respuesta se da en el apéndice G).



# 7

## Conexiones

### 7.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos 2 al 6 se estudiaron el diseño y el análisis de vigas, trabes y columnas como miembros estructurales específicos. Todos estos miembros deben estar sujetos entre sí para formar una estructura completa, y la manera de lograrlo es el tema del presente capítulo. Por lo general se dedica bastante tiempo y esfuerzo al establecimiento de la distribución más apropiada de los marcos y a la selección de miembros en función de su tamaño, forma y costo, y no se le da el cuidado adecuado a las conexiones y su diseño, esto es evidente ya que la mayoría de las fallas estructurales que ocurren están relacionadas generalmente con las conexiones, no tanto con los miembros en sí.

El problema total de la conexión de los miembros estructurales se debe tratar de tal manera que sea tanto satisfactoria como consistente con los supuestos adoptados en la selección de los miembros específicos y de la estructura en su conjunto. Para hacerlo hay que establecer una diferenciación entre la conexión, que es el ensamble total de la junta, y los conectores que se usan para lograr este ensamble. Existen diversos tipos de conectores que se pueden usar de modo exclusivo o combinados, así como varios tipos de conexión. Primero se verán estos últimos y luego los procesos de diseño numérico detallado para ambos.

### 7.2 TIPOS DE CONECTORES

Aunque una vez predominó el uso de remaches, actualmente se usa poco, sobre todo en edificios. Los dos tipos más comunes de conectores de estructuras de acero en uso actualmente son tornillos y soldadura, y los primeros son sólo una parte de la familia de sujetadores que aparece en el Manual del AISC como "Tornillos, Partes roscadas y Remaches" (figura 7.1).

**Tornillos.** Los tornillos (figura 7.1a) se componen de un cuerpo cilíndrico (vástago) con una cabeza.



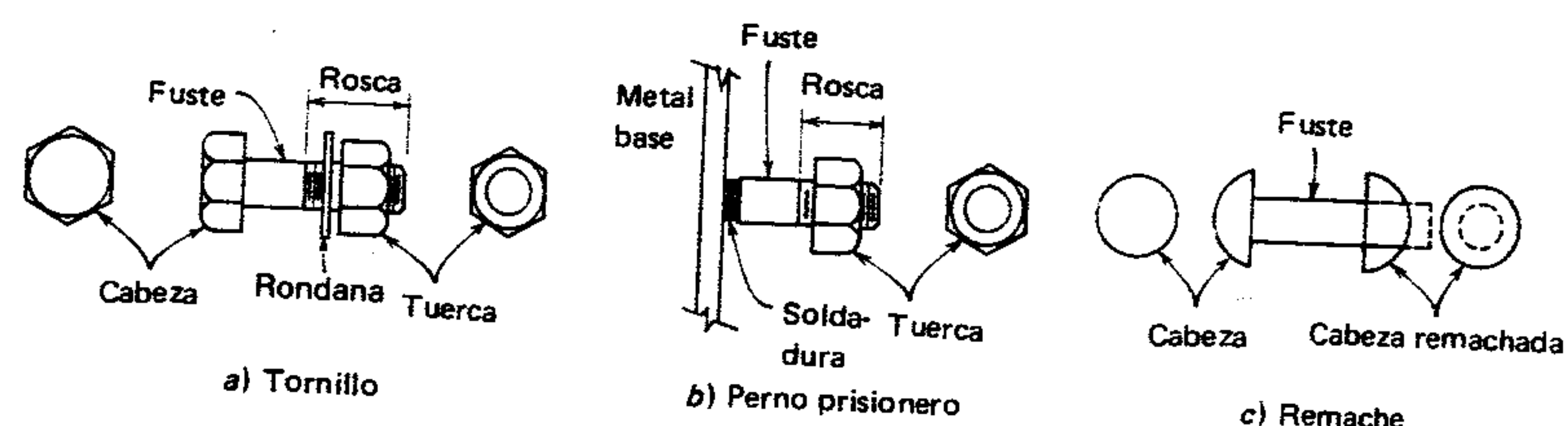


Figura 7.1 Sujetadores.

Una parte del cuerpo está roscada para recibir una tuerca. La cabeza y la tuerca pueden ser cuadradas o hexagonales, y puede necesitar o no rondana. Los tornillos se instalan con gran facilidad, su costo es relativamente bajo y se pueden inspeccionar visualmente para ver si hay imperfecciones o daños, éstas son buenas razones para usarlos. En la Especificación del AISC de 1978 se listan cuatro tipos básicos de acero que se usa en la manufactura de tornillos para conexiones estructurales; éstos tienen su designación apropiada de ASTM. Los tornillos tipo A307, que no tienen un esfuerzo de fluencia mínima especificada, fueron los que se usaron con más frecuencia en la práctica; pero su uso se ha limitado actualmente. Este tipo de tornillo se ha denominado a menudo como tornillo común, plano, inacabado, burdo o de máquina. Con éste existe el peligro de que la tuerca se afloje; por lo tanto, la Especificación del AISC prohíbe su uso en algunas conexiones importantes.

Los tornillos de alta resistencia no están restringidos de este modo; por lo tanto, han llegado a ser el tipo cuyo uso se especifica con mayor frecuencia para edificios de acero donde se van a usar sujetadores mecánicos. En la Especificación del AISC de 1978 se listan tres tipos de materiales para estos tornillos: A325, A490 y A449. Usualmente se especifica<sup>1</sup> para uso general el tornillo A325, con un

esfuerzo de fluencia de 85 k/pulg<sup>2</sup>. Su costo es cerca de 15 por ciento mayor que el del tornillo A307. Existe un tornillo de alta resistencia aún más fuerte, (el A490, con una fluencia aproximada de 120 k/pulg<sup>2</sup>) que resulta más apropiado cuando se va a conectar un material de mayor resistencia a los sujetadores. Su costo es cerca del 35 por ciento mayor que el del A325. Los tornillos A449 se usan cuando se requiere un diámetro mayor de 1 1/2 pulg; por lo tanto, raras veces se utilizan en edificios.

Por lo general, los tornillos se instalan mediante una llave neumática (o una similar) de impacto que se ajusta al grado de esfuerzo a que se someterán el tornillo y las cuerdas.

**Pernos soldados.** Los sujetadores roscados, con un extremo soldado a un miembro o placa de acero (figura 7.1b), se usan con mayor frecuencia debido a sus características especiales. La soldadura se efectúa automáticamente; un extremo del perno roscado se inserta en una herramienta eléctrica manual y el otro extremo se pone en contacto con el metal base en la posición deseada. Cuando se hace el contacto y se hace funcionar la herramienta (o pistola), el perno se funde inmediatamente en el metal base. Las pistolas para soldar, los materiales y los tipos de pernos varían según los diferentes

fabricantes; por lo tanto, cada fabricante proporciona los datos de diseño y éstos se deben consultar al especificar un tipo determinado de perno. Comúnmente, los fabricantes usan un material de perno con un esfuerzo de fluencia de 50 k/pulg<sup>2</sup> y un esfuerzo cortante de diseño correspondiente a

24 k/pulg<sup>2</sup>.<sup>2</sup> Las ventajas al usar sujetadores de perno soldado son evidentes, se necesita sólo la mitad del número normal de agujeros, algunos lugares no son accesibles para insertar tornillos, y no es necesario sujetar la cabeza al ajustar las tuercas. Sin embargo, los pernos soldados son más costosos que otros tipos de sujetadores mecánicos.

**Remaches.** Algunas fábricas continúan elaborando remaches de manera limitada. Un remache consiste en un vástago cilíndrico con una cabeza en un extremo (figura 7.1c). El vástago es lo suficientemente largo para atravesar las partes a conectar y que aún le quede bastante material para formar la segunda cabeza al remacharlo. Su diámetro es ligeramente menor que el agujero preparado para recibirlo, de modo que cuando el remache se expanda con el calor, aún se pueda insertar en el agujero. El extremo formado se remacha mediante un martillo neumático con un dado de la misma forma que la cabeza moldeada. Una vez remachado, se usa un segundo martillo neumático con un dado con la forma deseada para la segunda cabeza, para moldearla y lograr así la conexión. En la Especificación del AISC de 1978 se listan dos tipos básicos de acero para remaches, un A502 grado 1 y un A502, grado 2. Sus esfuerzos de fluencia respectivas son de aproximadamente 28 y 30 k/pulg<sup>2</sup>. Para propósitos generales, por lo común se especifica el grado 1 (acero de carbono) y cuando se desea un acero de mayor resistencia, el grado 2 (acero de carbono-manganeso).

Aunque el costo de los tornillos de alta resistencia es casi el doble del de los remaches, usualmente el costo total de una construcción remachada es mayor, debido al aumento de trabajo y el equipo requerido.

**Soldaduras.** El cuarto tipo de conexión es la soldadura. Existen numerosos procedimientos de soldado, pero el único aceptado en el momento de la soldadura por fusión mediante el proceso de arco

<sup>2</sup> Más adelante en este capítulo se muestra que la mayoría de los sujetadores se usan de tal manera que el esfuerzo cortante viene a ser el criterio de diseño determinante.

eléctrico. Incluso así, básicamente hay cuatro diferentes procedimientos para efectuar la soldadura por fusión de arco. Éstos se tratan detalladamente en la sección 7.22, en las figuras 7.46 a 7.48 y en la tabla 7.4, pero a manera de introducción, se describirá aquí un proceso típico de soldadura de arco manual.

Con la soldadura por fusión, la parte base a unir y el metal adicional en forma de varilla (metal de aportación) se calientan hasta alcanzar una temperatura de fusión. El calor para esta operación lo proporciona un arco eléctrico. El arco es una chispa sostenida entre un electrodo o varilla metálica y el metal base (figura 7.2). En el instante en que se forma el arco, la temperatura del metal (electrodo y metal base) en el extremo del electrodo se eleva a punto de fusión. En el extremo o punta del electrodo se forman gotas de metal fundido que atraviesan el arco y se depositan en el cráter del metal base fundido. La fuerza que impele las gotas de metal fundido a través del arco tiene la suficiente fuerza para permitir soldar hacia arriba. Para formar el arco, una terminal del generador se conecta a tierra (que puede ser un componente aislado fabricado en un taller o todo un marco de edificio que se esté colocando) y la otra terminal se conecta a través de un cable flexible al electrodo. En la soldadura manual ordinaria, el electrodo se agarra con un sujetor especial aislado. Con el generador funcionando, el electrodo se pone en contacto con la pieza por soldar para encender el arco. Entonces se retira ligeramente para lograr la separación adecuada del arco, es decir, que no sea tan pequeña que funda las partes o las "salpique", o tan grande que no

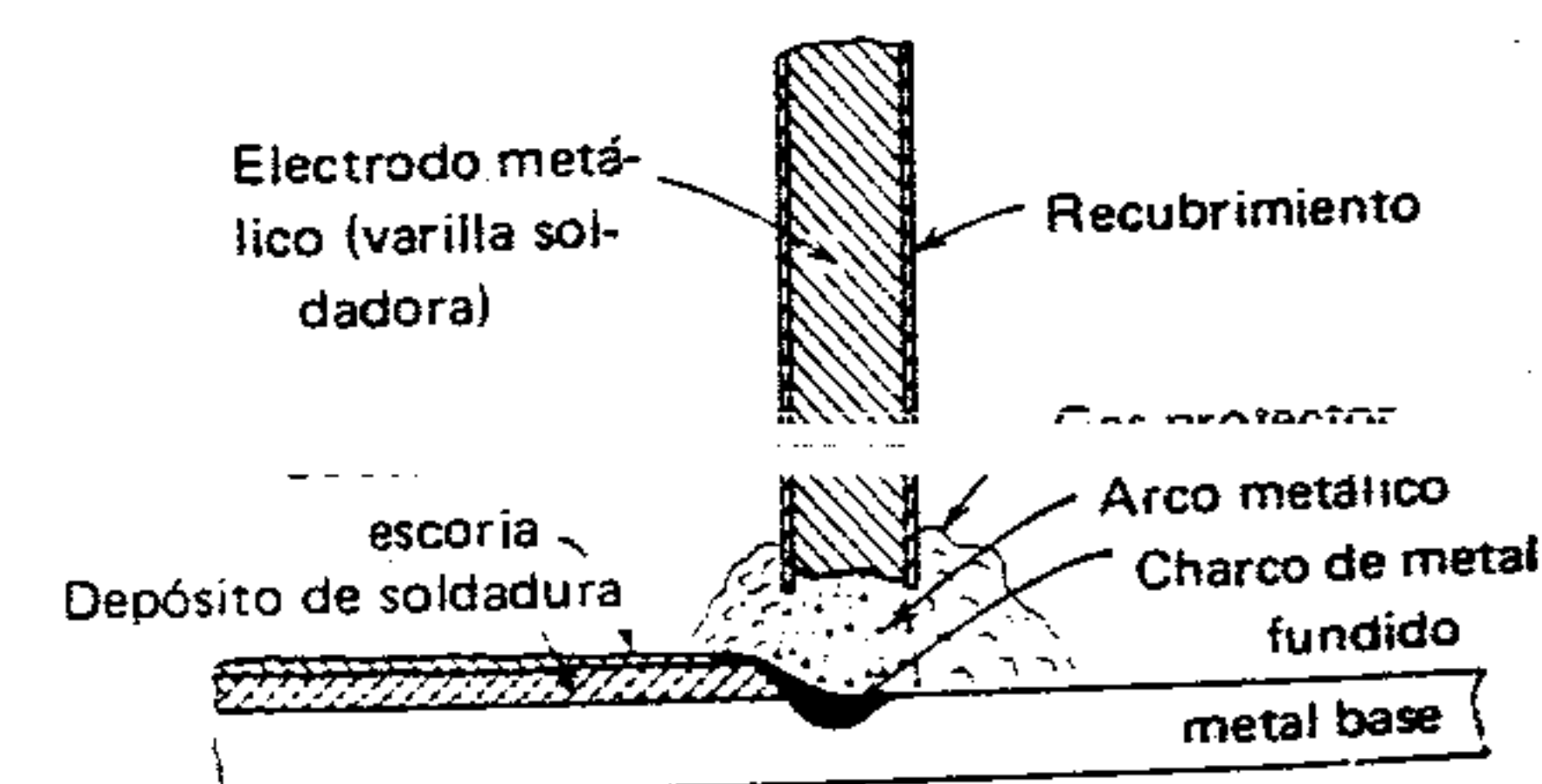


Figura 7.2 Soldadura manual de arco protegido.

<sup>1</sup> También existen tornillos A325 en tres subtipos: Tipo 1 de acero de carbono medio, tipo 2 de acero de carbono bajo y tipo 3 de acero para intemperie, resistente a la corrosión. Usualmente el tipo 1 se suministra a menos que se especifique otra cosa.



funda el metal base a la profundidad suficiente para la penetración adecuada de la soldadura. A medida que el metal del electrodo se funde y se deposita sobre el metal base fusionado, el operador debe acercar continuamente el electrodo material en fusión manteniendo una separación constante para construir el cordón deseado.

Si el metal fundido entra en contacto directo con el aire, habrá una reacción química que hará quebradizo el metal y muy susceptible a la corrosión. Esto se puede evitar usando un electrodo recubierto que produce grandes cantidades de gas inerte cuando se calienta y, a la vez, protege al metal fundido. Este recubrimiento al fundirse también intensifica el proceso de fusión y forma un recubrimiento de escoria sobre la soldadura, protegiéndola de la atmósfera mientras se enfría. La escoria, que es muy quebradiza, se puede eliminar fácilmente golpeándola con un martillo y cepillándola con un cepillo de alambre; una vez eliminada, la soldadura se puede esmerilar y pintar.

Las varillas recubiertas se conocen como electrodos de arco protegido y se encuentran disponibles en diversos grados de acero estructural. La resistencia máxima a la tensión de la soldadura correctamente aplicada varía de 60 a 110 k/pulg<sup>2</sup>, y la resistencia al cortante de diseño, de 18 a 33 k/pulg<sup>2</sup>. Por ejemplo, el electrodo E70XX se recomienda habitualmente para soldar acero A36 y tiene una resistencia al cortante de diseño de 21 k/pulg<sup>2</sup>. El electrodo E80XX se usa para acero A572, grado 65, y tiene una resistencia al cortante de 24 k/pulg<sup>2</sup>. Existen otros procedimientos de soldadura con arco, y su naturaleza y uso se verán más adelante en este capítulo.

En las soldaduras de gran tamaño y/o con los aceros de alta resistencia, se necesita una temperatura de precalentado mínima en el acero base, de modo que la masa del metal base no disipe el calor del arco tan rápidamente que evite la fusión apropiada. Asimismo, se debe destacar el hecho que la

usualmente produce esfuerzos residuales en la soldadura y en el metal base; por lo tanto, se debe tener cuidado de que sea lo suficientemente resistente para compensar estos esfuerzos.

Se pueden usar combinaciones de los conectores antes mencionados para hacer conexiones estructurales. Por ejemplo, un extremo de una pieza conectante se puede soldar a un miembro estructural en el taller de fabricación y luego llevar el ensamble al lugar de la construcción para atornillarlo a otro miembro estructural. Por lo general esto se denomina "construcción soldada en taller y atornillada en campo". Asimismo, con frecuencia los miembros se atornillan provisionalmente en su posición correcta y luego se sueldan en forma definitiva.

### 7.3 TIPOS DE CONSTRUCCIÓN EN ACERO

La Especificación del AISC reconoce tres tipos básicos de construcción en acero, cada uno relacionado con la manera en que los miembros se sujetan entre sí. Por lo tanto, se elaboran tres supuestos básicos de diseño sobre el tamaño de los miembros y los tipos de conexión en que se basan.

En el tipo 1, denominado comúnmente "estructuración rígida" (marco continuo), se supone que las conexiones entre viga y columna tienen suficiente rigidez para mantener sin cambio los ángulos originales entre los miembros que se intersectan.

En el tipo 2, comúnmente denominado "estructuración simple" (no empotrado, simplemente apoyado) se supone que, en lo que respecta a las cargas por gravedad, los extremos de vigas y trabes están conectados para tomar solamente fuerzas cortantes y que son libres de rotar bajo cargas de gravedad.

En el tipo 3, denominado comúnmente "estructuración semirrígida" (parcialmente empotrado), se supone que las conexiones de vigas y trabes poseen una capacidad de momento confiable y conocida, intermedia entre la rigidez completa del tipo 1 y la flexibilidad completa del tipo 2.

Esto significa simplemente que el diseño de los miembros de un edificio a base de acero y el diseño de las conexiones que sujetan los miembros se deben llevar a cabo conforme los mismos supuestos básicos. Los miembros que se supone están simplemente apoyados o articulados para facilitar el diseño no pueden, lógicamente, estar suje-

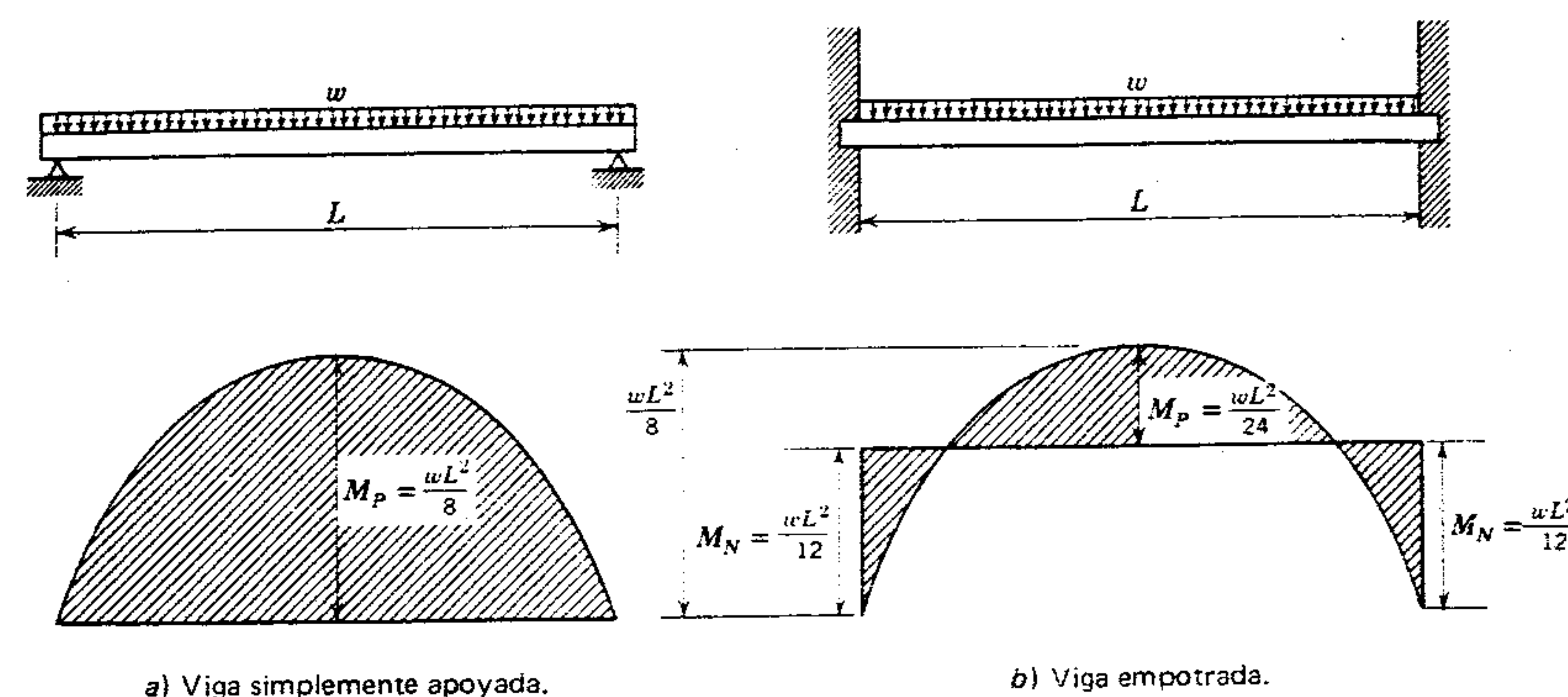


Figura 7.3 Consistencia en el diseño.

tos rigidamente entre sí en la estructura real. De nuevo, si todas las juntas del marco se consideran rígidas o continuas en el análisis de diseño, éstas se deben construir de la misma manera.

Si la viga de extremos empotrados de la figura 7.3b (los extremos están completamente restringidos contra cualquier rotación) se diseña para resistir los momentos flexionantes dados, y luego se diseñan las conexiones para permitir la rotación libre de los extremos, como en la figura 7.3a, la viga no será lo suficientemente fuerte para resistir el momento flexionante debido a que realmente es una viga simplemente apoyada.

De modo similar, si se supone que una conexión va a estar articulada en su diseño (rotación libre) como se ve en la figura 7.3a, y luego se empotra (figura 7.3b), el momento flexionante inducido  $wL^2/12$  en el extremo de la viga podría hacer que fallara la conexión.

La Especificación del AISC permite sin condiciones el tipo de construcción 1. Cuando ésta se usa, el marco del edificio es estáticamente indeterminado. Es necesario hacer un cuidadoso análisis de esfuerzos y que los valores de esfuerzo unitario de trabajo permitidos por la especificación no se excedan en el diseño de los miembros y las conexiones. En el capítulo 10 se estudia la teoría del

análisis elástico y el diseño de vigas y marcos continuos, y en el capítulo 13 se da un ejemplo del tipo 1 de construcción. La Especificación AISC de 1978 también permite un análisis basado en el diseño plástico para el tipo 1 de construcción. El diseño plástico se ve en el capítulo 11.

El tipo 2 de construcción está permitido si utiliza algún sistema estructural para transmitir fuerzas laterales sobre el marco, como las debidas al viento y a cargas sísmicas. Un sistema como éste es como el "acodado contra viento", que se estudia en el capítulo 9, en el cual se selecciona y diseña un número limitado específico de conexiones entre viga y columna para resistir momentos. En esta clase de construcción del tipo 2, es necesario asegurarse de que las conexiones flexibles tengan una capacidad adecuada de rotación no elástica para evitar sobreesfuerzos de los conectores bajo cargas combinadas de gravedad y viento.

La Especificación del AISC permite el tipo 3 de construcción sólo probando que las conexiones puedan transmitir momentos resistentes determinados, sin sobreesfuerzos. El Instituto Norteamericano de Construcción en Acero (AISC) tiene a la disposición diseños de conexiones entre viga y columna, junto con sus resistencias a la flexión calculadas experimentalmente. No se incluye en este texto un



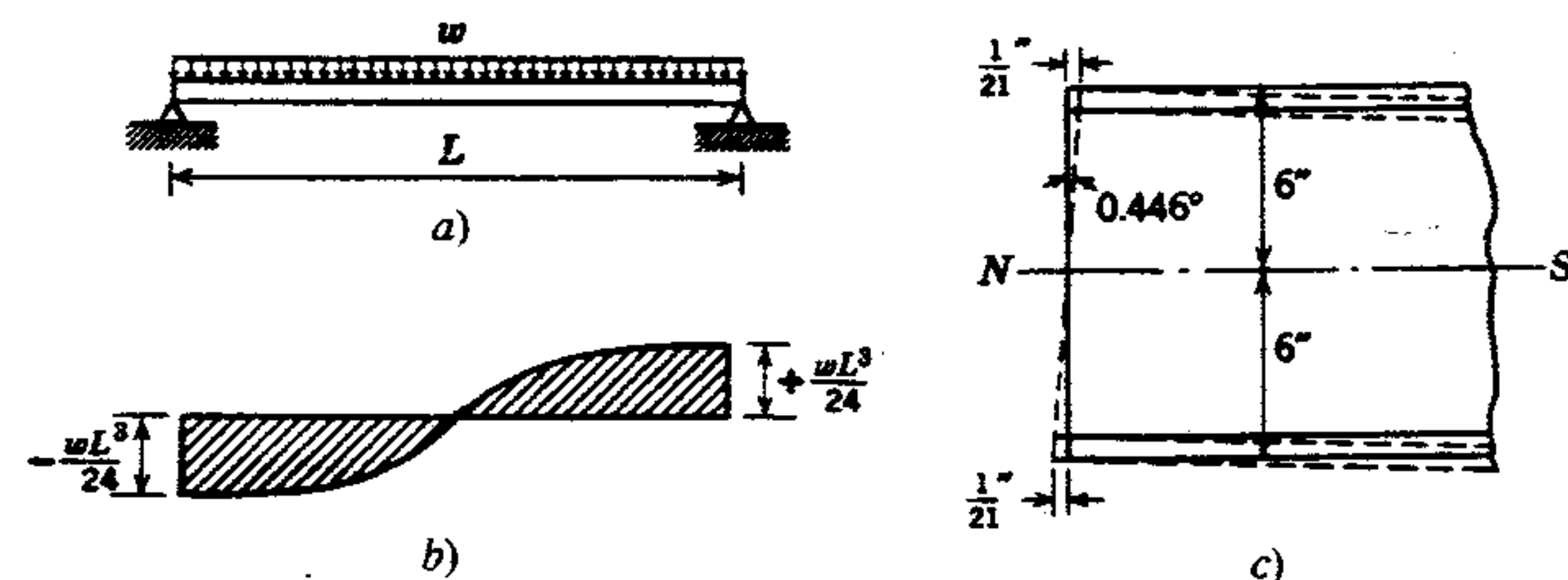


Figura 7.4 Rotación del extremo de una viga simplemente apoyada.

estudio más detallado de este tipo de construcción.

Los métodos y procedimientos de diseño que se tratan en este capítulo son aplicables al análisis y diseño de los tipos 1 y 2 de construcción. En el tipo 2, las conexiones de marcos se deben diseñar y detallar de modo que permitan la rotación libre de extremos bajo cargas por gravedad.

El ángulo de rotación de extremos de una viga simplemente apoyada se puede calcular tan fácilmente como la deflexión máxima. La teoría básica para este cálculo se vio en el capítulo 4, junto con el estudio sobre la deflexión; y el ejemplo 1 de la sección 4.8 se refiere a cualquier viga de acero simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida. En el ejemplo se mostró el método para elaborar la ecuación del diagrama de la pendiente. En las figuras 7.4a) y b) se muestra la viga y el diagrama de pendiente correspondiente. En el ejemplo, la mayor rotación angular ocurre en los extremos y es

$$\theta = \pm \frac{wL^3}{24EI}$$

El ángulo es positivo (+) para el extremo derecho y negativo (—) para el izquierdo. Ambos ángulos son de la misma magnitud. Si la carga fuera de 2 kips por pie y el claro  $L$  de 18 pies, una viga  $W 12 \times 40$  representa la elección más económica y satisfaría la mayoría de las necesidades de diseño. La rotación correspondiente en el apoyo sería:<sup>3</sup>

<sup>3</sup> En la ecuación de  $\theta$ , los resultados no se dan en unidades. Por lo tanto,  $\theta$  se debe medir en radianes y geométricamente, se sabe que un radián es igual a  $\pi/180$  grados.

$$\theta = \frac{wL^3}{24EI}$$

$$= \frac{2(18)^3 12^2}{24(29,000)310} = 0.00778 \text{ radianes}$$

$$\theta = \frac{180}{\pi} (0.00778) = 0.446^\circ$$

En la figura 7.4c se muestra el extremo de la viga  $W 12 \times 40$  antes de someterse a la carga y el ángulo resultante de rotación después de aplicarla. En este ejemplo, se supone que el plano del extremo de la viga rota respecto al eje neutro. Por lo tanto, el movimiento horizontal en los extremos inferior y superior de la viga se puede encontrar mediante trigonometría, como se ve a continuación:

$$\tan 0.446^\circ = 0.00778$$

$$0.00778(6) = 0.047 \text{ pulg.}$$

$$\text{o aproximadamente } 1/21 \text{ pulg.}$$

En la mayor parte del diseño, el ángulo real de rotación no es significativo y raras veces es necesario calcularlo. Sin embargo, en la sección 1.15.4 de la especificación AISC de 1970 si se estipula que las conexiones de vigas flexibles deben absorber las rotaciones de extremos de vigas no empotradas (simples). La razón para hacer este cálculo aquí es para mostrar que una conexión para el tipo 2 de construcción sólo necesita ser suficientemente flexible para permitir este mínimo movimiento.

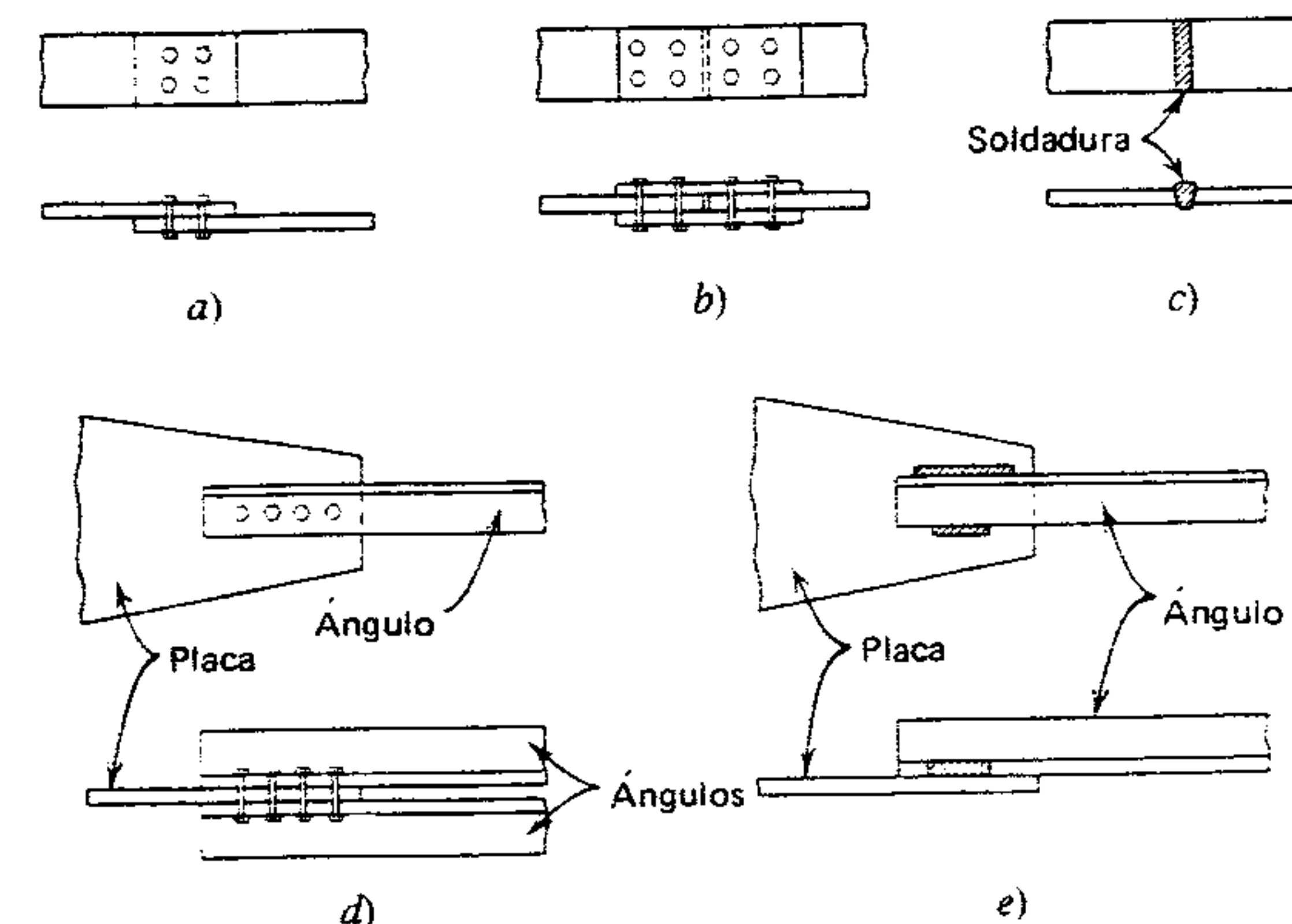


Figura 7.5 Conexiones de traslape y a tope.

## 7.4 CONEXIONES COMUNES

Los diferentes tipos de conexiones que se ven en la práctica son demasiado numerosos para listarlos aquí, y los detalles de cada tipo variarán también

con el tipo de conector que se use. Cada tipo de conector, es decir, remache, tornillo o soldadura, tiene sus propias ventajas y desventajas específicas; éstas se verán cuando se estudien más adelante en detalle. A continuación se dan varios ejemplos de

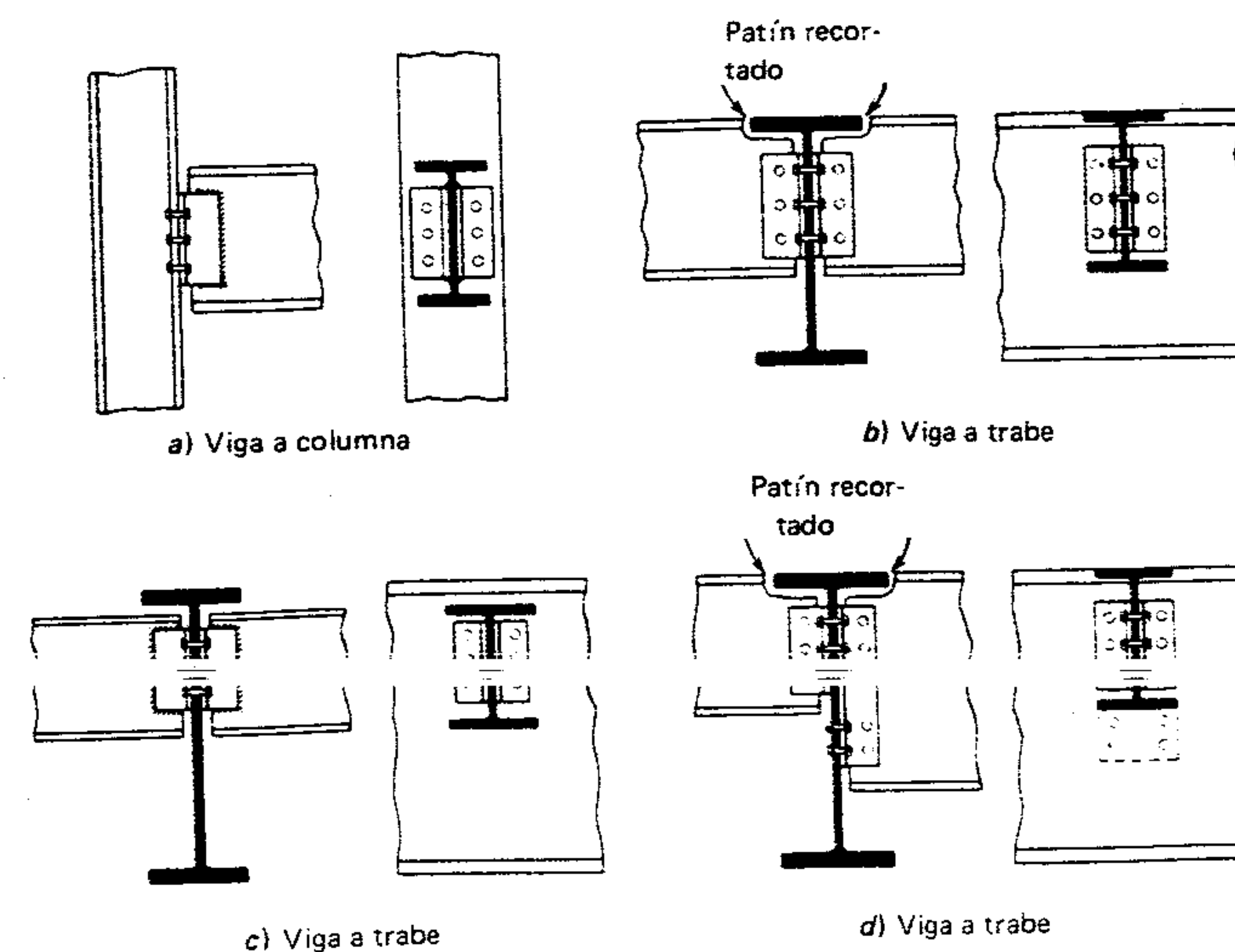


Figura 7.6 Ángulos de conexión.



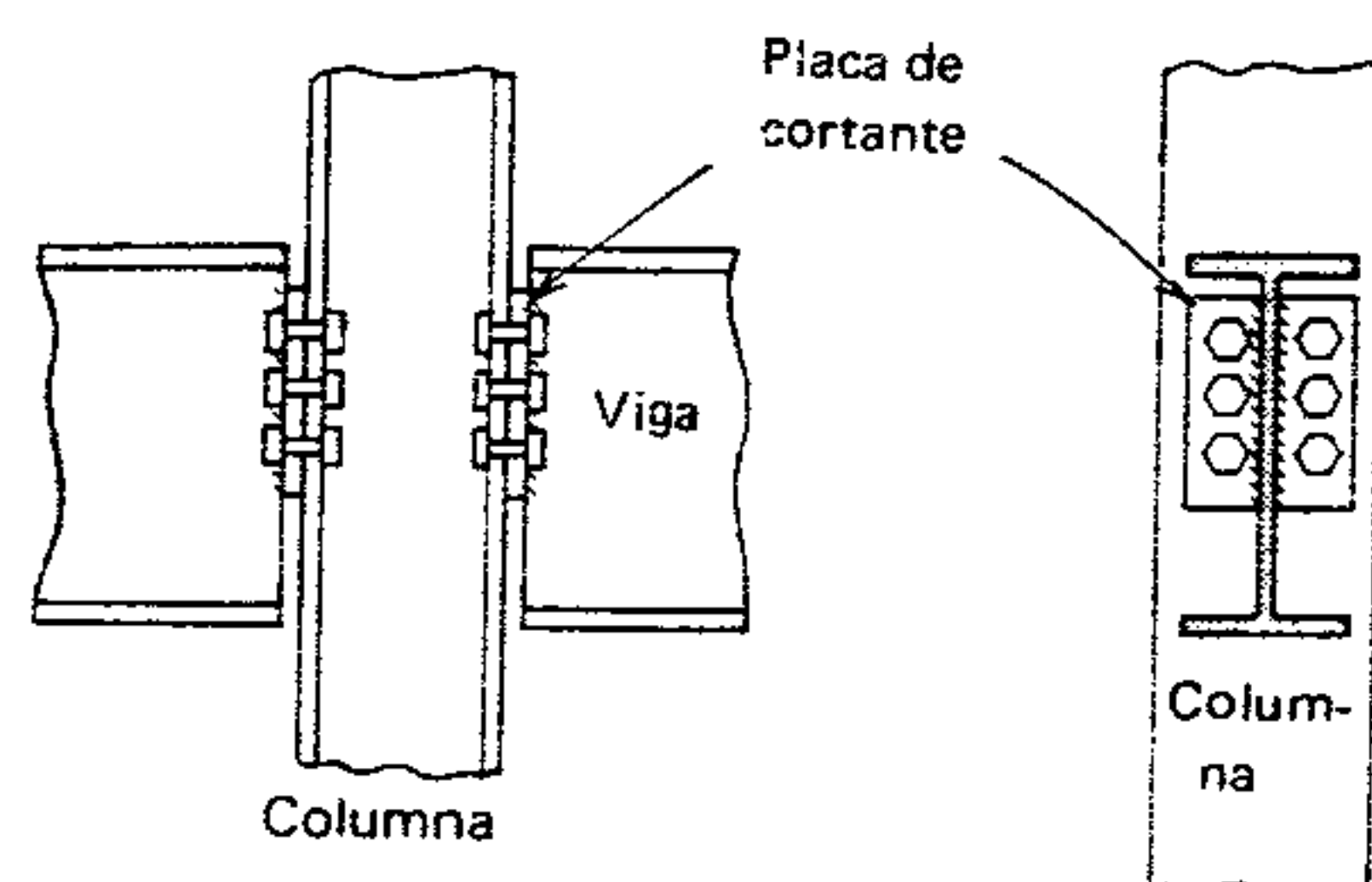


Figura 7.7 Placa cortante de extremo entre viga y columna.

las conexiones de uso más frecuente en edificios de acero, junto con el tipo de conector (tornillo o soldadura) que se usa. Las conexiones que se muestran en las figuras 7.6 a la 7.10 permiten suficiente rotación para suponer que las vigas están simplemente apoyadas y, por tanto, son adecuadas para el tipo de construcción 2, como se explicó en la sección 7.3.

**Traslapada o a tope** (figura 7.5). Generalmente éste es el tipo más sencillo de conexión usado cuando dos miembros están básicamente en el mismo plano. Se pueden acomodar de modo que requieran o no piezas adicionales de metal para completar la conexión. La conexión de traslape o empalme puede estar a tensión o a compresión.

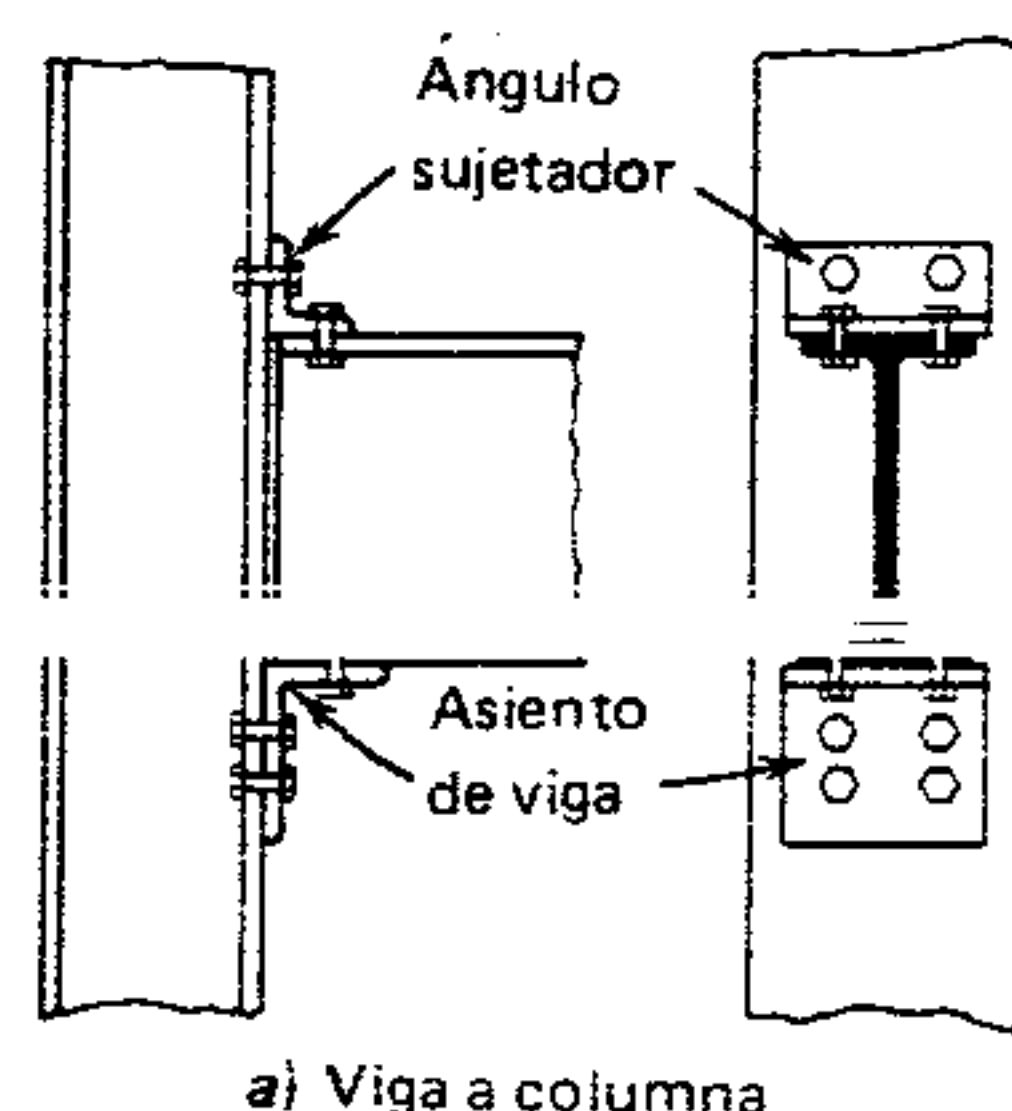
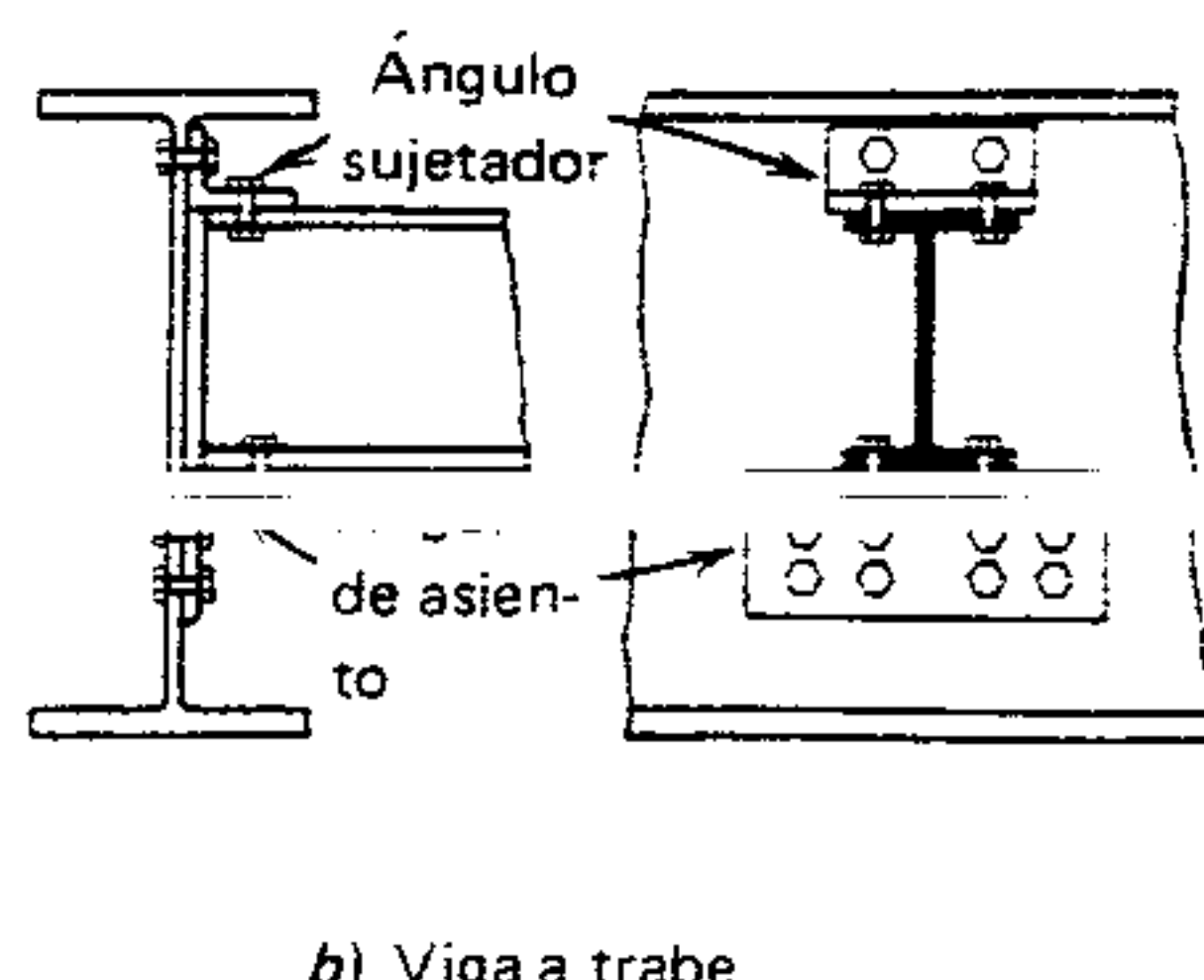


Figura 7.8 Asientos flexibles de viga.



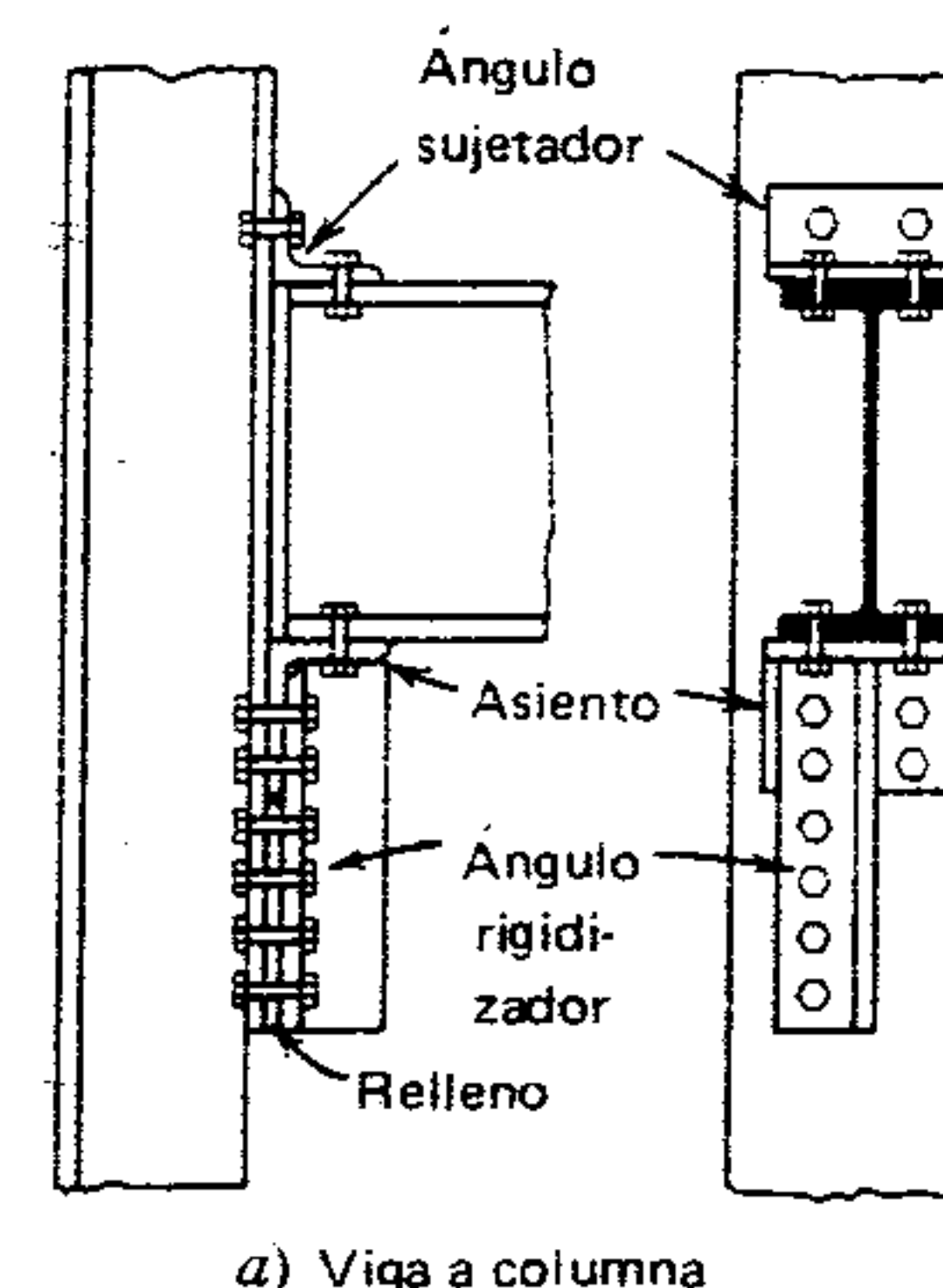
b) Viga a trabe

**Ángulos de marcos** (figura 7.6). Los miembros estructurales perpendiculares entre sí y que forman marcos, usualmente requieren el uso de un ángulo para efectuar su conexión. Se pueden usar tornillos o soldadura. Una vez puestos en posición los miembros, se acostumbra sujetarlos temporalmente en su lugar con pasadores, tornillos o soldadura de puntos hasta hacer la conexión permanente.

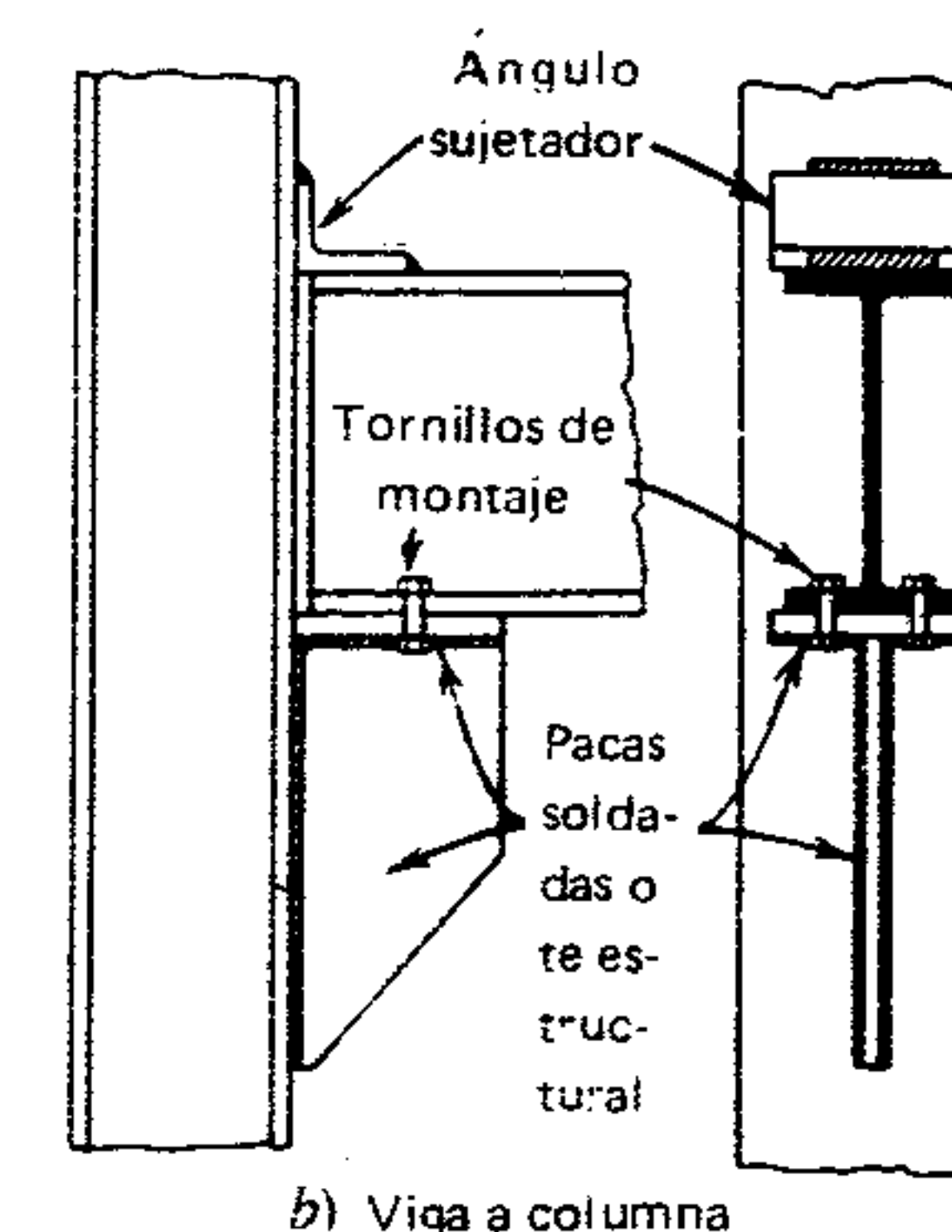
**Placas de esfuerzo cortante** (figura 7.7). Se puede usar una placa de cortante soldada al extremo de una viga, en lugar de los pares de ángulos que se usan en los marcos. Luego se usan tornillos para conectar la placa al miembro soportante. Las conexiones con placas de cortante requieren que la fabricación de la viga tenga mínimas tolerancias ya que se supone que los extremos de ésta se cortan de manera paralela y a la longitud exacta.

**Placas de esfuerzo cortante** (figura 7.7). Se puede usar una placa de cortante soldada al extremo de una viga, en lugar de los pares de ángulos que se usan en los marcos. Luego se usan tornillos para conectar la placa al miembro soportante. Las conexiones con placas de cortante requieren que la fabricación de la viga tenga mínimas tolerancias ya que se supone que los extremos de ésta se cortan de manera paralela y a la longitud exacta.

**Asientos de vigas** (figuras 7.8 y 7.9). Los asientos de vigas proporcionan un borde o asiento para



a) Viga a columna



b) Viga a columna

Figura 7.9 Asientos rigidizados de viga.

apoyar a la viga mientras se hace la conexión permanente. El ángulo de ajuste de la parte superior de la viga proporciona apoyo lateral en ese punto solamente y se supone que no soporta carga. Los asientos de vigas flexibles son los más sencillos y convenientes. Como el espesor del ángulo de asiento proporciona la única resistencia contra la flexión en el patín sobresaliente, éste se debe rigidizar cuando la carga es demasiado grande.

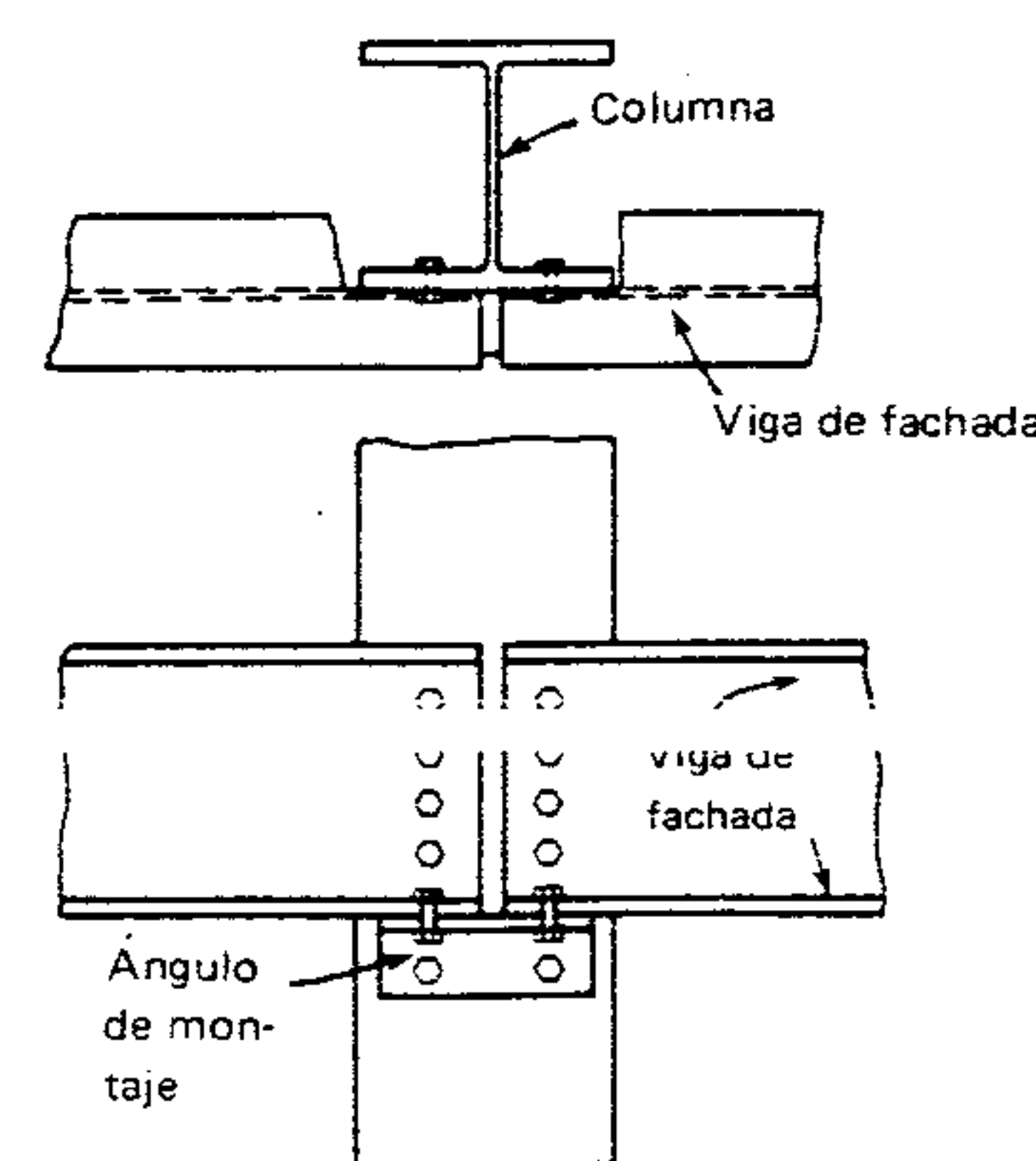


Figura 7.10 Conexión de vigas de fachada.

**Conexiones directas del alma** (figura 7.10). Para conexiones entre viga y columna, algunas veces se asegura directamente el alma de la viga al patín de la columna. El ángulo de asiento se usa solamente para facilitar el montaje y se supone que no soporta carga. Se puede usar soldadura, así como remaches o tornillos.

**Ménsulas** (figura 7.11). El tipo de conexión a base de ménsulas es necesario siempre que los dos miembros que se van a sujetar entre sí no se intersecten.

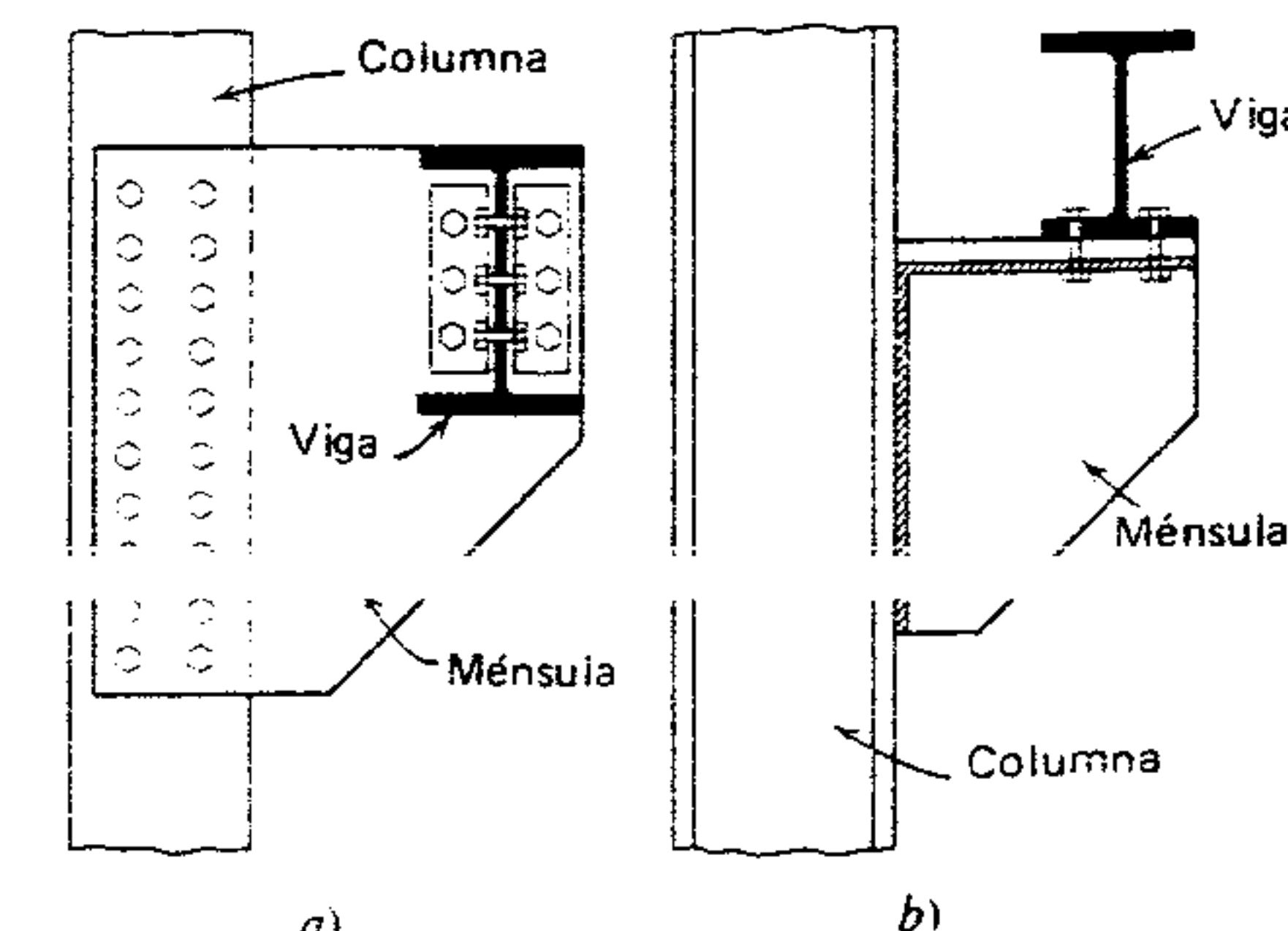


Figura 7.11 Conexiones de ménsula.



Estructuralmente no es un tipo conveniente de conexión ya que se introduce una pronunciada excentricidad tanto en la conexión como en uno de los miembros a sujetar.

**Conexiones resistentes a momento** (figura 7.12). Se pueden usar tornillos o soldaduras en las conexiones resistentes a momento. Se puede usar cualquiera de las conexiones del cortante ya mencionadas para tomar la fuerza vertical. Además, se requiere algún medio para transmitir la fuerza horizontal de los patines de la viga. Estas conexiones previenen la rotación de un miembro respecto al otro; sin embargo, puede haber cierta rotación en toda la junta, dependiendo de la rigidez relativa de los miembros (capítulo 10).

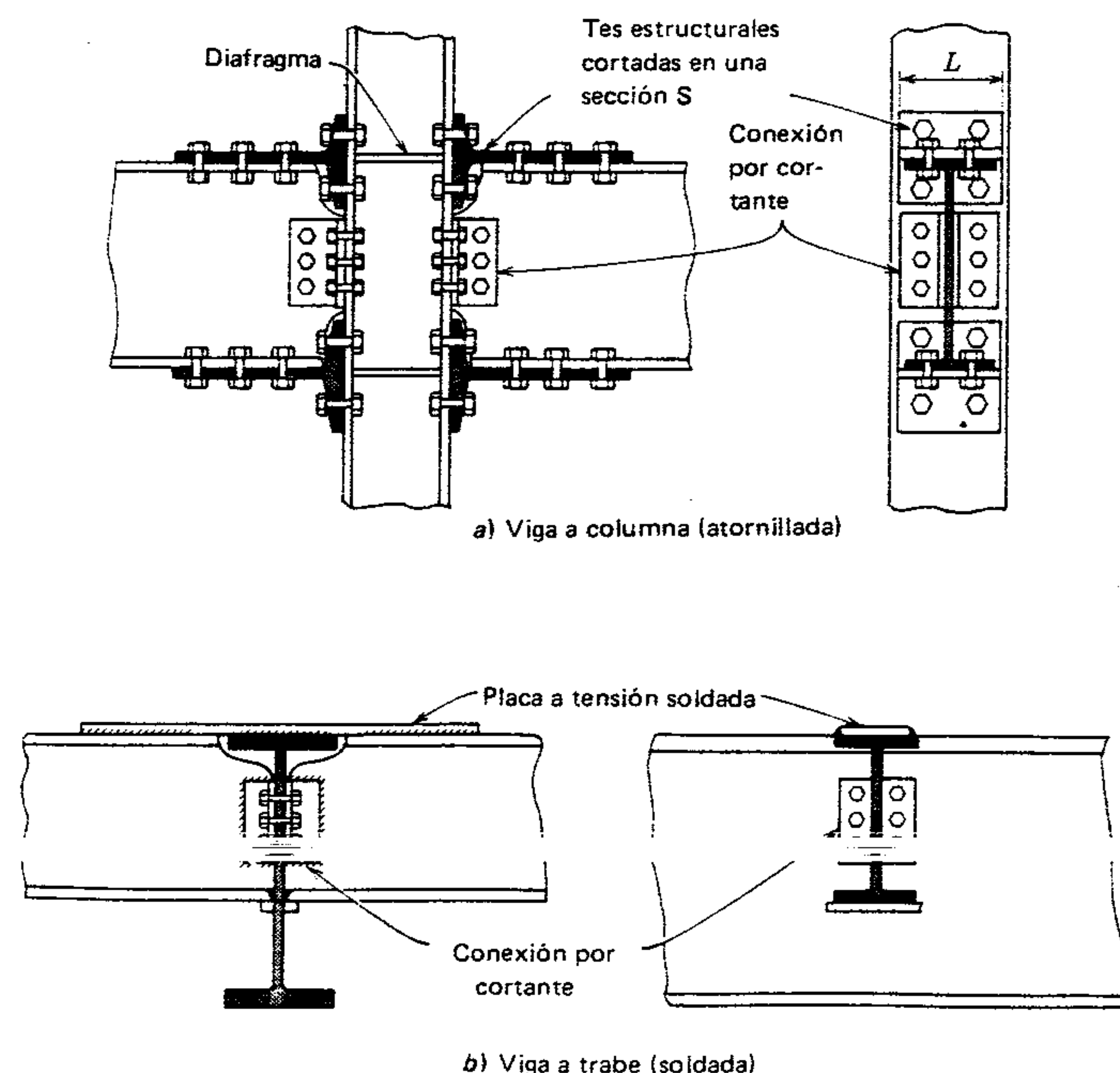


Figura 7.12 Conexiones resistentes al momento.

## CONEXIONES CON SUJETADORES

### 7.5 CLASES DE CARGAS EN EL SUJETADOR

La mayoría de las conexiones se diseñan y construyen de modo que el propio sujetador esté sujeto a una carga perpendicular a su vástago (figura 7.13a). Cuando éste es el caso, el sujetador se denomina "tipo cortante"; todos los sujetadores de las figuras 7.5 a 7.8 son del tipo cortante bajo cargas normales. De aquí en adelante se usará esta designación aunque en algunos casos, por ejemplo, sujetadores a fricción, el vástago mismo no esté sujeto a esfuerzo cortante. Asimismo, hay ocasiones en que un sujetador está realmente a tensión (figura

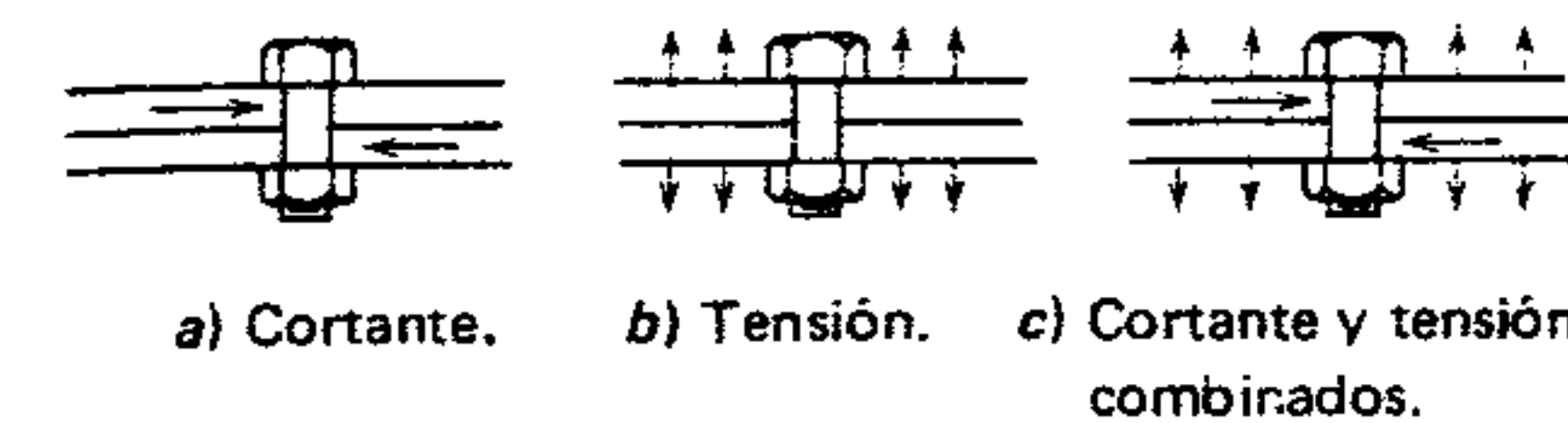


Figura 7.13 Tipos de cargas del sujetador.

7.13b), por ejemplo, conexiones tipo suspensor. Se recomienda el uso de tornillos de alta resistencia únicamente en conexiones a fricción (Sección 7.8) o remaches para desarrollar este tipo de carga. En la figura 7.12a se muestra una conexión atornillada resistente a momento. Los tornillos que sujetan la te estructural al patín de la columna están sujetos a tensión; los otros tornillos de la conexión están sujetos a esfuerzos cortantes.

La tercera clase de carga es una combinación de esfuerzo cortante y tensión (figura 7.13c). En la figura 7.9a se muestran asientos de vigas rigidizados y acartelados que cargan a los sujetadores con tensión y cortante combinados.

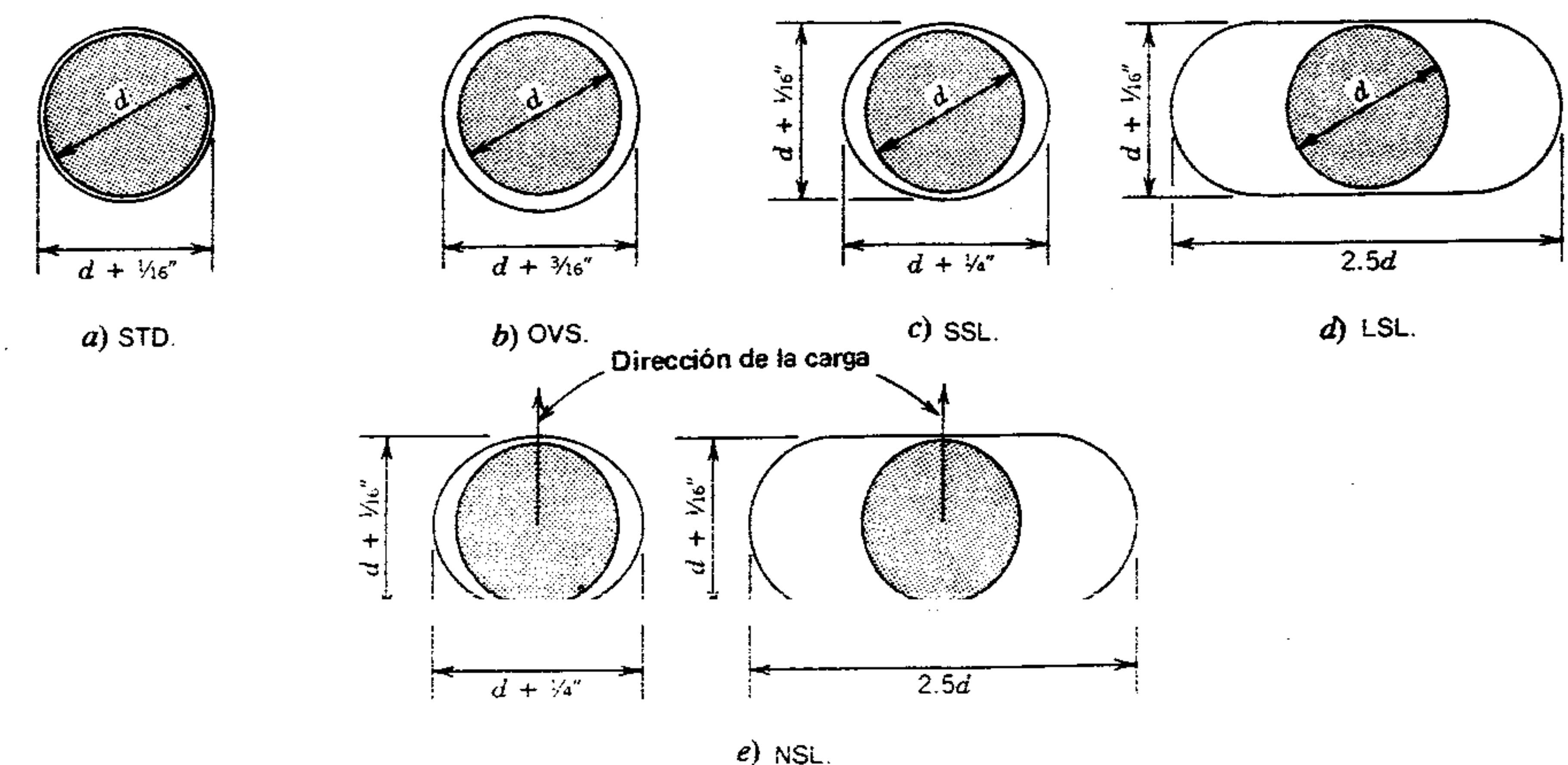


Figura 7.14 Orificios para sujetador de diámetros iguales o menores, a)  $\frac{7}{8}$  orificio estándar, b) orificio ensanchado, c) orificio ranurado corto, d) orificio ranurado largo y e) orificio corto o largo ranurado de acuerdo a la dirección de la carga.

### 7.6 ORIFICIOS PARA SUJETADORES

La determinación del tamaño, tipo y distribución de orificios para los sujetadores es una parte importante del procedimiento del diseño. Usualmente, los agujeros se hacen mediante punzonado con dados estándar. No obstante, si el material es demasiado grueso (por ejemplo, mayor que el diámetro del sujetador que se va a usar) los orificios se deben taladrar, o bien semipunzonar y fresar. Los ranurados requieren trabajo adicional.

En la figura 7.14a se muestra el tipo de orificio estándar o de uso más frecuente. A menos que se especifique otro tipo de orificio, este estándar (STD) se utilizará. Es redondo y sólo ligeramente más grande ( $1/16$  pulg) que el sujetador, permitiendo una tolerancia razonable durante su fabricación. En la figura 7.14 se muestran otros cuatro tipos de perforaciones admitidos por la Especificación AISC de 1978. Para diámetros mayores de  $7/8$  pulg se debe consultar la Especificación.

La razón principal para usar orificios mayores o ranurados es para proporcionar una mayor flexi-



## 192 CONEXIONES

El ensamblaje y ajuste de la estructura de acero. Si la estructura tiene una geometría compleja y/o elementos largos es aconsejable utilizar uno de los tipos especiales de orificio. Debe notarse que el tipo NSL (figura 7.14e) es un orificio ranurado largo; sin embargo, la ranura debe estar orientada de modo que la dirección de la carga sea perpendicular a la longitud de la ranura. Todos los orificios ranurados o de mayor tamaño requieren el uso de soldaduras.

Un importante aspecto del "tipo de especificación de orificio" es el del diseño de la resistencia de la conexión. En las siguientes secciones se describen las conexiones "tipo aplastamiento" y "tipo fricción". El tipo fricción generalmente es más fuerte y tiene una menor capacidad de resistencia, pero se debe usar si no se recomiendan otros tipos STD o NSL.

## 7.7 SUJETADORES TIPO APLASTAMIENTO

Un buen ejemplo de un sujetador tipo aplastamiento es el tornillo estándar A307 en una junta de lapso sencilla como la mostrada en la figura 7.15. El orificio es ligeramente mayor que el diámetro del tornillo (sección 7.6), de modo que inicialmente hay holgura. Aun cuando la tuerca en el tornillo esté ajustada sin holgura, la pequeña cantidad de fricción se anula fácilmente con la aplicación de la carga ( $P$ ) y las piezas se deslizan hasta que empiezan a ajustarse. Obsérvese que las superficies en contacto están en los lados opuestos del vástago del tornillo, a lo largo de todo el diámetro del tornillo y el espesor de las piezas que están conectadas. Cuando se usan tornillos A307, siempre se deben diseñar para servir como sujetadores

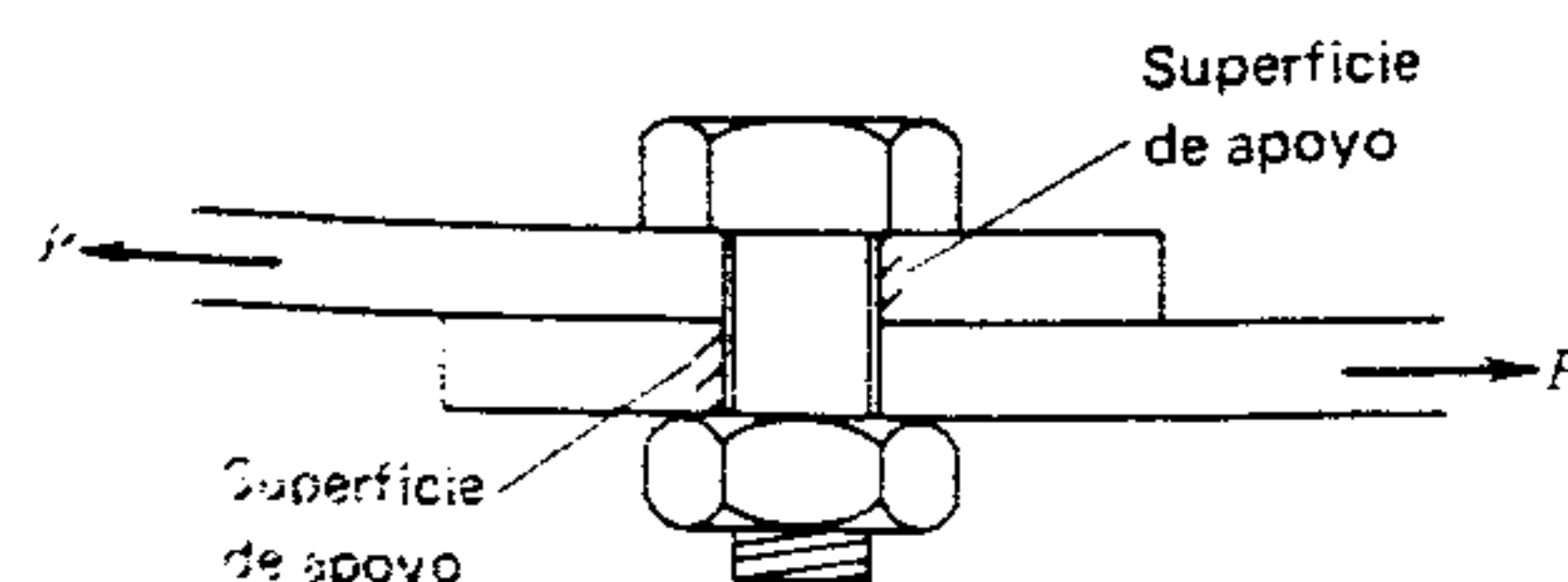


Figura 7.15 Sujetador tipo aplastamiento.

tipo aplastamiento. También esto mismo se aplica a los remaches. El grado de pretensado que acompaña al enfriamiento de los remaches es impreciso. Por lo tanto, se ignoran todas las fuerzas de fricción y los remaches se diseñan tipo aplastamiento.

Los tornillos de alta resistencia (A325 o A490) se pueden usar como sujetadores tipo aplastamiento o tipo fricción (sección 7.8). Los reglamentos pasados permitían el uso de tornillos de alta resistencia como el A307, es decir, un ajuste sin holgura para el tornillo. Sin embargo, la Especificación de 1978 especifica el pretensado adecuado (sección 7.8), aun cuando los sujetadores y el tipo de conexión estén clasificados y diseñados como tipo aplastamiento.

Aunque este pretensado es adecuado para prevenir el deslizamiento y el aplastamiento bajo cargas de servicio; en caso de resistencia máxima se supone que el deslizamiento se efectuará y los tornillos se diseñan conforme a ello. El tornillo de alta resistencia en una conexión tipo aplastamiento es más fuerte y económico que uno del tipo fricción. Por lo tanto, se utiliza más en las conexiones de sujetador.

## 7.8 SUJETADORES TIPO FRICCIÓN

Los tornillos de alta resistencia (A325 o A490) tienen una alta capacidad de resistencia a la tensión. Esta resistencia a la tensión se puede obtener instalando el tornillo y la tuerca de tal manera que el vástago del tornillo esté pretensado a muy alto grado. Este pretensado fija las partes conectadas, de tal modo que la fricción sólo pueda transferir la carga cortante (figura 7.16). La figura aplicada no excederá la suma de las fuerzas de fricción ( $F$ ); por lo tanto, en teoría, el vástago del sujetador nunca hace contacto con los lados del orificio.

Las conexiones tipo fricción se deben usar siempre que no se desee deslizamiento bajo cargas de servicio. Asimismo, si las cargas son de naturaleza dinámica o si las cargas someten a los tornillos a tensión directa (figura 7.13b y c), se recomienda enfáticamente el uso de una conexión tipo fricción. Finalmente, debe notarse que los orificios ensanchados y la mayoría de los orificios ranurados requieren el uso de conectores a fricción con rol-

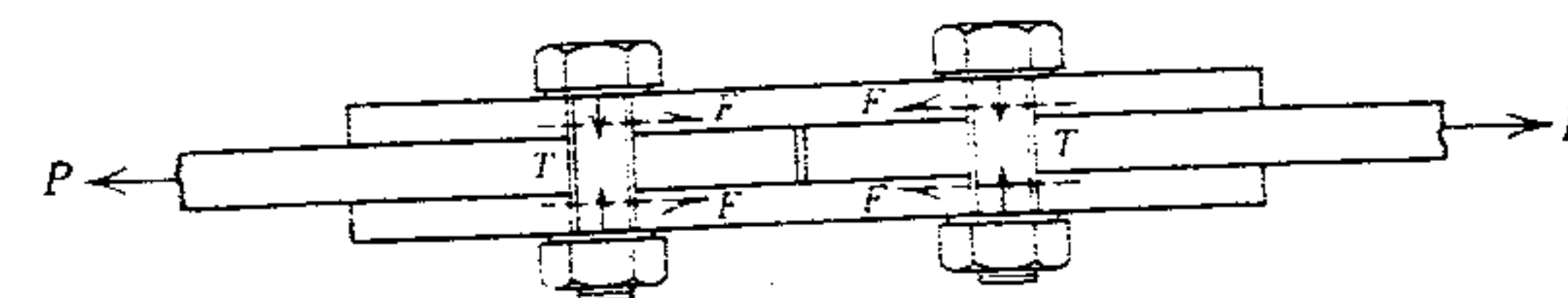


Figura 7.16 Conexión de tipo fricción con tornillos de alta resistencia.

danas. Es importante hacer estas observaciones porque la resistencia de una conexión a fricción es menor que la del tipo aplastamiento<sup>4</sup> (de las mismas características) e, incluso, las conexiones tipo fricción son más costosas.

En la Especificación AISC de 1978 se indica que el pretensado sea del 70 por ciento de la resistencia mínima a la tensión del tornillo. Como esta capacidad de esfuerzo varía un poco con el tamaño del tornillo, en la especificación también se lista la carga de pretensado de acuerdo a cada tamaño de tornillo. Por ejemplo, el tornillo A325 de 3/4 pulg debe estar tensado a 28 kips, mientras que el mismo tamaño de tornillo de material A490 debe estarlo a 35 kips. Este pretensado se puede hacer mediante el uso de llaves calibradas de impacto. El método de "vuelta de tuerca" es muy confiable, es menos costoso y, por tanto, el de uso más frecuente. En este método, la tuerca se ajusta primero mediante llaves ordinarias (ajustando tanto como lo permitan las herramientas), luego se usa una llave de brazo largo para hacer el tensado adicional, usualmente de un tercio a tres cuartos de vuelta, dependiendo del grado del acero y de las dimensiones del tornillo. Además actualmente se usa una variedad de indicadores de pretensado para hacer este trabajo. Los más comunes son las roldanas patentadas situadas bajo las salientes de la tuerca o el tornillo que indican que se ha obtenido el pretensado adecuado.

Una consideración adicional al diseñar conexiones a fricción es el estado de la superficie del área de contacto a fricción (superficie de apoyo).

<sup>4</sup> Una excepción a esto serían las conexiones en que se especifica tratamiento especial para las superficies de fricción; sin embargo, incluso en estos casos, el límite superior es la capacidad establecida por el tipo aplastamiento.

mente, la capa de pintura se evita en las áreas de conexión, dándoles lo que se considera la característica estándar. Ésta es un área limpia identificada como superficie clase A. Un tratamiento especial de la superficie de unión permite esfuerzos mayores; en el apéndice de la Especificación AISC de 1978 se da una tabla en que se listan esfuerzos permisibles para diversos tipos de superficie.

## 7.9 FALLAS DE JUNTAS CON SUJETADORES

Los cuatro principales tipos de falla de juntas con sujetadores sometidos a cortantes se muestran en la figura 7.17; se omite cualquier tipo de fijación y se abarca el tipo aplastamiento. En la Especificación AISC de 1978 se señala que las conexiones sean tipo aplastamiento. En todos los casos se debe considerar la posibilidad de falla tanto por cortante como por aplastamiento; mientras que las fallas en la sección completa y por cortante en el extremo (figura 7.17 c y d) son posibles sólo cuando la junta está sujeta a tensión. Se supone que el sujetador ocupa completamente el orificio y permite una transferencia directa del esfuerzo de compresión a través del sujetador. La posibilidad de falla ante la flexión se ignora, excepto en sujetadores inusualmente largos. Por ejemplo, en el sujetador de la figura 7.17 provocará cierta flexión real y tal vez más en el de la figura 7.19, pero con una conexión correctamente diseñada y dentro del tamaño que se requiere en la construcción de edificios, esto no se torna crítico y, por tanto, no requiere calcularse.

En estos ejemplos (7.17 a 7.25), los sujetadores aparecen sujetando una placa de acero a otra. Se verá más adelante que estos sujetadores también se pueden usar para conectar almas de vigas, almas



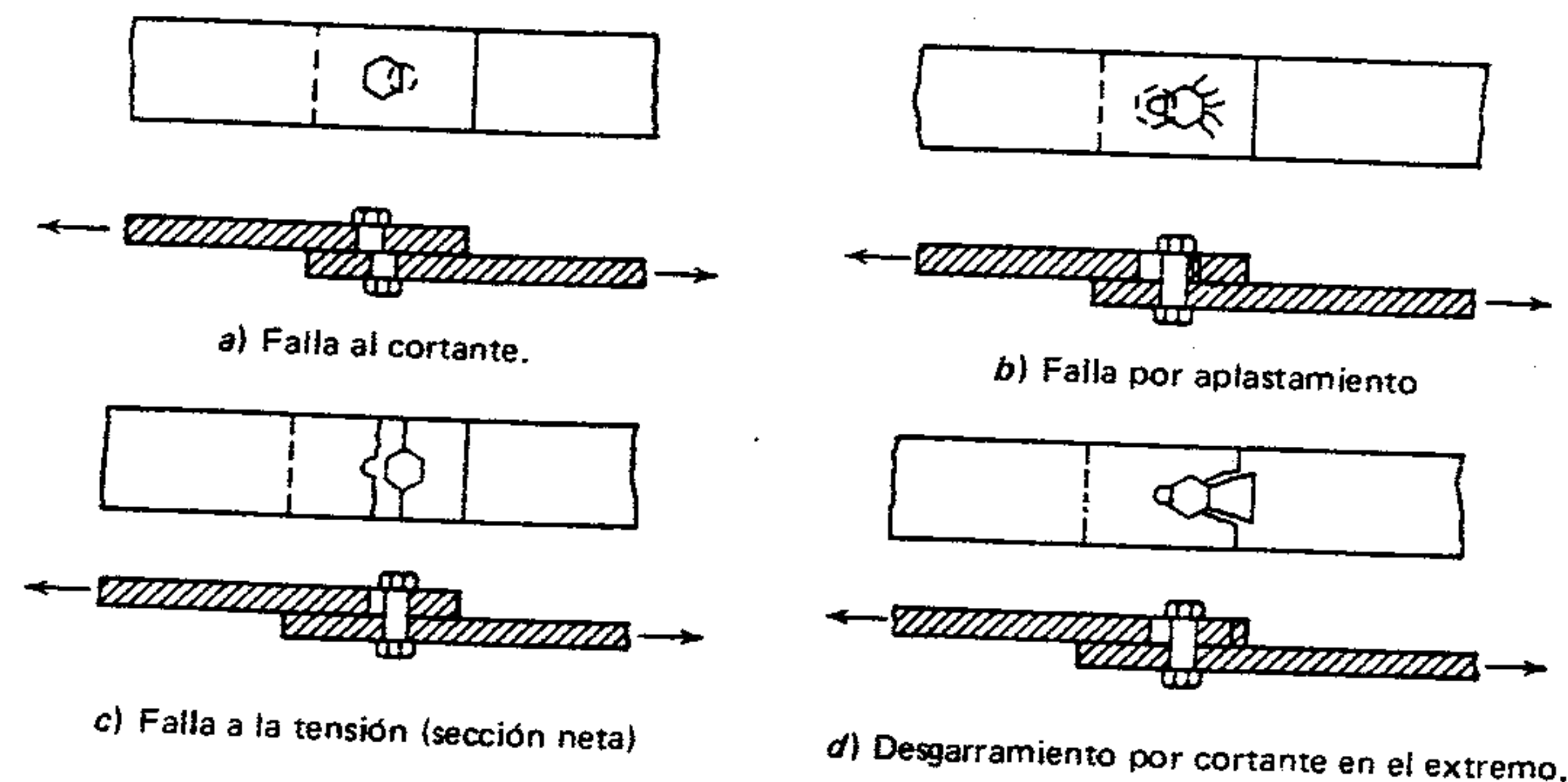


Figura 7.17 Falla de una junta de sujetador.

de tes. alas de ángulos y similares (figuras 7.5 a 7.12).

### 7.10 RESISTENCIA DE UN SUJETADOR AL CORTANTE

La junta mostrada en la figura 7.18 está construida de tal modo que el sujetador tiende a cortarse en un solo plano. En este caso, se dice que el sujetador está en cortante simple y que transfiere la carga ( $P$ ) de una placa a la otra. La junta de la figura 7.19 tiene dos planos de cortante; por lo tanto, el sujetador está en doble cortante y transfiere la carga ( $P$ ) a las dos placas exteriores.

La resistencia permisible de las conexiones de sujetador se basa en la resistencia última (capítulo 11), y las características de ductilidad de toda la conexión, han sido verificadas mediante pruebas y

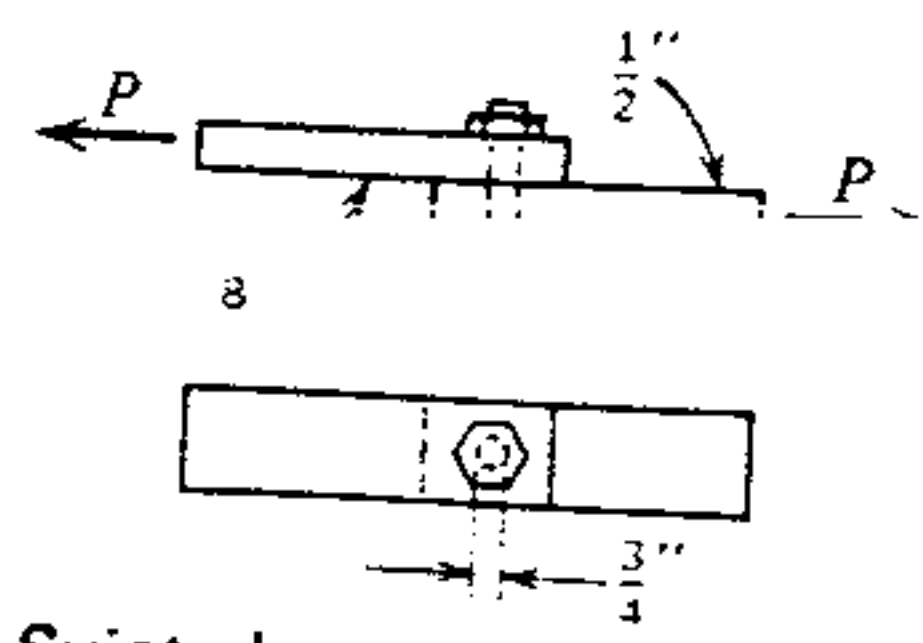


Figura 7.18 Sujetador sometido a cortante simple.

ajustadas por un factor de seguridad de 2. Por lo tanto, no se responde a la pregunta sobre los esfuerzos reales desarrollados bajo cargas de diseño. Sin embargo, los procedimientos de diseño propuestos por la Especificación del AISC provienen de un esfuerzo nominal ocasionado por las cargas de servicio reales. Estos esfuerzos nominales siempre se calculan a partir del tamaño nominal del vástago del sujetador.

La resistencia de un sujetador al cortante depende del área de la sección transversal del vástago y del esfuerzo cortante unitario permisible del sujetador. La Especificación AISC 1978 establece esfuerzos cortantes permisibles para todos los sujetadores, excepto pernos soldados. Estos esfuerzos permisibles se listan en la tabla 7.1. En ésta se ve que los tornillos de alta resistencia que se usan en

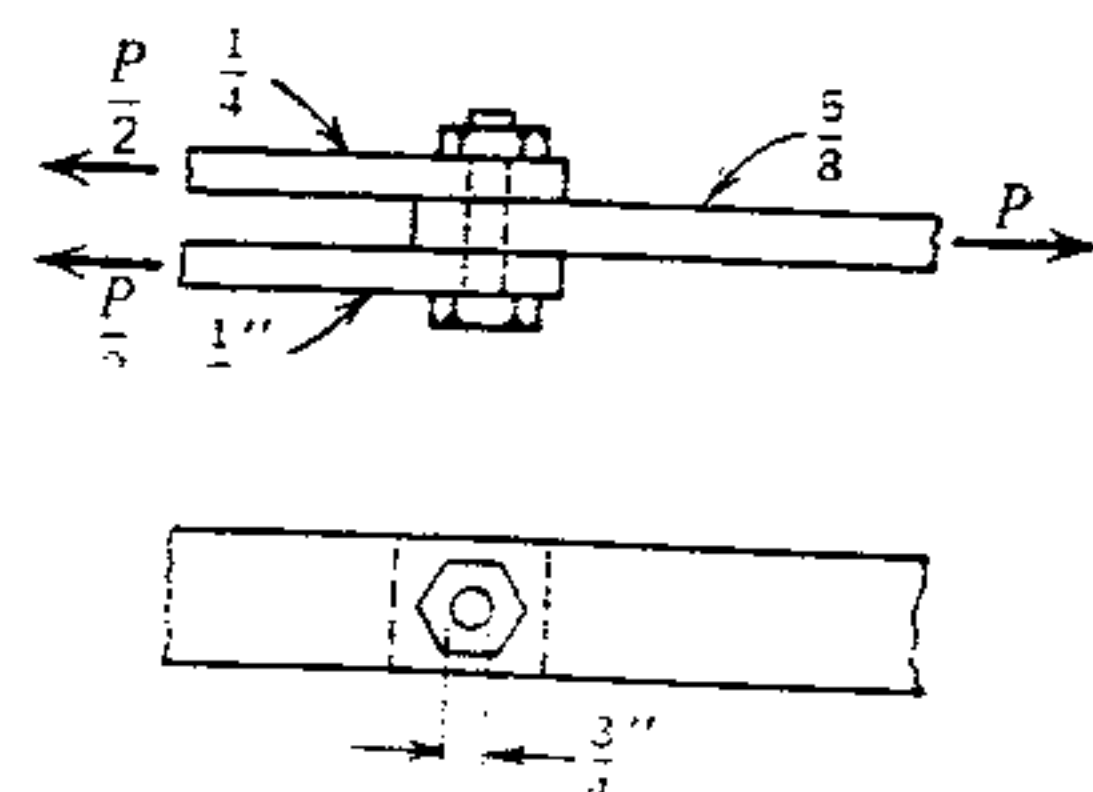


Figura 7.19 Sujetador sometido a doble cortante.

conexiones tipo aplastamiento tienen un mayor esfuerzo cortante permisible que las conexiones a fricción. Además, se permiten esfuerzos mayores cuando las roscas del tornillo están fuera del plano de cortante (esto se designa con una X después del número de ASTM). No obstante, habitualmente se utiliza la designación N cuando las roscas no quedan fuera del plano del cortante. Asimismo, la designación F representa una conexión tipo fricción. El esfuerzo cortante para tornillos A307 es válido en cualquier posición de la rosca.

El símbolo BV (valor de tornillo) o RV (valor de remache) se usa para representar la resistencia de un solo tornillo o remache. Para cortante, está determinada por el producto del esfuerzo cortante permisible y el área, es decir,

$$BV_s = F_v A_v$$

donde

$BV_s$  = valor del tornillo al cortante (kips).

$F_v$  = esfuerzo cortante unitario permisible (k/pulg<sup>2</sup>) de la tabla 7.1.

$A_v$  = área nominal de la sección transversal ( $\pi d^2/4$ ) del vástago (pulgadas cuadradas).

La resistencia de un sujetador sometido a doble cortante es, por supuesto, el doble del valor del cortante simple.

### Ejemplos

Encontrar el valor del cortante del tornillo de los siguientes ejemplos, usando orificios estándar (STD) de tornillo:

- Un tornillo A307, de 3/4 pulg de diámetro en cortante simple (figura 7.18).
- Un tornillo A325 de alta resistencia en una conexión a fricción, de 3/4 pulg de diámetro en doble cortante (figura 7.19).

### Solución a

- El área del tornillo es  $\pi d^2/4$ .

$$A_v = \frac{3.14(0.75)^2}{4} = 0.4418 \text{ pulg}^2$$

- Seleccionar el esfuerzo cortante permisible en la tabla 7.1. Para un A307 tipo aplastamiento

$$F_v = 10 \text{ k/pulg}^2$$

- $BV_s$  (cortante simple) =  $F_v A_v$   
 $BV_s = 10(0.4418) = 4.42 \text{ kips}$

### Solución b

- El área del tornillo de 3/4 pulg es 0.4418 pulg.<sup>2</sup>
- En la tabla 7.1 para A325F

$$F_v = 17.5 \text{ k/pulg}^2$$

- $BV_s$  (doble cortante) =  $2F_v A_v$   
 $BV_s = 2(17.5)(0.4418) = 15.46 \text{ kips}$

Los tres tamaños de sujetador estándar de uso más frecuente en edificios de acero son 3/4, 7/8 y 1 pulg. Asimismo, la octava edición del Manual del AISC (parte 4) contiene tablas de valores de cargas en kips para todos los remaches y sujetadores rosca-dos (excluyendo pernos soldados) en tamaños de 5/8 a 1 1/2 pulg usando los valores de la tabla 7.1.

### 7.11 RESISTENCIA DE UN SUJETADOR AL APLASTAMIENTO Y AL CORTANTE EN EXTREMO

La resistencia al aplastamiento de un sujetador se debe calcular tanto en las conexiones de aplastamiento como de fricción. De nuevo, el procedimiento de diseño exige que se ignore el efecto de fijación en la conexión a fricción.



Tabla 7.1 Esfuerzo permisible en sujetadores (k/pulg<sup>2</sup>).

Designación del sujetador	Agujeros <sup>a</sup>	Cortante permisible $F_v$	Aplastamiento permisible $F_p$	Tensión permisible $F_t$
Conexión tipo aplastamiento	Tornillos A307 STD	10.0		20.0
	Remaches 502-1 STD	17.5		23.0
	Remaches 502-2 STD	22.0		29.0
	Tornillos A325 N STD	21.0	$1.5F_u$	44.0
	Tornillos A325 N NSL		$L_e F_u$	44.0
	Tornillos A325 X STD	30.0	$2d$	44.0
	Tornillos A490 N STD	28.0	el que sea más pequeño	54.0
	Tornillos A490 N NSL			54.0
	Tornillos A490 X STD	40.0		54.0
	Tornillos A325 F STD	17.5		44.0
Conexión tipo fricción	Tornillos A325 F OVS	15.0	$1.5F_u$	44.0
	Tornillos A325 F SSL	12.5	$L_e F_u$	44.0
	Tornillos A490 F STD	22.0	$2d$	54.0
	Tornillos A490 F NSL		el que sea más pequeño	54.0
	Tornillos A490 F OVS	19.0		54.0
	Tornillos A490 F SSL	16.0		54.0

<sup>a</sup> Ver la sección 7.6.<sup>b</sup>  $F_u$  es la resistencia tensil mínima especificada para el tipo de acero (véase la tabla 2 del Apéndice A de la Especificación del AISC de 1978; véase también la figura 7.20).

El esfuerzo sobre un sujetador es la fuerza ejercida sobre ese sujetador por el acero que atraviesa. Aunque el área de aplastamiento es la superficie cilíndrica de contacto entre el vástago del sujetador y el miembro de acero perforado, el área que se usa en el cálculo es el área proyectada

de la superficie, es decir, el área de un rectángulo, cuyas dimensiones son el diámetro del sujetador y el espesor del metal perforado. Expresado esto en forma de ecuación, el área de aplastamiento es

$$A_b = dt$$

Si dos placas de diferentes espesores se sujetan entre sí como en la figura 7.18, es evidente que la capacidad por aplastamiento estará determinada por el espesor de la placa más delgada. En este caso el área para el sujetador de 3/4 pulg es

$$A_b = 0.75(0.375) = 0.281 \text{ pulg}^2$$

La resistencia de aplastamiento de un sujetador es igual al esfuerzo de aplastamiento permisible  $F_p$  por el área de aplastamiento, o sea

$$BV_b = F_p A_b$$

Es necesario examinar más a fondo este esfuerzo de aplastamiento permisible.

Se ha demostrado a través de pruebas reales que ni el sujetador ni el metal en contacto con el vástago del sujetador fallan realmente por aplastamiento. Las pruebas muestran que la resistencia al aplastamiento depende de la resistencia a la tensión de la parte conectada, el espaciamiento de los sujetadores y la distancia desde el sujetador al extremo del material. El límite superior de la resistencia al aplastamiento se ha establecido como  $1.5 F_u$ , donde  $F_u$  es la resistencia tensil mínima especificada de la parte conectada. En el Apéndice A de la Especificación AISC de 1978 aparece una tabla con los valores de  $F_u$  para diferentes grados de acero. Por ejemplo, el acero A36 puede tener un  $F_u$  que varía de 58 k/pulg<sup>2</sup> a 80 k/pulg<sup>2</sup>, mientras que el acero A588, grado 50, tiene un  $F_u = 70$  k/pulg<sup>2</sup>.

Si se supone que las placas de la conexión de la figura 7.18 son de acero A36 con una resistencia tensil mínima especificada de 58 k/pulg<sup>2</sup>, el esfuerzo de aplastamiento máximo será

$$F_b = 1.5(58) = 87 \text{ pulg}^2$$

y la capacidad de aplastamiento del sujetador es

$$BV_b = 87(0.281) = 24.4 \text{ k/pulg}^2$$

En la junta de la figura 7.19, el espesor de la placa más delgada es de 1/4 pulg, pero las dos placas de 1/4 pulg, actúan en la misma dirección; por lo tanto,

la carga ( $P$ ) se debe dividir entre ellas. Si se colocan sujetadores de 3/4 pulg, el área de aplastamiento actuando a la izquierda de esta junta es

$$A_b = (0.25 + 0.25)0.75 = 0.375 \text{ pulg}^2$$

El área de aplastamiento de la placa de 5/8 pulg a la derecha es

$$A_b = 0.625(0.75) = 0.469 \text{ pulg}^2$$

Se ve que el espesor menor total en cada dirección establecerá la capacidad límite por aplastamiento del sujetador.

La resistencia de aplastamiento máxima permisible ( $F_p = 1.5 F_u$ ) se puede usar solamente si el espaciamiento de los sujetadores y la distancia al extremo (en el sentido del esfuerzo) cumplen con ciertas especificaciones limitantes; si no,  $F_p$  se debe reducir. En la figura 7.20 se muestran tres sujetadores en una línea paralela al sentido del esfuerzo. El espaciamiento entre sujetadores se toma siempre de centro a centro de éstos. La distancia al extremo se mide desde el centro del sujetador al extremo del miembro, paralelamente al sentido del esfuerzo. Se ve que esta distancia ( $L_e$ ) es también la longitud desde el centro de un sujetador al lado más cercano del siguiente orificio en sentido paralelo al esfuerzo. La distancia al borde se mide desde el centro de un sujetador al borde del material, perpendicularmente a la dirección del esfuerzo.

Para evitar intersticios y combaduras del material cerca de su borde, se establece una mínima distancia al borde. Esta distancia mínima al borde también es la distancia mínima al extremo. En la tabla 7.2 se dan los valores de la Especificación del AISC de 1978 para estas distancias mínimas, siendo las variables el diámetro del sujetador y la condición del borde del material. Esta tabla es solamente para orificios estándar. Los orificios ensanchados y combinados requieren que se aumente sobre estas distancias. (Véase la Especificación del AISC completa).

Como se dijo antes, las variables que determinan el esfuerzo de aplastamiento permisible son la resistencia a la tensión de la parte, el diámetro del sujetador y el espaciamiento (o, más específicamente,  $L_e$ ).



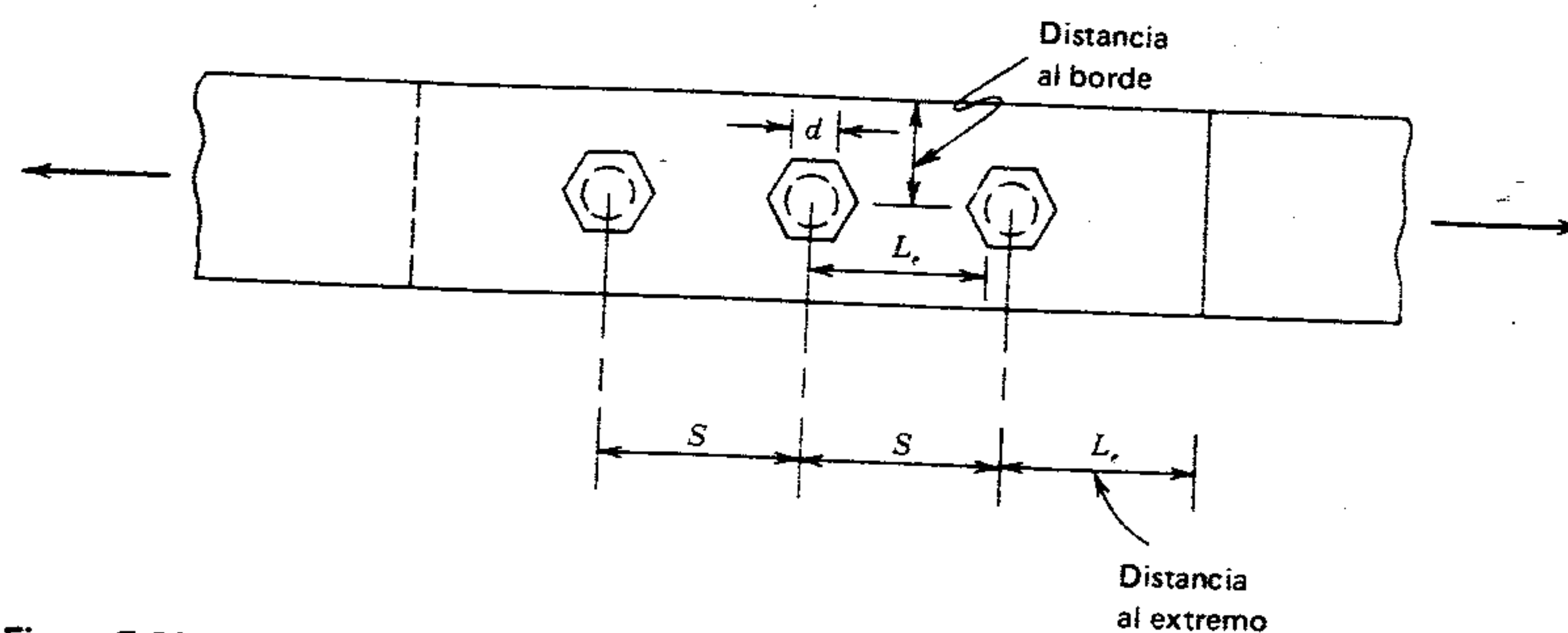


Figura 7.20 Espaciamiento y distancias al extremo y al borde.

Tabla 7.2 Distancias mínimas al extremo y al borde.

Diámetro del sujetador (pulg)	A los bordes recortados (pulg)	En bordes lamina- dos o cortados conoplete (pulg)
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{8}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	1
$\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$
1	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{8}$	2	$1\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{5}{8}$
Más de $1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4} \times \text{diámetro}$	$1\frac{3}{4} \times \text{diámetro}$

Se ha mostrado mediante pruebas que hay una relación lineal entre las relaciones de estos parámetros, es decir,

$$\frac{L_e}{F_u} = \frac{L_e}{d}$$

En esta forma,  $f_p$  es el esfuerzo de aplastamiento desarrollado. Despejando  $f_p$  y usando un factor de seguridad de 2, se obtiene el esfuerzo de aplasta-

miento permisible con el límite superior de  $1.5 F_u$ , o sea

$$F_p = \frac{L_e F_u}{2d} \leq 1.5 F_u$$

Esta ecuación se puede ajustar aún más para representar la carga real  $P$  del sujetador y la distancia requerida al extremo  $L$ . Sea  $F_p = P/dt$ , entonces

$$\frac{P}{dt} = \frac{L_e F_u}{2d}$$

y

$$L_e = \frac{2P}{tF_u}$$

Asimismo, se ve que el espaciamento necesario entre centro y centro es

$$S = \frac{2P}{tF_u} + \frac{d}{2}$$

Estos requisitos de espaciamento, distancia al extremo y valores de aplastamiento son para orificios estándar. En los orificios ensanchados y ranurados se necesita aumentar estas distancias. (Véase la Especificación AISC completa).

El espaciamento usual de sujetadores es de 3 pulgadas y, cuando se utiliza, es adecuado para un esfuerzo de aplastamiento de  $1.5 F_u$  para sujetadores de un tamaño de hasta incluso  $3/4$  de pulg. La Especificación AISC de 1978 recomienda un espaciamento mínimo de preferencia de  $3d$  y un mínimo absoluto de  $2\frac{2}{3}d$ . Los valores de aplastamiento de sujetadores de  $3/4$ ,  $7/8$  y 1 pulg para diversos espaciamentos y distancias al extremo se dan en la parte 4 de la octava edición del Manual AISC.

El valor limitante de la capacidad de cualquier sujetador dado es el menor valor calculado para cortante y esfuerzo de aplastamiento descrito aquí.

### Ejemplo 1

Encontrar el valor limitante del tornillo para el tornillo de  $3/4$  pulg de la figura 7.19. El metal base es de acero A36 y los tornillos son de acero A325 de alta resistencia. La conexión es de tipo aplastamiento, con rosca en el plano cortante. Suponer orificios estándar (STD) y distancias de extremo para esfuerzo máximo de aplastamiento.

### Solución

1. Calcular el valor del tornillo al cortante. El vástago del tornillo está sometido a doble

cortante y el área de un tornillo de  $3/4$  de pulg es de  $0.442 \text{ pulg}^2$ .

En la tabla 7.1,  $F_v = 21 \text{ k/pulg}^2$ ,

$$\begin{aligned} BV_s(\text{doble cortante}) &= 2F_v A_v \\ &= 2(21)(0.442) \\ &= 18.6 \text{ kips} \end{aligned}$$

2. Calcular el valor del tornillo por aplastamiento. El espesor combinado de las dos placas es de  $1/2$  pulg, el cual es menor que el de la placa de  $5/8$  pulg, por lo tanto es determinante. El área de aplastamiento es,

$$0.5(0.75) = 0.375 \text{ pulg}^2$$

Asimismo,

$$F_p = 1.5F_u = 1.5(58) = 87 \text{ k/pulg}^2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} BV_b(\text{apoyo}) &= F_p A_b \\ &= 87(0.375) \\ &= 32.6 \text{ kips} \end{aligned}$$

3. Establecer el valor limitante. El valor limitante será menor de los cálculos del cortante y aplastamiento, es decir,

$$BV = 18.6 \text{ kips}$$

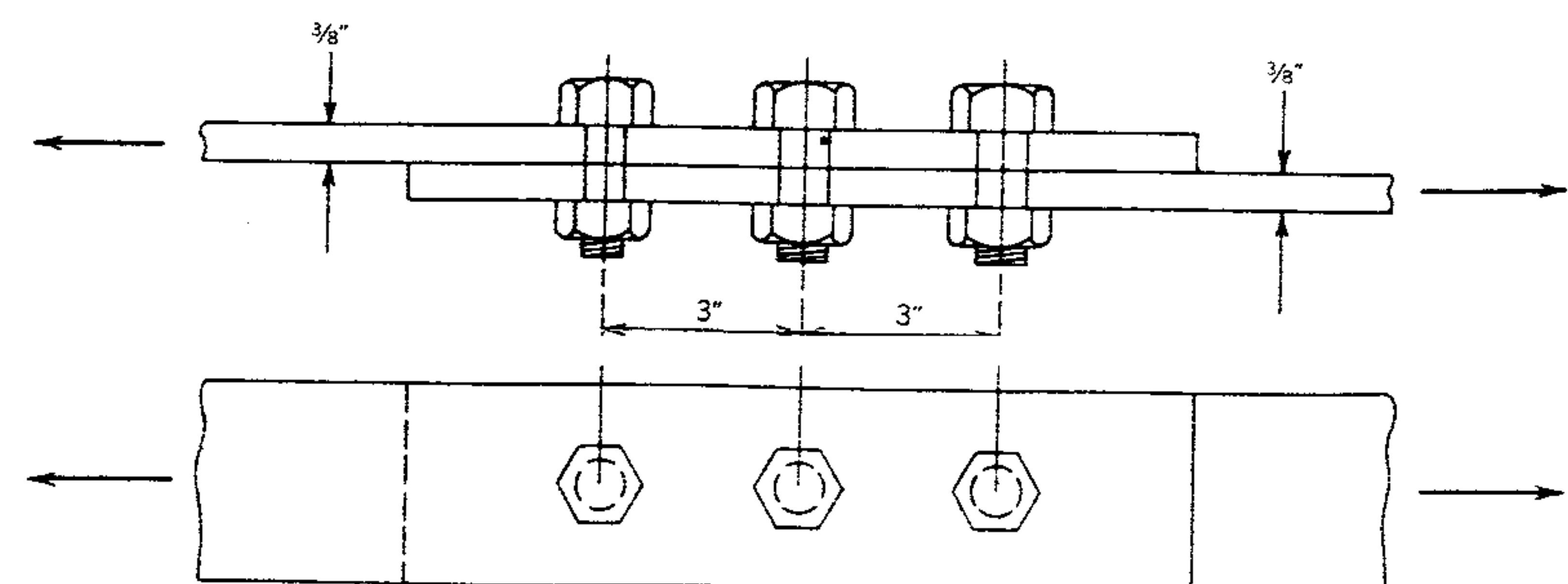


Figura 7.21 Ejemplo 2.



prendería el área más pequeña. Sin embargo, en la práctica esta falla generalmente no se presenta de esta manera. El área sobre la diagonal, entre *B* y *C* en la figura 7.23a, en realidad es capaz de resistir mayores esfuerzos. Por lo tanto, la Especificación del AISC recomienda una fórmula empírica para calcular secciones netas con filas en zig-zag de sujetadores, que se debe aplicar a todas las posibles líneas de falla a la tensión.

$$A_{net} = t \left( W - nd + \sum \frac{s^2}{4g} \right)$$

donde:

- A* = área neta.
- s* = separación o paso.
- g* = gramil.
- d* = diámetro del orificio.
- $\Sigma$  = suma de todos los valores de  $s^2/4g$ ; en cada línea diagonal de posible falla.

El área más pequeña resultante de la aplicación de la fórmula anterior es el área neta sobre la cual se debe basar la resistencia de un miembro a tensión.

Esta área de sección neta ( $A_{net}$ ), calculada como se describió aquí y aplicable solamente a placas de empalme y de nudo, no puede ser mayor al 85 por ciento del área total. Si el 85 por ciento del área bruta es menor que el área neta real, entonces la primera viene a ser el área neta a usar.

Se debe considerar aún otra situación. A menudo, una forma estructural (ángulo, te, W, etc.) está conectada sólo por una parte, por ejemplo un ala de ángulo. Por lo tanto, toda el área de la forma cerca de la conexión no está sujeta a tensión uniforme. Tomando en consideración este aspecto, la Especificación AISC de 1978 determina que se debe usar un coeficiente ( $C_t$ ) para reducir el área neta a un área neta efectiva, es decir,

$$A_e = C_t A_{net}$$

En el caso citado aquí, el de un ala de ángulo, el coeficiente  $C_t$  es 0.85 si no hay menos de tres su-

jetadores por línea en el sentido del esfuerzo; de otro modo, el coeficiente es 0.75. Consúltase la Especificación AISC completa para obtener mayor información sobre estos coeficientes.

El esfuerzo permisible basado en el área neta efectiva está dado por el AISC, y es  $0.5F_u$ . Esto implica un factor de seguridad de 2. Y la capacidad de tensión será

$$P_t = 0.5F_u A_e$$

Sin embargo, el AISC también estipula que el esfuerzo de tensión desarrollado basado en el área bruta no puede exceder de  $0.6F_u$ ; por lo tanto, la máxima capacidad de tensión será

$$P_t = 0.6F_y A_g$$

Ambas se deben calcular y la menor de las dos determinará la capacidad limitante.

### Ejemplo

Calcular la fuerza máxima permisible *P* para el empalme a tensión de la figura 7.23b, determinada a partir de la sección neta, si el acero es A36 y se usan tornillos de 3/4 pulg. Omitir el esfuerzo cortante y de aplastamiento. Los miembros tienen 7 pulg de ancho y 1/2 pulg de espesor.

### Solución

1. Determinar cursos posibles de falla ante la tensión. Éstos están indicados por las líneas punteadas *ABDE* y *ABCDE*.
2. Aplicando la fórmula de la sección neta, determinar el área para cada curso. Curso *ABDE*:

$$A_{net} = t(W - nd) = \frac{1}{2}[7 - 2(\frac{7}{8})] = 2.63 \text{ pulg}^2$$

Curso *ABCDE*:

$$A_{net} = t \left( W - nd + \sum \frac{s^2}{4g} \right)$$

$$= 0.5 \left[ 7 - 3(0.875) + \frac{1.75^2}{4(2.25)} + \frac{1.75^2}{4(2.25)} \right]$$

$$= 0.5[(7 - 2.63) + 0.34 + 0.34]$$

$$= 2.53 \text{ pulg}^2$$

3. Calcular la sección neta máxima usando el 85 por ciento de la sección bruta.

$$A_{m\acute{a}x} = 0.85(0.5)7 = 2.98 \text{ pulg}^2$$

4. Calcular el área neta efectiva. En este ejemplo, usando placas, no se aplica el coeficiente  $C_t$ , y  $A_{(m\acute{a}x)}$  es mayor que  $A_{net}$ . Por lo tanto,  $A_e$  es igual a la  $A_{net}$  más pequeña, es decir,

$$A_e = 2.53 \text{ pulg}^2$$

5. Calcular la máxima fuerza de tensión basada en el área neta efectiva.

$$P_t = A_e 0.5F_u = 2.53(0.5)58 = 73.4 \text{ kips}$$

6. Calcular la máxima fuerza de tensión basada en el área bruta  $A_g = 0.5(7) = 3.5 \text{ pulg}^2$ .

$$P_t = A_g 0.6F_y = 3.5(0.6)36 = 75.6 \text{ kips}$$

7. La fuerza de tensión limitante es de 73.4 kips.

### 7.13 DISEÑO Y CÁLCULO DE CONEXIONES TRASLAPADAS CON SUJETADORES

Los empalmes, suspensores y tipos similares de conexiones de traslape usualmente tienen sujetadores colocados de tal modo que el centro del grupo de sujetadores coincide con el centro de gravedad del material que se va a conectar. En estas condiciones la conexión queda cargada concéntricamente. Esto sucede en el ejemplo 1 (figura 7.24) y casi igual en el ejemplo 2 (figura 7.26). El grado de excentricidad del ejemplo 2 es tan pequeño que normalmente se ignora en el diseño.

El diseño de conexiones concéntricas ordinarias se basa en el supuesto de que la carga está igual-

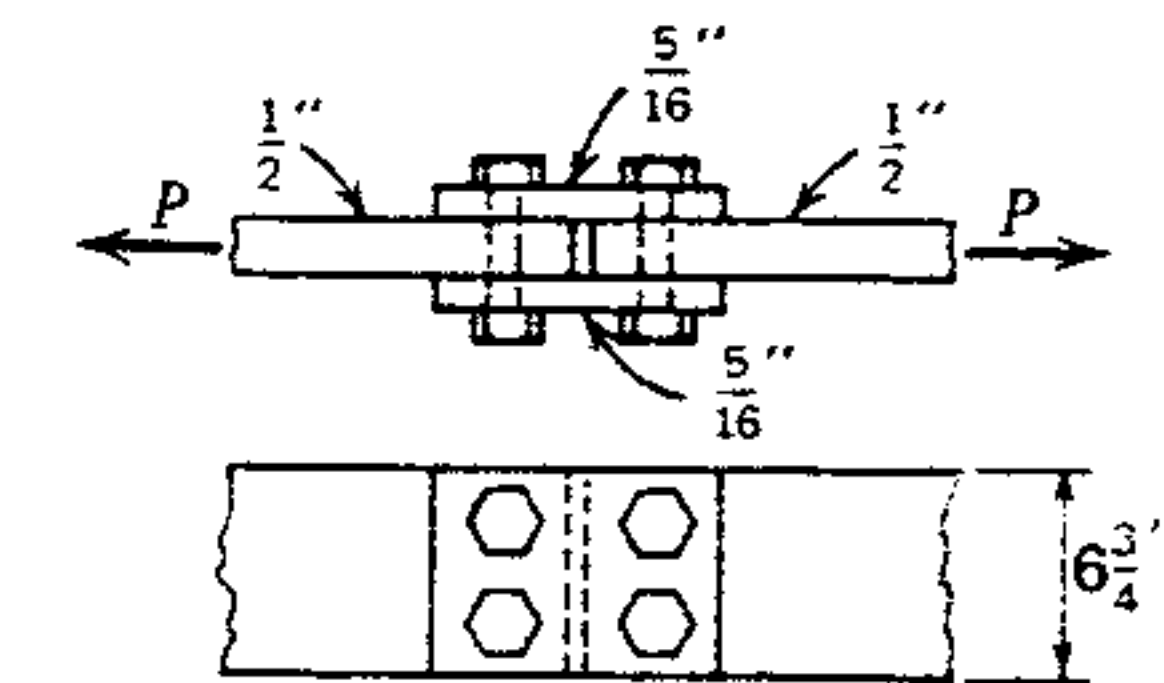


Figura 7.24 Ejemplo 1.

mente distribuida en todos los sujetadores de la conexión. Por lo tanto, el número necesario de sujetadores se puede encontrar dividiendo la carga total a transmitir entre el valor limitante de un sujetador sometido a cortante o aplastamiento, el que sea menor. En cambio, cuando se investiga una conexión para calcular la carga máxima admisible, se calcula la resistencia de un sujetador, ya sea sujeto a cortante o aplastamiento, y luego se multiplica por el número de sujetadores de la conexión. Asimismo, obsérvese que la transferencia de carga mostrada en la figura 7.24 es diferente de la que se ve en la figura 7.25. En la figura 7.24 se usan dos sujetadores para transferir la carga a las dos placas exteriores, y se necesitan dos más para transferir la carga de las placas exteriores de nuevo a la placa central. En la figura 7.25, los sujetadores transfieren la carga directamente de una placa a la otra. De nuevo se debe destacar que si los miembros están a tensión, la sección neta también se debe calcular para determinar la carga máxima.

En la Especificación AISC de 1978 se especifica que todas las conexiones diseñadas deben soportar una carga mínima de 6 kips. Además, se acostumbra usar no menos de dos sujetadores en cualquier conexión, aun cuando los cálculos indiquen que es

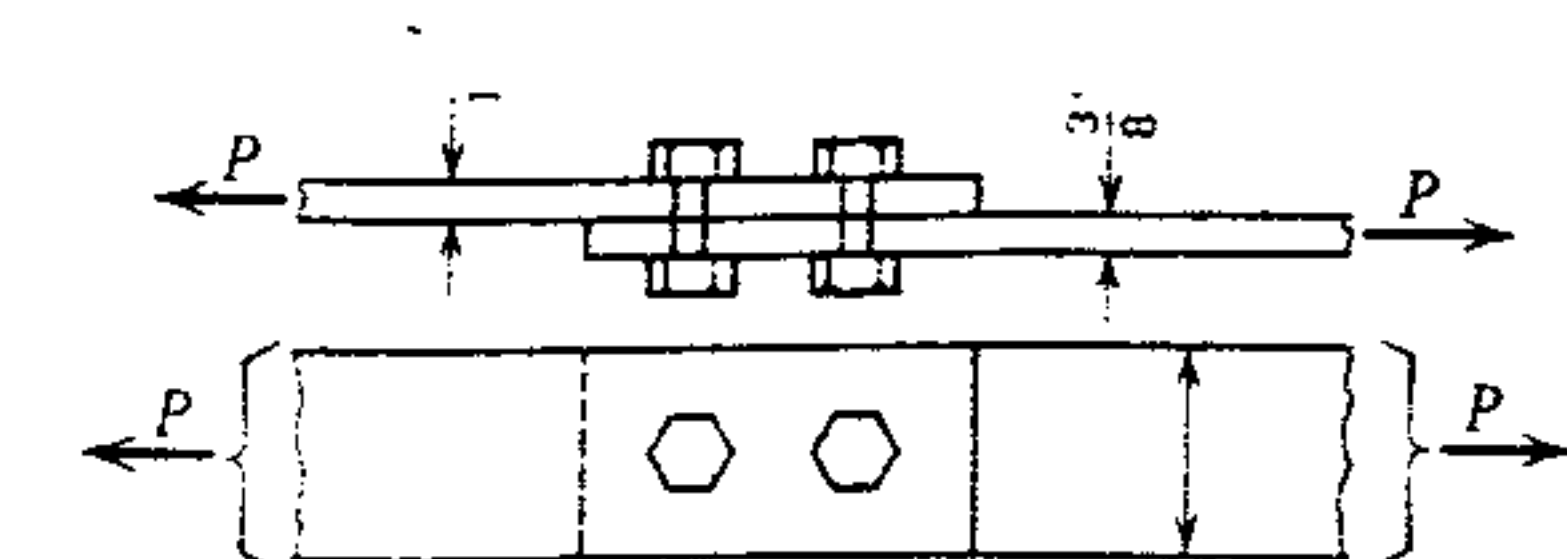


Figura 7.25 Cortante simple.



suficiente uno; esto es simplemente una precaución ante el hecho obvio de que la falla por cualquier razón podría ser total si se usara sólo un sujetador. En resumen:

1. Investigar el esfuerzo cortante:

$$BV_s = F_v A_v$$

2. Investigar el aplastamiento

$$BV_b = F_p A_b$$

donde:

$$F_p = \text{la menor de } 1.5 F_u$$

o bien,

$$\frac{L_e F_u}{2d}$$

donde:

$d$  = diámetro nominal del sujetador.

$$L_e, \text{ la longitud necesaria, } = \frac{2P}{tF_u}$$

donde  $P$  = fuerza transmitida por el sujetador.

3. Calcular la sección bruta.

La carga de tensión máxima sobre la parte es

$$P_t \leq 0.6F_y A_g$$

4. Calcular la sección neta efectiva. Determinar el área neta.

$$A_{net} = t(W - nd)$$

o

$$A_{net} = t\left(W - nd + \frac{s^2}{4g}\right)$$

o

$$A_{net} = 0.85A_g$$

donde

$$d = \text{diámetro del agujero} + 1/16 \text{ pulg.}$$

Luego, usando la menor  $A_{net}$  determinada antes, calcular la sección neta efectiva,

$$A_e = C_t A_{net}$$

y la carga máxima de tensión sobre la parte

$$P_t = 0.5F_u A_e$$

### Ejemplo

Determinar la carga ( $P$ ) que la junta mostrada en la figura 7.24 puede transmitir si se usan tornillos A325 de 3/4 pulg y el metal base es acero A36. Los tornillos son tipo aplastamiento, y las roscas no sobresalen de los planos de cortante. Se usan orificios estándar. Calcular la distancia al extremo necesaria tanto para las placas interiores como las exteriores.

### Solución 1

1. Calcular el valor de uno de los tornillos sujetos a doble cortante. El área de cortante de un tornillo de 3/4 pulg es de 0.4418 pulg<sup>2</sup>. En la tabla 7.1, la resistencia al cortante de los tornillos es de 21 k/pulg<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} BV_v (\text{doble cortante}) &= 2F_v A_v \\ &= 2(21)(0.4418) \\ &= 18.6 \text{ k/pulg}^2 \end{aligned}$$

2. Calcular el valor de uno de los tornillos por aplastamiento. Las dos placas exteriores tienen un espesor total de 5/8 pulg en comparación con 1/2 pulg de la placa interior. Por

lo tanto, el aplastamiento en la placa interior es determinante, y el área de aplastamiento es  $(1/2)(3/4) = 0.375$  pulg<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} BV_b (\text{apoyo}) &= 1.5F_u A_b \\ &= 1.5(58)(0.375) \\ &= 32.6 \text{ k/pulg}^2 \end{aligned}$$

3. De los pasos (1) y (2), el valor limitante de un sujetador está determinado por el cortante y es de 18.6 kips. Dos tornillos transfieren la carga a las placas exteriores; por lo tanto, la carga total ( $P$ ) que los tornillos pueden transmitir es

$$P = 2(18.6) = 37.2 \text{ k/pulg}^2$$

4. Al calcular la sección neta, se observa de nuevo que el espesor total de las dos placas de 5/16 pulg es mayor que el de la placa de 1/2 pulg. Por lo tanto, la placa de 1/2 pulg tendrá la menor sección neta. El orificio es 1/8 pulg mayor que el tamaño del tornillo y la sección neta es igual a

$$\begin{aligned} A &= t(W - nd) = 0.5[6.75 - 2(0.875)] \\ &= 2.5 \text{ pulg}^2 \end{aligned}$$

y

$$A_{max} = 0.85(6.75)(0.5) = 2.87 \text{ pulg}^2$$

Por lo tanto, usar el valor más pequeño ( $A_{net} = 2.5$  pulg<sup>2</sup>).

5. La carga tensil total ( $P_t$ ) determinada por la sección neta efectiva es

$$P_t = 0.6F_y A_e = 12.5 \text{ kips}$$

6. La carga tensil total ( $P_t$ ), determinada por la sección bruta, es

$$\begin{aligned} P_t &= 0.6F_y A_g \\ &= 0.6(36)(0.5)(6.75) = 72.9 \text{ k/pulg}^2 \end{aligned}$$

7. El valor limitante de  $P$  es el establecido por el cortante sobre el tornillo (paso 3) y es de 37.2 kips.

8. Como cada tornillo desarrolla 18.6 kips, la mínima distancia al extremo para la placa interior es

$$L_e = \frac{2(18.6)}{0.5(58)} = 1.28 \text{ pulg}^2$$

Que es mayor que la que aparece en la tabla 7.2 y, por tanto, se adoptará, aumentando la dimensión al próximo octavo de pulgada, o sea 1 3/8 pulg.

9. Cada placa exterior aporta la mitad del valor del tornillo, o sea  $18.6/2 = 9.3$  kips. Por lo tanto, su distancia mínima al extremo es

$$L_e = \frac{2(9.3)}{0.31(58)} = 1.03 \text{ pulg}$$

Distancia que es menor que la que aparece en la tabla 7.2 del borde sujeto al cortante; por lo tanto se adopta una distancia al extremo de 1 1/4 pulg para las placas exteriores.

### Solución 2

*Nota:* En la solución 1 se muestra el método general para resolver problemas de este tipo. El siguiente método, que comprende el uso de tablas de sujetadores, es el de uso más frecuente en la práctica (y el que se usará en los siguientes ejemplos en que es directamente aplicable).

1. Calcular el valor del tornillo. En las tablas de carga cortante permisible para "Tornillos, Partes roscadas y Remaches" (octava edición del Manual del AISC), para un tornillo A325 de 3/4 pulg. de tipo aplastamiento sujeto a doble cortante, con la rosca en el plano de cortante,  $BV_s = 18.6$  kips. En la tabla de carga por aplastamiento del AISC,  $F_u = 58$  k/pulg<sup>2</sup> (acero A36) y para tornillos de 3/4 pulg sobre placas de 1/2 pulg,  $BV_b = 32.6$  kips cuando el espaciamiento no determina la resistencia por aplastamiento. El menor de



los dos, cortante o aplastamiento, limita la capacidad del valor del tornillo.

- Calcular la carga ( $P$ ) que se puede transmitir por los dos tornillos.

$$P = 2(18.6) = 37.2 \text{ k/pulg}^2$$

- Calcular la sección neta y la distancia al extremo como se vio en los pasos (1) al (9) de la solución 1.

### Ejemplo 2

En la figura 7.26 se muestra una típica conexión de puntal y placa usada en la construcción de armaduras (capítulo 9). Los dos ángulos montados en la placa soportan una carga de tensión total de 62 kips. El acero base (ángulos y placa) es A572, grado 65. Diseñar la conexión usando tornillos de alta resistencia de 3/4 pulg, A490, en una conexión a fricción con orificios estándar.

### Solución

En la figura 7.26a, el centroide de los ángulos y, por lo tanto, la línea de acción de la carga de 62 kips, se representan con el símbolo  $y$ . Esta distancia se incluye en el Manual AISC y es de 1.09

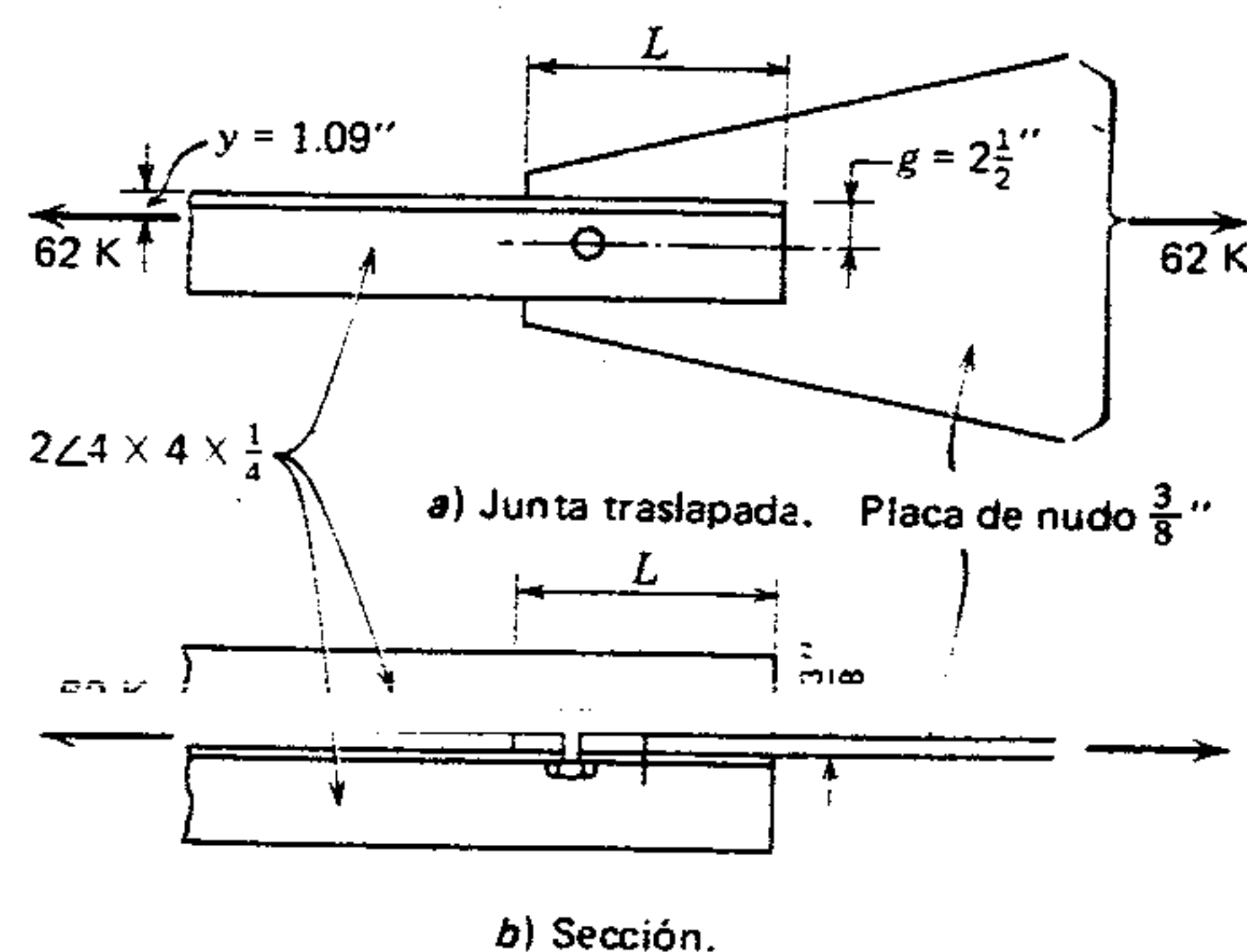


Figura 7.26

pulg para 2L 4 x 4 x 1/4. Por lo tanto, la línea de acción para este tamaño de ángulo no coincide exactamente con la línea de tornillos situada a una distancia de gramil de 2 1/2 pulg; sin embargo, el grado de excentricidad es lo bastante pequeño que permite suponer una carga concéntrica.

- Calcular el valor del tornillo con base en el cortante.

$$BV_s = 19.4 \text{ k/pulg}^2$$

- Calcular el valor del tornillo con base en el aplastamiento. Para el tipo de acero especificado,  $F_u = 80 \text{ k/pulg}^2$ . En las tablas de cargas por aplastamiento de la octava edición del Manual del AISC no se listan valores para este caso; por lo tanto, se debe calcular el área de aplastamiento. El área limitante será la de la placa de 3/8 pulg.

$$A_b = 0.375(0.75) = 0.28 \text{ pulg}^2$$

Suponiendo un espaciamiento de 3 pulg, calcular  $L_e$ .

$$L_e = 3 - 0.44 = 2.56 \text{ pulg}$$

El esfuerzo de aplastamiento permisible basándose en el espaciamiento es

$$F_p = \frac{2.56(80)}{2(0.75)} \approx 137 \text{ k/pie}$$

Sin embargo, el esfuerzo de aplastamiento máximo permisible es

$$F_p = 1.5(80) = 120 \text{ ksi}$$

Por lo tanto, el valor del tornillo por aplastamiento es

$$BV_b = 0.28(120) = 33.6 \text{ kips}$$

El cual no se puede usar debido a que es mayor que el valor basado en el cortante.

- Calcular el número de tornillos que se necesita.

$$n = \frac{62}{19.4} = 3.2; \text{ usar cuatro tornillos}$$

- Revisar la sección bruta y la sección neta. La fuerza tensil máxima basándose en la sección bruta es

$$P_t = 0.6F_y A_g$$

$$P_t = 0.6(65)3.88 = 151 \text{ k/pulg}^2$$

Que es mayor que la carga aplicada de 62 kips; por lo tanto, se acepta.

La sección neta es el área bruta menos dos orificios de 7/8 pulg de material de 1/4 pulg de espesor.

$$A_{net} = 3.88 - 2\left(\frac{7}{8}\right)\frac{1}{4} = 3.44 \text{ pulg}^2$$

Sin embargo, el área neta máxima está limitada al 85 por ciento de la bruta; por lo tanto

$$A_{net} = 0.85(3.88) = 3.30 \text{ pulg}^2$$

Asimismo, como sólo un ala de cada ángulo está sujeto a la placa  $C_r = 0.85$ . Por lo tanto, el área neta efectiva es

$$A_e = 0.85(3.3) = 2.8 \text{ pulg}^2$$

Esta es mayor que la carga aplicada de 62 kips, y se acepta.

$$P_t = 0.5F_u A_e$$

$$P_t = 0.5(80)2.8 = 112 \text{ kips}$$

- Establecer la distancia al extremo y calcular la longitud de la conexión. El aplastamiento de un tornillo en comparación con la placa de 3/8 pulg es  $62/4 = 15.5 \text{ kips}$ , y

$$L_e = \frac{2(15.5)}{0.375(80)} = 1.03 \text{ pulg.}$$

Usar 1 1/4 pulg (Tabla 7.2).

El aplastamiento de un tornillo en comparación con el ángulo de 1/4 pulg es  $15.5/2 = 7.75 \text{ kips}$ , y

$$L_e = \frac{2(7.75)}{0.25(80)} = 0.78 \text{ pulg.}$$

Usar 1 1/4 pulg. (Tabla 7.2)

Se ve que la longitud total de la conexión es

$$L = 3(3) + 2(1\frac{1}{4}) = 11\frac{1}{2} \text{ pulg.}$$

### PROBLEMAS

- Calcular la fuerza máxima ( $P$ ) que puede soportar la junta de traslape simple de la figura 7.27

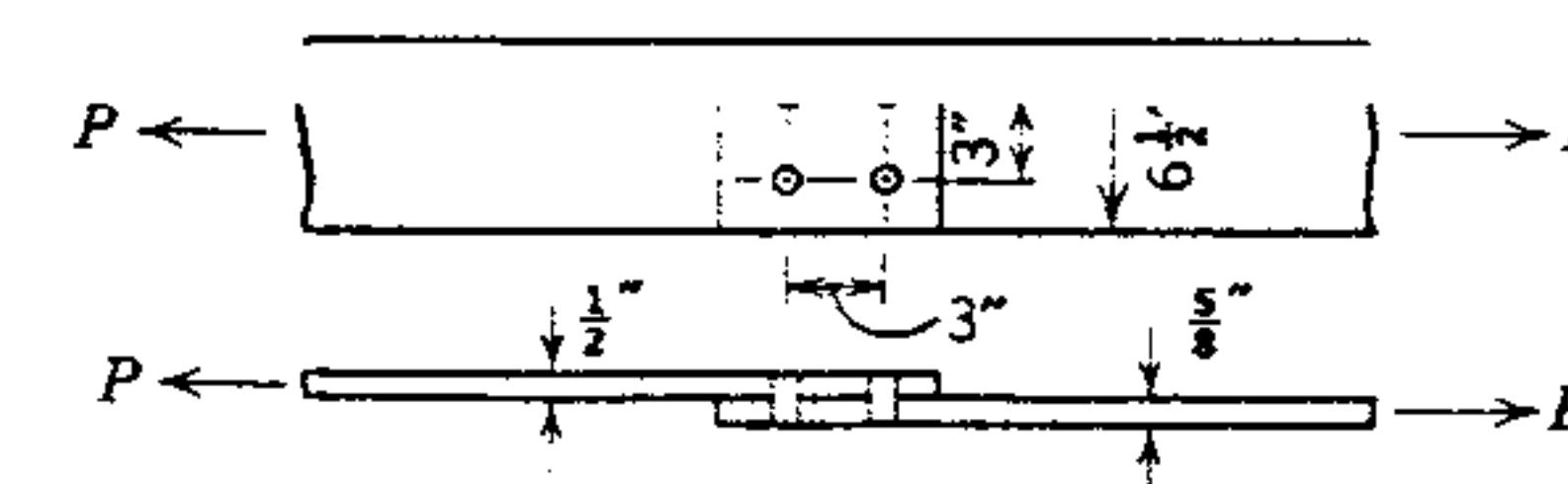


Figura 7.27



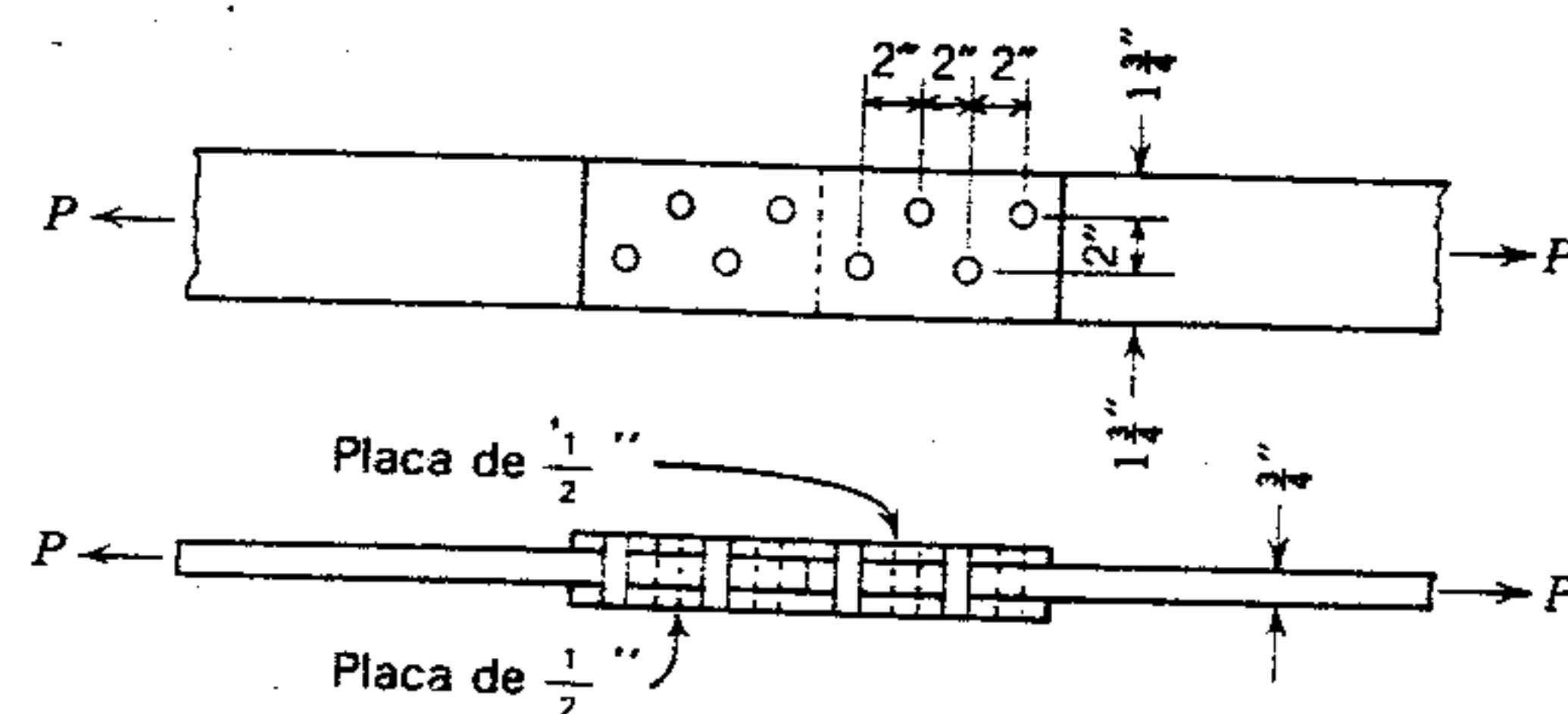


Figura 7.28

si se usan tornillos A325 de 1 pulg en una conexión a fricción con orificios estándar. El acero base es A36. Calcular la mínima distancia al extremo permitida por la Especificación AISC. (Las respuestas aparecen en el apéndice G).

- ¿Qué cambios habría en el problema 1 si se usaran remaches de 1 pulg. tipo A502-1 en lugar de los tornillos de alta resistencia?
- Determinar la fuerza máxima ( $P$ ) admisible para la junta de empalme a tope de la figura 7.28 cuando se usan tornillos de 7/8 pulg, A307, con orificios estándar. Asimismo, determinar la mínima distancia al extremo. Las placas son de acero A36 cortadas con soplete de gas. (Las respuestas aparecen en el apéndice G).
- Diseñar una junta empalmada similar a la de la figura 7.28 para una fuerza de tensión de 70 kips. Todas las placas serán de 3/8 pulg., acero A36. Usar tornillos de alta resistencia a A325 de 5/8

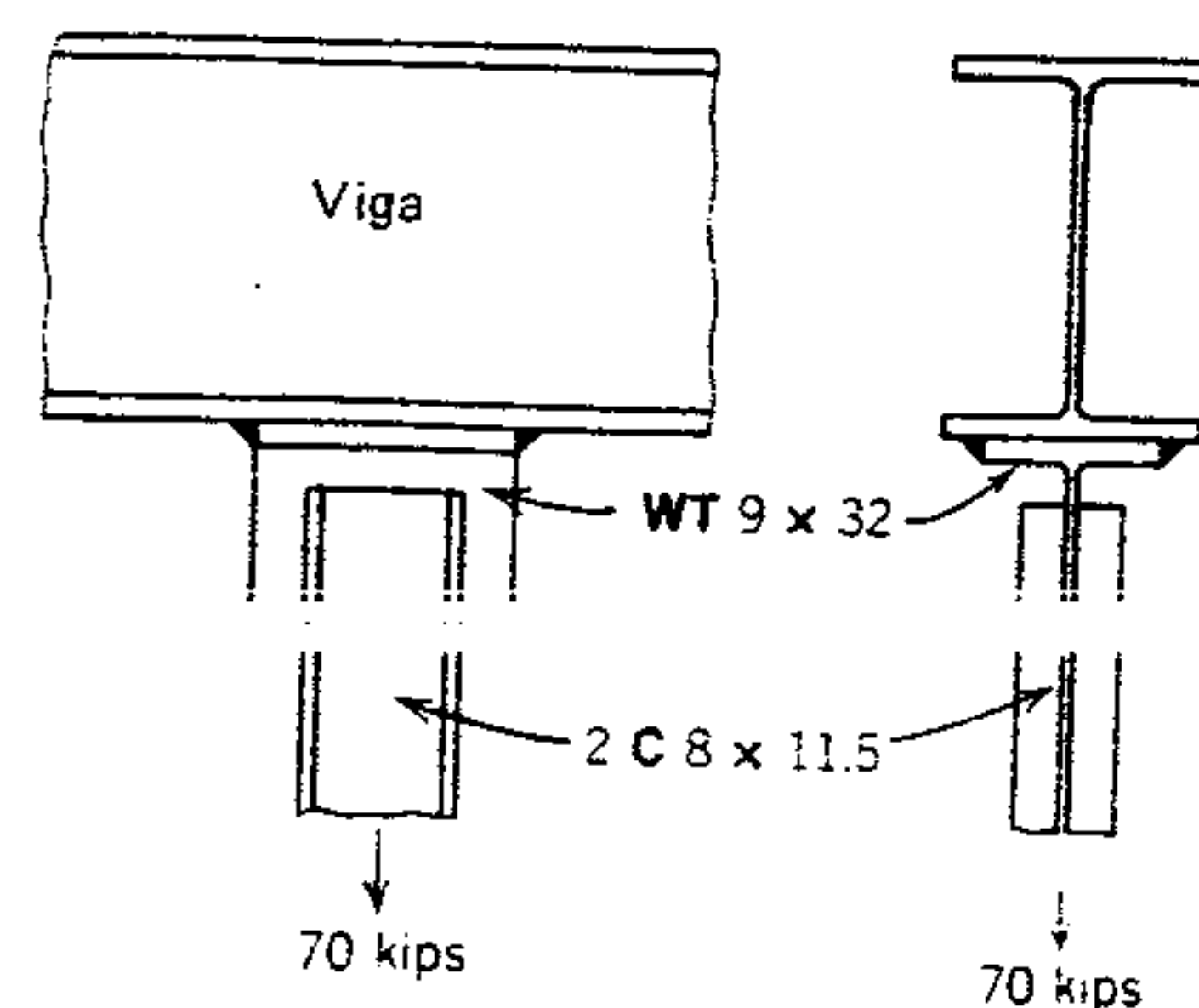
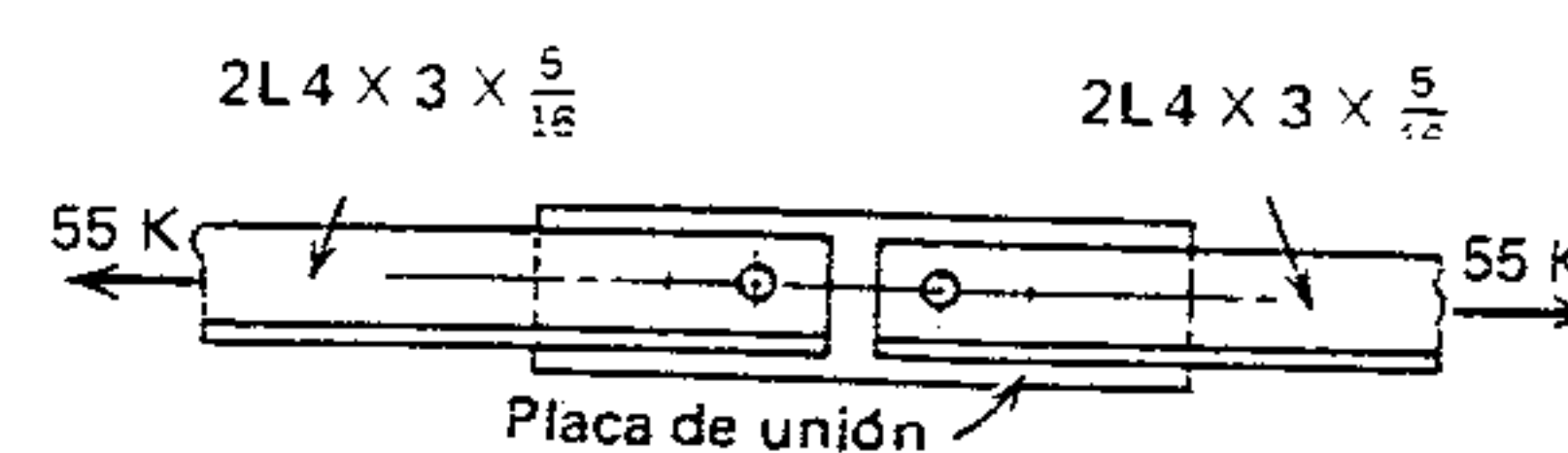


Figura 7.29

pulg. con sus roscas en el plano de cortante. La anchura máxima de placa está limitada a 10 pulg. Hacer un croquis de la junta mostrando todas las dimensiones.

- Dos canales (C8 X 11.5) están a tensión y sujetos a una te estructural (WT 9 X 30) que, a su vez, está soldada a una viga (figura 7.29). La carga total de diseño para las canales es de 70 kips. Usando tornillos de alta resistencia A325, tipo aplastamiento, determinar el número de tornillos que se necesitan para la conexión entre las canales y la te estructural y mostrar su distribución y espaciamiento. Los tornillos tienen rosca en el plano de cortante y todos los miembros son de acero A36.
- Diseñar un empalme a tensión entre dos tirantes de doble ángulo cada uno montados en una placa (figura 7.30). Usar tornillos A325 de 3/4 pulg. con rosca en el plano de cortante. Los ángulos son 2L 4 X 3 X 5/16 y soportan una carga axial de 55 kips. Todo el acero es A36. Seleccionar el espesor y los espaciamientos de una placa, de modo que no controle el aplastamiento. Detallar la conexión. (La respuesta aparece en el apéndice G).

Figura 7.30 Detalles de ángulo de conexión con sujetadores  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{7}{8}$  pulg.

## 7.14 ÁNGULOS DE CONEXIÓN-FIJADOS CON SUJETADORES

El tipo de conexión mostrado en la figura 7.6 es el que se usa con más frecuencia para conectar vigas de piso con otras vigas o trabes y columnas. Por lo general, los ángulos se usan en pares y las alas ligadas al alma del miembro soportado se llaman alas conectadas porque usualmente están sujetas al miembro desde el taller de fabricación, antes de transportar el ensamble al lugar de construcción del edificio. Las otras alas se llaman alas sobresalientes.

Cuando las alas conectadas de los ángulos están sujetas solamente al alma de la viga, se permite la suficiente rotación del extremo (sección 7.3) para que la conexión se clasifique como del tipo flexible y, por tanto, apropiado para el tipo 2 de construcción (se puede suponer que las vigas están simplemente apoyadas). Además, a menos que los ángulos de conexión estén soldados (sección 7.3), se omite cualquier excentricidad en el procedimiento del diseño, es decir, la reacción de la viga se considera como si fuera concéntrica respecto a la fila(s) de sujetadores que transfieren la carga del alma a los ángulos. Las reacciones de la viga también se pueden considerar como si fueran concéntricas con respecto a la(s) fila(s) de los sujetadores que transfieren la carga de los ángulos al miembro soportante. El espesor de los ángulos del marco se mantiene pequeño a propósito para asegurar la flexibilidad necesaria.

Los esfuerzos que se tienen que considerar son: cortante en el sujetador; aplastamiento en las almas de las vigas, en el patín de la columna y en el ángulo de conexión, el cortante bruto en la sección vertical a través del alma de la viga y los ángulos de conexión. El valor limitante del sujetador se calcula como sigue:

### A. Ala conectada

- Doble cortante para sujetadores que atraviesan el alma de la viga.
- Aplastamiento en el alma.

### B. Ala sobresaliente.

- Cortante simple para sujetadores que atraviesan el alma de la trabe o el patín de la columna.
- Aplastamiento en el alma de la trabe, patín de columna o espesor del ángulo.

Tradicionalmente, ha habido tres tamaños estándar de ángulos para marcos: 4 X 3 1/2 pulg, 4 X 6 pulg y 6 X 6 pulg. Eran los más adecuados para el uso de remaches estándar de 3/4 pulg en una o dos filas verticales, con espaciamiento adecuado y gramil estándar. Sin embargo, con la generalización de los tornillos de alta resistencia, se necesita con frecuencia el uso de otros tamaños para dejar espacio para la tuerca, la roldana, la saliente del tornillo y las llaves de impacto. Asimismo, es común encontrar líneas zigzagueantes de sujetadores entre las alas conectadas y las sobresalientes para dar el espaciamiento necesario.

Los datos de pruebas confirmatorias son incompletas en cuanto a ángulos de conexión con dos líneas de tornillos en un ala de 6 pulgadas. Por lo tanto, mientras no se disponga de estos datos, se recomienda que los tornillos se limiten a una línea en el ala conectada y una línea en cada ala sobresaliente.

Por lo general el espesor de los ángulos se selecciona de tal manera que el aplastamiento en las alas del ángulo no determinen el valor de la carga del sujetador. El espesor de los ángulos también se puede calcular limitando al esfuerzo cortante admisible a  $0.40F_y$  en el área bruta de la sección vertical a través de los ángulos de conexión. Los tamaños de ángulos y los espaciamientos de sujetadores de la figura 7.31 son recomendables a menos que una mayor investigación indique la necesidad de aumentar el espaciamiento. Se acostumbra distribuir simétricamente los sujetadores en las conexiones de vigas, aun cuando esto implique el uso de más sujetadores que los que se requieren realmente para resistir el esfuerzo total.

Cuando el patín superior está recortado como en las figuras 7.6 y 7.32, se requiere una investigación sobre el desgarramiento del alma (denominado "cortante de bloque"). La reacción de la viga no debe exceder la resistencia combinada de



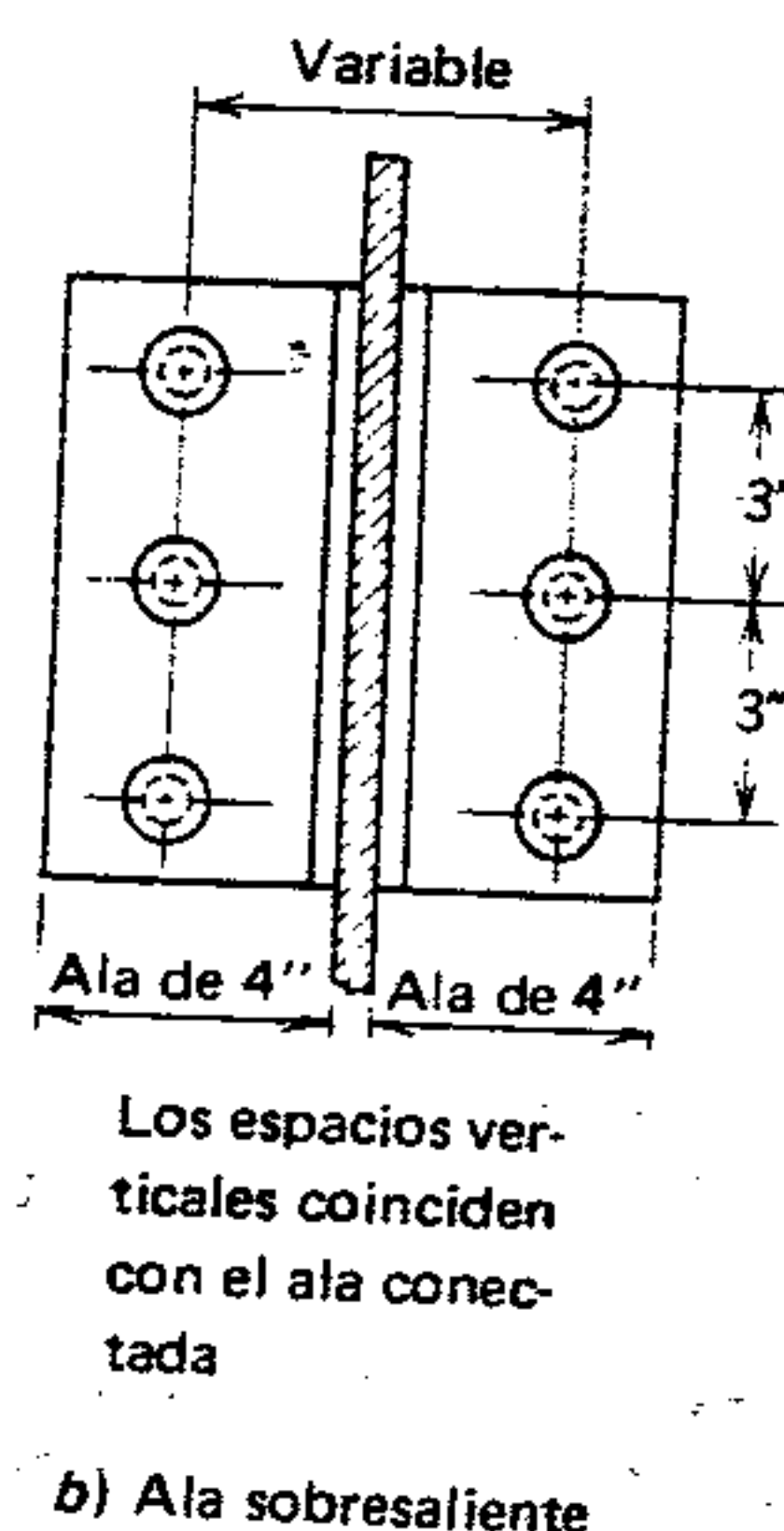
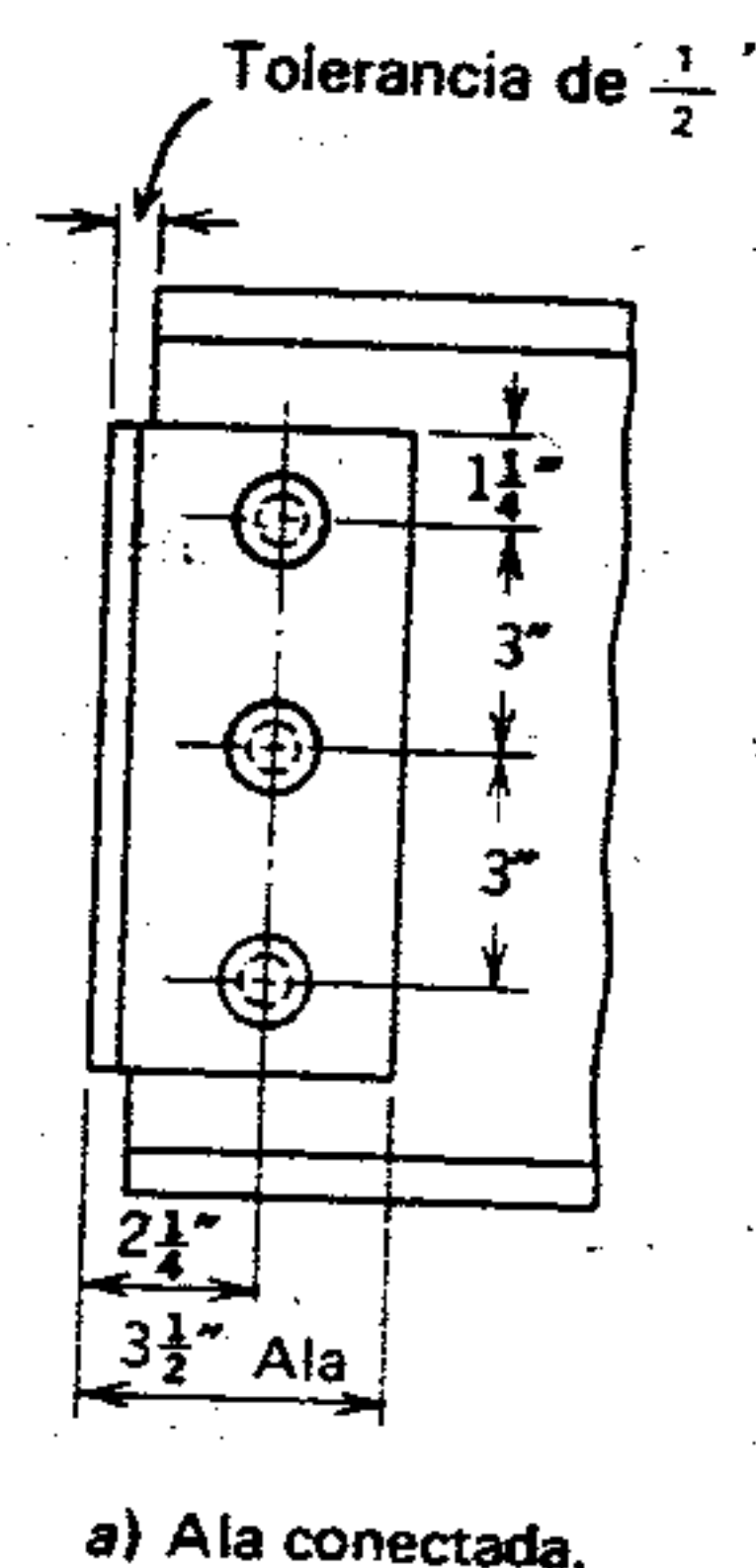


Figura 7.31

cortante y tensión en las áreas netas mostradas en la figura 7.32. En este caso, en la Especificación de AISC se limita la resistencia cortante ( $F_v$ ) al 30 por ciento de la resistencia a la tensión mínima especificada ( $F_u$ ). Expresado en forma de ecuación,

$$R = 0.30F_v A_v + 0.50F_u A_t$$

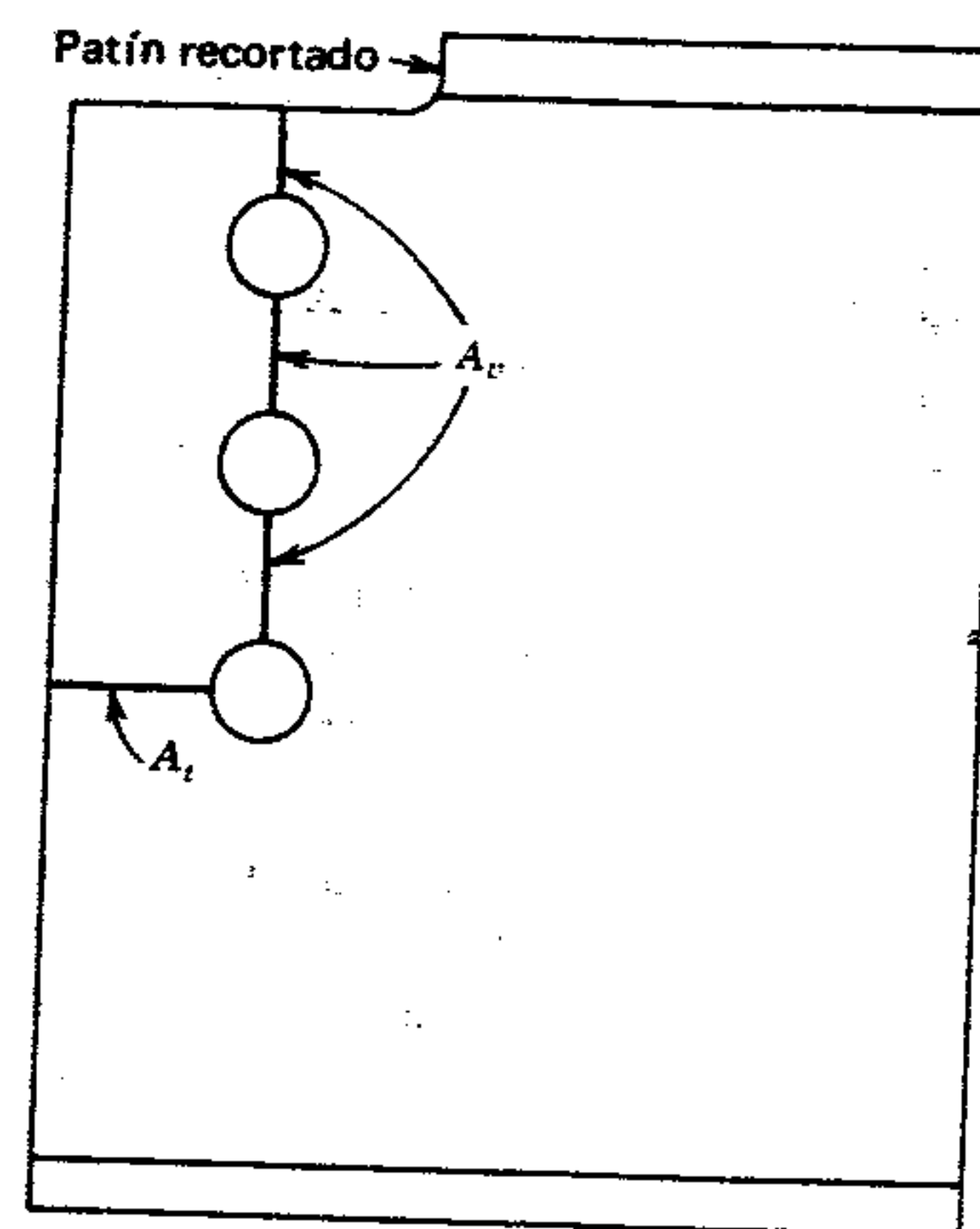


Figura 7.32 Corte de bloque.

### Ejemplo

Diseñar la conexión a base de ángulos entre una trabe W 16 X 40 y el patín de una columna W 10 X 33, ambas de acero A36. La reacción en el extremo es de 42 kips. Usar tornillos A325 de 3/4 pulg en una conexión tipo aplastamiento con rosca dentro del plano de cortante y agujeros estándar.

### Solución

1. Calcular el valor limitante de tornillo para el ala conectada.

$$BV_s = 2(21)(0.442) = 18.6 \text{ kips}$$

$$BV_b = 1.5(58)(0.75)(0.25) = 19.9 \text{ kips}$$

El valor limitante del tornillo es 18.6 kips, y el espesor mínimo del ángulo es 0.5 (0.305) = 0.153 pulg; usar 1/4 pulg.

2. Calcular el número de tornillos necesarios en el ala conectada.

$$n = \frac{42}{18.6} = 2.26; \text{ se necesitan 4 tornillos}$$

3. Calcular el valor limitante del tornillo del ala sobresaliente.

$$BV_s = 21(0.442) = 9.28 \text{ kips}$$

$$BV_b = 1.5(58)(0.75)(0.25) = 16.31 \text{ kips}$$

El valor limitante del tornillo es 9.28 kips.

4. Calcular el número necesario de tornillos en el ala sobresaliente

$$n = \frac{42}{9.28} = 4.53; \text{ se necesitan 5 tornillos, pero}$$

por simetría, usar 6.

5. Seleccionar una distribución adecuada para los tornillos y diseñar la junta de acuerdo con los detalles mostrados en la figura 7.31. La sección W 16 X 40 tiene un peralte de "T" de 13 5/8 pulg; por lo tanto, la longitud del ángulo está limitada a 13 5/8 pulg. Sin embargo, esto es adecuado para tres sujeta-

dores en una fila. En la figura 7.33 se muestra una distribución correcta, usando cuatro sujetadores en cada ala.

6. Revisar el cortante en el área bruta de los ángulos.

$$F_v = 0.4(36) = 14.4 \text{ k/pulg}^2$$

Hay dos ángulos, cada uno de 8 1/2 pulg de largo. El espesor requerido por cortante es

$$t = \frac{42}{14.5(2)(8.5)} = 0.17 \text{ pie}$$

El espesor de ángulo de 1/4 pulg es satisfactorio.

En el Manual AISC se listan conexiones de viga estándar y sus cargas respectivas para diversos tamaños de vigas, número y tipo de sujetadores, tamaño del sujetador y espesor del ángulo de conexión. En la parte 4 del Manual AISC se listan conexiones estándar de vigas que utilicen una fila de sujetadores en cada ala.

### 7.15 CONEXIONES DE PLACA EXTREMA POR CORTANTE

Las modernas técnicas de fabricación han propiciado el desarrollo de conexiones de placas extremas

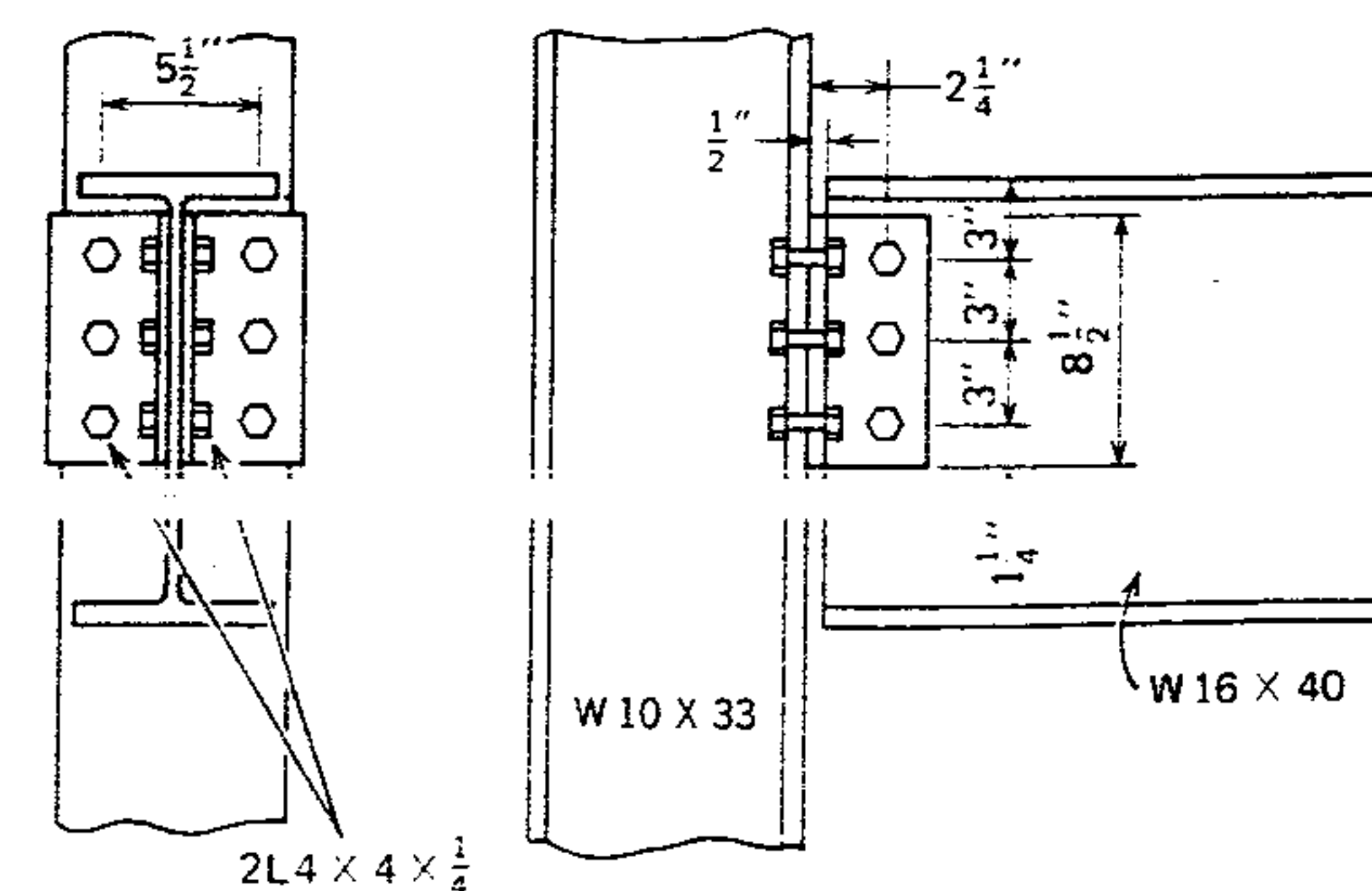


Figura 7.33 Ángulos de conexión.



en cortante (figura 7.7) y se ha comprobado que son económicas si las reacciones de la viga están dentro de un valor promedio. Éstas son conexiones de tipo flexible similares a los ángulos de conexión (sección 7.14) con una sola placa que reemplaza los pares de ángulos. Es necesario que la fabricación en taller sea precisa para asegurar que las placas, al soldarlas al alma de la viga, sean de la longitud exacta y su orientación exacta. En la sección dedicada a las conexiones soldadas se tratan detalladamente las placas de extremo (sección 7.30); por lo tanto, para presentarlas aquí, se supone que las placas están adecuadamente soldadas a la viga.

La placa se sujeta al miembro soportante por medio de tornillos estándar o de alta resistencia. Para garantizar una adecuada capacidad de rotación en los extremos, el espesor de la placa se limita a 3/8 pulg, el peralte de la placa a  $T = d - 2k$ , y sólo se permiten dos filas de tornillos. El espaciamiento transversal debe estar entre 3 1/2 y 5 1/2 pulg, y la distancia al borde debe ser de 1 1/4 pulg (figura 7.34).

Con las especificaciones descritas aquí, se supone que no hay excentricidad en el procedimiento de diseño y que los esfuerzos son los siguientes:

1. Cortante en los tornillos (cortante simple).
2. Aplastamiento en el espesor de la placa de extremo o espesor del miembro soportante, es decir, patín de la columna o alma de la trabe.

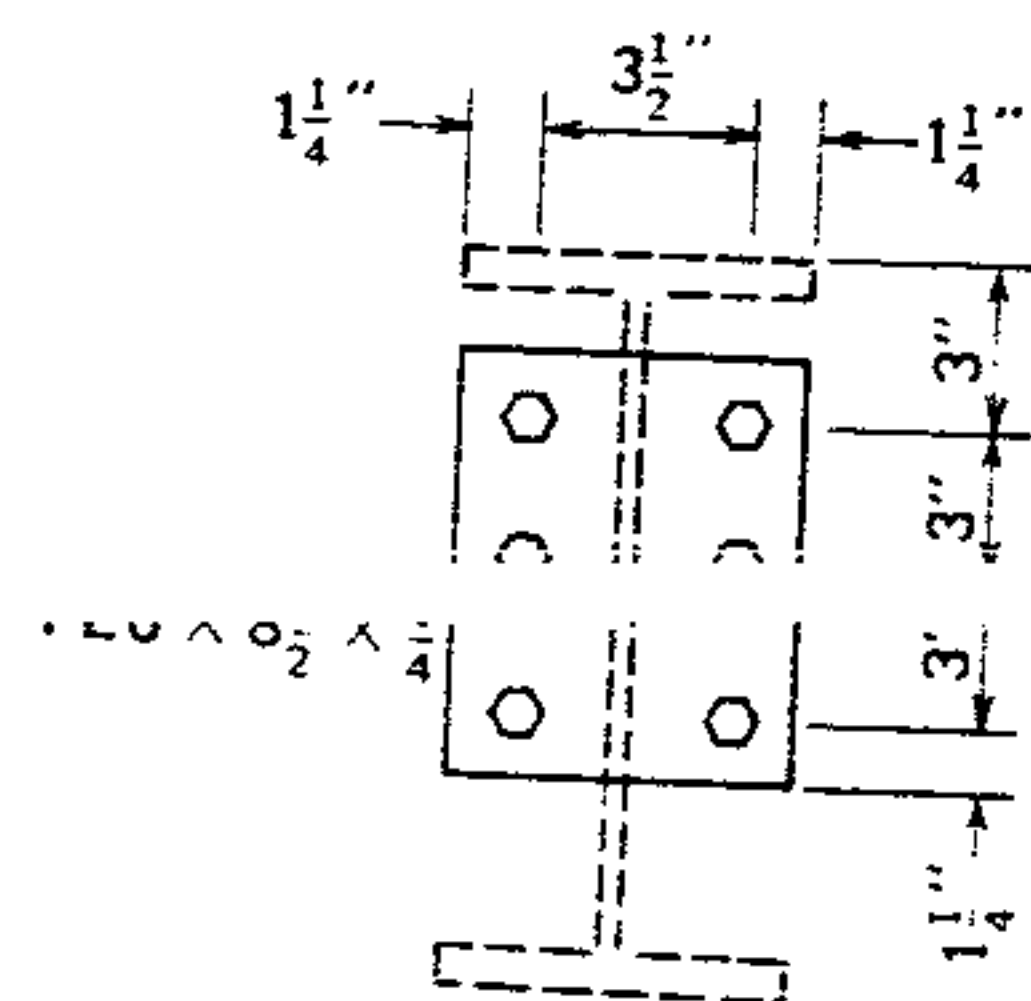


Figura 7.34 Placa cortante de extremo.

### Ejemplo

Diseñar la conexión con una placa de extremo en cortante entre una viga W 14 X 34 y el patín de una columna W 8 X 28, ambas de acero A36. La reacción en el extremo es de 43 kips. Usar tornillos A325 de 3/4 pulg en una conexión tipo aplastamiento con la rosca dentro del plano de cortante y orificios estándar.

### Solución

1. Calcular el valor del tornillo en cortante simple.

$$BV_s = 9.3 \text{ kips}$$

2. Establecer el espesor de la placa mediante el cálculo de un espesor y espaciamiento de tornillos tal que asegure que el cortante determine el valor del tornillo. En las tablas de tornillos (aplastamiento), los de acero A36 de 3/4 pulg y espaciamiento de 3 pulg, con espesor de 3/16 pulg tienen un valor de tornillo de 12.2 kips que se podría adoptar. Sin embargo, para permitir la soldadura adecuada en el alma de la viga (sección 7.30), se seleccionará una placa de 1/4 pulg.
3. Calcular el número necesario de tornillos

$$n = \frac{43}{9.3} = 4.62; \text{ se necesitan 6 tornillos}$$

4. Revisar el peralte de la placa en función de las dimensiones de la viga y otros detalles.

Peralte de la viga

$$T = d - 2k = 14 - 2(1) = 12 \text{ pulg}$$

Peralte permisible de la placa

$$T = 12 \text{ pulg}$$

Como  $8 \frac{1}{2} < 12$  pulg, está correcto. (Para más detalles, véase la figura 7.34).

El Manual AISC contiene una tabla de cargas admisibles para conexiones de placa extrema en cortante estándar para tornillos de 3/4 y 7/8 pulg, usando valores de  $F_y = 36$

### 7.16 ASIENTOS FLEXIBLES PARA VIGAS

Estas conexiones (figura 7.8) también permiten la libre rotación del extremo necesario para la construcción tipo 2. Una ventaja de usar asientos para vigas es que cuentan con superficie sobre la cual apoyar la viga durante el montaje, eliminando así la necesidad de grapas o tornillos temporales de montaje. La viga transmite toda su carga por apoyo directo al ángulo de asiento; el ángulo superior se usa sólo para dar apoyo lateral a la viga.

El ángulo de asiento tiene su ala conectada sujeta al miembro soportante (columna o alma de trabe) desde la fábrica. Usualmente es suficiente un ala sobresaliente (asiento) de 4 pulg con un mínimo de dos sujetadores para la sujeción entre asiento y viga. En realidad, no hay carga sobre los sujetadores del ala sobresaliente, cuando se considera la reacción de la viga. La viga debe tener una tolerancia de 1/2 pulg respecto al miembro soportante y, con frecuencia, se usa una de 3/4 pulg. Por lo tanto, sólo se dispone para el diseño de la longitud de apoyo de 3 1/4 pulg. Si esto no es suficiente para evitar el aplastamiento del alma (sección 5.8)

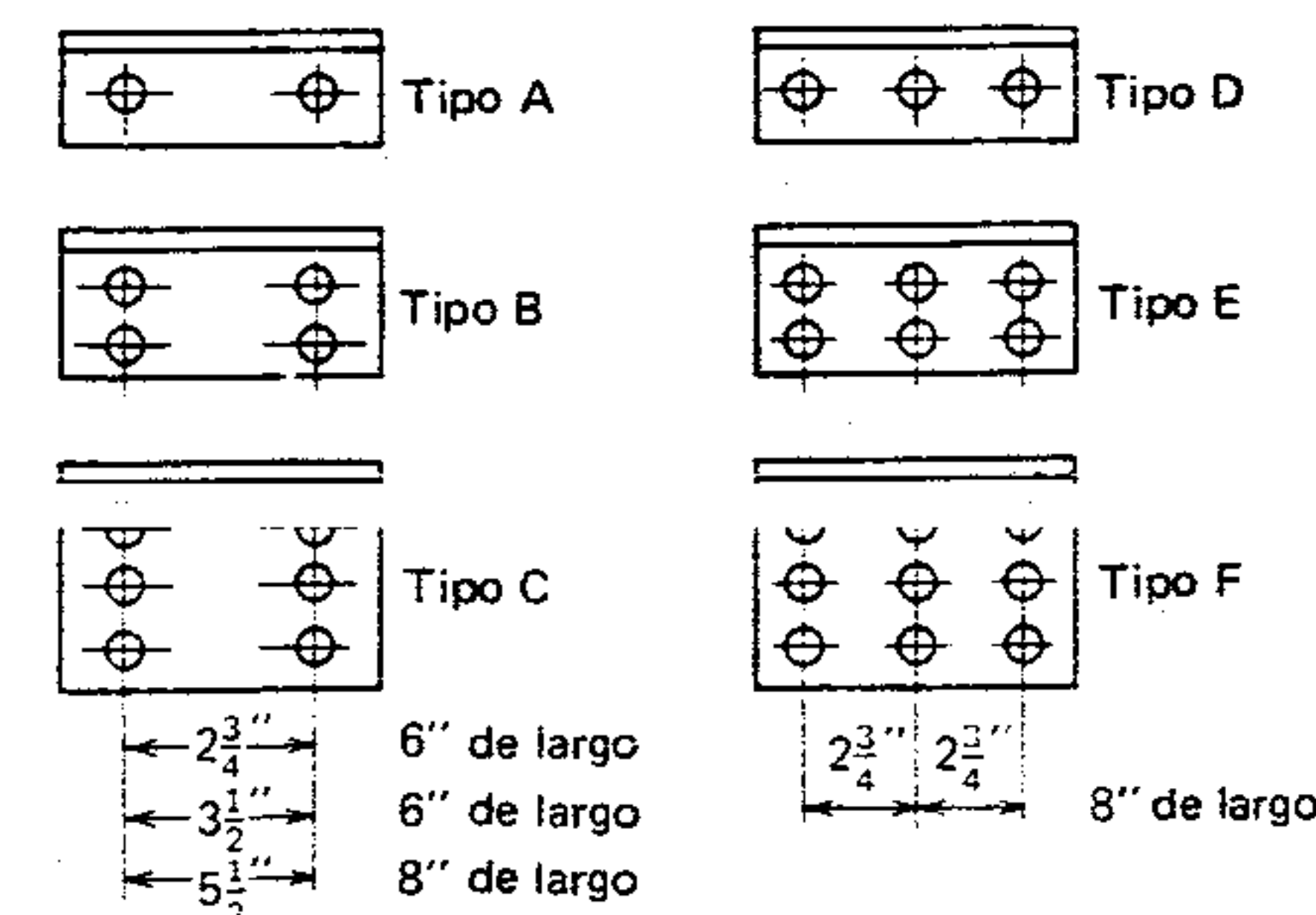


Figura 7.35 Asientos de viga estándar del AISC.

de la viga, se tendrá que usar un ala sobresaliente más grande.

El ala conectada del asiento de la viga debe ser suficientemente grande para aceptar el número de sujetadores necesario para transferir la reacción de la viga al miembro soportante. Usualmente se emplean 1, 2 ó 3 líneas de sujetadores, en dos o tres filas. En la figura 7.35 se muestran seis tipos estándar del Manual AISC, con sus tablas de carga admisibles correspondientes. Por supuesto, los tipos D, E y F no se pueden usar sobre los patines de las columnas, pues la fila central de sujetadores interferiría con el alma de la columna. También se usan tamaños diferentes a los que se muestran. Los sujetadores se diseñan para la fuerza cortante directa de la reacción y como el asiento es flexible, se supone que no se desarrollan esfuerzos adicionales en los sujetadores, debido a la excentricidad de la reacción.

El espesor del propio ángulo de asiento debe ser suficiente para asegurar que el ala sobresaliente no fallará ante la flexión. Esto se logra limitando el esfuerzo flexionante máximo en el extremo del filete a  $0.75 F_y$  (figura 7.36). El asiento actuará en voladizo, con una longitud  $e_b$ , o sea la distancia desde el exterior del filete del ángulo de asiento (sección crítica) a  $R$ , que está situada en el centro de la longitud de apoyo ( $N$ ) (figura 5.17a). Esto se puede expresar como

$$e_b = \frac{1}{2} + \frac{N}{2} - t - \frac{3}{8} \text{ pulg}$$

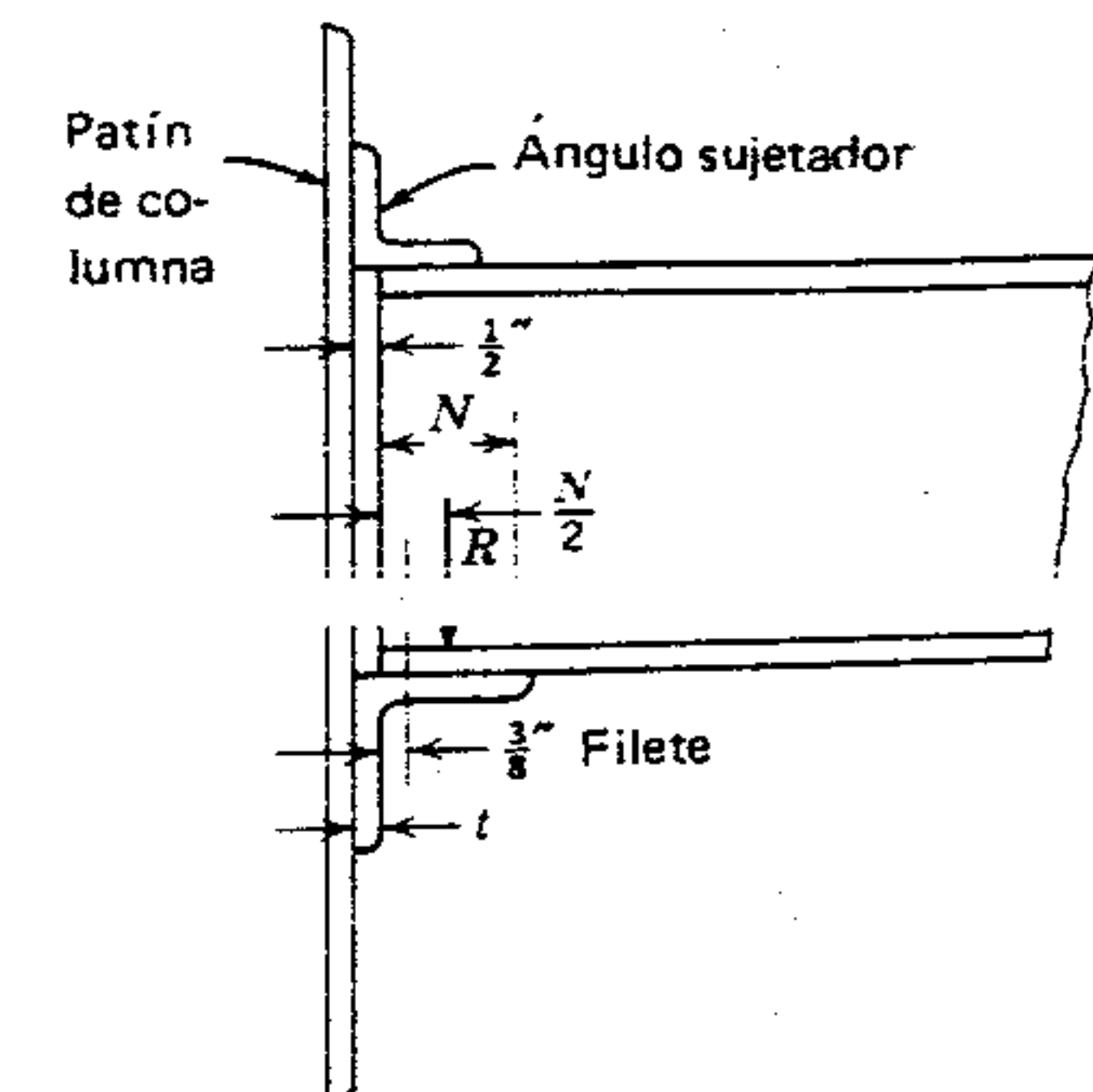


Figura 7.36 Diseño de asiento flexible para viga.



Entonces,

$$M = e_b(R)$$

El esfuerzo flexionante en el ángulo de asiento no debe exceder de  $0.75F_y$ ; por lo tanto

$$0.75F_y = \frac{M}{S} = \frac{e_b R}{bt^2/6}$$

donde  $b$  = anchura del asiento de la viga.

Por lo común, los asientos de vigas tienen una anchura ( $b$ ) igual a la longitud de 6 ó 8 pulg de la figura 7.35, o al patín de la columna.

### Ejemplo

Diseñar una conexión de asiento de viga similar a la de la figura 7.36 para una viga W 12 X 26 con reacción de 21 kips y una columna W 8 X 31, ambas de acero A36. Usar tornillos A325 de 3/4 pulg en la conexión tipo aplastamiento con rosca en el plano de cortante y orificios estándar.

### Solución

1. Calcular la longitud del soporte extremo ( $N$ ) necesario para evitar el aplastamiento del alma.

$$N = \frac{R}{0.75F_y t} - k$$

$$= \frac{21}{0.75(36)(0.23)} - \frac{7}{8}$$

$$= 2.51 < 3\frac{1}{4} \text{ pulg.}, \text{ usar } 4 \text{ pulg.}$$

Nótese que en este cálculo, el valor de  $t$  es el espesor del alma de la viga (sección 5.8).

2. Calcular la excentricidad.

$$e_b = \frac{1}{2} + \frac{2.51}{2} - t - \frac{3}{8} = 1.38 - t$$

3. Hay dos valores desconocidos para el asiento de la viga, el espesor ( $t$ ) y la anchura ( $b$ ). Es

necesario darle un valor supuesto a uno antes de evaluar el otro. Algunos diseñadores prefieren estimar valores para ambos y revisarlos comparando  $f_{m\acute{a}x}$  con  $0.75F_y$ . En la solución que se ilustra aquí, suponer un ancho igual al del patín de la columna, o sea 8 pulg.

$$0.75F_y = \frac{e_b R}{bt^2/6}$$

$$0.75(36) = \frac{(1.38 - t)21}{8t^2/6}$$

Resolviendo para  $t$

$$0.75(36)8(t^2) = (1.38 - t)21(6)$$

$$216t^2 = 174 - 126t$$

$$t^2 + 0.58t = 0.81$$

Completando el cuadrado

$$t^2 + 0.58t + \left(\frac{0.58}{2}\right)^2 = 0.81 + \left(\frac{0.58}{2}\right)^2$$

$$(t + 0.29)^2 = 0.89$$

$$t + 0.29 = \pm 0.95$$

$$t = 0.66 \text{ pulg.}; \text{ usar } \frac{3}{4} \text{ pulg.}$$

4. Determinar el valor limitante del tornillo.

$$BV_s = 9.3 \text{ kips}$$

$$BV_b\left(\frac{7}{16} \text{ pulg}\right) = 28.5 \text{ kips}$$

$$BV = 9.3 \text{ kips}$$

5. Calcular el número de tornillos necesarios en el ala conectada.

$$n = \frac{21}{9.3} = 2.26; \text{ se necesitan 4 tornillos}$$

6. Detallar la conexión. Usar un ángulo de asiento de 8 X 4 X 3/4 pulg, con cuatro tornillos A325-N de 3/4 pulg. Con una distribución similar a la del tipo B (figura 7.32).

### PROBLEMAS

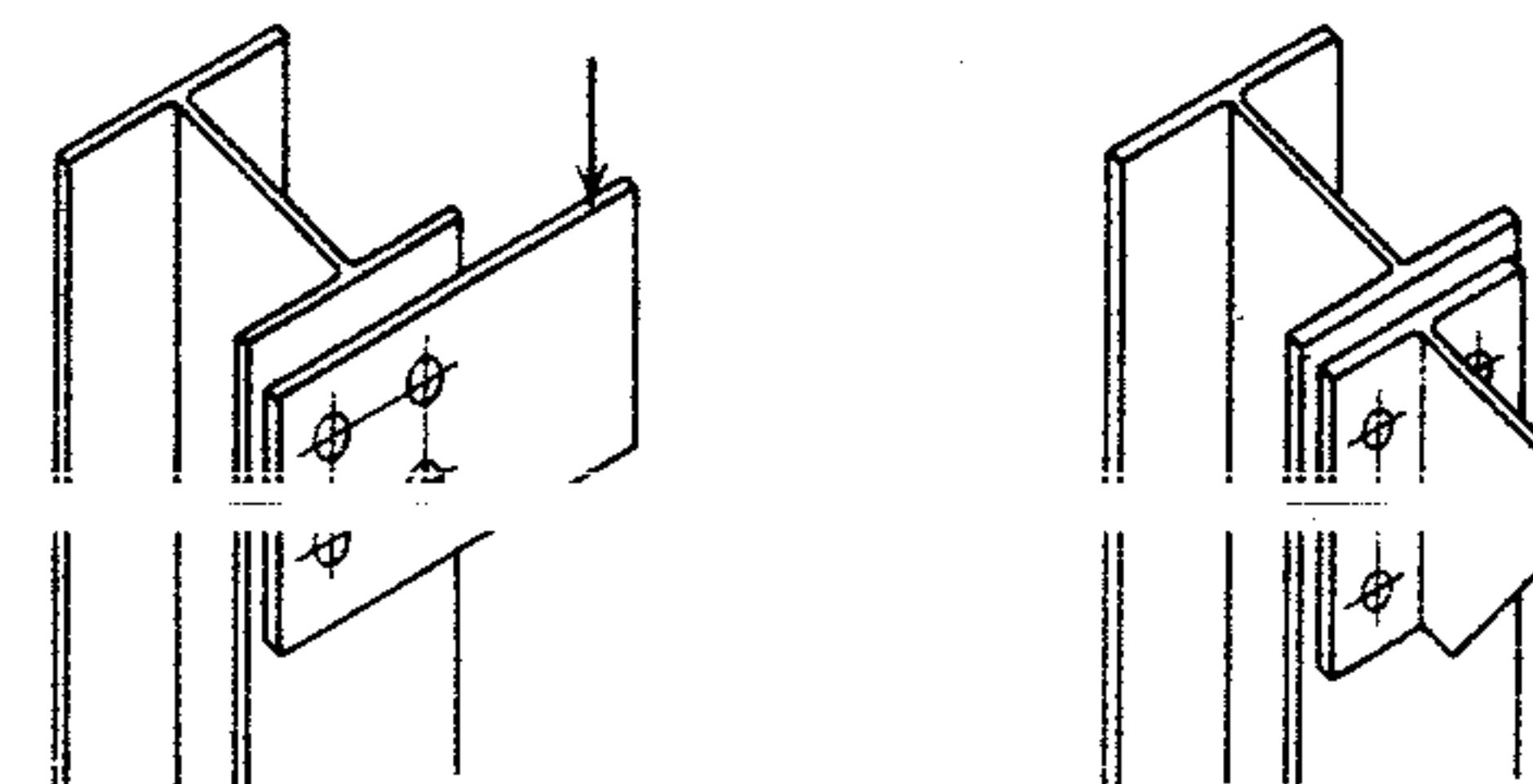
1. Diseñar una conexión a base de ángulo entre una viga (W 12 X 53) y el patín de una columna (W 10 X 49), ambas de acero A36. La reacción de la viga es de 42 kips. Usar tornillos A325 de 7/8 pulg, de alta resistencia, en una conexión tipo aplastamiento con rosca dentro del plano del cortante. (La respuesta se da en el Apéndice G).
2. Dos vigas W 14 X 22, cada una con una reacción de 40 kips, se conectan con una trabe W 16 X 40 de una manera similar a la que se muestra en la figura 7.6b. Todo el acero es A588, grado 50. Determinar el tamaño de los tornillos A490 necesarios, en una conexión tipo aplastamiento con rosca en el plano del cortante y orificios estándar. Usar 3 tornillos en el ala conectada y seis tornillos en las alas sobresalientes. (La respuesta se da en el Apéndice G).
3. Diseñar una conexión de placa extrema en cortante para atornillar en campo una viga W 12 X 45 al patín de una columna W 10 X 45, ambas de acero A36. La reacción de la viga es de 24 kips. Usar tornillos estándar A307.
4. Diseñar un asiento flexible para una viga W 10 X 15 de acero A36 con una reacción máxima de 20 kips, conectada a una columna W 8 X 24 de acero A36. Usar tornillos estándar A307 de 7/8 pulg.
5. Dos vigas W 10 X 22 con reacciones de 26 kips cada una, se conectan una de cada lado al alma de una trabe W 18 X 35. Los patines superiores de las vigas y trabe están a paño. Todo el acero es A36. Diseñar asientos de vigas usando tornillos

A325 de 3/4 pulg, tipo aplastamiento, con rosca en el plano de cortante. (La respuesta se da en el Apéndice G).

6. Una viga de fachada C10 X 15.3 está conectada al patín de una columna W 8 X 35 de manera similar a la mostrada en la figura 7.10. Ambas son de acero A36. En esta conexión directa, sólo se van a usar 3 sujetadores. La reacción de la viga es de 24 kips. Determinar el diámetro requerido para cada uno de los siete diferentes tipos de tornillo. (A307; A325-X, N y F; y A490-X, N y F). Usar un espaciamiento de 3 pulg y orificios estándar.

### 7.17 CONEXIONES EXCÉNTRICAS DE SUJETADOR

En todas las conexiones consideradas hasta aquí, los sujetadores están distribuidos simétricamente respecto a la línea de acción de la fuerza. En estas condiciones, el esfuerzo en una junta está uniformemente distribuido entre los sujetadores. Sin embargo, con frecuencia sucede que las vigas están fuera de los ejes centrales de las columnas, a tal grado que no se pueden conectar directamente al patín de la columna. Cuando esto ocurre, es necesario usar alguna forma de conexión excéntrica como la mostrada en la figura 7.37 a) o b), donde la carga excéntrica (indicada aquí esquemáticamente) es perpendicular a la placa o ménsula (figura 7.11). Existe una diferencia especial en el diseño



a) Carga en el plano de cortantes del sujetador. b) Carga fuera del plano de cortantes del sujetador.

Figura 7.37 Conexiones excéntricas con sujetadores.



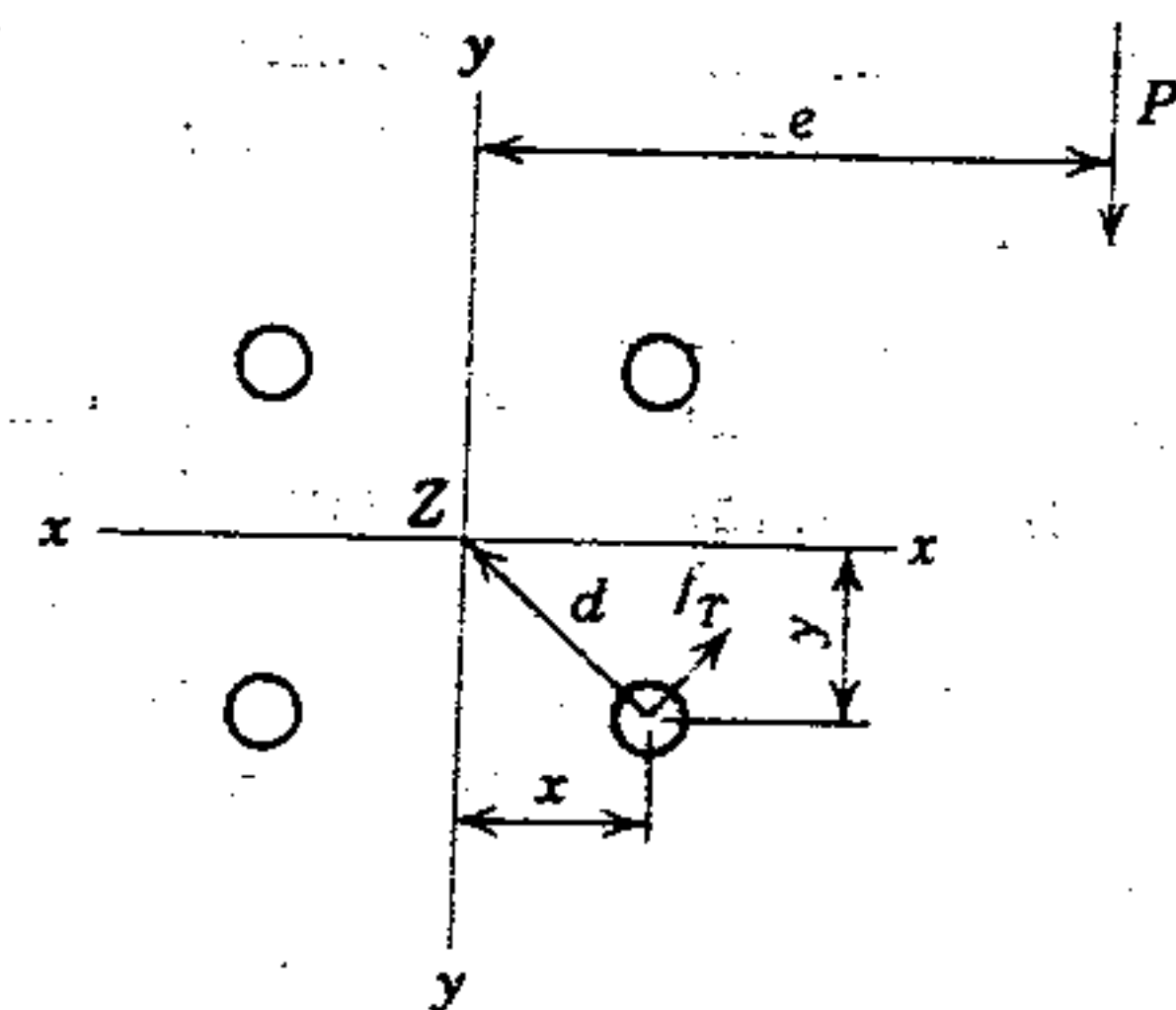


Figura 7.38 Esfuerzo de torsión.

de la conexión, depende de si la carga actúa dentro o fuera del plano que pasa por el área cortante de los vástagos de los sujetadores.

Cuando la carga excéntrica actúa en el plano cortante de los sujetadores, como se ve en la figura 7.37a, la placa gira, produciendo un cortante adicional sobre los sujetadores. Cuando la carga excéntrica actúa fuera del plano de cortante de los sujetadores, como en la figura 7.37b, se separan las superficies de contacto entre los miembros, sometiendo al sujetador tanto a tensión como a esfuerzo cortante. Se supone que el fenómeno estructural descrito aquí ocurre en todas las conexiones de sujetador excéntricas y es válido para todos los tipos de sujetadores.

## 7.18 CARGA EN EL PLANO CORTANTE DEL SUJETADOR

La acción de rotación causada por la carga excéntrica que actúa en el plano de cortante del sujetador se denomina par de torsión. Este par de torsión es igual al producto de la carga  $P$  y la distancia excéntrica  $e$ , medida desde el centro de gravedad del grupo de sujetadores ( $Z$ ), perpendicularmente a la línea de acción de la carga (figura 7.38).

El esfuerzo total de cada sujetador se compone de dos partes: el esfuerzo uniforme ordinario (la carga dividida entre el número de sujetadores) y el esfuerzo del par de torsión que varía con la distancia del sujetador al centro de gravedad del grupo. La junta estará proporcionada de modo que

la resultante de estas dos componentes sobre cualquier sujetador no exceda del valor del sujetador máximo permisible, determinado por cortante o por aplastamiento.

Los esfuerzos en los sujetadores, producidos por el par de torsión, se pueden calcular como se ve a continuación. Si el grupo de cuatro tornillos, ilustrado diagramáticamente en la figura 7.38, representa a cualquier grupo de sujetadores en que todos los sujetadores son del mismo tamaño,

- $P$  = carga a soportar
- $Z$  = centro de gravedad del grupo de tornillos.
- $e$  = distancia excéntrica a la carga  $P$ .
- $x, y$  = coordenadas de cualquier tornillo en relación a el origen  $Z$ .
- $d$  = distancia polar de cualquier tornillo respecto al origen ( $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ ).
- $f_0$  = esfuerzo del par de torsión en un tornillo a una distancia unitaria de  $Z$ .
- $f_T$  = esfuerzo de torsión en cualquier tornillo.

El esfuerzo de torsión en cualquier tornillo es proporcional a la distancia del tornillo desde el centro de gravedad del grupo, y es igual a la distancia de  $Z$  multiplicada por el esfuerzo de torsión en un tornillo a una distancia unitaria de  $Z$ , o sea

$$f_T = f_0 d = f_0 \sqrt{x^2 + y^2}$$

El momento resistente para este esfuerzo de cualquier tornillo es

$$f_T d = f_0 d^2 = f_0 [\sqrt{x^2 + y^2}]^2 = f_0 (x^2 + y^2)$$

El momento resistente total de todos los tornillos del grupo es igual al par de torsión aplicado, o sea

$$Pe = f_0 (\sum x^2 + \sum y^2)$$

$$f_0 = \frac{Pe}{\sum x^2 + \sum y^2}$$

Una vez calculado  $f_0$  con la fórmula anterior, el esfuerzo de torsión  $f_T$  en cualquier tornillo se encuen-

tra multiplicando este valor por la distancia del tornillo al origen. Este esfuerzo actúa en una línea perpendicular a la línea trazada desde el tornillo al centro de gravedad del grupo, como se indica en la figura 7.38.

Para calcular el esfuerzo total resultante en cualquier sujetador, es necesario dividir primero el esfuerzo del par de torsión en sus componentes verticales y horizontales. Luego el esfuerzo uniforme sobre el sujetador (carga vertical dividida entre el número de sujetadores) se suma a la componente vertical del esfuerzo de torsión, para obtener la componente vertical total. La resultante de esta componente vertical y la componente horizontal del esfuerzo de torsión se encuentra mediante la aplicación de la conocida ecuación

$$R = \sqrt{V^2 + H^2}$$

La resultante total del esfuerzo también se puede calcular gráficamente. Es este esfuerzo total resultante  $R$  el que debe ser igual o menor que el valor máximo permisible del sujetador, determinado ya sea por cortante o por aplastamiento. Como no todos los sujetadores estarán sometidos igualmente al mismo esfuerzo, es importante calcular qué sujetador tiene el máximo esfuerzo resultante. Después de analizar todo el grupo de sujetadores, se puede establecer que este sujetador crítico (con el máximo esfuerzo resultante) es el más lejano del centro de gravedad del grupo y el más cercano a la carga excéntrica aplicada.

### Ejemplo

Calcular el esfuerzo resultante sobre el tornillo  $B$  en la conexión excéntrica de la figura 7.39. Comparar este esfuerzo con el valor permisible si se

A36 y el patín de la columna tienen cada uno 3/8 pulg de espesor.

### Solución

1. El centro de gravedad del grupo de tornillos está en  $Z$ . Calcular el valor de  $f_0$ .

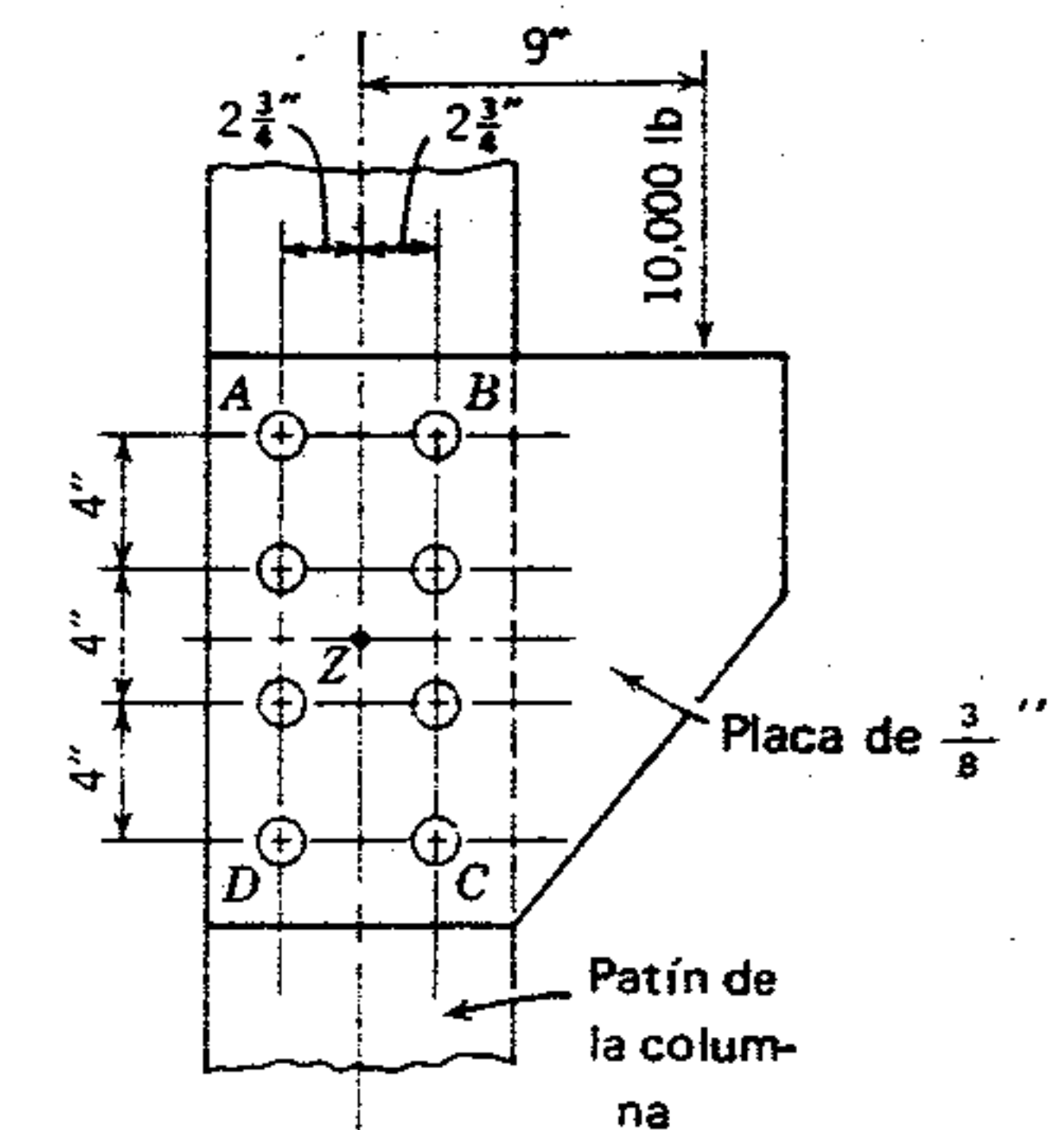


Figura 7.39

$$\sum x^2 = 8(2\frac{1}{2})^2 = 60.5 \text{ pulg}^2$$

$$\sum y^2 = [4(6)^2] + [4(2)^2] = 160 \text{ pulg}^2$$

$$f_0 = \frac{Pe}{\sum x^2 + \sum y^2} = \frac{10,000(9)}{220.5} = 408 \text{ lb por pulg.}$$

2. Calcular el esfuerzo de torsión ( $f_T$ ) en el tornillo  $B$ . La distancia de  $B$  a  $Z$  es

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2.75^2 + 6^2} = 6.6 \text{ pulg}$$

y el esfuerzo de torsión es

$$f_T = f_0 d = 408(6.6) = 2690 \text{ lb}$$

3. Descomponer el esfuerzo de torsión en sus componentes vertical y horizontal. (Debe tenerse presente que la dirección del esfuerzo de torsión forma un ángulo recto respecto a la línea que une el tornillo con el centro de gravedad del grupo.) La componente horizontal es

$$2690(6.0/6.6) = 2450 \text{ lb,}$$

y la componente vertical es

$$2690(2.75/6.60) = 1120 \text{ lb.}$$



4. El esfuerzo vertical uniforme en el tornillo es

$$\frac{10,000}{8} = 1250 \text{ lb}\uparrow$$

La componente vertical total es

$$1250 + 1120 = 2370 \text{ lb}\uparrow$$

El esfuerzo resultante es

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{2370^2 + 2450^2} \\ = 3410 \text{ lb} \searrow$$

5. Comparar este esfuerzo resultante con el valor del tornillo. Del Manual AISC,

$$BV_s = 4.4 \text{ kips}$$

$$BV_b = 24.5 \text{ kips}$$

Es obvio que el esfuerzo resultante está dentro del valor del tornillo determinado por cortante simple. Sería un excelente ejercicio calcular el esfuerzo resultante total para otros tornillos del grupo, como A, D y C.

Este procedimiento se puede aplicar para determinar con seguridad la idoneidad de las conexiones excéntricas.

Pruebas de laboratorio han demostrado que los resultados son conservadores. Además, este procedimiento de diseño no da como resultado conexiones indebidamente grandes o costosas. Sin embargo, los resultados de las pruebas también han demostrado que el factor de seguridad no permanece constante. Por lo tanto, el AISC permite los siguientes dos métodos alternativos de diseño.

El "Método elástico modificado" comprende una excentricidad efectiva reducida. El Manual del AISC proporciona fórmulas empíricas para calcular

las tablas de cargas contenidas en la antigua edición (séptima) del manual se basaban en este método de diseño de excentricidad efectiva. Otro método, presentado por primera vez en la octava edición del Manual AISC, se basa en la resistencia última de

diseño, utilizando el análisis plástico, similar al descrito en el capítulo 11. En la octava edición del Manual se describen ambos métodos y se dan tablas de constantes para usarlas en el diseño.

### 7.19 CARGA FUERA DEL PLANO DE CORTANTE DEL SUJETADOR

Por lo general, las conexiones que soportan cargas fuera del plano del cortante del sujetador son del tipo mostrado en la figura 7.37b, empleando una Te estructural; del tipo de la figura 7.40, en que la placa está entre los dos ángulos, o del tipo de asiento rigidizado de que se muestra en la figura 7.9. Los sujetadores conectados al patín de la columna están sujetos a una carga fuera del plano de cortante.

La carga excéntrica tiende a separar la ménsula del patín de la columna en la parte superior y a oprimir la ménsula contra el patín en la parte inferior. Por lo tanto, empezando en la parte superior y desplazándose hacia abajo, los sujetadores están sometidos a una fuerza de tensión decreciente. La carga también somete a los sujetadores al esfuerzo cortante directo.

Existe cierta controversia respecto al procedimiento apropiado para el diseño de conexiones de este tipo. Además de la incierta distribución de esfuerzos de tensión sobre los sujetadores y la distribución de esfuerzos de aplastamiento producidos por la ménsula que oprime contra el patín de la columna, el grado inicial de tirantez o de presfuerzo

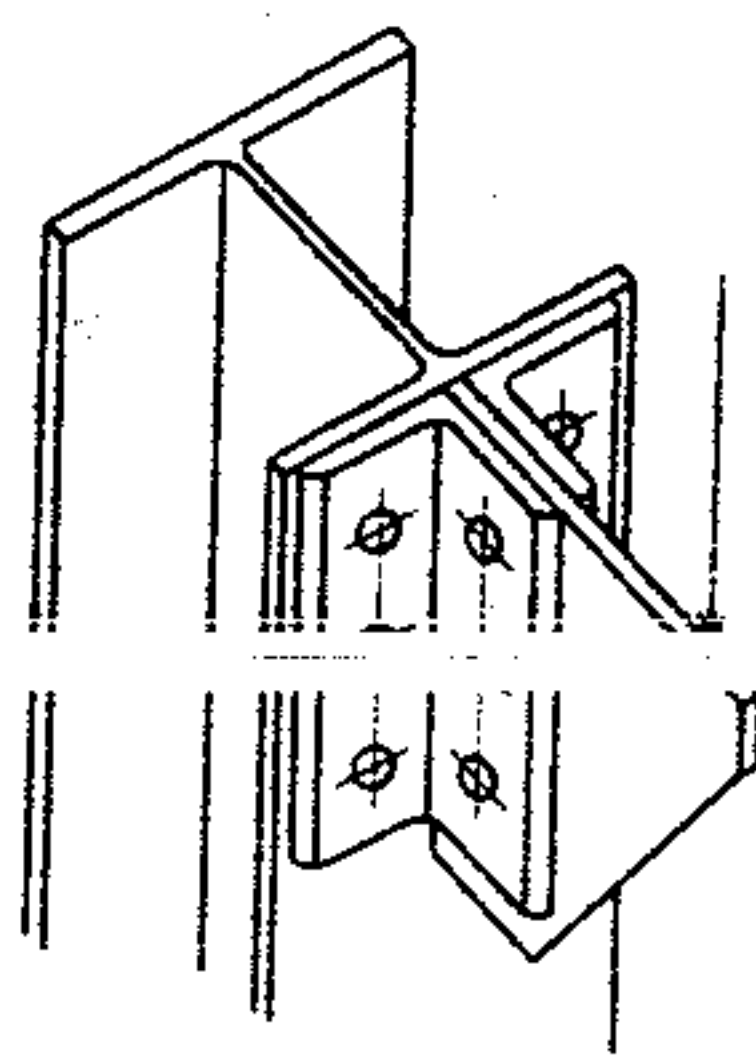


Figura 7.40 Ménsula de placa y ángulo.

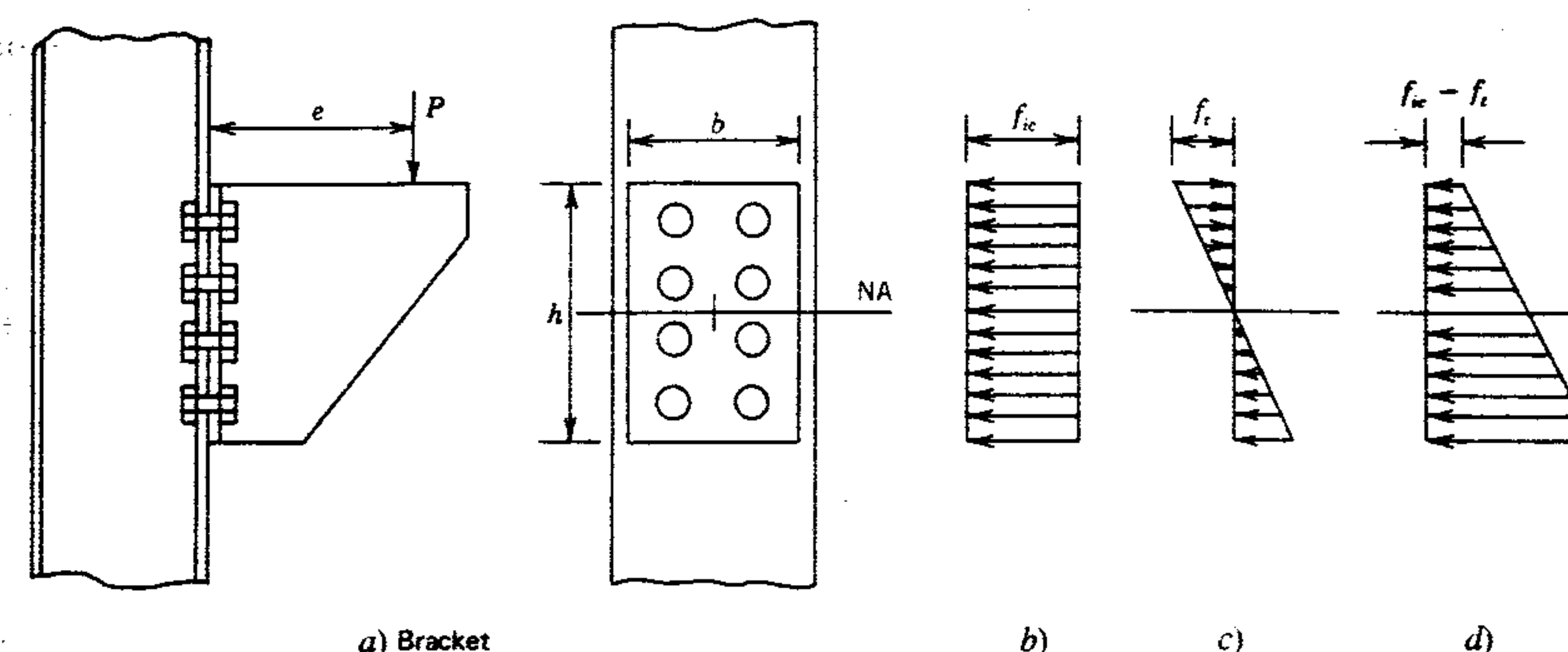


Figura 7.41 Tornillos a tensión y cortante.

puede ser diferente en los sujetadores aislados. Cada uno de estos factores influye en la situación del eje neutro relacionado con la distribución del esfuerzo.

Se dijo ya que los remaches se usan raras veces en los edificios actuales y que no se recomienda el uso de tornillos A307 a tensión. Por lo tanto, este estudio estará limitado a los tornillos de alta resistencia sometidos a tensión y cortante (figura 7.41). Los tornillos de alta resistencia siempre deben estar pretensados al 70 por ciento de su capacidad de tensión, estén o no clasificados como del tipo a fricción o aplastamiento. Por lo tanto, el análisis del esfuerzo cortante y esfuerzo de tensión desarrollados ( $f_v$  y  $f_t$ ) es el mismo en ambos tipos. Es el esfuerzo permisible el que distingue uno del otro. De acuerdo con procedimientos anteriores, la resistencia permisible de las conexiones tipo aplastamiento es mayor que la de las conexiones a fricción.

El presforzado inicial de los tornillos ajusta estrechamente las placas entre sí. Este esfuerzo de compresión inicial entre las placas ( $f_{ci}$ ) se puede calcular sumando todas las fuerzas del tornillo presforzado ( $F_i$ ) y dividiéndolas entre el área de contacto ( $bh$ ) de las placas (figuras 7.41a y b). Cuando se aplica la fuerza excéntrica, ésta tiende a separar la parte superior de las placas, aflojando por tanto el efecto de ajuste y reduciendo la presión inicial ejercida por los tornillos. También incrementa la presión en la parte inferior. El diagrama

de esfuerzo de compresión y tensión causado por la carga excéntrica varía linealmente del centro de la conexión a un máximo en las partes inferior y superior (figura 7.41c). Esto es similar a la distribución de esfuerzo flexionante en una viga, pero esta distribución se da sólo si se excede el presfuerzo inicial en la parte superior ( $f_{ci}$ ). Finalmente, el esfuerzo de compresión resultante será la suma de los dos esfuerzos mostrados en la figura 7.41d.

Se puede mostrar que, bajo estas condiciones, la distribución de esfuerzo de tensión neto en los tornillos variará de modo similar al mostrado en la figura 7.41c, y esta distribución es la que se emplea más comúnmente en los procedimientos de diseño es decir, que el eje neutro pasa por el centroide de la distribución de tornillos. El momento de inercia se calcula sobre la base de las áreas del tornillo solamente, es decir,

$$I_s = A_v \sum y^2$$

El esfuerzo neto de tensión del tornillo en el tornillo superior se determina con la conocida fórmula

$$f_t = \frac{Pec}{I_s}$$

donde  $c$  es la distancia desde el eje neutro al tornillo más alto. Asimismo, el esfuerzo cortante se



**Tabla 7.3** Esfuerzo de tensión permisible ( $F_t$ ) en tornillos de conexiones tipo aplastamiento, k/pulg<sup>2</sup>.

Tipo de tornillo	Rosca no excluida del plano de cortante	Rosca excluida del plano de cortante
A325	$55 - 1.8f_v \leq 44$	$55 - 1.4f_v \leq 44$
A490	$68 - 1.8f_v \leq 54$	$68 - 1.4f_v \leq 54$

supone igualmente dividido entre todos los tornillos, es decir,

$$f_v = \frac{P}{nA_s}$$

Como se dijo antes, los esfuerzos permisibles que  $f_t$  y  $f_v$  no pueden exceder con seguridad dependen de que si la conexión es del tipo aplastamiento o fricción.

Para conexiones tipo aplastamiento, el esfuerzo cortante desarrollado ( $f_v$ ) calculado anteriormente, no puede exceder los valores de la tabla 7.1. Además, el esfuerzo de tensión ( $f_t$ ), calculado anteriormente, no debe exceder los valores determinados de la tabla 7.3.

### Ejemplo

En la conexión mostrada en la figura 7.41, supóngase que  $P = 40$  kips y  $e = 7$  pulg. Determinar si los tornillos de 3/4 pulg serán adecuados, si éstos son A325 y la conexión es de aplastamiento, con rosca en el plano cortante y espaciados a 3 pulg verticalmente.

### Solución

1. Calcular el momento de inercia de las áreas de los tornillos.

$$\begin{aligned} I_s &= 0.442[4(1.5)^2 + 4(4.5)^2] \\ &= 0.442(9 + 81) \\ &= 39.8 \text{ pulg}^4 \end{aligned}$$

2. Determinar el esfuerzo de tensión en los tornillos superiores.

$$f_t = \frac{40(7)4.5}{39.8} \approx 31.7 \text{ k/pulg}^2$$

3. Determinar el esfuerzo cortante promedio en los tornillos.

$$f_v = \frac{40}{8(0.442)} \approx 11.3 \text{ k/pulg}^2$$

4. Calcular los esfuerzos permisibles. En la tabla 7.3 la fórmula para tensión es

$$F_t = 55 - 1.8f_v \leq 44$$

$$F_t = 55 - 1.8(11.3) = 34.7 \text{ k/pulg}^2$$

También en la tabla 7.1, el esfuerzo cortante permisible es 21 k/pulg<sup>2</sup>.

5. Comparar los esfuerzos reales con los permisibles.

$$\begin{aligned} \text{como } 11.3 &< 21 \text{ k/pulg}^2 && \text{CORRECTO} \\ \text{y } 31.7 &< 34.6 \text{ k/pulg}^2 && \text{CORRECTO} \end{aligned}$$

Algunos diseñadores prefieren usar asientos de viga rigidizados en vez de asientos flexibles, sobre todo cuando se diseñan vigas con grandes reacciones. El atiesador puede ser otro ángulo situado como se ve en la figura 7.42 y es una buena práctica usar un espesor de ángulo igual o mayor que el del alma de la viga que se soporta.

Como el asiento no es flexible, se supone que la reacción tiene una mayor excentricidad que la de los asientos flexibles. En la figura 7.42, la reacción de la viga se supone que actúa a  $N/2$ , medido desde el borde del ala sobresaliente del ángulo de asiento. La excentricidad resultante es

$$e_s = W - \frac{N}{2}$$

donde  $e_s$  es la distancia de  $R$  al plano cortante del sujetador. El diseño de los sujetadores sigue el mismo procedimiento descrito para la conexión en la

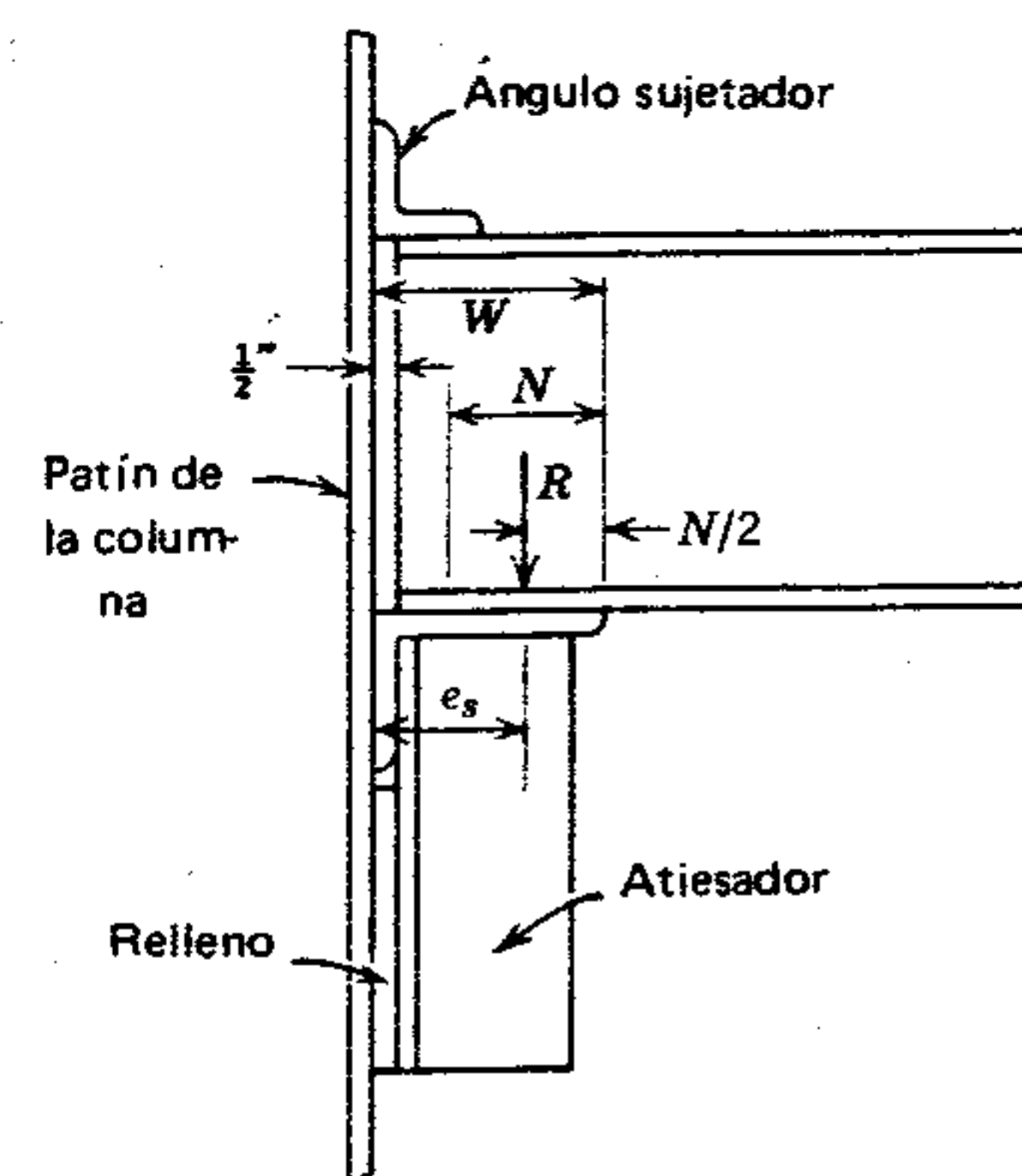


Figura 7.42 Asiento de viga rigidizado.

figura 7.41, y el Manual AISC proporciona tablas de cargas admisibles para diversos asientos de vigas rigidizados.

## 7.20 CONEXIONES RESISTENTES A MOMENTO A BASE DE SUJETADORES

La razón principal para usar conexiones resistentes al momento en edificios es porque absorben fuerzas laterales (capítulo 9). Sin embargo, aunque se usan únicamente para este propósito, también habrá momentos negativos en los extremos de la viga debidos a cargas de gravedad (verticales) (capítulo 10). Para resistir estos momentos de extremos, se debe encontrar alguna manera de aplicar la fuerza horizontal en los patines inferior y superior. El valor de la fuerza horizontal total se puede calcular dividiendo el momento del extremo entre el peralte de la viga, es decir,

$$F_t = \frac{M}{d}$$

En la figura 7.12a se muestra una manera como se puede aplicar esta fuerza horizontal. La fuerza en

el patín de la viga se transfiere al alma de la Te por cortante simple en los sujetadores. Luego esta fuerza se transmite al patín de la Te por flexión en el patín y, finalmente, al patín de la columna por tensión en los otros sujetadores. Los diafragmas rigidizantes sobre la columna pueden o no ser necesarios. También pueden necesitarse otros detalles.

En el diseño de este tipo de conexión, se supone que la reacción vertical de la viga es resistida totalmente por la conexión cortante y que las fuerzas horizontales las resisten totalmente las Tes. El diseño se hace casi siempre mediante un procedimiento de tanteo, ajustando y afinando los detalles a medida que se conocen las diversas necesidades. Una desventaja de utilizar sujetadores (en comparación con la soldadura) en este tipo de conexión es la dificultad de proporcionar el espacio adecuado para las cabezas del sujetador y las tolerancias para el ensamble. Por esta razón, durante el diseño se deben preparar dibujos a escala detallados para asegurarse de que el ensamble se puede fabricar realmente.

Con frecuencia se usan Tes estructurales cortadas de secciones S, debido al espesor de almas y patines. En superficies de patín con pendiente se usan roldanas biseladas bajo las tuercas y el patín y los sujetadores a tensión deben resistir las fuerzas de palanca adicionales causadas por la distorsión producida por la flexión (figura 7.43). Se supone que la fuerza de palanca ( $Q$ ) es una fuerza lineal que actúa uniformemente a lo largo del borde del patín en la distancia  $L$  de la figura 7.12a. Por lo tanto, el

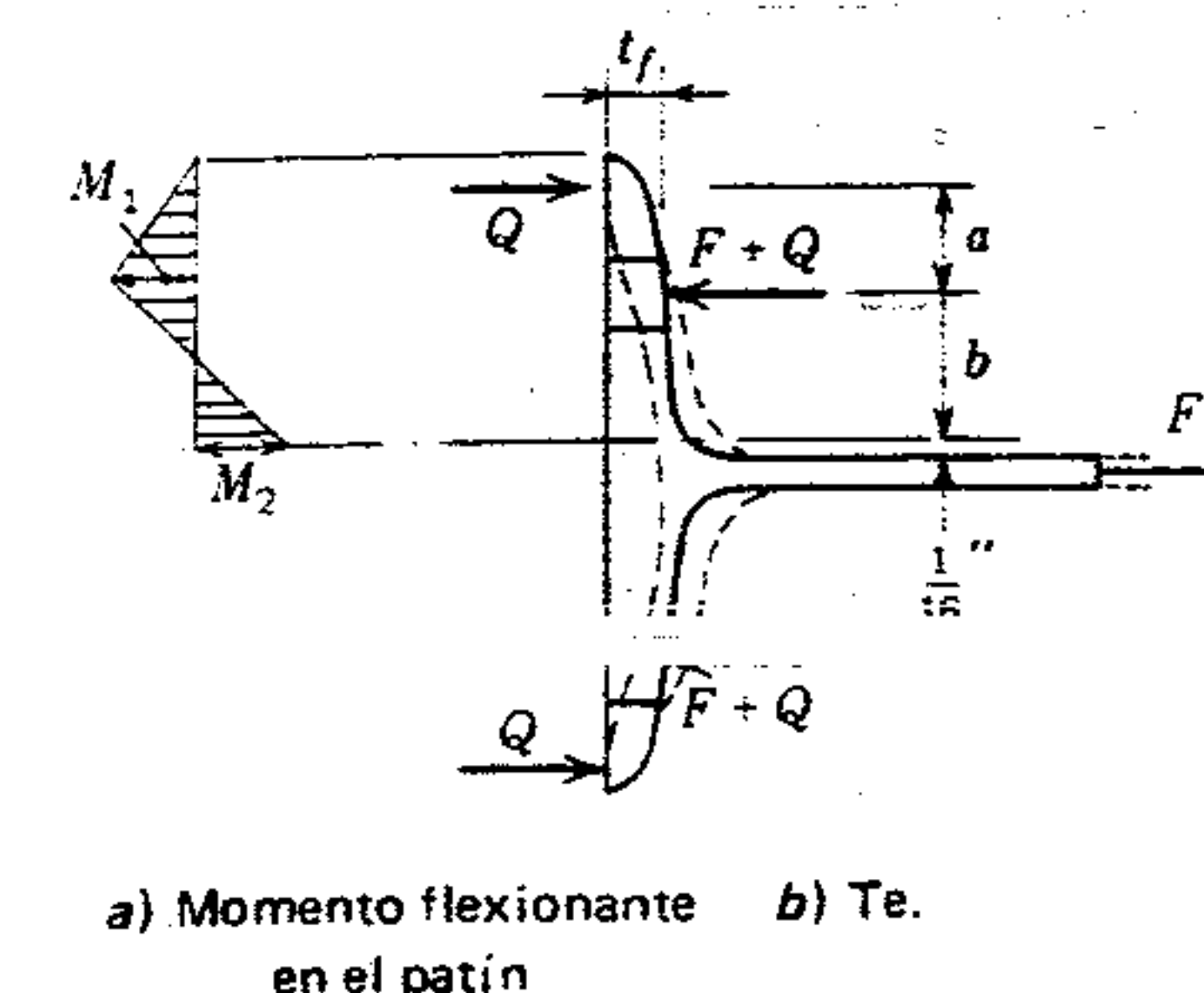


Figura 7.43 Fuerzas de palanca.



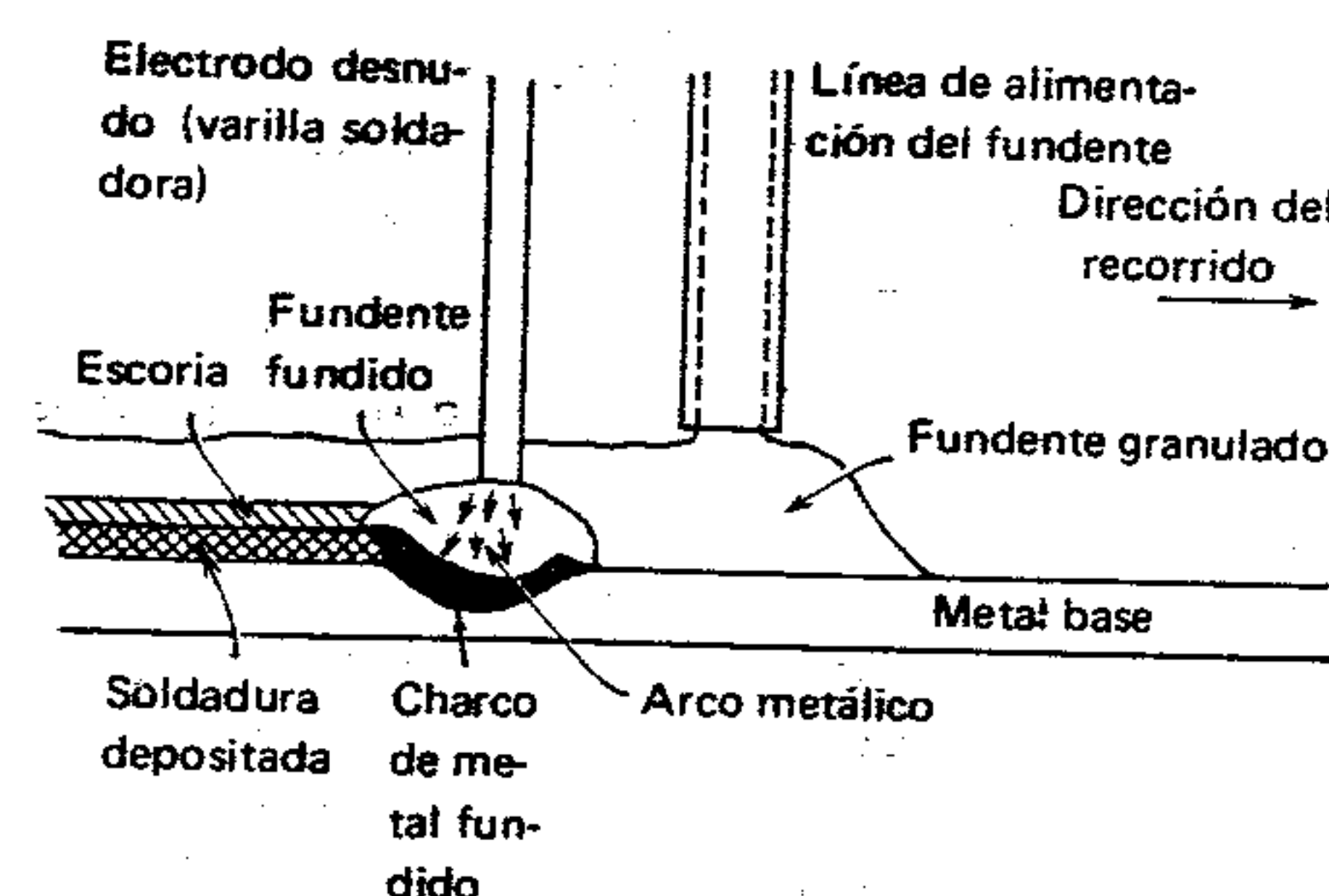


Figura 7.46 Soldadura de arco sumergido.

El proceso de soldado de electrogás y electroescoria es un método especial en que se usa el arco metálico de gas o el arco con alma fundente. Es un método totalmente automático en que se emplea un recipiente de cobre que contiene los componentes de la soldadura. La soldadura se debe depositar en una trayectoria vertical y se usan enfriadores. Este proceso está limitado a su uso en taller y usualmente con soldaduras de gran tamaño.

Cada uno de estos cuatro procesos de soldado requiere tipos especiales de electrodos, y reciben designaciones especiales. También hay grados de resistencia especiales en cada proceso. La Especificación AISC recomienda una combinación de "metal base" y "electrodo con grado de resistencia".

Sin embargo, se pueden usar electrodos de menor resistencia con metal "base" de mayor resistencia, si en el diseño se especifica el valor de esfuerzo más bajo de la soldadura. En cambio, un electrodo con un grado más alto de resistencia se puede usar con un acero con menor grado de resistencia si al electrodo se asigna el valor más bajo de esfuerzo.

La resistencia básica de la mayoría de las soldaduras corresponde a su capacidad de cortante, como se verá en la siguiente sección. En la tabla 7.4 se listan los seis grados de resistencia de electrodos en cada proceso de soldado, junto con sus metales base aceptables y nombres del electrodo específico.

Los valores de la tabla 7.4 concuerdan con los de la Especificación AISC de 1978 que limitan el

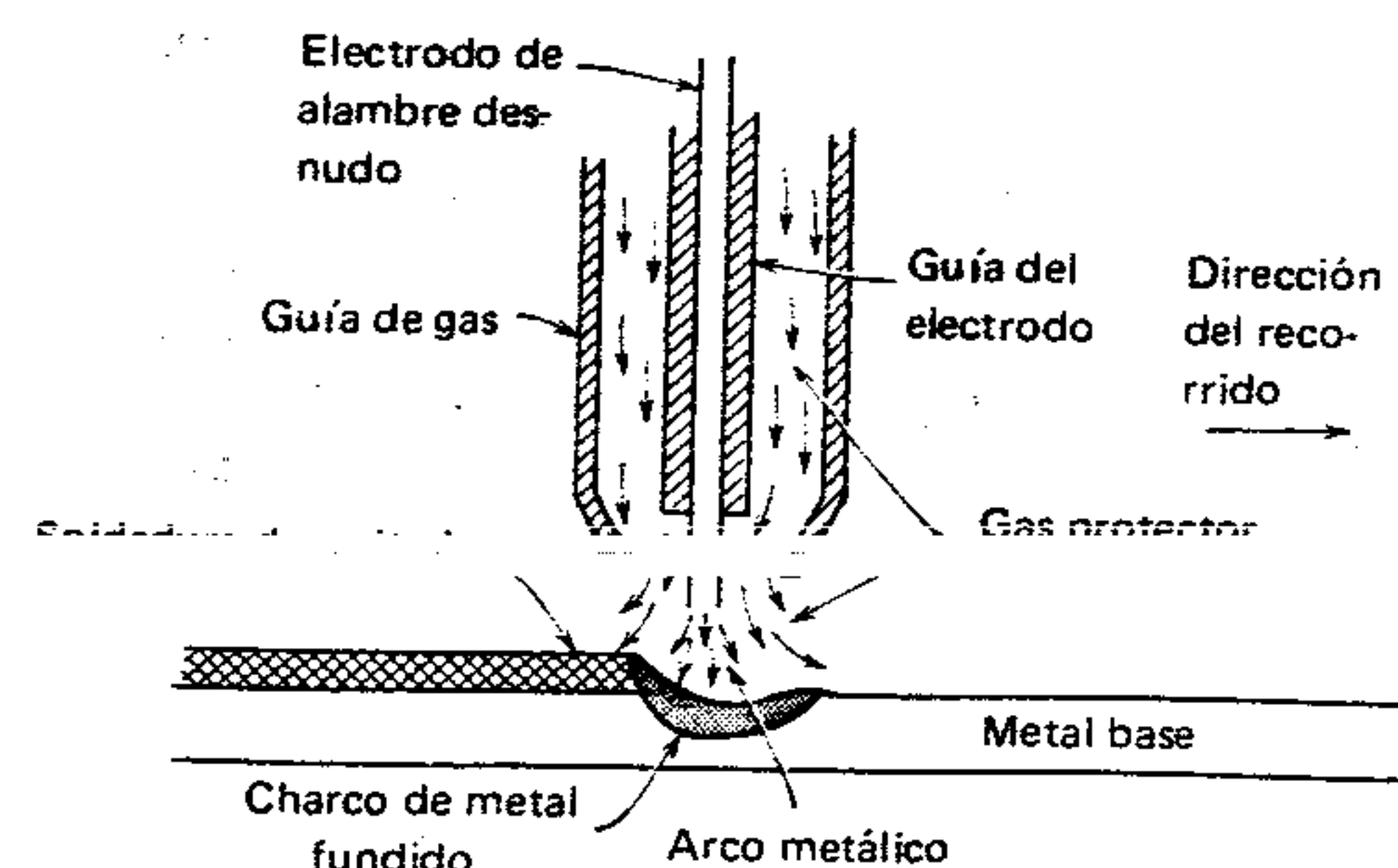


Figura 7.47 Soldadura de arco metálico a gas.

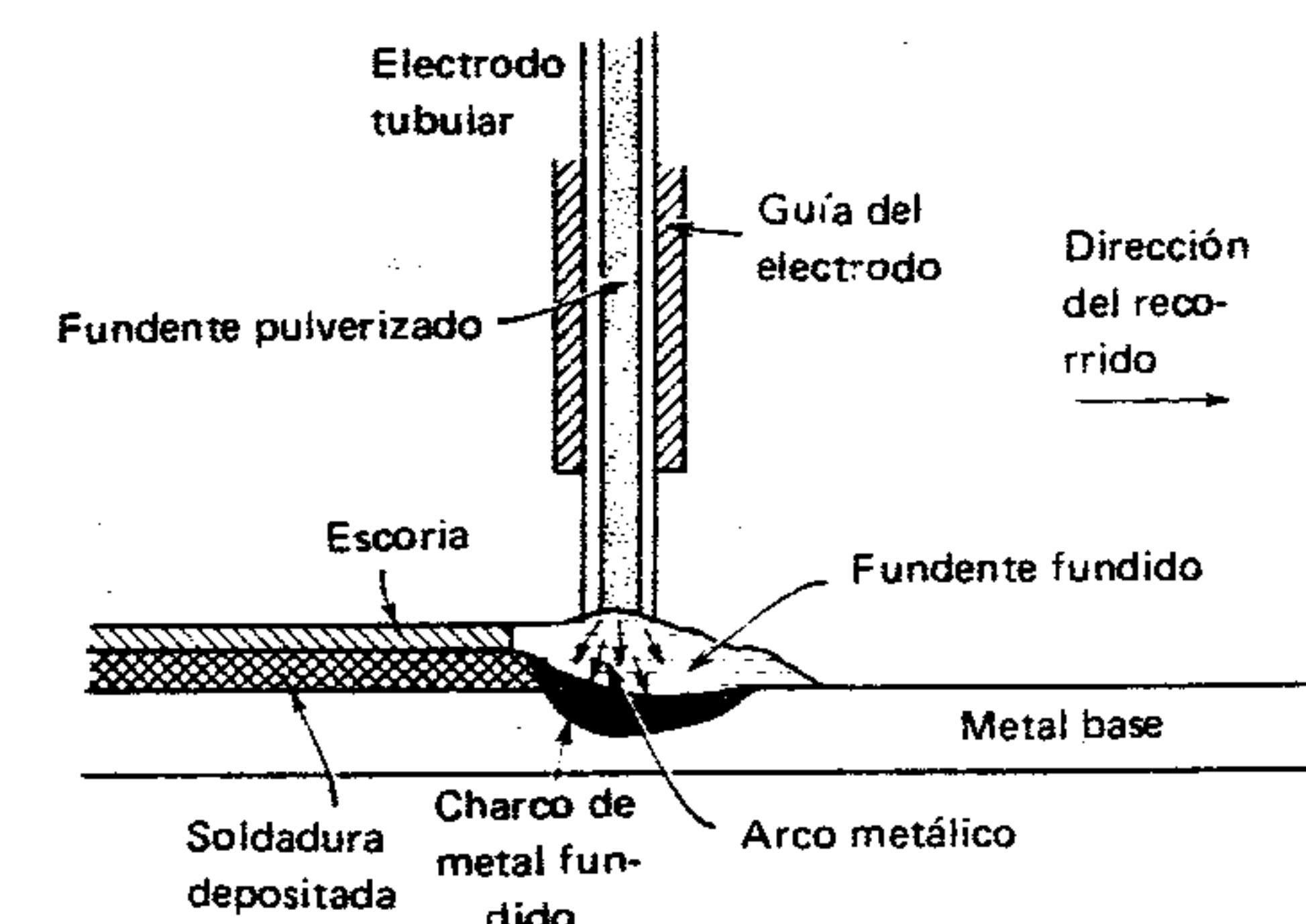


Figura 7.48 Soldadura de arco con alma fundente.

esfuerzo permisible a 0.30 veces la resistencia nominal a la tensión del metal soldado (kips por pulgada cuadrada), cuando se observa que el número que sigue a la designación E o F del electrodo

representa la resistencia a la tensión del metal soldado (es decir, un E80XX tiene una resistencia a la tensión de 80 k/pulg<sup>2</sup> y  $0.30(80) = 24$  k/pulg<sup>2</sup>).

Tabla 7.4 Electrodos: Esfuerzos permisibles y aceros apareados.

Procedimiento de soldado y grado del electrodo				$F_u$ permisible para metal de soldadura depositado (k/pulg <sup>2</sup> )	Designación del ASTM para metales "base apareados" del AISC y AWSA
Arco metálico protegido manual	Arco sumergido	Arco metálico de gas	Arco con alma de fundente		
E60XX o E70XX	F6X-EXXX o F7X-EXXX	E70S-X o E70U-1	E60T-X	18.0 o 21.0	A36, A53 Grado B, A500, A501, A529, A570, Grados D y E, A709 Grado 36
E70XX	F7X-EXXX	E70S-X o E70U-1	E70T-X	21.0	A242, A441, A572 Grados 42 - 55; A588; y A709 Grados 50 y 50W
E80XX	F8X-EXXX	Grado E80S	Grado E80T	24.0	A572 Grados 60 y 65
E100XX	F10X-EXXX	Grado E100S	Grado E100T	30.0	A514, más de $2\frac{1}{2}$ pulg de espesor
E110XX	F11X-EXXX	Grado E110S	Grado E110T	33.0	A514, $2\frac{1}{2}$ pulg de espesor y menos

Clave: E, electrodo; F, fundente; S, electrodo sólido desnudo; U, electrodo sólido recubierto; T, electrodo con alma de fundente; 60, 80, 100, 110 resistencia mínima a la torsión; X, números de especificación de diseño.



Los valores listados ( $F_v$ ) de los electrodos se usarán sólo cuando se usen los aceros aceptables correspondientes. Cuando éste no es el caso, se debe usar el valor menor de  $F_v$ . Por ejemplo, se pueden usar electrodos E60 con un  $F_v = 18$  k/pulg<sup>2</sup> para el metal depositado en metales base de acero grado A, A500 y A36, mientras que el electrodo E70 se puede usar con un  $F_v = 21$  k/pulg<sup>2</sup> para acero A36, pero se debe usar con un  $F_v = 18$  k/pulg<sup>2</sup> cuando el metal base es A500 grado A.

En el diseño, usualmente sólo se especifica el electrodo seleccionado para el proceso de arco metálico protegido. Si el contratista o fabricante decide seleccionar otro proceso de soldado, se supone que hizo el cambio apropiado en la elección de electrodos, pero el diseñador debe comprobarlo. Por ejemplo, un electrodo E70XX es recomendado y el fabricante decide usar el proceso de arco de alma fundente: el electrodo sustituto debe ser el E70T-X. Esta práctica de especificar sólo el electrodo de arco metálico protegido manual se usará en todos los problemas y ejemplos que se presenten aquí.

## 7.23 TIPOS Y RESISTENCIAS DE SOLDADURAS

La mayoría de las soldaduras que se usan para unir elementos estructurales en edificios son de dos tipos generales: de ranura y filete.

**Soldaduras de ranura.** Las soldaduras de ranura se usan en juntas entre dos partes adyacentes aproximadamente en el mismo plano (figura 7.49). Se cla-

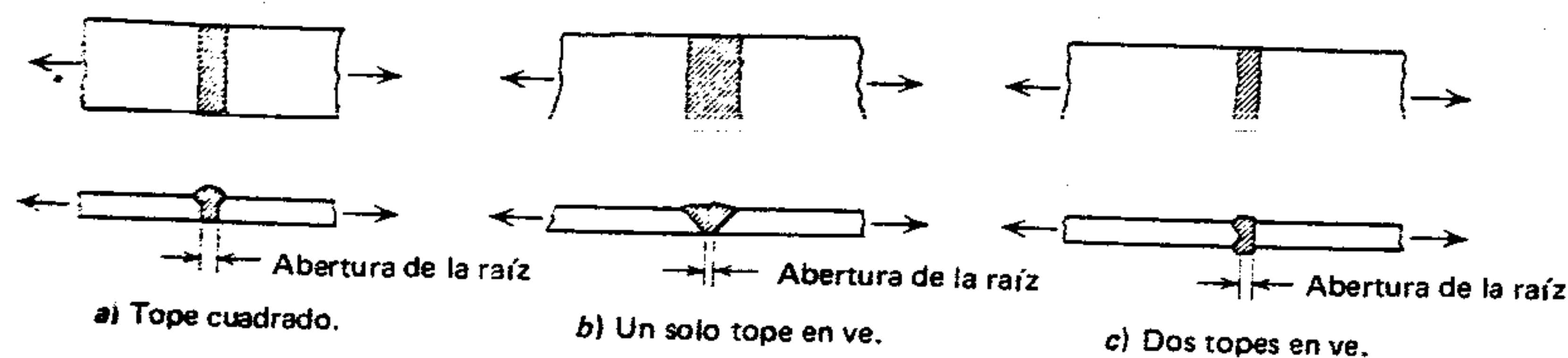


Figura 7.49 Soldaduras de ranura.

sifican de acuerdo con el método de ranurado o de preparación del metal base antes de depositar el metal de soldadura. La soldadura a tope cuadrada (figura 7.49) no requiere preparación; no obstante, para lograr una penetración completa, está limitada a placas con un grosor no mayor de 1/4 pulg. Para grosores mayores, es necesario soldar por ambos lados (o usar una placa de respaldo en un lado) y/o ranurar las partes que se van a soldar. En la práctica existen nueve formas de soldadura de ranura, tres de las cuales aparecen en la figura 7.49 (otras se muestran en la figura 7.52).

Las soldaduras a tope con penetración completa tienen un espesor efectivo o dimensión de garganta igual al espesor del miembro más delgado que se une. Por lo tanto, cuando se suelda todo el ancho del miembro, la resistencia total del miembro se concentra en la soldadura. Es importante que los aceros y los electrodos que se han unido cumplan con las Especificaciones del AISC.

Cuando la soldadura se hace por ambos lados, la "raíz" de la capa inicial del metal de soldadura (o cama) se debe rebabeear completamente del lado contrario antes de iniciar la soldadura por ese lado. Esta eliminación de rebabas también es necesaria cuando se da más de una pasada para completar el tamaño de la soldadura.

**Soldaduras de filete.** Éstas se muestran en la figura 7.50. Una soldadura de filete tiene una sección transversal aproximadamente triangular. El tamaño de la soldadura se designa como  $D$ , en las figuras 7.50 b), c) y d). Por lo general, este tipo de soldadura se usa para unir dos superficies en ángulo recto entre sí, y es el tipo que más se usa en conexiones estructurales. A menos que se especifique clara-

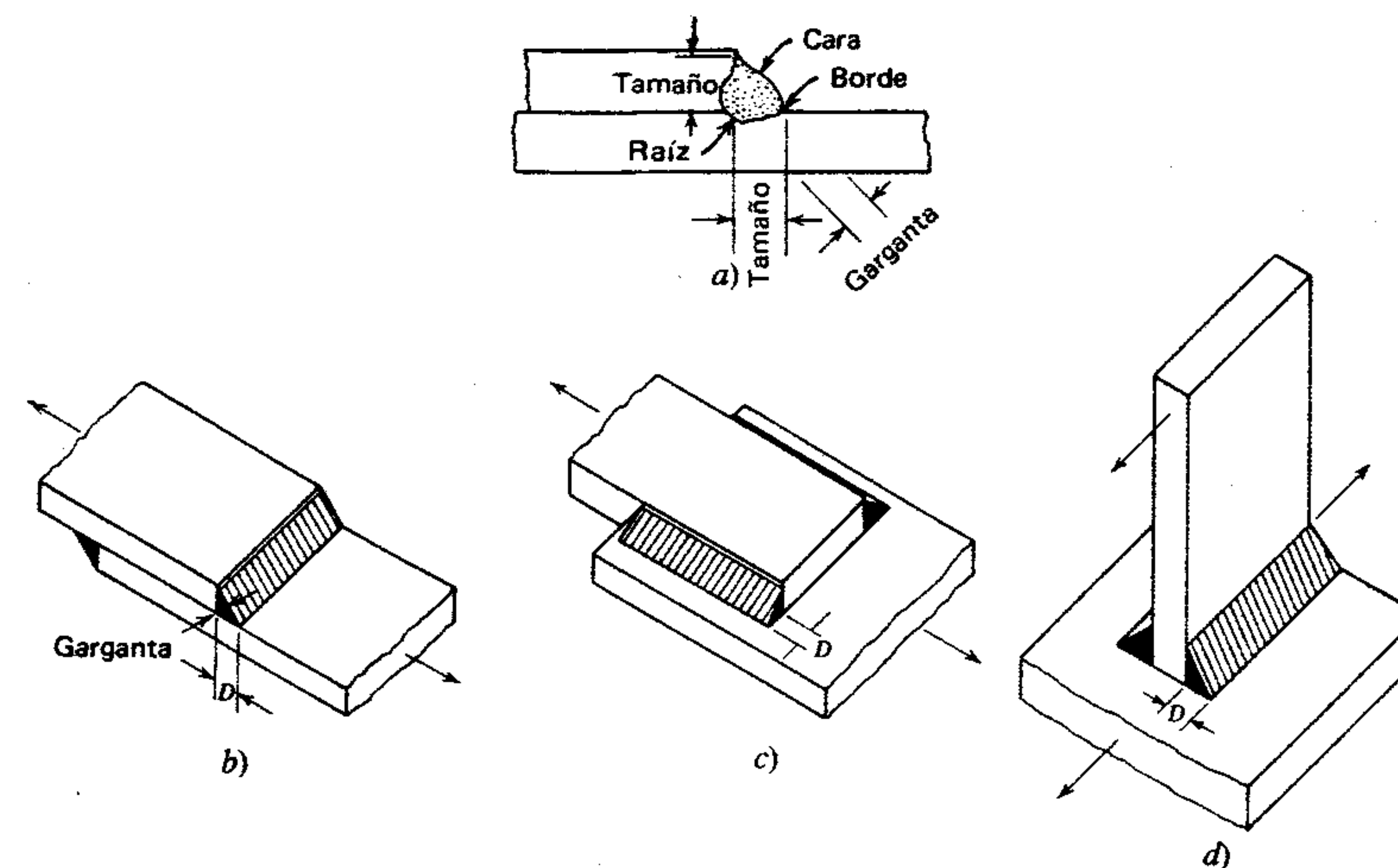


Figura 7.50 Soldaduras de filete.

mente otra cosa, se supone que estas soldaduras tienen patines iguales, es decir, caras a 45 grados, y la dimensión de la garganta es el tamaño multiplicado por el seno 45°. Cuando se necesita una soldadura de patines desiguales para un tipo especial de diseño, la dimensión de diseño de la garganta es la dimensión menor desde la raíz hasta la cara.

La resistencia de una soldadura de filete se determina por la dimensión de la garganta; por lo tanto, las más económicas son las del filete pequeño. Esto es porque la dimensión de la garganta es proporcional al tamaño del patín, mientras que la cantidad de metal de soldadura varía aproximadamente con el cuadrado del tamaño del patín. Las soldaduras de 1/8, 3/16, 1/4 y 5/16 pulg se pueden hacer de una pasada (una progresión del electrodo

mayores se hacen en varias pasadas. Al igual que con las soldaduras de ranura, la superficie de cada soldadura se debe rebabeear y eliminar la escoria con cepillo de alambre antes de iniciar la siguiente pasada.

Las soldaduras de filete se pueden colocar de dos maneras diferentes. En la figura 7.50c se muestran

dos filetes, cada uno con su eje paralelo al sentido del esfuerzo de los miembros. Cada soldadura transfiere esfuerzo de un miembro al otro por medio del cortante paralelo a su eje. El esfuerzo cortante se supone que está uniformemente distribuido a todo lo largo de la soldadura.<sup>5</sup> En la figura 7.50b se muestran dos filetes, cada uno con su eje perpendicular al sentido del esfuerzo de los miembros. Las soldaduras de este tipo fallan en la garganta debido al efecto combinado del cortante y la tensión (o compresión). Como las pruebas demuestran que la resistencia de estas soldaduras sujetas a tensión o compresión es mayor que para el cortante, es conservador, pero razonable, limitar la resistencia a la determinada por el cortante solo.

Por lo tanto, durante el diseño, generalmente se es la resistencia al cortante, sin importar la dirección de la carga sobre la soldadura. En la tabla 7.4 se da

<sup>5</sup> Aunque este supuesto no es válido en el intervalo de esfuerzos elásticos, simplifica en gran medida el diseño y ofrece una solución segura.



el esfuerzo cortante permisible para diversas soldaduras de filete. Como la sección crítica es en la garganta del filete, la resistencia por pulgada lineal ( $F$ ) es igual al tamaño del patín por seno  $45^\circ$ , multiplicado por el esfuerzo cortante permisible:

Por lo tanto, para la soldadura con resistencia de 18,000 lb/pulg<sup>2</sup>.

$$F = D(\text{seno } 45^\circ) 18,000 \\ = 12,700D \text{ lb por pulgada lineal}$$

y para la soldadura con resistencia de 21,000 lb/pulg<sup>2</sup>,

$$F = 14,800D \text{ lb por pulgada lineal.}$$

Algunos diseñadores prefieren calcular la resistencia al cortante de conexiones soldadas sobre la base de "por 1/16 pulg del tamaño de soldadura de filete". Usando este método, las resistencias son:

Para la soldadura de 18,000 lb/pulg<sup>2</sup>

$$F = 800 \text{ lb por pulg lineal por } 1/16 \text{ pulg de } D.$$

Para la soldadura de 21,000 lb/pulg<sup>2</sup>

$$F = 930 \text{ lb por pulg lineal por } 1/16 \text{ pulg de } D$$

Los procesos anteriores también se podrían aplicar a los más altos niveles de esfuerzo listados en la tabla 7.4. Sin embargo, para las aplicaciones que se verán aquí, sólo se recurrirá a electrodos E60 y E70.

Para compensar irregularidades en el depósito de soldadura y en la forma ahusada en los extremos del filete, causadas por el inicio y la interrupción de la soldadura, el soldador siempre debe hacer la longitud real  $2D$  mayor que la longitud calculada. Sin embargo, la longitud que aparece en los planos aerados siempre es la meta o la calculada.

Las pruebas han demostrado que los extremos de las soldaduras de filete soportan cortantes mayores que el promedio. Por lo tanto, cuando se puede, los filetes se deben prolongar un poco alrededor de las esquinas. Esto se denomina remate, y usual-

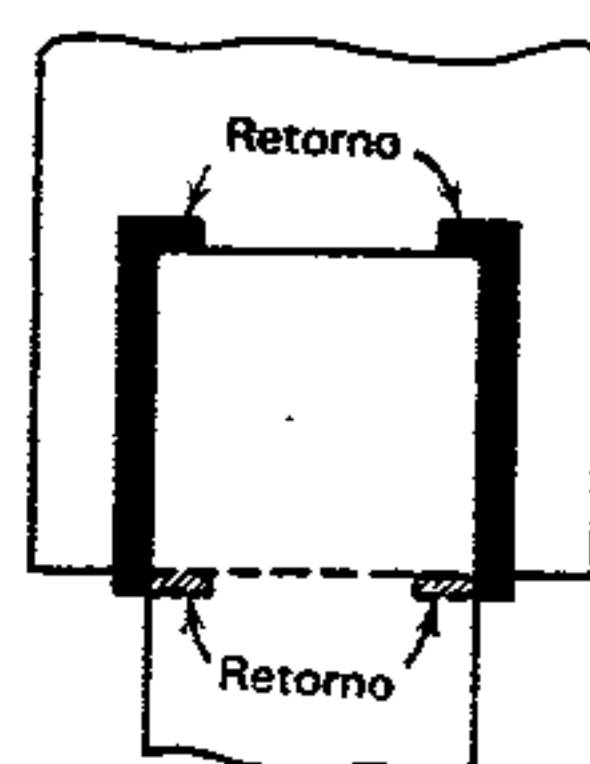


Figura 7.51 Remates de soldadura.

mente es igual a  $2D$  (figura 7.51). Generalmente los remates no aparecen en los planos de detalles, pero el soldador los hace siempre que es factible.







Las soldaduras de filete hechas por el procedimiento de arco sumergido tienen mayor capacidad debido a su profunda penetración. La Especificación AISC 1978 permite que la garganta de la soldadura sea del tamaño de la soldadura cuando el tamaño es igual a o menor que 3/8 pulg. Es decir, su capacidad es de 18  $D$  kips por pulgada para el electrodo E60. Para soldaduras de arco sumergido mayores que 3/8 pulg, la Especificación permite agregar 0.11 pulg a la dimensión calculada de la garganta.

## 7.24 CLASIFICACIÓN DE SOLDADURAS

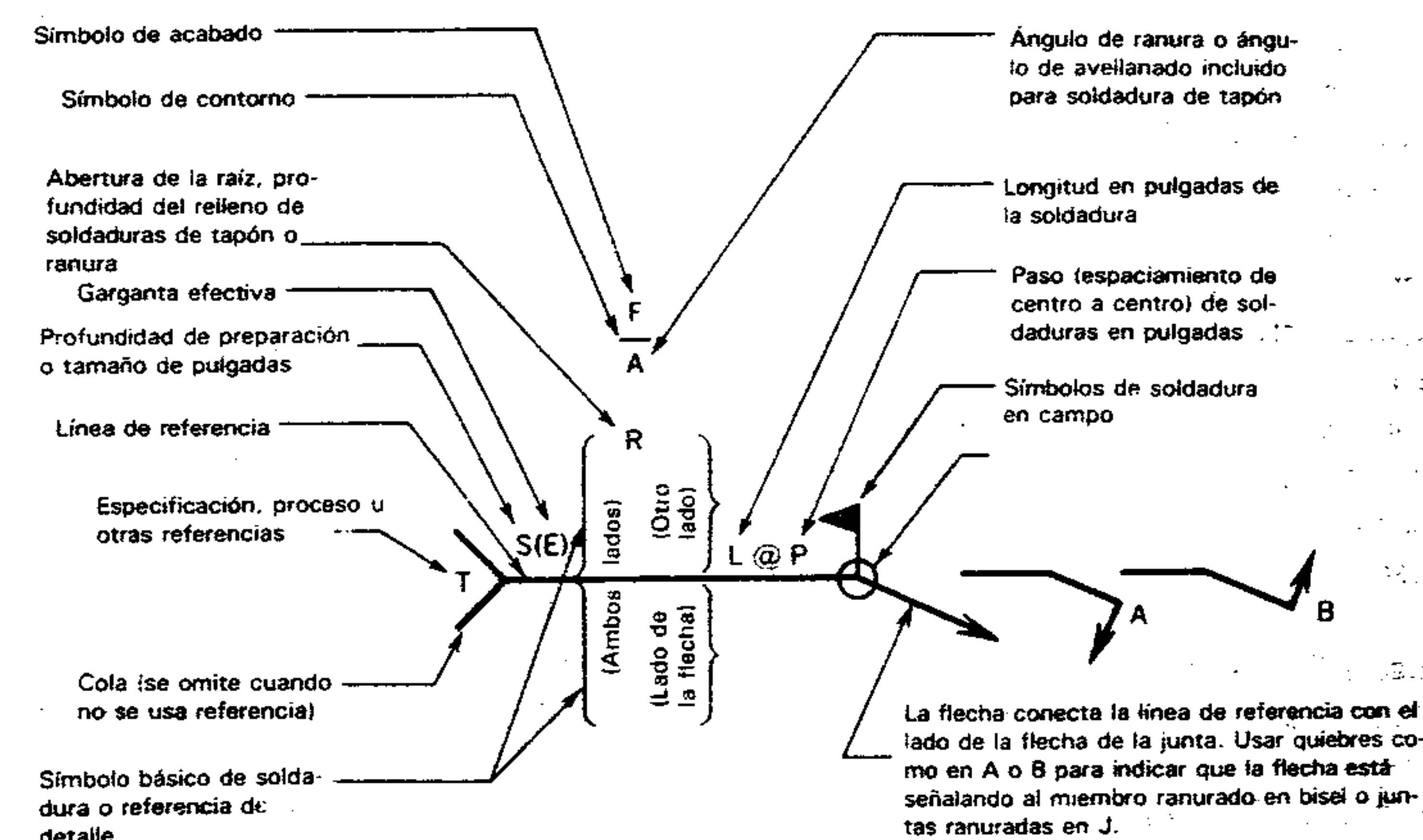
Además del tipo, hay numerosos aspectos, como tamaño, localización exacta y acabados, que se deben describir para identificar completamente una soldadura. Para transmitir esta información del diseñador al fabricante y el soldador, se usan símbolos estándar de soldadura. Estos símbolos proporcionan los medios para poner en los planos la información completa sobre soldaduras. En la práctica, los diseñadores pueden necesitar solamente algunos de los símbolos disponibles. Por lo tanto, quedan claros los símbolos disponibles. Por lo tanto, quedan claros los símbolos disponibles. Por lo tanto, quedan claros los símbolos disponibles.

El símbolo de soldadura completo contiene los siguientes elementos:

SÍMBOLOS BÁSICOS DE SOLDADURAS									
LOMO	FILETE	TAPÓN O RANURA	SURCO O TOPE						
			CUADRADA	V	BISEL	U	J	VE CÓNICA	BISEL CÓNICO

SÍMBOLOS DE SOLDADURA SUPLEMENTARIOS						
ESPALDAR	ESPACIADOR	SOLDADURA COMPLETA ALREDEDOR	SOLDADURA DE CAMPO	CONTORNO		Para otros símbolos básicos o suplementarios, véase  AWS A2.4-79
				A RAS	CONVEXO	
						

## LOCALIZACIÓN ESTÁNDAR DE ELEMENTOS DE UN SÍMBOLO DE SOLDADURA



### Nota:

El tamaño, el símbolo de la soldadura, la longitud y el espaciamiento de la soldadura se deben leer en ese orden, de izquierda a derecha, a lo largo de la línea de referencia. Ni la orientación de la línea de referencia ni la localización de la flecha alteran esta regla.

El ala perpendicular de símbolos de soldaduras debe estar a la izquierda.

La flecha y las soldaduras del Otro Lado son del mismo tamaño a menos que se indique otra cosa.

Las dimensiones de las soldaduras de filete deben aparecer tanto en el símbolo del Lado de la Flecha como en el otro lado.

La punta del símbolo de soldadura en campo debe señalar hacia la cola.

Los símbolos se aplican entre cambios abruptos en la dirección de la soldadura a menos que estén recidos por el símbolo "todo alrededor" o que estén dimensionados específicamente.

En casos especiales de simetría, como cuando hay material duplicado (como los atiesadores) en el lado lejano de un alma o de una placa de unión. La industria fabricante ha adoptado esta convención: cuando en la lista del material detallado aparece un miembro en el lado lejano, así como en el próximo, la soldadura especificada para el lado cercano se debe duplicar en el lado lejano.

Figura 7.52 Símbolos estándar de juntas soldadas. Cortesía del American Institute of Steel Construction; "Manual of Steel Construction", octava edición, págs. 4-148.



Línea de referencia.

Flecha.

Símbolo de soldadura básico (tipo de soldadura).

Dimensiones y otros datos.

Símbolos suplementarios.

Símbolos de acabado.

Cola.

Especificación, proceso u otras referencias.

En la figura 7.52 se muestran los símbolos básicos de soldadura, es decir, tipos de soldadura. También aparecen símbolos para información suplementaria y la localización de todos los elementos en un símbolo de soldadura completo.

Con este sistema, la *junta* es la referencia básica. Cualquier junta cuya soldadura esté indicada por un símbolo, siempre tendrá un *lado de flecha* y *otro lado*. Correspondientemente, las palabras *lado de flecha*, *otro lado* y *ambos lados* se usan para localizar la soldadura con relación a la junta. La cola del símbolo se usa para indicar la especificación de la soldadura, procedimientos, u otra información suplementaria necesaria para hacer la soldadura deseada. La naturaleza de la anotación situada en la cola para indicar esta información usualmente será establecida por el diseñador. Si no se usan anotaciones, se puede omitir la cola del símbolo.

En la figura 7.53 se muestran tres ejemplos específicos. La línea horizontal en cada caso es la línea de referencia. El símbolo triangular abajo de la línea (figura 7.53a) indica una soldadura de filete situada en el lado de la flecha de la junta.

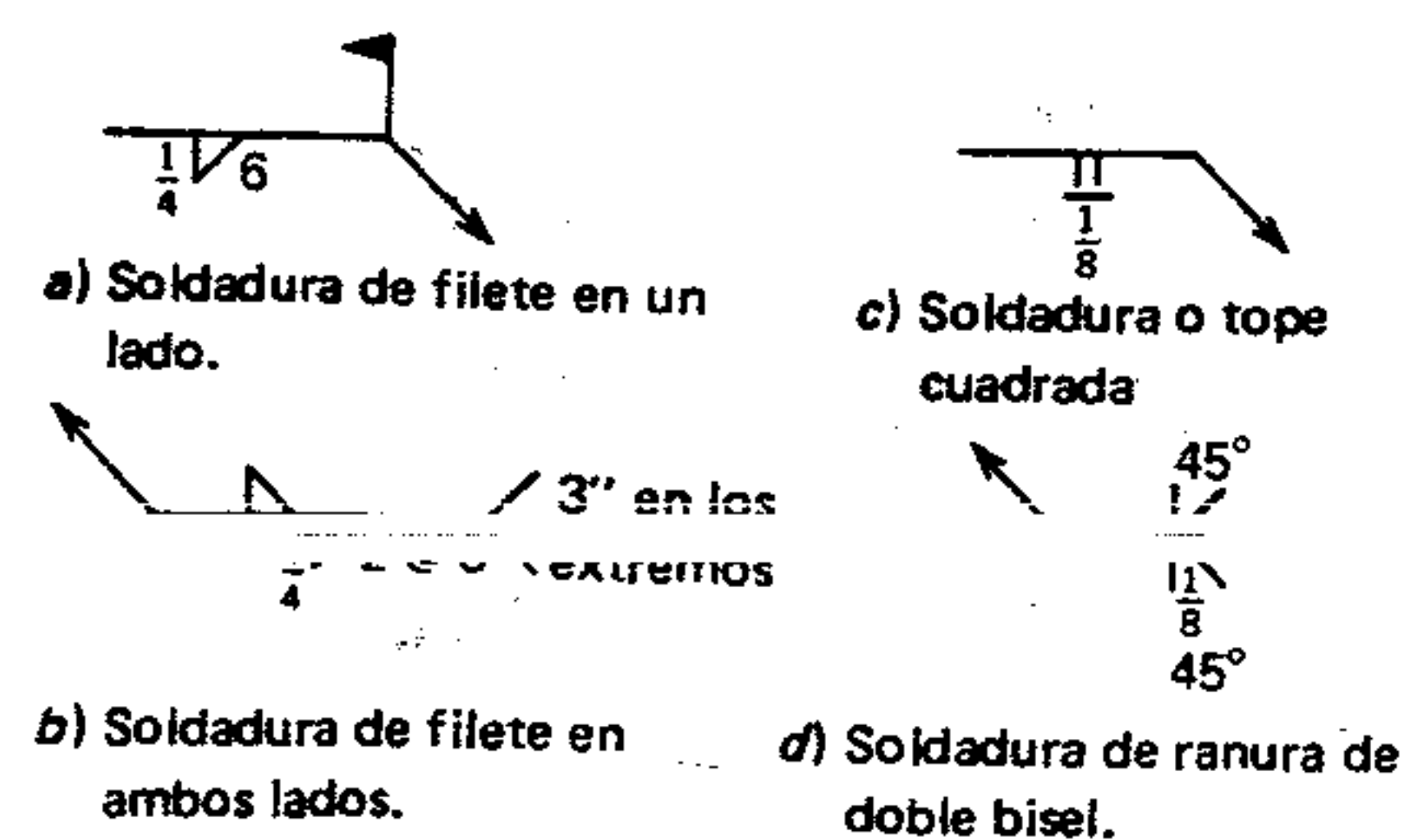


Figura 7.53 Ejemplos de denominación de soldadura.

Obsérvese que el lado izquierdo del triángulo siempre es vertical y que en seguida del lado vertical se da el tamaño de la soldadura. En este caso, el tamaño es 1/4 pulg y tiene 6 pulg de largo. Si se omite la dimensión de longitud, la soldadura será a todo el ancho del miembro a unir. La bandera indica soldadura en campo.

En la figura 7.53b se muestran soldaduras de filete intermitentes sobre ambos lados de la junta. Las longitudes de soldadura son de 2 pulg cada una (excepto en los extremos), y están espaciadas 8 pulg de centro a centro.

En la figura 7.53c se muestra una soldadura de ranura al ras con bordes cuadrados y una abertura de raíz de 1/8 pulg.

En la figura 7.53d se ve un corte de doble bisel a 45° y una soldadura colocada con una abertura de raíz de 1/8 pulg.

## 7.25 TAMAÑOS MÁXIMO Y MÍNIMO DE SOLDADURAS

La Especificación AISC limita el tamaño de la soldadura de filete de modo que su resistencia total se pueda ejercer sin sobreesfuerzo del metal base adyacente. Si hay soldaduras contrapuestas entre sí sobre ambos lados e una placa, cada tamaño de filete se limita a la mitad de la resistencia al cortante de la placa.

La Especificación AISC permite  $0.40F_y$  al cortante sobre el área bruta de las almas de vigas. Se mostró antes (sección 7.23) que la resistencia del filete de 18,000 lb/pulg<sup>2</sup> es  $F = 12.7D$  kips por pulgada. Si  $t$  representa el espesor del miembro a soldar, su resistencia por pulgada lineal sería  $0.40F_y t$ . Si el miembro se suelda de ambos lados

$$F = 12.7D = \frac{1}{2}(0.40F_y)t$$

de donde

$$D_{(\text{máx})} = 0.0157F_y t$$

Se puede derivar una fórmula similar para el filete de 21,000 lb/pulg<sup>2</sup>, es decir,

$$D_{(\text{máx})} = 0.0135F_y t$$

Tabla 7.5 Tamaño mínimo de soldaduras de filete.

Espesor del material de la parte más gruesa unida (pulg)	Tamaño mínimo de soldaduras de filete (pulg)
Hasta $\frac{1}{4}$ inclusive	$\frac{1}{8}$
Más de $\frac{1}{4}$ hasta $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{32}$
Más de $\frac{1}{2}$ hasta $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
Más de $\frac{3}{4}$	$\frac{5}{16}$

El tamaño del filete se restringe aún más cuando la soldadura se va a situar a lo largo de bordes de partes conectadas. El tamaño máximo puede ser igual al espesor de la parte cuando ésta es menor a 1/4 pulg de espesor y hasta 1/16 pulg menor que el espesor de la parte cuando ésta tiene más de 1/4 pulg.

Una soldadura pequeña situada sobre un miembro grueso es inconveniente. El calor generado en la deposición de una soldadura pequeña no es suficiente para expandir apreciablemente el metal base. Por lo tanto, cuando la soldadura se enfría y tiende a contraerse, el metal base estable lo impedirá. Induciéndose esfuerzos iniciales (esfuerzos residuales) en el metal de aportación. Para evitar éste y otros efectos metalúrgicos indeseables, el AISC recomienda tamaños mínimos de soldadura de filete en relación con el espesor de la placa o el miembro (tabla 7.5).

La Especificación AISC también establece longitudes mínimas efectivas para soldaduras de filete. Cuando es necesario para la resistencia, la longitud mínima efectiva es cuatro veces el tamaño de la soldadura. Asimismo, si se usan soldaduras de filete longitudinales solas en conexiones de extremos de miembros a tensión de barra plana, la longitud de cada soldadura de filete no debe ser menor que la distancia perpendicular entre ellas.

## 7.26 DISEÑO DE CONEXIONES TRASLAPADAS SOLDADAS

Una vez seleccionado un tipo de soldadura (esto lo determina usualmente el detallado de la conexión),

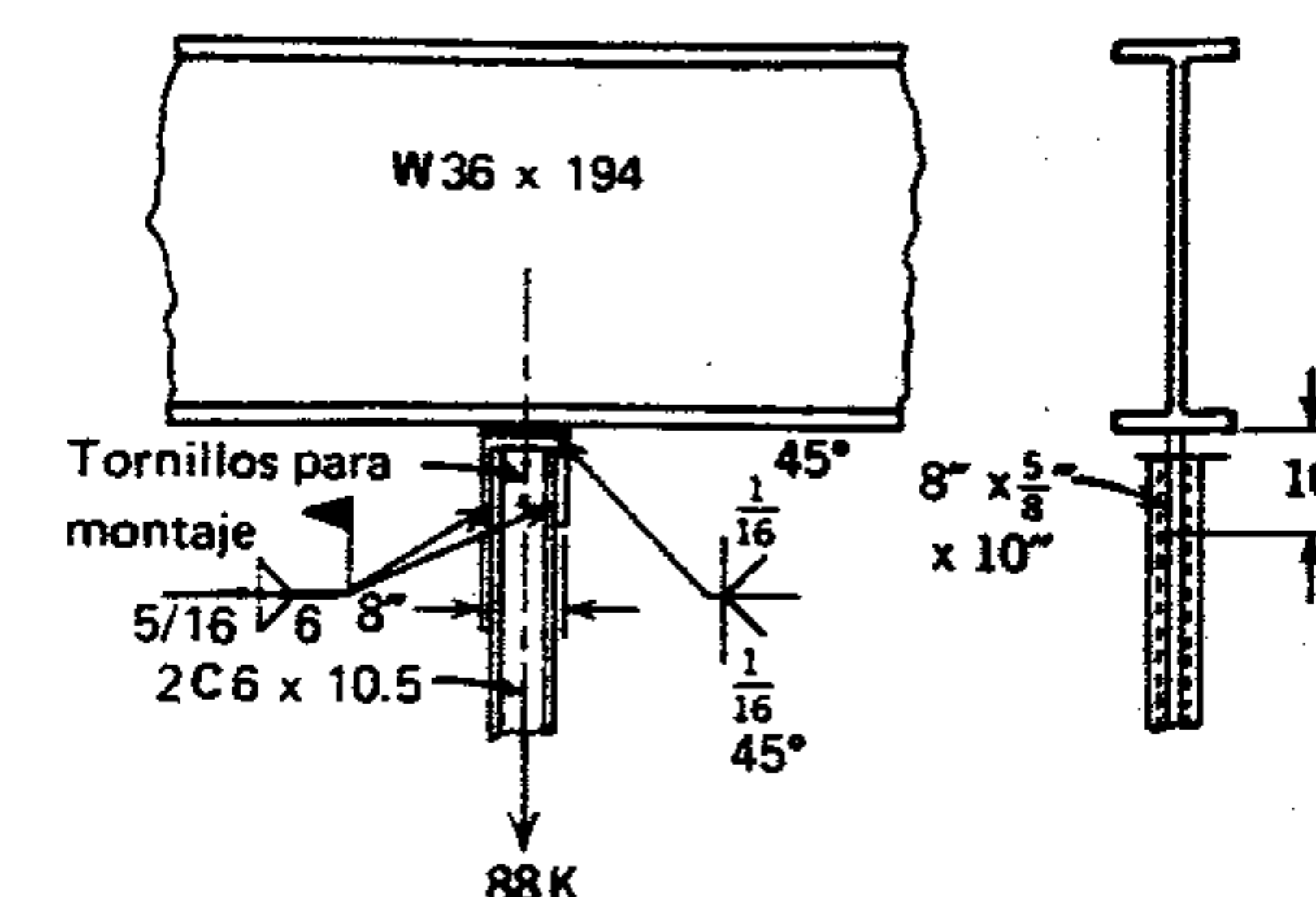


Figura 7.54 Ejemplo 1.

se deben establecer el tamaño y la longitud para la resistencia deseada y el tipo de electrodo. Al principio puede parecer que hay un número infinito de posibles soluciones para un problema de diseño dado, pero por lo general una investigación más a fondo revela que el reglamento y otras limitaciones reducen el número a relativamente pocas.

### Ejemplo 1

En la figura 7.54 se muestra la conexión de un suspensor de doble canal sujeto al patín inferior de una viga W 36 X 194, ambos de acero A36. Se selecciona una placa de 8 pulg de ancho para proporcionar una extensión de 1 pulg sobre cada lado para soldar en campo los canales. Esta placa está unida a la viga con una soldadura a tope de doble bisel. No se puede contar como efectiva toda la longitud de 8 pulg de la soldadura, a menos que los extremos estén cortados hasta el metal sólido y se hagan soldaduras laterales para reforzar de modo similar al refuerzo de las caras; o a menos que se usen barras de extensión para eliminar la reducción de la soldadura debida a efectos de cráter, continuando toda la sección de la soldadura más allá de los

Se requiere una longitud efectiva de la soldadura más corta que la longitud total, para evitar la soldadura especial. La sección de garganta efectiva requerida es

$$\frac{88,000}{22,000} = 4 \text{ pulg}^2$$



Usando una longitud efectiva de 7 pulg, el espesor de la garganta requerida es  $4/7 = 0.57$  pulg; usar una placa de  $5/8$  y una soldadura de penetración completa (dimensión de garganta de  $5/8$  pulg). El símbolo de la soldadura aplicable (figura 7.54) muestra el tipo de ranura, abertura de raíz y ángulo de bisel. Cuando un solo miembro de una junta está ranurado, la flecha se quiebra y señala hacia ese miembro, por lo tanto, la flecha señala hacia la placa en vez de a la viga.

Se usarán soldaduras verticales de filete en cada lado del miembro de doble canal (figura 7.54) para conectar en campo el miembro a la placa de  $5/8$  pulg. No se puede considerar que parte alguna de la carga se transfiera por los tornillos, los cuales se usan durante el montaje para colocar en posición los miembros. Cada soldadura debe soportar

$$\frac{88,000}{4} = 22,000 \text{ lb}$$

El tamaño mínimo de la soldadura para la placa de  $5/8$  pulg es  $1/4$  pulg (tabla 7.5). Las soldaduras se situarán sobre cada lado de la placa. Usando electrodos E60, el tamaño máximo de la soldadura es

$$D = 0.0157(36)^{5/8} = 0.353 \text{ pulg.}$$

Utilizando una soldadura de  $5/16$  pulg,

$$F = 12.7D = 12.7\left(\frac{5}{16}\right) = 3.97 \text{ kips por pulgada}$$

Longitud requerida =  $22/3.97 = 5.54$ ; usar 6 pulgadas.

El símbolo de la soldadura aplicable en la figura 7.54 indica una soldadura de filete, tamaño y longitud de las soldaduras, que las soldaduras irán en ambos lados de la junta en cada uno de los dos puntos y que estas soldaduras se harán en campo.

### Ejemplo 2

Cuando el miembro conectado no es simétrico, las soldaduras se deben proporcionar para evitar la excentricidad si es posible. En la figura 7.55, un puntal de ángulo con un esfuerzo total de 31.5 kips

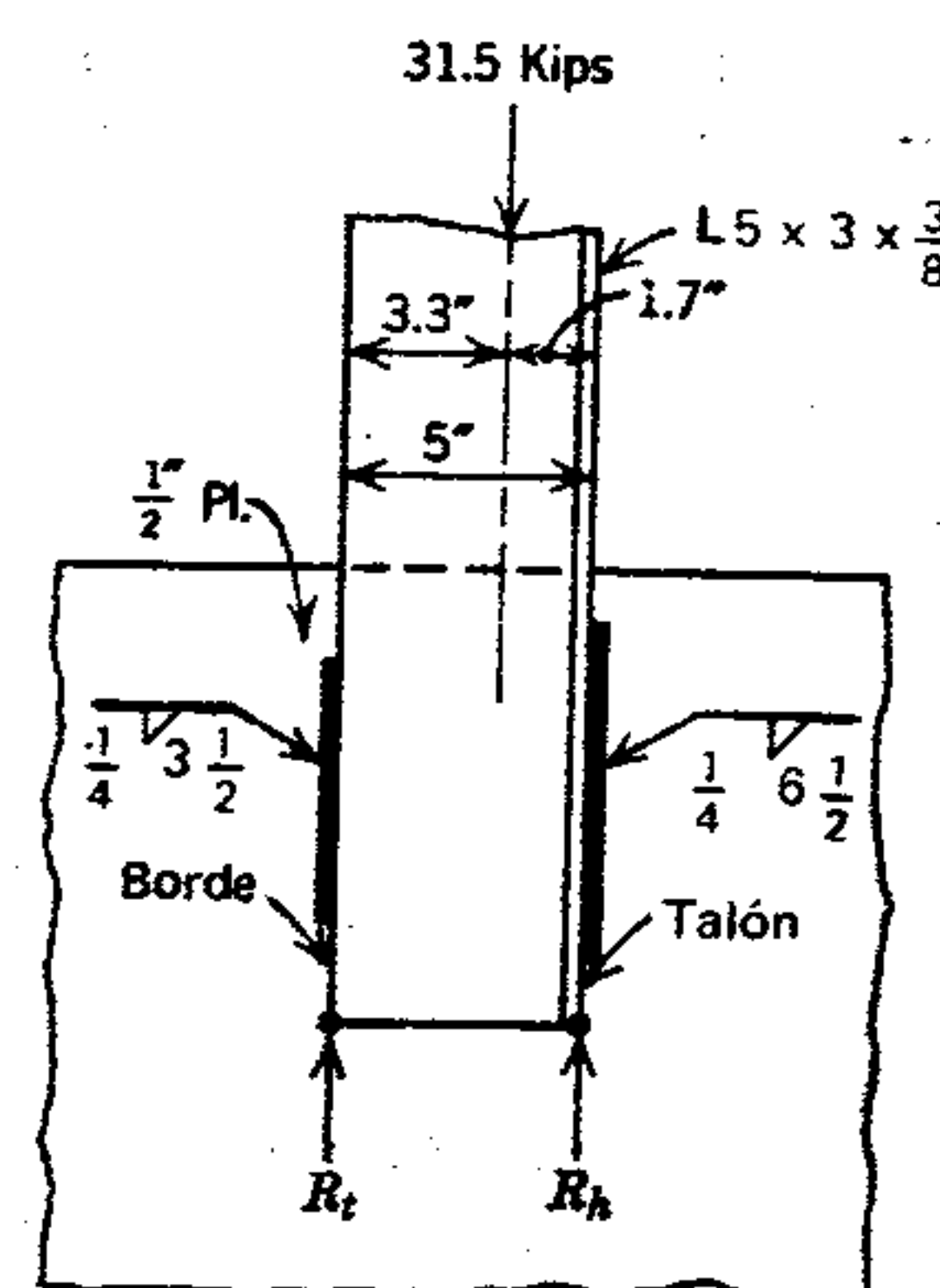


Figura 7.55 Ejemplo 2.

está soldado a una placa de unión de  $1/2$  pulg. La línea de acción de la carga coincide con el eje de gravedad del ángulo, el cual está a 1.7 pulg de la espalda del ala conectada de 5 pulg. Tomando momentos respecto a un punto sobre la línea de acción de la soldadura de  $R_h$ , la cantidad de resistencia de la soldadura ( $R_t$ ) a lo largo del borde se puede determinar como sigue:

$$R_t(5) - 31,500(1.7) = 0$$

$$R_t = \frac{31,500(1.7)}{5} = 10,700 \text{ lb}$$

Como la resistencia total de ambas soldaduras debe ser igual a la carga aplicada

$$R_h = 31,500 - 10,700 = 20,800 \text{ lb}$$

El ángulo se debe conectar para cuando menos 10,700 lb a lo largo del borde y de 20,800 lb a lo largo del talón. El tamaño máximo de la soldadura es  $5/16$  pulg; usar una soldadura de  $1/4$  pulg. Para una soldadura de  $1/4$  pulg elaborada con electrodos E60, la longitud requerida es

$$\frac{10,700}{4(800)} = 3.34; \text{ usar } 3 \frac{1}{2} \text{ pulg.}$$

La longitud de la soldadura de  $1/4$  necesaria a lo largo del talón del ángulo es

$$\frac{20,800}{4(800)} = 6.5; \text{ usar } 6 \frac{1}{2} \text{ pulg.}$$

Debe señalarse que el Reglamento del AISC de 1978 ya no exige esta proporción de las soldaduras y que la longitud total ( $3 \frac{1}{2} + 6 \frac{1}{2} = 10$  pulg) se puede dividir igualmente entre el talón y el borde (5 pulg a lo largo del talón y 5 pulg a lo largo del borde).

### PROBLEMAS

- Una sección W 6 X 15 soporta una carga de tensión total de 56 kips y está conectada al patín inferior de una trabe W 16 X 40 por medio de dos placas, como se ve en la figura 7.56. Determinar el espesor necesario de placa si se usa una soldadura a tope de penetración total para la conexión entre las placas y el patín inferior de la trabe. Suponer que la longitud efectiva de la soldadura a tope es de 3 pulgadas. Usando un filete de  $1/4$  pulg entre las placas y la sección W 6 X 15, calcular la longitud de traslape  $L$  necesaria. Los miembros son de acero A36, y los electrodos son E60. (La respuesta se da en el Apéndice G).

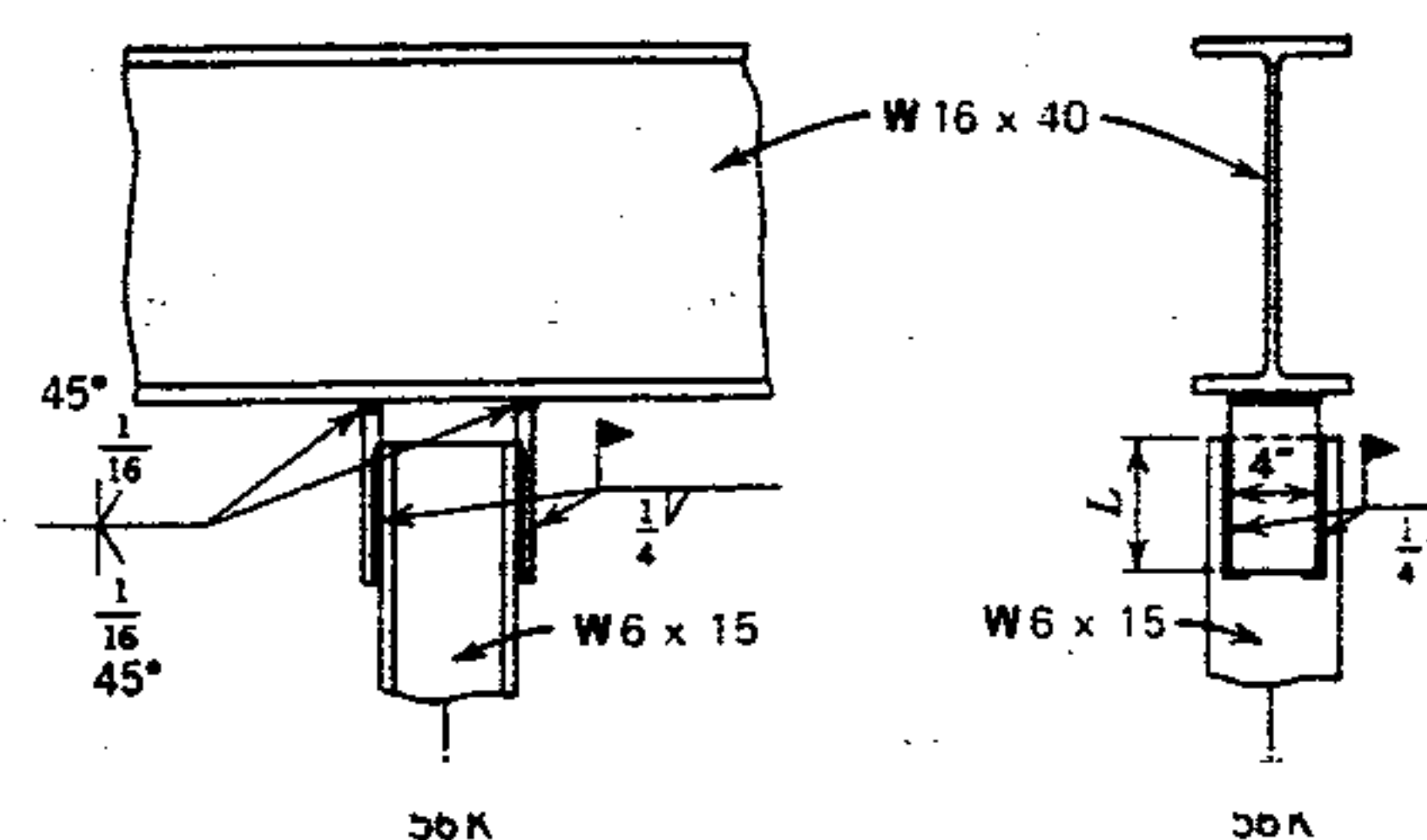


Figura 7.56 Problema 1.

- Dos ángulos de  $5 \times 3 \times 1/2$  pulg están montados sobre una placa de  $7/16$  pulg. Soportan una carga axial total de 85 kips y están soldados

a la placa a lo largo del borde y el talón de cada ángulo con soldadura de filete. Calcular el tamaño máximo permisible de la soldadura y usando este tamaño, calcular la longitud de las soldaduras requeridas. Usar acero A36 y electrodos E70. Las alas de 5 pulg de ambos ángulos están en contacto con la placa.

- Una placa de  $6 \times 1/2$  pulg está soldada a otro miembro, ambos de acero A36, como se muestra en la figura 7.57. Calcular la dimensión  $L$  necesaria para proporcionar una longitud total de soldadura suficiente para resistir la carga que se muestra. Usar electrodos E60. (La respuesta aparece en el Apéndice G).

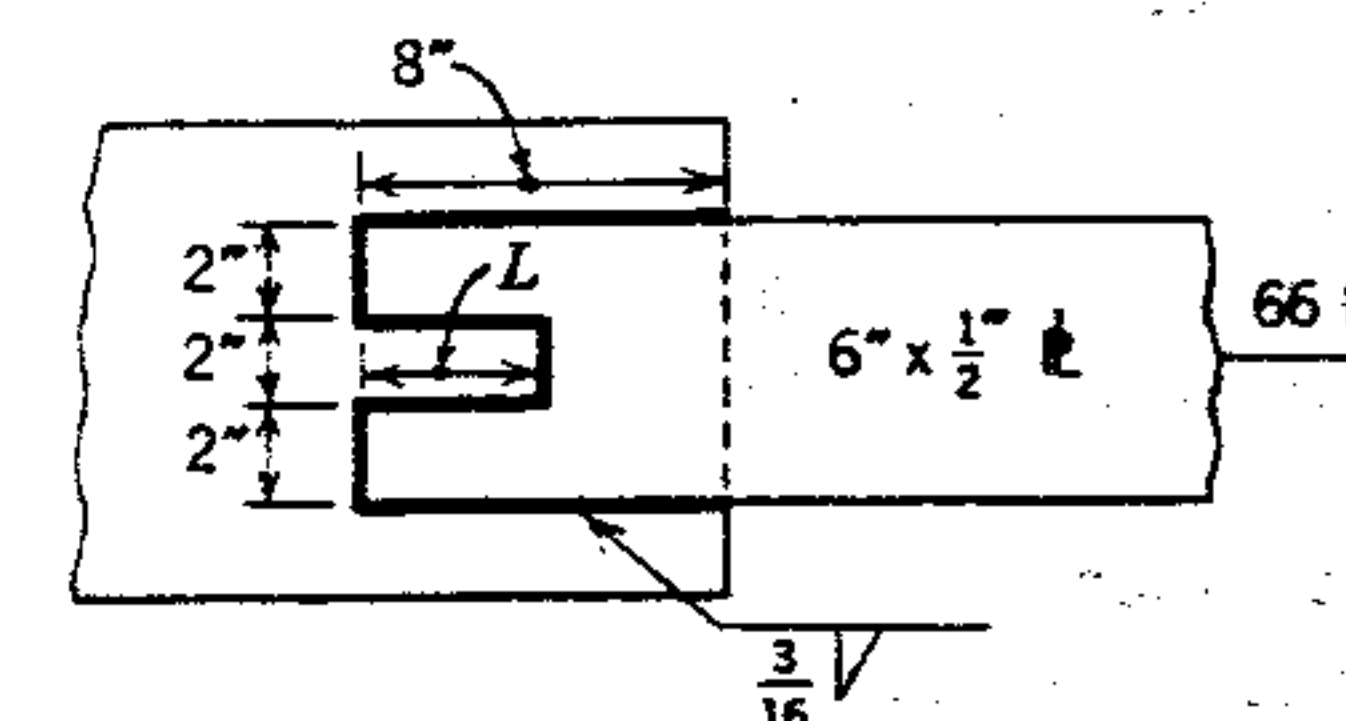


Figura 7.57 Problema 3.

- Diseñar una conexión soldada para dos ángulos de  $6 \times 6 \times 3/8$  pulg montados sobre una placa de  $5/8$  pulg, si los ángulos soportan una carga axial total de 90 kips. El acero es A572, grado 65, y los electrodos son E70.
- Dos suspendores de ángulo de  $3 \times 3 \times 3/8$  pulg están soldados a los patines de una sección W 14 X 61, como se ve en la figura 7.58. Diseñar las soldaduras para soportar una carga total de 60 kips sobre los suspendores. El acero es A242 y los electrodos E60.

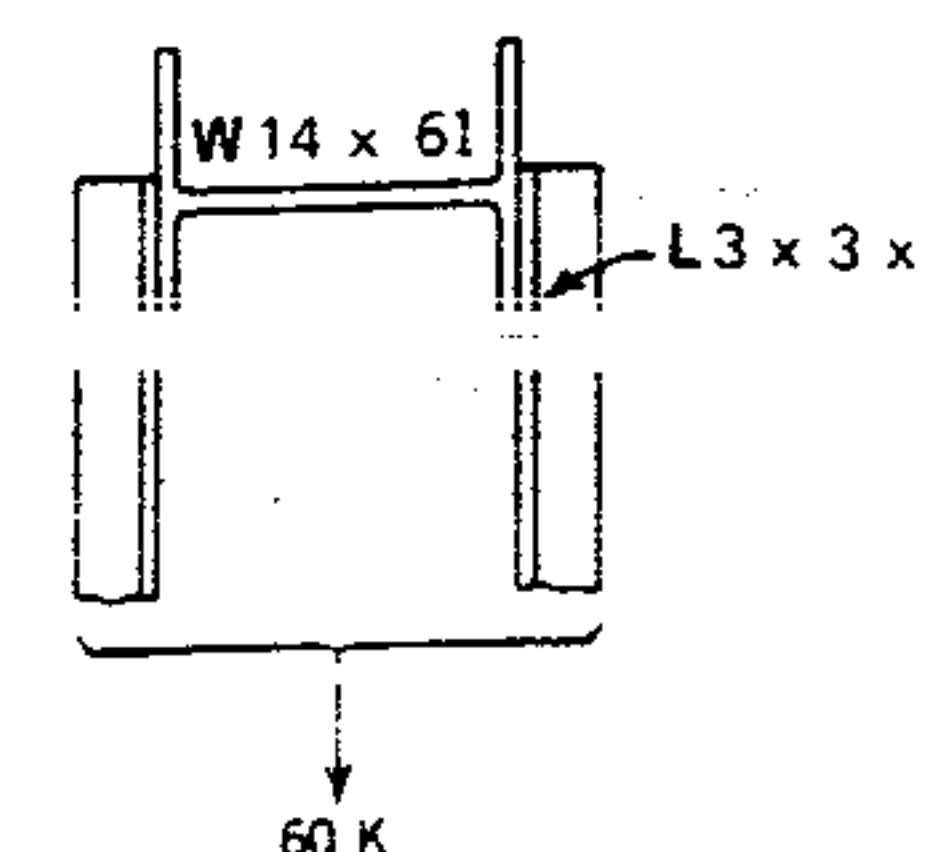


Figura 7.58 Problema 5.



### 7.27 CONEXIONES EXCÉNTRICAS SOLDADAS

Todas las conexiones que se han estudiado hasta aquí han estado cargadas concéntricamente, es decir, la línea de acción de la carga pasa a través del centroide de la forma soldada, justificando así el supuesto de que todas las partes de la soldadura están sometidas a igual esfuerzo. En algunos casos se encontró necesario balancear las soldaduras con el fin de lograr una conexión cargada concéntricamente (sección 7.26). Este balanceo no se puede hacer si todas las soldaduras se tienen que situar sobre un lado de la línea de acción de una carga. Cuando sucede esto, se dice que la forma de la soldadura o conexión está excéntricamente cargada.

Si la placa que recibe la carga en la figura 7.37a estuviera soldada al patín de la columna en vez de estar atornillada, la conexión seguiría siendo excéntrica con la carga actuando en el plano de las soldaduras. Las soldaduras están sujetas a un par de torsión, causando esfuerzos cortantes adicionales en las soldaduras.

Si los tornillos del soporte en Te de la figura 7.37b se reemplazaran por medio de soldadura de los bordes verticales del soporte al patín de la columna, esta conexión seguiría siendo excéntrica, con la carga actuando por fuera del plano de las soldaduras. La parte superior de la ménsula tendería a separarse del patín. En este caso la forma de la soldadura se puede concebir como sujeta a una carga que causa fuerza cortante y un momento que produce esfuerzos perpendiculares al cortante.

### 7.28 CARGA EN EL PLANO DE LAS SOLDADURAS

La siguiente explicación es válida para cualquier distribución de soldaduras en un plano.

En la figura 7.59a se muestra la forma de dos líneas verticales. La carga excéntrica  $P$  está en el plano de las soldaduras. En b) de la misma figura, la carga excéntrica se reemplaza por su equivalente, una carga directa y un par de torsión ( $T = Pe$ ). Se supone que la carga directa  $P$  está distribuida uniformemente sobre toda la longitud

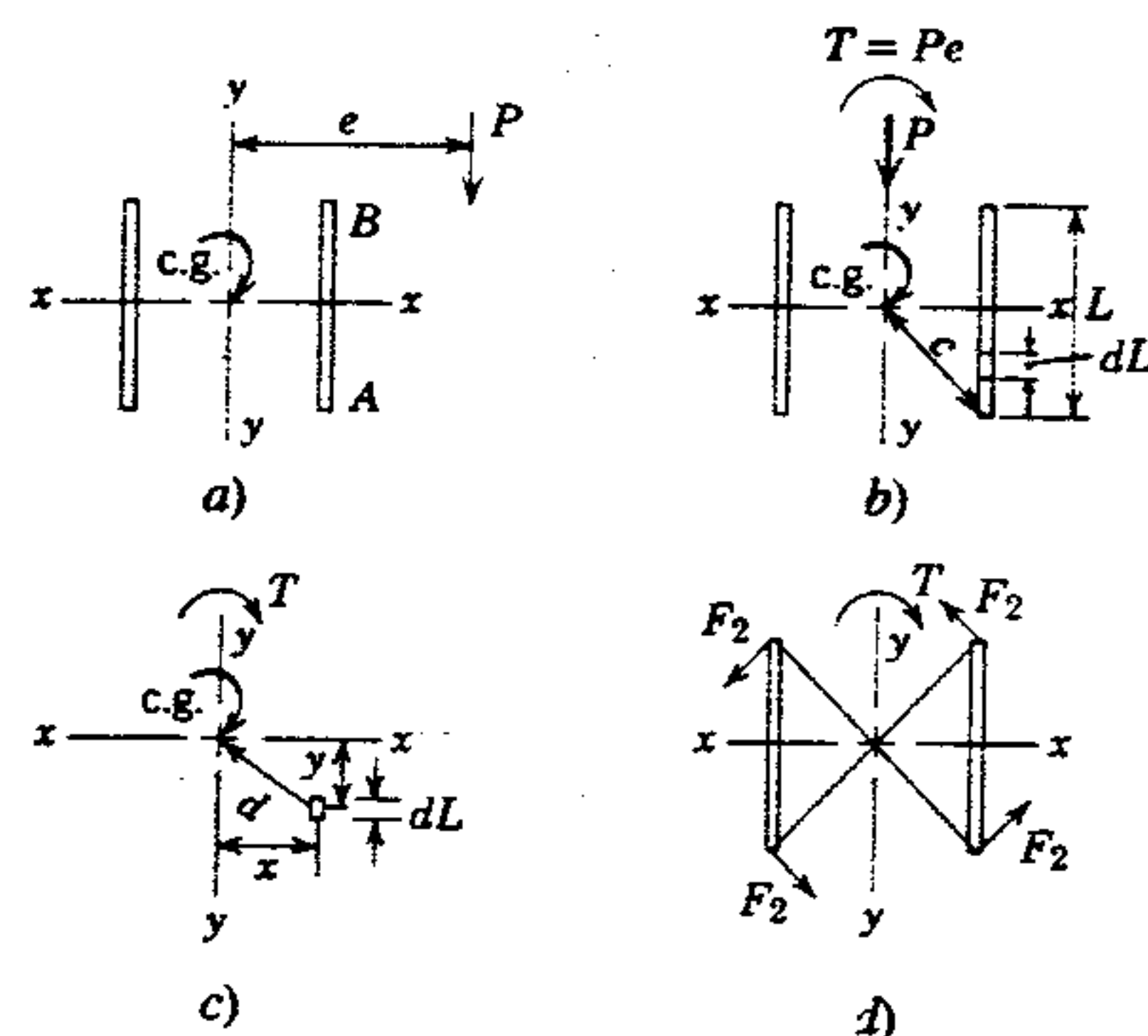


Figura 7.59 Excentricidad en el plano de soldaduras.

de la soldadura. Por lo tanto, designando  $F_1$  como la fuerza por pulgada lineal de soldadura resultante de la carga directa,

$$F_1 = \frac{P}{2L}$$

donde  $L$  es la longitud de una línea de soldadura.

El denominador en la ecuación anterior siempre es la longitud total de la soldadura, y la dirección de la fuerza  $F_1$  siempre es opuesta a la de la carga  $P$ .

Además de la fuerza  $F_1$ , hay otra fuerza,  $F_2$ , resultante del par de torsión. Una parte elemental de la soldadura,  $dL$ , se muestra aislada en la figura 7.59c. Ésta puede ser cualquier parte de la longitud de la soldadura, situada a una distancia  $d$  del centro de gravedad de las soldaduras y con coordenadas  $x$  y  $y$ .

Sean:

$F_0$  = fuerza por pulgada de soldadura a una distancia de una unidad del c. g. de las soldaduras

$F'_2$  = fuerza por pulgada de soldadura en el elemento.

$dT$  = momento resistente del elemento.

De la relación esfuerzo-deformación aplicable a un material elástico, una fuerza unitaria es propor-

nal a su distancia al centro de gravedad. Por lo tanto,

$$F_2 = F_0(d) = F_0\sqrt{x^2 + y^2}$$

La fuerza total sobre esta longitud elemental es  $F_2(dL)$  y tiene un momento resistente de

$$dT = F_2(dL)d$$

Sustituyendo  $F_2$  por su equivalente anterior,

$$dT = F_0(x^2 + y^2) dL$$

El momento resistente de la soldadura completa es la suma de los efectos de todas las partes elementales, y esto, a su vez, debe ser igual al par de torsión aplicado para establecer equilibrio.

$$T = \sum [F_0(x^2 + y^2) dL]$$

y como  $F_0$  es constante en cualquier distribución de soldadura,

$$F_0 = \frac{T}{\sum x^2 dL + \sum y^2 dL}$$

Cada término del denominador en la fórmula anterior se debe reconocer como el momento de inercia de la línea total de soldaduras con respecto al eje  $x$  o  $y$ . Por lo tanto,

$$F_0 = \frac{T}{I_x + I_y}$$

La fuerza  $F_0$  representa una fuerza unitaria por pulgada, localizada a una distancia unitaria del centro de gravedad de las soldaduras. La fuerza máxima en la soldadura se da en el punto más

perpendicular a la línea que conecta este punto con el c. g. Si  $c$  (figura 7.59) representa la distancia, y  $F_2$  representa la fuerza máxima,

$$F_2 = \frac{Tc}{I_x + I_y}$$

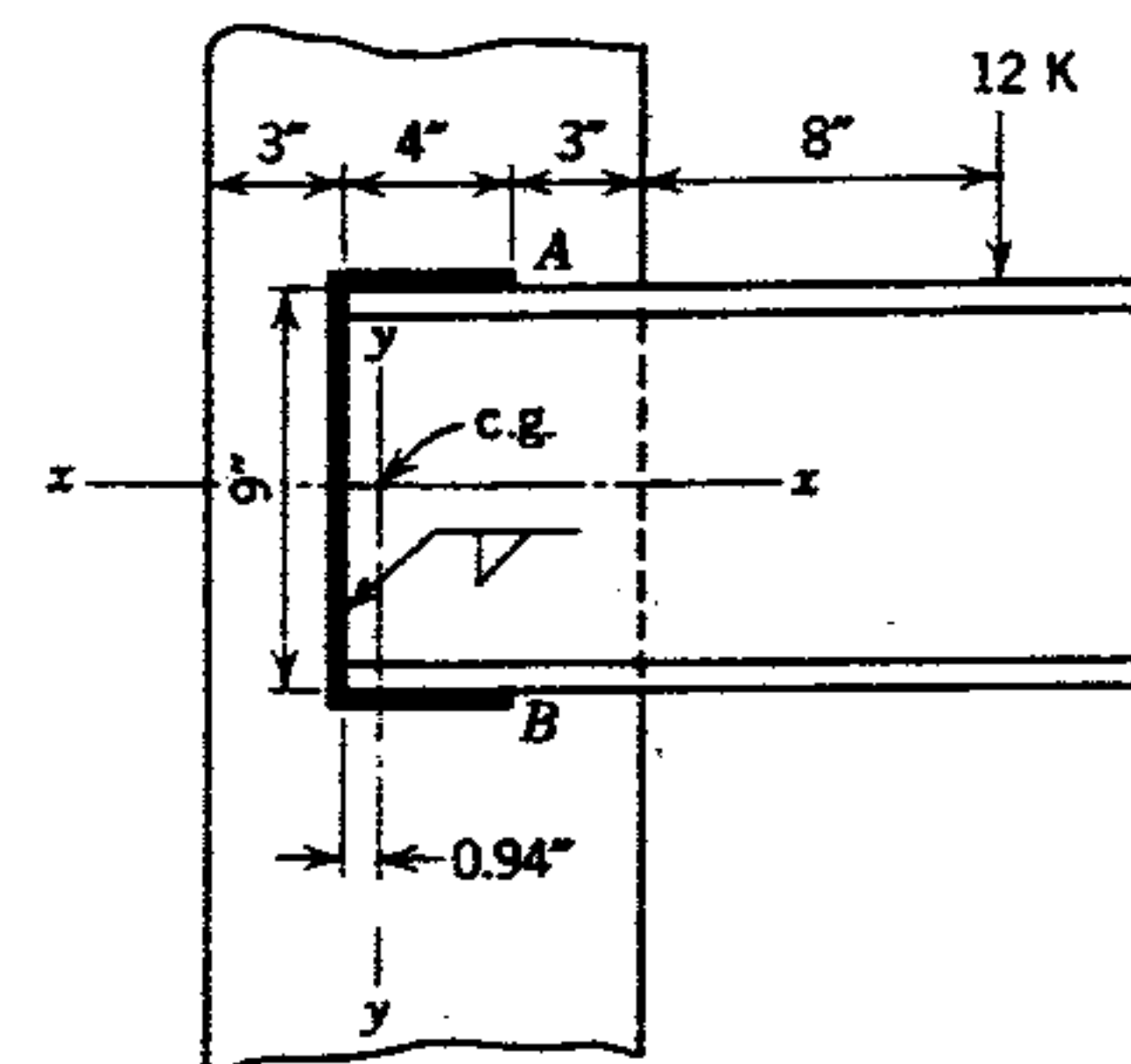


Figura 7.60 Ejemplo 1.

Ésta es la fórmula general de la fuerza máxima resultante de un par de torsión. Las soldaduras mostradas en la figura 7.59 son tales que la fuerza máxima ocurre en cada extremo y sus direcciones respectivas se indican en d) en esta figura.

La demostración anterior muestra que el efecto de una carga excéntrica en una conexión soldada, donde la carga actúa en el plano de las soldaduras, es una fuerza resultante de la carga directa  $F_1$ , y una fuerza resultante del par de torsión  $F_2$ , cada una de las cuales tiene una dirección determinada. Por lo tanto, el efecto total es la suma vectorial de  $F_1$  y  $F_2$ . Para un diseño seguro, la suma vectorial máxima de  $F_1$  y  $F_2$  no debe exceder la resistencia de la soldadura  $F$  determinada por su tamaño.

La localización de la fuerza total crítica (suma vectorial de  $F_1$  y  $F_2$ ) se puede calcular aplicando una regla práctica general similar a la de los tornillos. El punto crítico ocurre en el punto más alejado del c. g. de las soldaduras y más cercano a la línea de acción de la carga excéntrica. Aplicando esta regla al detalle mostrado en la figura 7.59a se localiza el punto crítico en A o B.

#### Ejemplo

Una canal de 9 pulgadas está soldada al patín de una columna, como se ve en la figura 7.60. Ambos miembros son de acero A36. Determinar el tama-



ño de la soldadura con electrodo E60 necesaria para resistir la carga excéntrica de 12 kips.

### Solución

1. Calcular la localización del centro de gravedad de las 17 pulgadas lineales de soldadura.

$$\bar{x} = \frac{2(4)2}{17} = 0.94 \text{ pulg.}$$

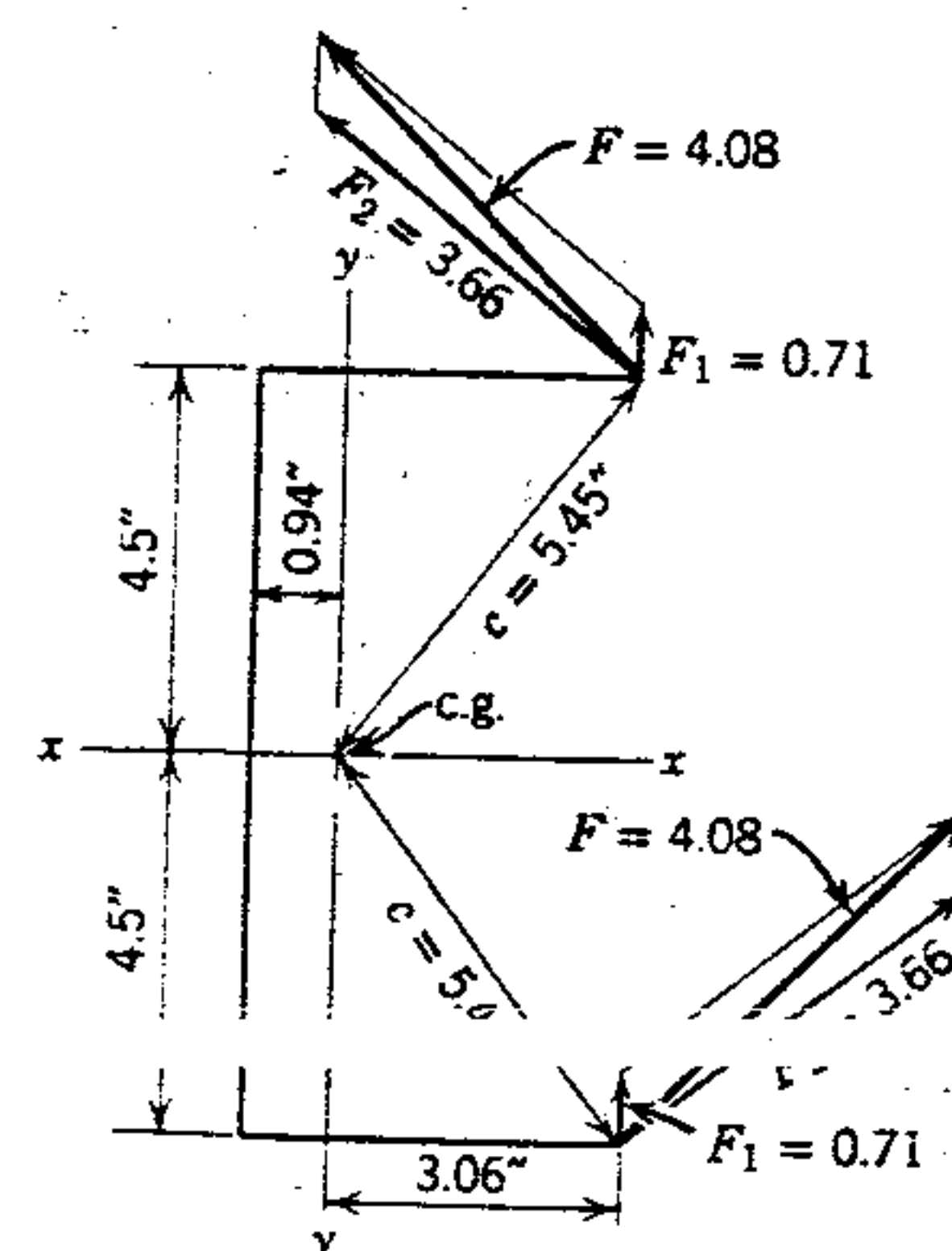
2. Calcular  $I_x$  e  $I_y$  de la línea de soldadura.

$$I_x = \frac{9^3}{12} + 2[4(4.5)^2] = 223 \text{ pulg}^3$$

$$I_y = 9(0.94)^2 + 2\left[\frac{4^3}{12} + 4(1.06)^2\right] = 7.96 + 19.66 = 27.6 \text{ pulg}^3$$

3. Calcular la distancia de c. g. al punto crítico de la soldadura. El punto crítico está en A o B, teniendo ambos una distancia

$$c = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3.06^2 + 4.5^2} = 5.45 \text{ pulg.}$$



a) Solución gráfica

4. Calcular la fuerza máxima resultante del par de torsión.

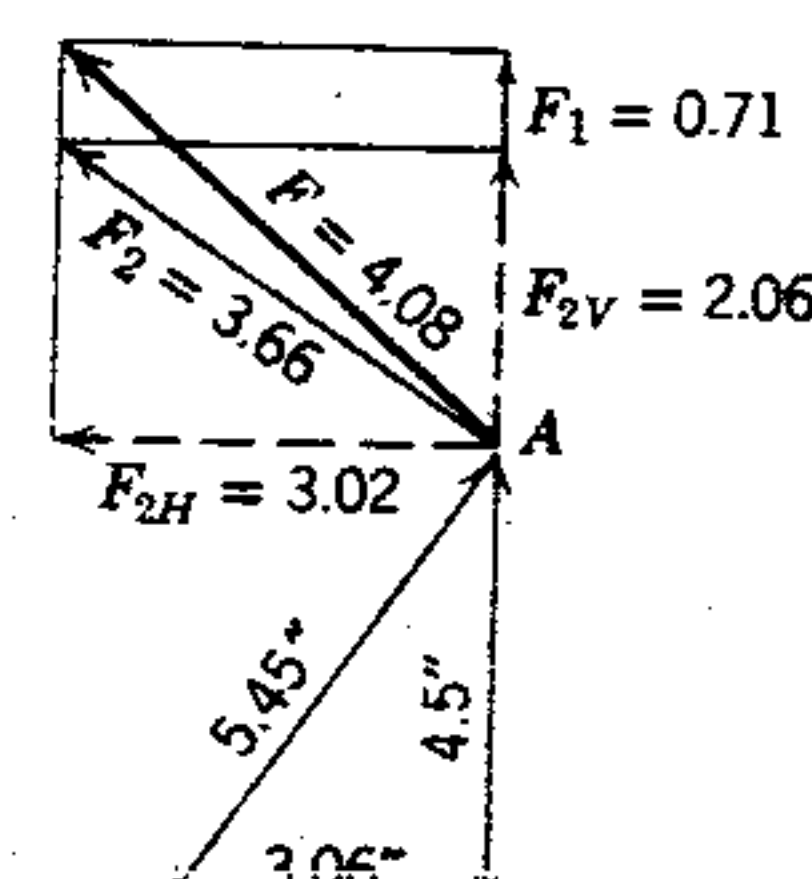
$$F_2 = \frac{Tc}{I_x + I_y} = \frac{12(14.06)5.45}{223 + 27.6} = 3.66 \text{ kips por pulgada}$$

5. Determinar la fuerza promedio resultante de la carga directa.

$$F_1 = \frac{P}{\text{longitud total de soldadura}} = \frac{12}{17} = 0.71 \text{ kips por pulgada}$$

6. Calcular la suma vectorial de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ . Esto se puede hacer gráfica o matemáticamente descomponiendo  $F_2$  en componentes verticales y horizontales.

- a) La solución gráfica para los puntos A y B se muestra en la figura 7.61a.
- b) La solución matemática para el punto A aparece en la figura 7.61b.



b) Solución matemática

Figura 7.61 Solución del ejemplo 1.

Convertir la fuerza  $F_2$  en componentes horizontal y vertical. De las proporciones simples establecidas mediante triángulos semejantes (formados por los ángulos rectos en la figura)

$$F_{2V} = \frac{3.06}{5.45} (3.66) = 2.06 \text{ (componente vertical)}$$

$$F_{2H} = \frac{4.50}{5.45} (3.66) = 3.02 \text{ (componente horizontal)}$$

La fuerza vertical total en A es

$$F_{2V} + F_1 = 2.06 + 0.71 = 2.77 \text{ kips por pulg}$$

La fuerza horizontal total en A es

$$F_{2H} = 3.02 \text{ kips por pulg}$$

Por lo tanto, la suma vectorial total de las fuerzas en A es

$$F = \sqrt{2.77^2 + 3.02^2} = 4.08 \text{ kips por pulg}$$

7. Conociendo la fuerza máxima por pulgada de soldadura, producida por la carga, el tamaño requerido de soldadura necesaria para resistir esta fuerza, usando electrodos E60, es

$$12.7D = F = 4.08$$

$$D = \frac{4.08}{12.7} = 0.321; \text{ usar soldadura de } 3/8 \text{ pulg}$$

Al igual que con los sujetadores, el procedimiento descrito aquí se puede usar con seguridad para diseñar conexiones excéntricas soldadas. Se ha demostrado mediante pruebas que los resultados son conservadores. Además, el uso de este procedimiento no da como resultado conexiones indebidamente grandes o costosas. Sin embargo, los resultados de pruebas han mostrado que el factor de seguridad

no permanece constante. Por lo tanto, el AISC permite otro procedimiento de diseño basado en el diseño de resistencia máxima o límite (capítulo 11). La octava edición del Manual AISC describe este procedimiento alternativo y da tablas de coeficientes para diversos patrones de soldado que simplifican el procedimiento.

### 7.29 CARGA FUERA DEL PLANO DE SOLDADURAS

La siguiente explicación es válida para cualquier patrón de soldadura hecha en un plano. En la figura 7.62 se muestra una soldadura que se compone de dos líneas verticales de soldadura y una línea de soldadura horizontal. Una fuerza excéntrica  $P$  se muestra fuera del plano de soldaduras.

La carga excéntrica  $P$  de la figura 7.62a está reemplazada por su equivalente, una carga concéntrica y un momento, como se ve en b). Se supone que la nueva carga concéntrica  $P$  está uniformemente distribuida toda la longitud de la soldadura. Si se designa  $F_1$  o la fuerza por pulgada lineal de longitud de soldadura resultante de la carga directa,

$$F_1 = \frac{P}{\text{longitud total de soldadura}}$$

$F_1$  es opuesta a la dirección de la carga  $P$ , en el plano de soldaduras.

Además de la fuerza  $F_1$ , hay otra fuerza,  $F_2$ , resultante del momento.  $F_2$  no es una fuerza uniforme, sino que varía de acuerdo a su localización respecto al eje x-x. Las fuerzas del momento son cero en el eje x-x (pasando a través del centroide de las soldaduras); son de tensión para todas las partes de soldadura sobre el eje; y son de compresión para todas las partes de soldadura debajo del eje. Se debe notar también que estas fuerzas siempre actúan perpendicularmente al plano de las soldaduras. Sean:

$F_0$  = fuerza del momento a una distancia unitaria del eje x-x.



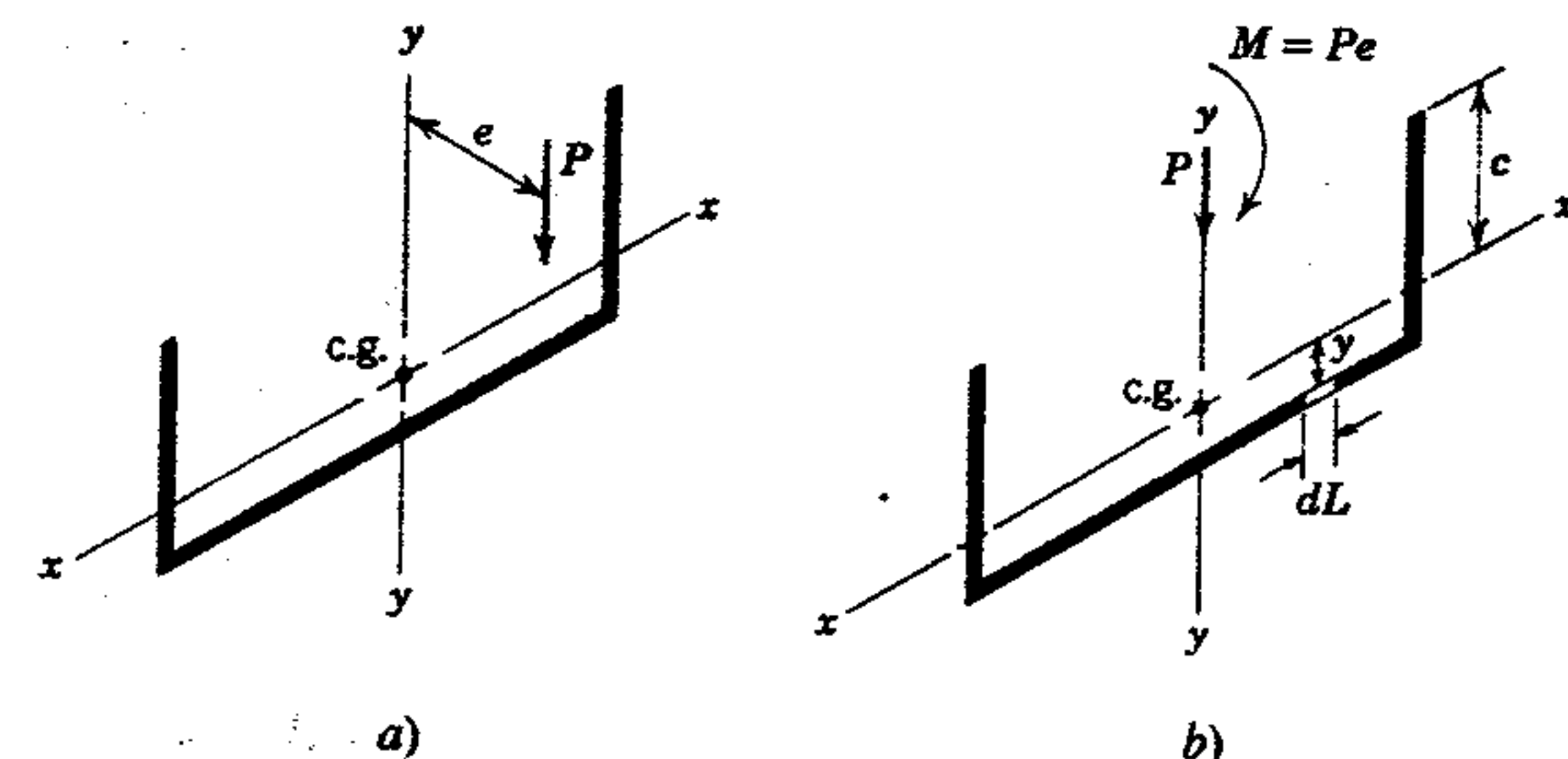


Figura 7.62 Excentricidad fuera del plano de las soldaduras.

$dL$  = una longitud elemental de soldadura a una distancia  $y$  del eje  $x-x$ .

$dM$  = momento respecto al eje  $x-x$  de la fuerza sobre el elemento  $dL$ . Entonces, la fuerza por pulgada de soldadura a una distancia  $y$  del eje  $x-x$  es  $F_0 y$ , y la fuerza total sobre el elemento es  $F_0(y) dL$ . Asimismo

$$dM = F_0(y) dL(y)$$

El momento resistente de todo el grupo de soldaduras es la suma del efecto de todas las partes elementales y, para establecer el equilibrio, debe ser igual al momento aplicado  $M$ . Por lo tanto,

$$M = \sum [F_0(y^2) dL]$$

o, como  $F_0$  permanece constante,

$$F_0 = \frac{M}{\sum y^2 dL}$$

El término  $\sum y^2 dL$  se debe reconocer como el momento de inercia de una línea (representando el patrón de soldadura) con respecto al eje  $x-x$ . La fuerza máxima ocurre en el punto más alejado del eje  $x-x$ . Por lo tanto, si  $c$  representa esta distancia,

$$F_2 = \frac{Mc}{I_x}$$

El efecto combinado de la fuerza concéntrica y el momento será la suma vectorial de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ . Como se explicó antes, estas fuerzas actúan en ángulos rectos entre sí. Por lo tanto,

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Para un diseño seguro, esta fuerza máxima no debe exceder la resistencia de la soldadura determinada por el tamaño de la soldadura.

### Ejemplo

En la figura 7.63 se muestra un soporte en forma de Te, soldada a todo lo largo de su peralte con soldadura de filete a un patín de columna. Calcular el tamaño de soldadura necesario para resistir con

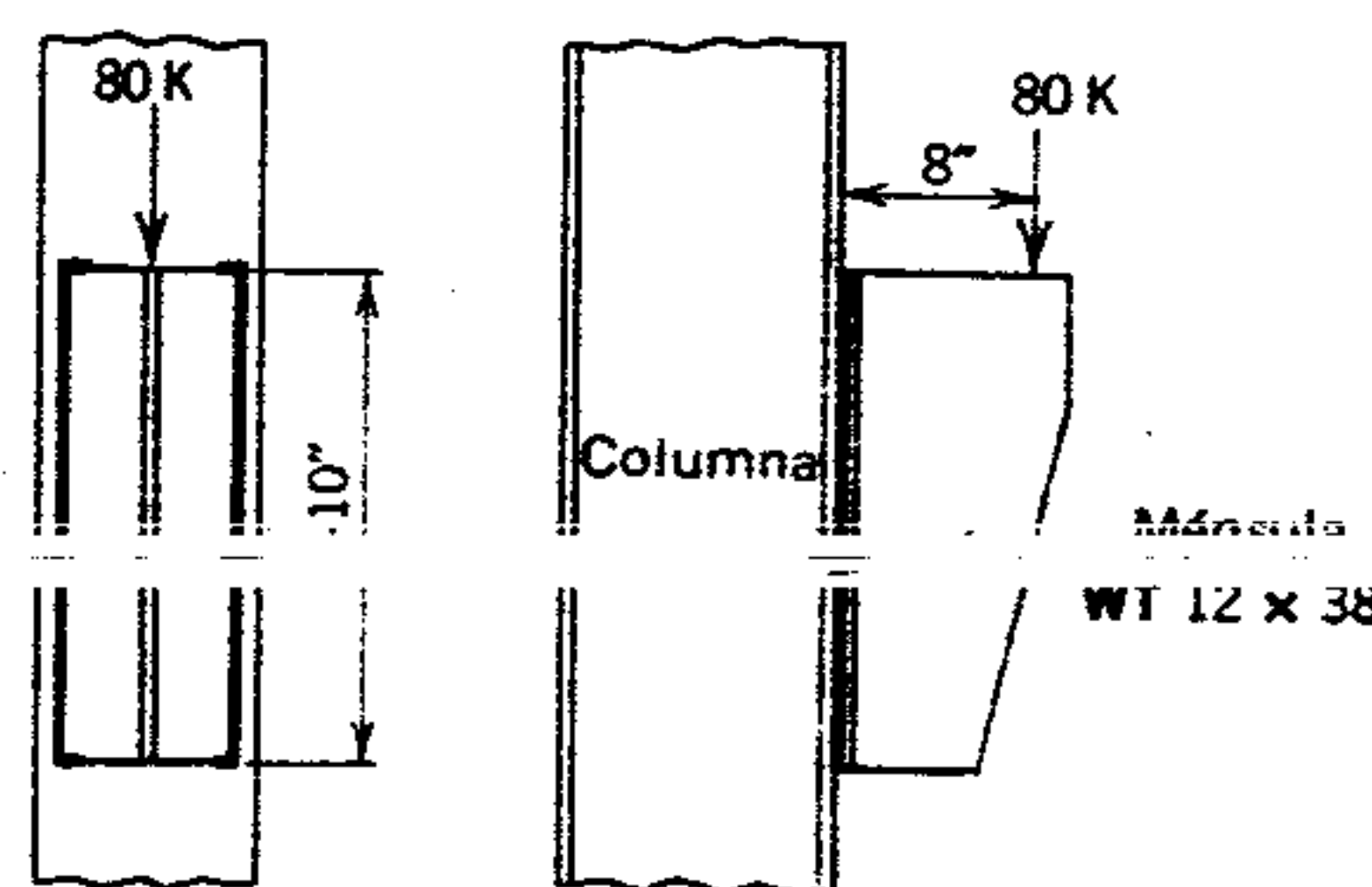


Figura 7.63 Ejemplo.

seguridad la carga excéntrica de 80 kips. El acero es A36 y los electrodos son E60.

### Solución

1. Calcular la fuerza vertical promedio por longitud unitaria de soldadura.

$$F_1 = \frac{80}{2(22)} = 1.82 \text{ kips por pulgada}$$

2. El eje  $x-x$ , que pasa por el centroide de las soldaduras, está localizado a mitad del peralte.
3. Calcular el momento de inercia de las soldaduras en relación al eje  $x-x$ .

$$I_x = 2\left(\frac{22^3}{12}\right) = 1770 \text{ pulg}^3$$

4. Calcular la máxima fuerza de momento sobre las soldaduras.

$$F_2 = \frac{Mc}{I_x} = \frac{8(80)11}{1770} = 3.98 \text{ kips por pulgada}$$

5. Determinar la suma vectorial de  $F_1$  y  $F_2$ .

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1.82^2 + 3.98^2}$$

$$F = 4.38 \text{ kips por pulgada}$$

6. Calcular el tamaño de soldadura necesario para obtener la fuerza máxima.

$$12.7D = 4.38$$

$$D = 0.345; \text{ usar soldadura de } \frac{3}{8} \text{ pulg.}$$

### PROBLEMAS

1. La espalda de una sección C 8 X 11.5 está soldada al patín de una columna W 10 X 33, como

se ve en la figura 7.64. La soldadura es de filete y de 3/16 pulg situada alrededor de todo el perímetro, como se muestra. Calcular la reacción  $R$  máxima de la viga, situada a 4 pulg del borde del patín de la columna. Usar acero A36 y electrodos E60. (La respuesta se da en el Apéndice G).

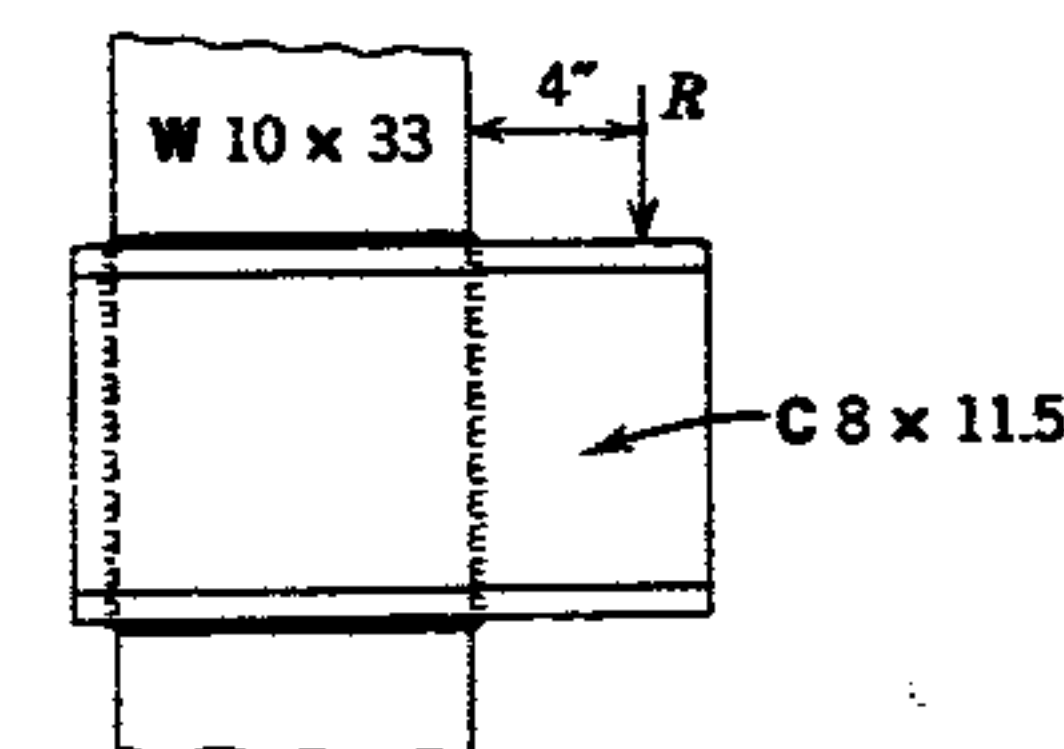


Figura 7.64 Problema 1.

2. Una placa de 3/4 pulg está cortada y soldada al patín de una columna, como se ve en la figura 7.65. Calcular el tamaño de la soldadura de filete necesaria para soportar la carga excéntrica de 30 kips que se muestra. Usar acero A242 y electrodos E70. (La respuesta se da en el Apéndice G).

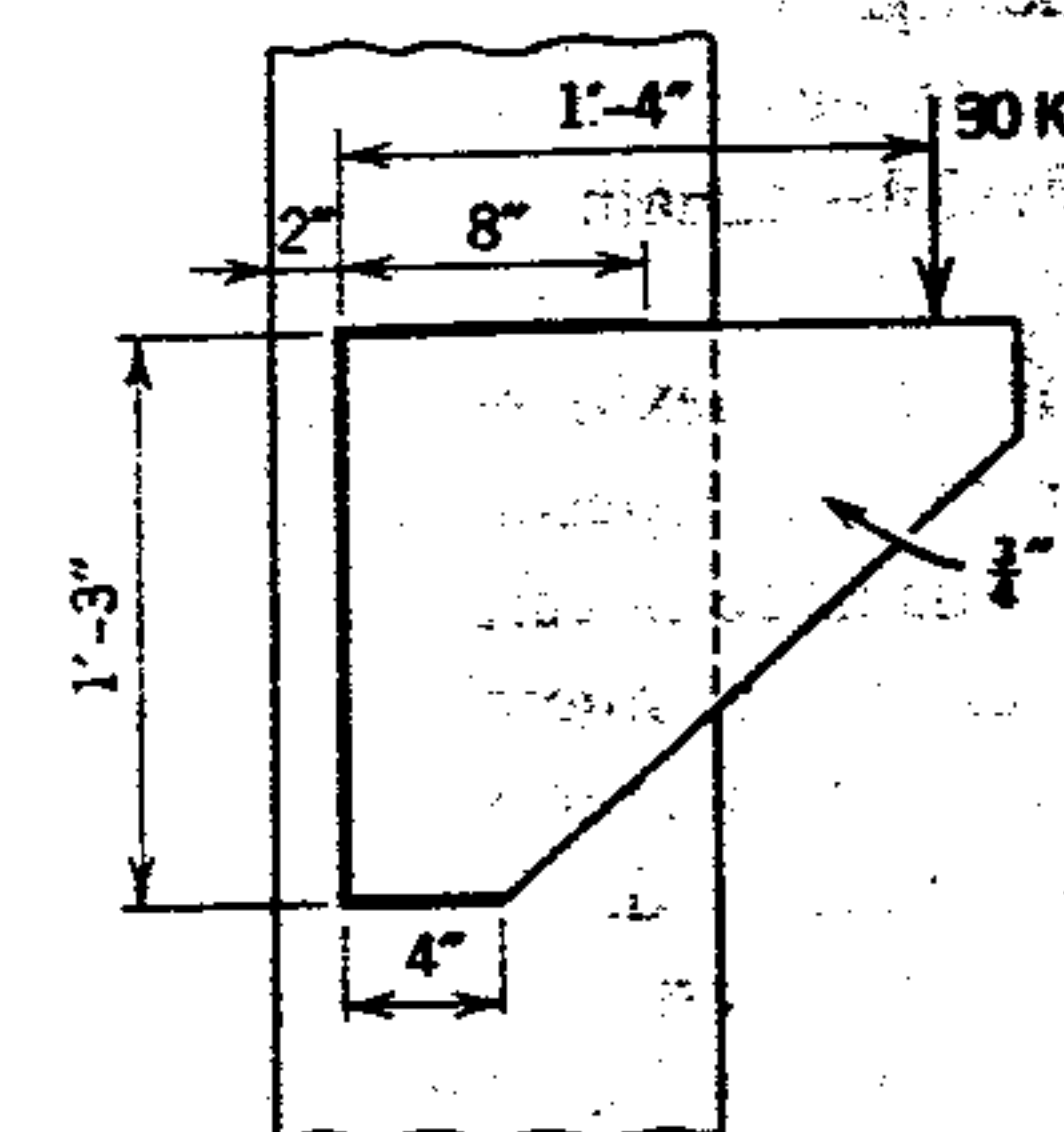


Figura 7.65 Problema 2.

3. Determinar el tamaño de la soldadura de filete necesaria para la conexión que se muestra en la figura 7.66. Todo el acero es A36. Usar electrodos E70.



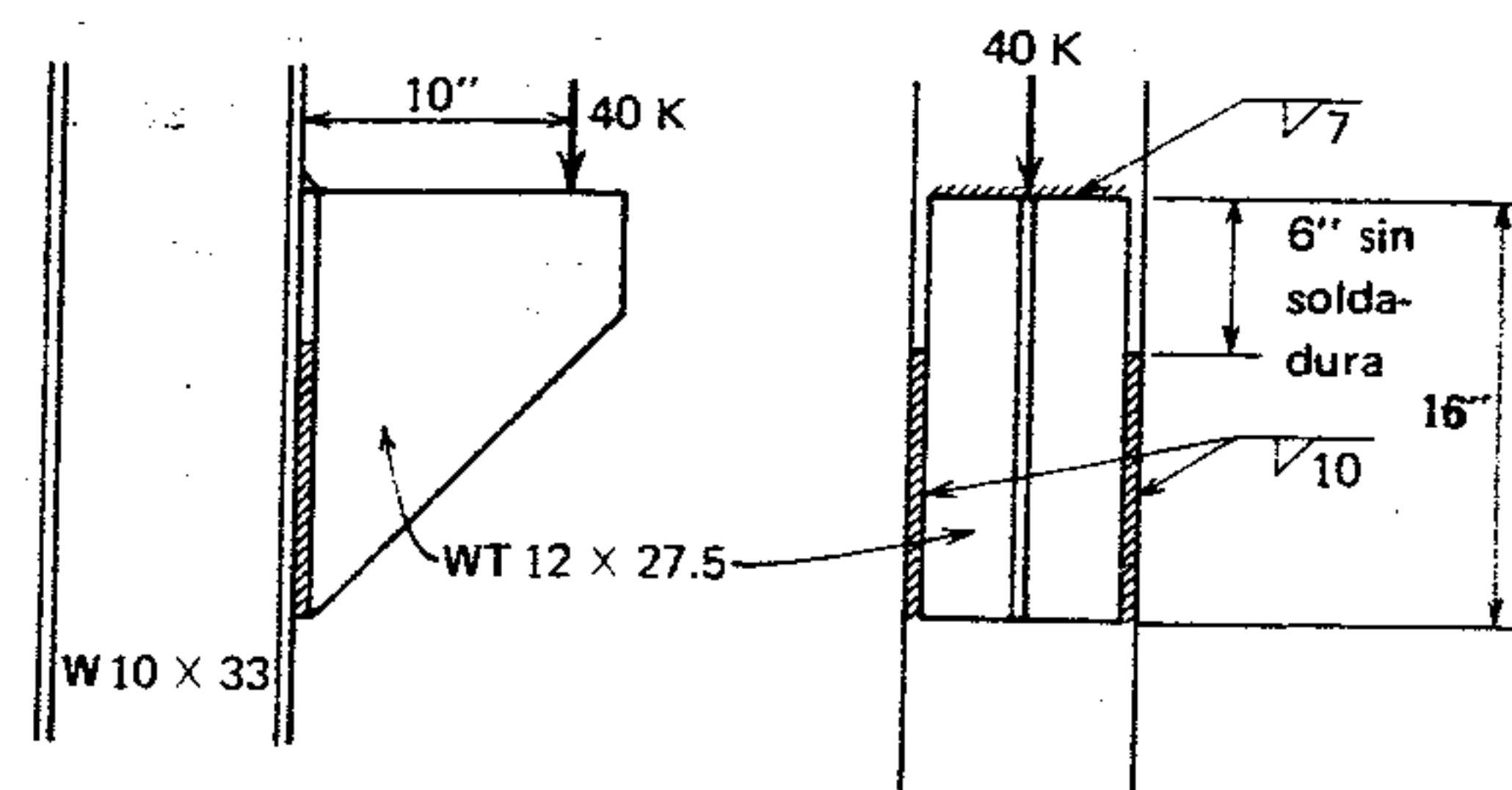


Figura 7.66 Problema 3.

### 7.30 CONEXIONES FLEXIBLES SOLDADAS PARA VIGAS

Algunas veces las conexiones de vigas flexibles estándar se denominan conexiones cortantes. En la sección 7.4 se estudiaron tres tipos comunes de éstas, es decir, asientos de viga, placas de extremo y ángulos de conexión (figuras 7.6 a 7.9). En las secciones 7.14, 7.15 y 7.16 se explicaron algunos tipos de diseño para estas conexiones, usando sujetadores. Aquí, se tratará un método de diseño usando soldaduras.

**Asientos de viga.** Como se vio en la sección 7.16, los asientos de viga pueden ser flexibles o rigidizados. Los flexibles usualmente tienen 6 u 8 pulg de ancho y su diseño es esencialmente el mismo que el descrito para las conexiones con sujetador. Tienen gran importancia el espesor del ángulo y la excentricidad calculada de la carga (figura 7.36). La sujeción del asiento al miembro soportante (figura 7.67) se efectúa mediante soldaduras a lo largo de los bordes verticales del ángulo solamente. Este tipo de soldadura está cargada excéntricamente, con la carga fuera del plano de las soldaduras. Para el diseño de estas conexiones, se debe usar el método descrito en la sección 7.29 y en la parte 4 del Manual AISC se dan tablas de cargas máximas ante varias condiciones estándar.

**Placas de extremo.** Este tipo de conexión de viga se muestra en la figura 7.7. Una placa rectangular

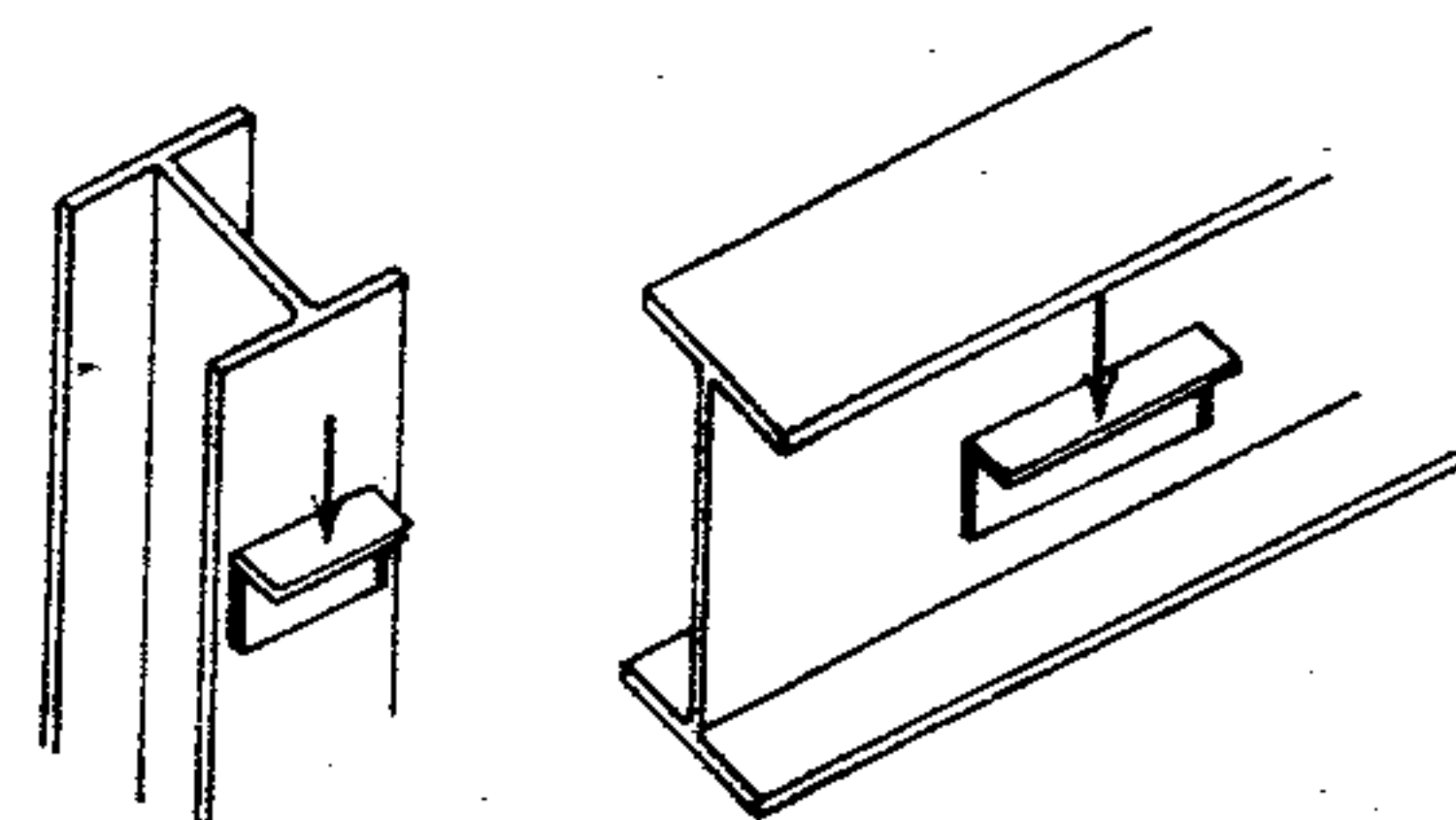


Figura 7.67 Asientos de viga soldados.

se suelda al extremo de la viga. Habitualmente la placa se atornilla al miembro soportante, y su diseño se explicó en la sección 7.15.

La longitud de la placa (peralte) se hace menor que el peralte de la viga de modo que toda la soldadura esté en el alma. Esta limitación, más la estipulación adicional de que las placas tengan un espesor entre 1/4 y 3/8 pulg, aseguran una flexibilidad adecuada y la rotación del extremo necesaria para el tipo 2 de construcción. No hay excentricidad ni en las soldaduras ni en los tornillos.

El Reglamento del AISC requiere que la soldadura se componga de dos soldaduras de filete en el alma de la viga. El reglamento especifica además que las soldaduras no tengan remate a través del alma en la parte inferior o superior de la placa de extremo. Por lo tanto, la longitud efectiva de la soldadura es el peralte de la placa menos el doble del tamaño de la soldadura. Como la soldadura se coloca sobre ambos lados del alma de la

viga, se debe calcular una limitación teórica del tamaño. En la sección 7.25 se explica que el tamaño límite de soldadura es

$$D = 0.0154F_y t_w \text{ para electrodos E60}$$

$$D = 0.0135F_y t_w \text{ para electrodos E70}$$

Sin embargo, los procedimientos reales de diseño permiten tamaños mayores de soldadura en vista de que su capacidad se reduce por la relación entre el espesor proporcionado y el espesor requerido. En el Manual AISC se da una tabla de cargas admisibles para diversas placas estándar de extremo, conexiones cortantes para tornillos de 3/4 y 7/8 pulg usando  $F_y = 36$  y  $50 \text{ k/pulg}^2$  y electrodos E70.

#### Ejemplo 1

Diseñar una conexión de placa cortante de extremo para una viga W 12 X 40 con una reacción de 32 kips. La columna soportante es una sección W 10 X 33. Todo el acero es A36 y se especifican electrodos E60. Los tornillos son A325N colocados en orificios estándar con un espaciamiento de 3 pulgadas.

#### Solución

1. Hacer un primer estimado del número de tornillos, espesor de la placa de extremo y tamaño de tornillos requeridos. Probar un espesor mínimo de placa cortante de 1/4 pulg. Usando tornillos A325N, el aplastamiento es una consideración importante, y en este ejemplo los tornillos estarán sometidos a cortante simple. Probar con tornillos de 5/8 pulg, con una capacidad de 6.4 kips por tornillo (el aplastamiento de 13.6 kips por tornillo no es deter-

$$\text{número de tornillos} = \frac{32}{6.4} = 5.0;$$

usar 6 tornillos porque se requiere un número par.

2. Calcular el peralte máximo de la placa.

$$L = T = 9\frac{1}{2} \text{ pulg.}$$

Usar una placa de 8 1/2 pulg de espesor (estándar).

3. Probar una soldadura de 3/16 pulg en cada lado del alma de la viga y calcular la capacidad no ajustada de la soldadura. La longitud efectiva de la soldadura es  $8\frac{1}{2} - 2(3/16) = 8.13$  pulg.

$$F = 2(12.7)\frac{3}{16} = 4.76 \text{ kips por pulgada}$$

$$\text{Capacidad} = 4.76(8.13) = 38.7 \text{ kips.}$$

4. Revisar el espesor del alma de la viga necesario para la soldadura de 3/16 pulg, compararlo con el espesor real del alma y usar la relación de reducción si es necesario.

$$t_w = \frac{\frac{3}{16}}{0.0154(36)} = 0.338 \text{ pulg es necesaria}$$

El  $t_w$  real es 0.95 pulg, y la relación de reducción es

$$\frac{0.295}{0.338}$$

5. Calcular la capacidad reducida de la soldadura y compararla con la reacción de la viga.

$$\frac{0.295}{0.338}(38.7) = 33.8 > 32 \text{ kips CORRECTO}$$

**Ángulos de conexión.** Las conexiones con ángulos se muestran en la figura 7.6 y se presentan con más detalle en la figura 7.68. Los ángulos de conexión (que se usan en pares) montan sobre el alma de la viga y la soldadura de filete se coloca a lo largo de la parte superior, inferior y lado vertical del ángulo. Estas soldaduras van sobre cada lado del alma de la viga y por tanto su tamaño está limitado.

Las alas sobresalientes de los ángulos están soldadas al miembro soportante sólo a lo largo del borde vertical del ángulo. Esto se hace para asegu-



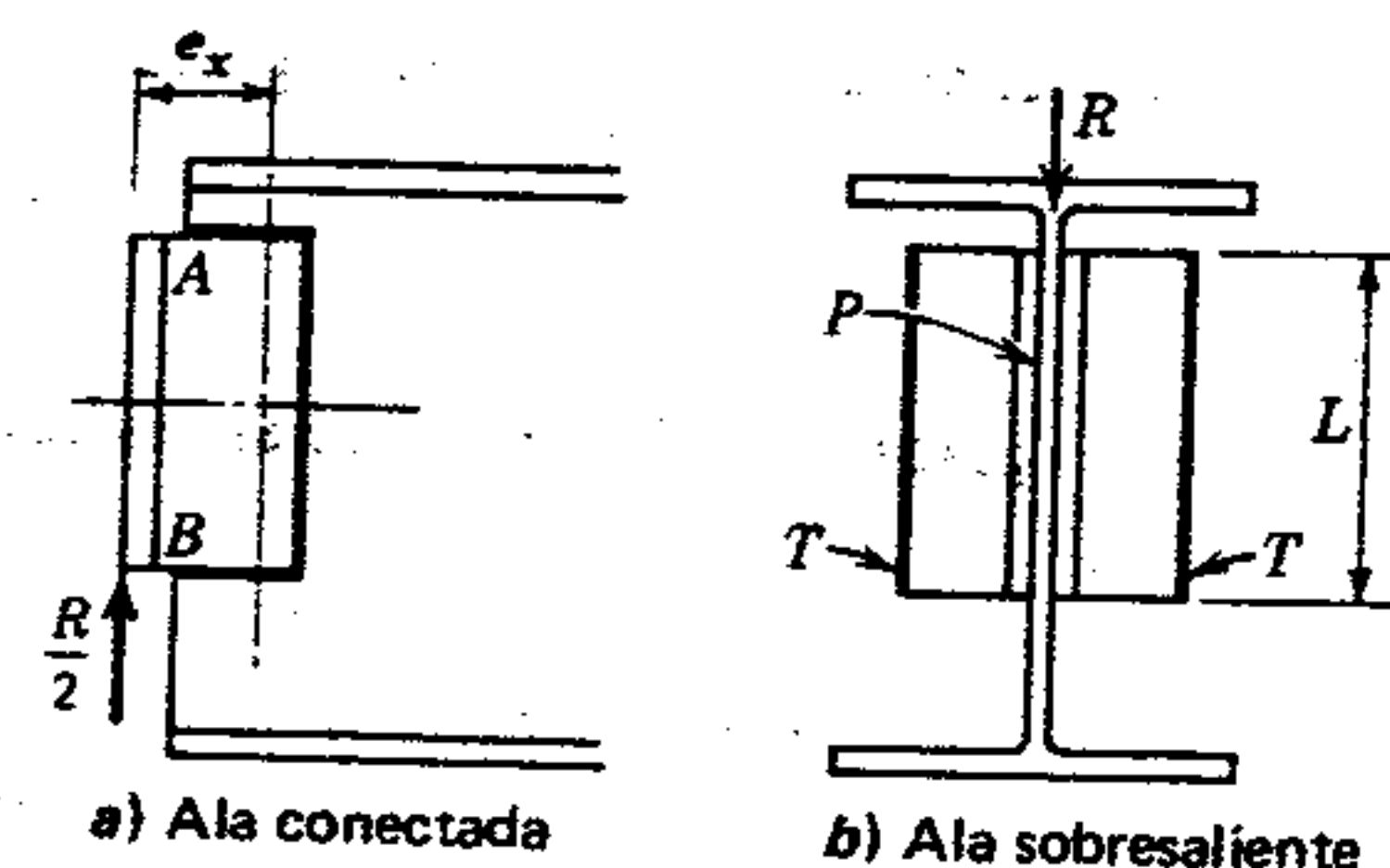


Figura 7.68 Ángulos de conexión soldados.

rar la flexibilidad necesaria para el tipo 2 de construcción. Usualmente los ángulos tienen alas de 3 pulg y el espesor necesario para el tamaño de la soldadura que se usará. La longitud de los ángulos está determinada por los requisitos de resistencia, pero nunca es mayor que el peralte de la viga menos  $2k$  y nunca menor que la mitad del peralte.

Habitualmente el ala sobresaliente es conectada en campo, y se usan sujetadores mecánicos (tornillos) en vez de soldadura. Así, la conexión se convierte en "soldada en taller" y "atornillada en campo", que es el tipo más empleado en la construcción en acero. Para permitir el atornillado, el ala sobresaliente debe tener un ancho mínimo de 4 pulgadas.

En la figura 7.68a se ve que la soldadura sobre el ala conectada está cargada excéntricamente, con la carga situada en el plano de las soldaduras. Cada ángulo soporta la mitad de la reacción de la viga, y la soldadura se debe diseñar para soportar la carga axial ( $R/2$ ), así como el par de torsión ( $R/2$  por  $e_x$ ). Los puntos A y B son críticos. En la sección 7.28 se explicó ya el proceso de diseño. Como esta soldadura está situada sobre ambos lados del alma de la viga, la limitación teórica del tamaño se debe imponer (sección 7.25). Sin embargo, los procedimientos de diseño reales permiten mayores tamaños de soldadura siempre que su capacidad se reduzca por la relación entre espesor requerido.

En la figura 7.68b se muestran las alas sobresalientes soldadas al miembro soportante. Puede parecer que las soldaduras están cargadas axialmente, ya que la línea de acción de la reacción parece pasar por el centroide de las dos soldaduras vertica-

les. No obstante, la experiencia demuestra que debido a la relativamente gran longitud de la soldadura y la acción flexible deseada, hay cierta excentricidad. La parte superior de los ángulos se apoya hacia adentro, creando una presión sobre el alma de la viga en la cercanía de P (figura 7.68b). Al mismo tiempo, la parte inferior de las soldaduras (T) ejerce una fuerte cortante hacia afuera.

Para propósitos de diseño, es satisfactorio suponer que la presión cerca de la parte superior de los ángulos ocurre a una distancia (figura 7.69), de  $1/6$  de la longitud de la soldadura ( $L$ ). Esta presión ejerce la fuerza total ( $P$ ), y el esfuerzo unitario varía linealmente de un máximo en la parte superior a cero en  $L/6$ . Por estos supuestos la fuerza  $P$  se sitúa a  $1/3(L/6)$ , o sea  $L/18$  por debajo del borde superior.

La soldadura del resto de la distancia ( $5/6L$ ) genera la contrafuerza  $T$  y tiene una distribución lineal de esfuerzo de cero a un máximo en la parte inferior de la soldadura. Esto sitúa la fuerza  $T$  a  $5/18L$  hacia arriba de la parte inferior. Por lo tanto, el par interno entre  $T$  y  $P$  tiene un brazo de momento de  $2L/3$ . Este par interno se opone al momento aplicado  $R/2(e_x)$ . De lo cual

$$T \frac{2}{3}L = \frac{R}{2} e_x$$

$$T = \frac{3Re_x}{4L}$$

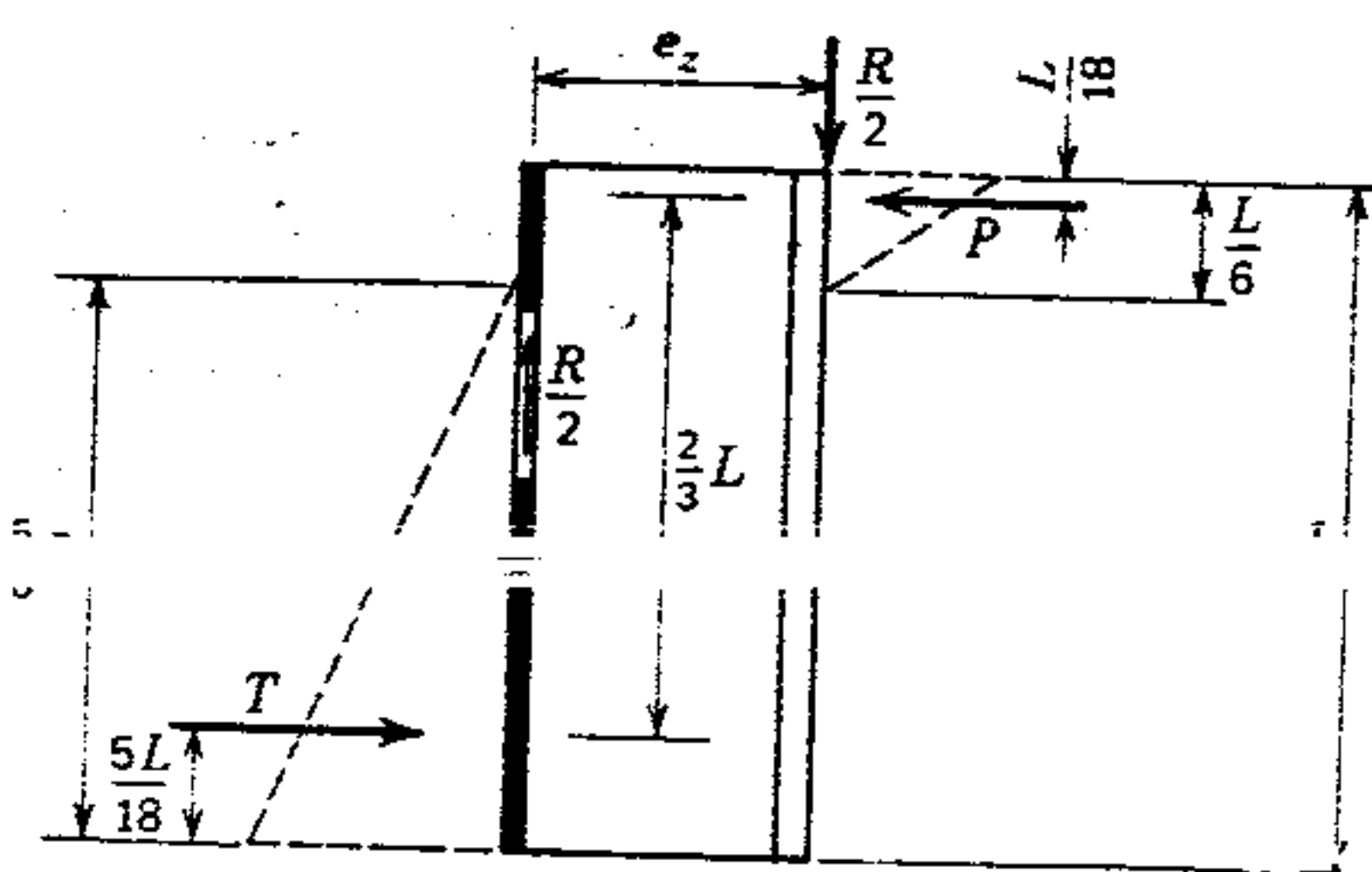


Figura 7.69 Equilibrio de fuerzas en el ala sobresaliente.

La fuerza horizontal unitaria máxima en la soldadura en el mero fondo es el doble del promedio, o sea

$$F_2 = \frac{2T}{L}$$

A este valor se debe agregar, vectorialmente, la fuerza unitaria vertical

$$F_1 = \frac{R/2}{L}$$

Así la fuerza unitaria máxima viene a ser

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

La fuerza unitaria máxima es la que determina el tamaño de la soldadura.

### Ejemplo 2

Diseñar una conexión de ángulo entre una viga W 18 X 60 con una reacción en el extremo de 40 kips, y una columna W 10 X 49. Todo el acero es A36. Usar electrodos E70. El extremo de la viga se va a situar a  $1/2$  pulg de la cara de la columna (un procedimiento estándar).

### Solución

1. Suponer un ángulo de  $3 \times 3$ , de 10 pulg de longitud. La dimensión  $T$  de la viga es  $15 \frac{1}{2}$  pulg, lo cual es mayor que la longitud del ángulo, 10 pulg, y por lo tanto, es satisfactorio.
2. Hacer un croquis de la forma de la soldadura para el ala conectada y calcular las propiedades pertinentes para determinar el esfuerzo axial unitario y el esfuerzo por torsión unitario (figura 7.70).

Longitud total = 15 pulg

$$\bar{x} = \frac{2(2.5)1.25}{15} = 0.42 \text{ pulg}$$

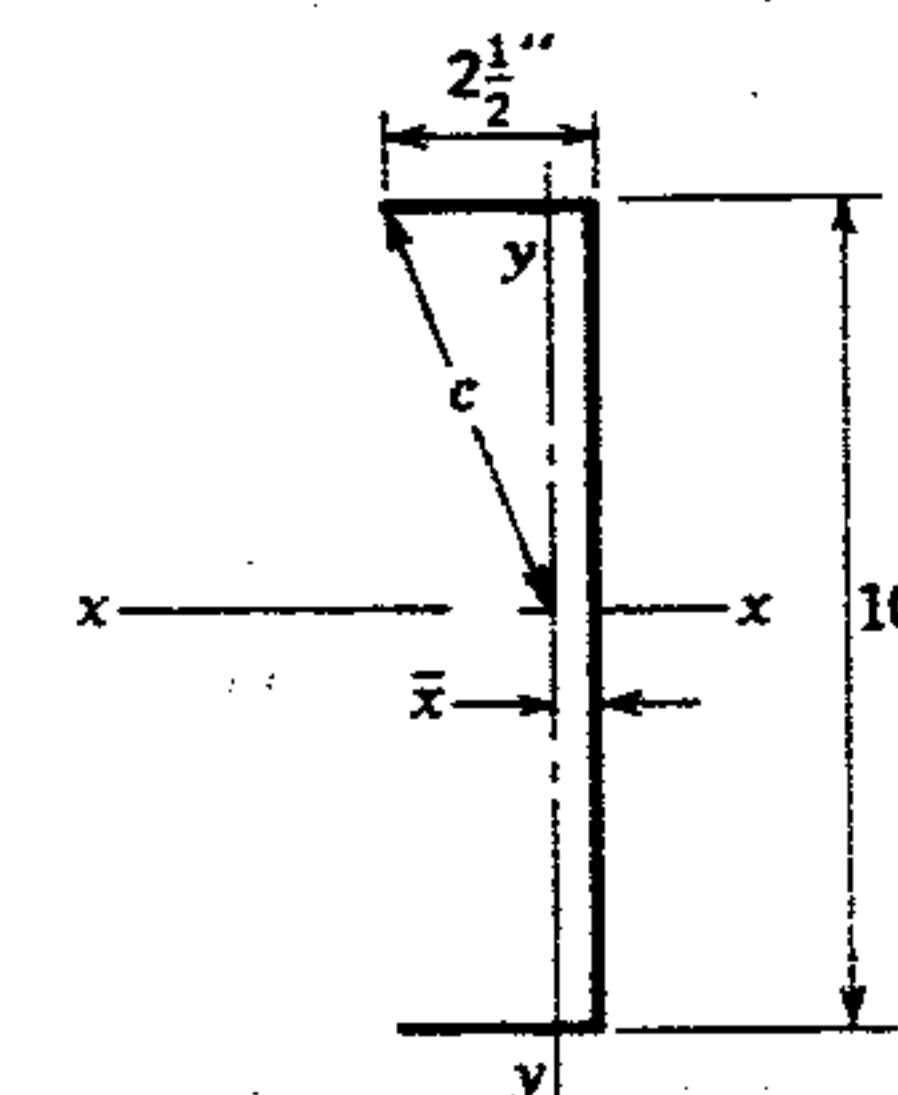


Figura 7.70 Solución del ejemplo 2.

$$c = \sqrt{(2.08)^2 + (5)^2} = 5.42 \text{ pulg}$$

$$I_x = [2(2.5)5^2] + \frac{(10)^3}{12}$$

$$= 125 + 83.3 = 208 \text{ pulg}^3$$

$$I_y = \frac{2(2.5)^3}{12} + [2(2.5)0.83^2] + 10(0.42)^2$$

$$= 2.60 + 3.44 + 1.76 = 7.8 \text{ pulg}^3$$

$$I_x + I_y = 208 + 7.8 = 216 \text{ pulg}^3$$

3. Calcular la fuerza axial unitaria en la soldadura.

$$F_1 = \frac{20}{15} = 1.33 \text{ kips por pulg.}$$

4. Determinar la fuerza de torsión unitaria máxima en la soldadura y separarla en componentes horizontal y vertical.

$$F_2 = \frac{20(2.58)5.42}{216} = 1.29 \text{ kips por pulg}$$

$$F_{2V} = \frac{1.29}{5.42} (1.47) = 0.30$$

$$F_{2H} = \frac{1.29}{5.42} (1.29) = 1.19$$

5. Calcular la suma vectorial de la fuerza axial unitaria y de la fuerza de torsión unitaria.



$$F = \sqrt{(1.33 + 0.5)^2 + (1.19)^2} \\ = 2.18 \text{ kips por pulg.}$$

6. Calcular el tamaño requerido de soldadura y verificarlo con el espesor del alma y el espesor de los ángulos requeridos.

$$D = \frac{2.18}{14.8} \\ = 0.15 \text{ pulg. } \frac{3}{16} \text{ pulg. espesor requerido}$$

$$D_{\max} = 0.0135(36)0.415 \\ = 0.20 \text{ pulg. correcto}$$

$$\text{Espesor de ángulos necesarios} = 3/16 + 1/16 \\ = 1/4 \text{ pulg.}$$

7. Calcular la fuerza axial unitaria en el ala sobresaliente.

$$F_1 = \frac{20}{10} = 2 \text{ kips por pulg}$$

8. Determinar la fuerza cortante total distribuida en la parte inferior de los ángulos y la fuerza unitaria máxima resultante.

$$T = \frac{3(20)3}{4(10)} = 4.5 \text{ kips}$$

$$F_2 = \frac{2(4.5)}{\frac{5}{6}(10)} = 1.08 \text{ kips por pulg}$$

9. Calcular la suma vectorial de los cortantes unitarios.

$$F = \sqrt{(2)^2 + (1.08)^2} = 2.27 \text{ kips por pulg}$$

10. Determinar el tamaño de soldadura requerido y verificarlo con el espesor del alma y el espesor de los ángulos requeridos.

$$D = \frac{2.27}{14.8} = 0.15 \text{ pulg. } \frac{3}{16} \text{ pulg. espesor requerido}$$

$$\text{Espesor de ángulo requerido} = 3/16 + 1/16 \\ = 1/4 \text{ pulg.}$$

### 11. Resumiendo:

$$\text{Tamaño del ángulo} = 3 \times 3 \times \frac{1}{4} \text{ pulg } 10 \text{ pulg long.}$$

$$\text{Tamaño de ángulo} = 3 \times 3 \times \frac{1}{4} \text{ pulg, } 10 \text{ pulg longitud.}$$

$$\text{Tamaño de soldadura del ala conectada} \\ = 3/16 \text{ pulg.}$$

$$\text{Tamaño de soldadura del ala sobresaliente} \\ = 3/16 \text{ pulg.}$$

En el Manual AISC se dan tablas de cargas máximas para algunas conexiones de ángulo estándar, algunas de las cuales han sido íntegramente soldadas y otras formadas mediante una combinación de soldaduras y sujetadores.

### 7.31 CONEXIONES SOLDADAS RESISTENTES A MOMENTO

Como se señaló antes en este capítulo, la razón principal para usar conexiones resistentes al momento en edificios es para resistir el efecto de fuerzas laterales como el viento y los sismos. Por lo tanto, se usan como más frecuencia entre vigas principales y columnas, creando un "marco rígido" (capítulo 10). Sin embargo, aunque se usan principalmente para resistir cargas laterales, la carga de gravedad vertical provocará momentos flexionantes negativos en los extremos de las vigas.

En la figura 7.12a se muestra una conexión resistente a momento, atornillada, entre viga y columna. Las Tes estructurales se podrían reemplazar por placas rectangulares, soldadas en campo a los patines tanto de las vigas como de las columnas (figura 7.71a). También se pueden omitir Tes y placas juntas y soldar en campo patín contra patín directamente, como se ve en la figura 7.71b. No obstante, para este procedimiento se requiere exactitud en la fabricación (dejando una holgura de 1/4 pulg solamente), lo cual puede resultar demasiado costoso. Las soldaduras de placa y patín se deben diseñar para desarrollar una fuerza horizontal igual al momento del extremo dividido por el peralte de la viga, o sea  $F = M/d$ .

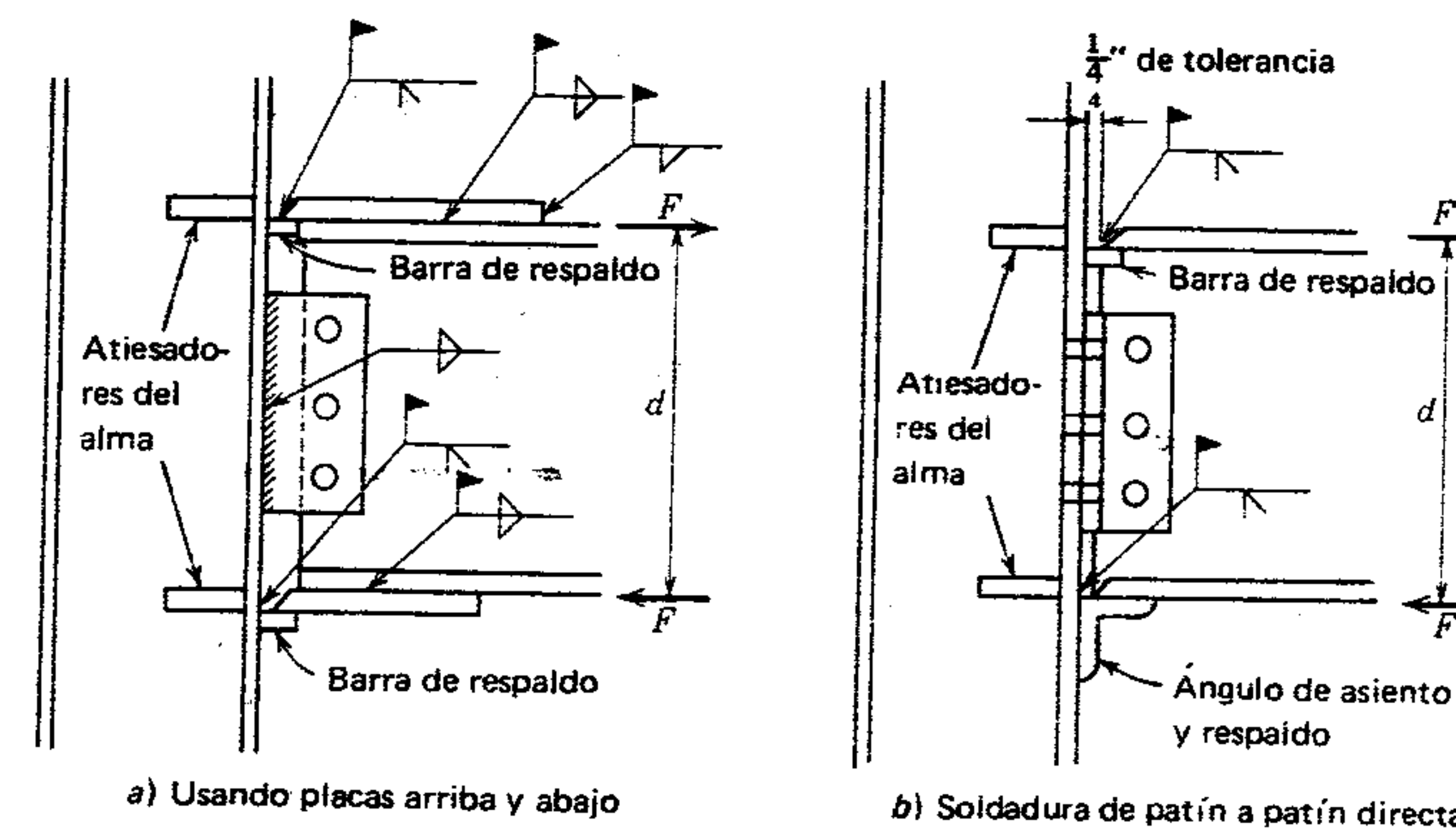


Figura 7.71 Conexiones soldadas resistentes al momento.

Por lo común, la placa superior se hace más ancha que el patín de la viga, de modo que se pueda colocar la soldadura en la parte superior del patín. Sin embargo, la placa inferior se hace más ancha que el patín para poder poner la soldadura sobre la parte superior de la placa y así evitar soldadura en una mala posición.

La reacción vertical de la viga se transfiere a la columna por una conexión de ángulo estándar (figura 7.71b) o por una placa cortante, soldada en taller el patín de la columna (figura 7.71a). Usualmente, la conexión en campo es atornillada, como se ve, pero también puede ser soldada.

Las conexiones de extremo resistentes al momento reducen el momento positivo cerca del centro de la viga, lo cual podría permitir una reducción en el tamaño de la sección (figura 7.3). Como consecuencia, las conexiones resistentes al momento se usan con frecuencia para este propósito, incluso cuando las vigas se conectan a traveses, como se ve en la figura 7.12b.

Con las conexiones resistentes al momento entre viga y columna, se pueden requerir rigidizadores de alma. En la figura 7.71 solamente una viga se conecta con la columna. Cuando las vigas están conectadas a ambos patines de columna y se requieren rigidizadores, éstos se deben extender entre los patines de la columna. La Especificación AISC de

1978 (Sección 1.15) contiene los requisitos para los rigidizadores de alma de columna. Éstos se basan en datos de pruebas y principios de diseño de resistencia límite (capítulo 11); por lo tanto, la fuerza del patín de la viga (o placa de patín) se debe factorizar hacia arriba para proporcionar un factor de seguridad. Cuando la fuerza calculada se deriva de cargas vivas de gravedad, ambientales y muertas, este factor es, por especificación, de 5/3. La fuerza del patín se representa mediante  $P_{bf}$  y  $P_{bf} = 5/3F$ , donde  $F$  es la fuerza del patín calculada sobre la base del comportamiento elástico.

El patín de la columna transmite la fuerza  $P_{bf}$  hacia el alma de ésta. La Especificación AISC limita la longitud del alma sobre la cual se puede ejercer esta fuerza, al esfuerzo de fluencia del alma. Esta longitud se establece como cinco veces la dimensión  $k$  de la columna más el espesor del patín de la viga (o placa de patín). Por lo tanto, si no se usa atiesador del alma,

$$P_{bf} \leq t_w(t_f + 5k)F_{yc}$$

donde  $F_{yc}$  es el esfuerzo de fluencia del alma de la columna.

Cuando no se cumple esta condición, se debe cubrir la diferencia con atiesadores del alma con



área  $A_{st}$  y esforzados bajo el esfuerzo de fluencia  $F_{ys}$ . Expresado en forma de ecuación

$$A_{st} F_{ys} \geq P_{bf} - t_w(t_f + 5k)F_{yc}$$

El criterio para el diseño se basa en la fuerza de compresión del patín de la viga (que usualmente es determinante), pero también se aplica al patín a tensión. En ocasiones, el patín a tensión es el determinante y se debe verificar.

En la sección 1.15 de la Especificación AISC de 1978 se estipula que cuando el espesor del patín de la columna ( $t_f$ ) es menor que  $0.4\sqrt{P_{bf}/F_{yc}}$ , se requiere un par de atiesadores opuesto a la fuerza de tensión. Esto implica que cuando  $t_f$  es igual a esta relación, la capacidad de tensión del patín de la columna es igual a la fuerza aplicada y no se requieren atiesadores de alma. Usando  $P_{fb}$  como la resistencia del patín de la columna, sustituyéndola por  $P_{bf}$  en la expresión anterior y resolviéndola para encontrar su valor

$$t_f = 0.4 \sqrt{\frac{P_{bf}}{F_{yc}}}$$

$$= 0.4 \sqrt{\frac{P_{fb}}{F_{yc}}}$$

$$t_f^2 = 0.16 \frac{P_{fb}}{F_{yc}}$$

$$P_{fb} = \frac{t_f^2 F_{yc}}{0.16}$$

Cuando la fuerza de tensión del patín de la viga ( $P_{bf}$ ) excede esta resistencia del patín de la columna, el atiesador del alma se debe diseñar para cubrir la diferencia, es decir,

$$P_{bf} - \frac{t_f^2 F_{yc}}{0.16}$$

Se necesita una verificación adicional para determinar si se requieren atiesadores. Ésta se basa en el pandeo del alma de la columna atrás de la fuerza

del patín a compresión. Cuando el peralte de alma de la columna, libre de filetes ( $d_c$ ) es mayor que

$$\frac{4100t_w^3(\sqrt{F_{yc}})}{P_{bf}}$$

se necesitan atiesadores.

### Ejemplo

Diseñar una conexión resistente al momento, similar a la mostrada en la figura 7.71a. La viga es W 18 X 35, y la columna W 10 X 49. La viga tiene una reacción en el extremo de 22 kips y un momento en el extremo de 90 kips-pie. Todo el acero es A36. Usar electrodos E70 y tornillos A325N en orificios estándar espaciados cada 3 pulg.

### Solución

1. Calcular la fuerza horizontal que se debe transmitir por las placas superior e inferior.

$$F = \frac{90(12)}{17.7} \approx 61 \text{ kips}$$

2. Determinar el área requerida en las placas inferior y superior. El esfuerzo permisible a tensión es

$$F_t = 0.6F_y \approx 22 \text{ k/pulg}^2$$

$$A_p = \frac{61}{22} \approx 2.77 \text{ pulg}^2$$

3. Diseñar la placa superior y sus requisitos de soldadura. Como el patín de la viga tiene 6 pulg de ancho, seleccionar un ancho de placa de 4 1/2 pulg. Por lo tanto, el espesor

$$t_A = \frac{2.77}{4.5} \approx 0.62 \text{ pulg}; \quad \text{usar } \frac{5}{8} \text{ pulg.}$$

Usar una soldadura de ranura, de una sola vez y penetración completa entre la placa y

el patín de la columna, para lo cual requiere una placa de respaldo como se ve en la figura 7.71. El tamaño mínimo de la soldadura de filete para la placa es 1/4 pulg. La soldadura de 1/4 pulg tiene una resistencia de  $14.8(1/4) = 3.7$  kips por pulgada; por lo tanto, la longitud total de la soldadura requerida es

$$L = \frac{61}{3.7} \approx 16.5 \text{ pulg.}$$

Distribuir las 16.5 pulg como sigue: 4.5 pulg en un extremo y 6 pulg a lo largo de cada lado de la placa.

4. Diseñar la placa inferior y sus requisitos de soldadura. Selecciona una placa de 7 1/2 pulg de ancho para permitir la soldadura entre el borde del patín y la placa. El espesor necesario de la placa es

$$t_B = \frac{A_p}{7.5} = \frac{2.77}{7.5} \approx 0.37 \text{ pulg.}; \quad \text{usar } \frac{3}{8} \text{ pulg.}$$

Usando una soldadura de 1/4 pulg, la longitud total requerida es la misma que para la placa superior, es decir, 16 1/2 pulg. Soldar 8 1/2 pulg sobre cada lado.

5. Diseñar la placa de cortante para la reacción vertical. Seleccionar tornillos de 5/8 pulg BV = 6.4 kips y el número requerido es

$$\frac{22}{6.4} \approx 3.44; \quad \text{usar 4 tornillos}$$

La longitud total de la placa es

$$3(3) + 2(1\frac{1}{2}) = 11\frac{1}{2} \text{ pulg.}$$

El esfuerzo cortante unitario permisible es  $0.4F_y = 14.5 \text{ k/pulg}$ , por lo tanto, el espesor requerido de placa es

$$\frac{22}{11.5(14.5)} \approx 0.13 \text{ pulg.}$$

usar un espesor mínimo de 1/4 pulg de placa.

Se usará soldadura de filete en ambas caras de la placa para conectarla al patín de la columna. El grosor del patín es de 0.56 pulg, por lo cual requiere un tamaño mínimo de soldadura de filete de 1/4 pulg; no obstante, esto excede el tamaño máximo permisible de  $0.0135(36)1/4 = 0.122$  pulg. Por lo tanto, se necesita reducir la resistencia de la soldadura. Esta resistencia reducida es

$$\frac{0.122}{0.25} (14.8)(0.25) = 1.81 \text{ kips por pulg.}$$

La longitud requerida es

$$\frac{22}{2(1.81)} = 6.08 \text{ pulg.}; \quad \text{usar 7 pulg.}$$

6. Investigar si se necesitan atiesadores de alma (Especificación AISC, sección 1.15). Suponiendo que el momento de extremo de 90 kips pie se debe a cargas vivas y muertas por gravedad, el factor de carga es 5/3.

$$P_{bf} = \frac{5}{3}F = \frac{5}{3}(61) \approx 102 \text{ kips}$$

La capacidad del alma de la columna opuesta a la placa de compresión es

$$t_w(t_f + 5k)F_{yc} = 0.34(\frac{3}{8} + 5\frac{3}{8})36 = 68 \text{ kips}$$

Como  $102 > 68$ , se requieren atiesadores de alma y se situarán en el lado opuesto a las placas de patín sujetas a compresión y tensión.

7. Calcular el área requerida de los atiesadores de alma.

$$A_{st} = \frac{102 - 68}{36} = 0.94 \text{ pulg}^2$$

es de 7 1/2 pulg (paso 4). La Especificación AISC requiere que el ancho de la placa atiesadora no sea menor que

$$\frac{7.5}{3} + \frac{0.34}{2} = 2.67 \text{ pulg.}$$



Usar placa de 3 pulg de anchura. El espesor necesario es

$$t_{is} = \frac{0.94}{3} = 0.31 \text{ pulg.}$$

La Especificación AISC requiere que el espesor mínimo del atiesador sea  $t_b/2$ . Usando la placa de patín más gruesa (superior)

$$\frac{0.625}{2} = 0.31 \text{ pulg.}$$

Usar una placa atiesadora de 3/8 de espesor.  
8. La longitud requerida del atiesador (a lo largo del alma de la columna) dependerá, en parte, de la soldadura, aunque la Especificación AISC establece que, en este caso, la longitud no tiene que ser mayor que la mitad del peralte de la columna.

Probar una longitud de 4 1/2 pulg

9. Verificar la relación ancho-espesor (Especificación AISC, sección 1.9).

$$\frac{4.5}{0.375} = 12 < \frac{95}{\sqrt{f_y}} = 15.8 \quad \text{correcto}$$

10. Diseñar las soldaduras para el atiesador. La fuerza de compresión neta sobre el atiesador es

$$102 - 68 = 34 \text{ kips}$$

La fuerza de tensión neta en el atiesador es

$$P_{at} = \frac{t_f^2 F_{yc}}{0.16}$$

$$102 - \frac{0.56^2(36)}{0.16} = 31.4 \text{ kips}$$

Usando 34 kips para el diseño de las soldaduras, la fuerza por placa es  $34/2 = 17$  kips.

a) Soldadura al alma de la columna. El tamaño mínimo de la soldadura es 3/16 pulg. La resistencia máxima de la soldadura, basada en el espesor del alma de la columna y soldadura por ambos lados, es

$$D_{\max} = 0.0135(0.34)36 \approx 0.17 \text{ pulg.}$$

Adoptar una soldadura de 3/16 pulg en ambos lados de la placa, pero redúzcase su resistencia.

La resistencia regular de la soldadura de 3/16 pulg es  $0.1875 (14.8) = 278$  kips por pulgada. La resistencia reducida es

$$\frac{0.17}{0.19} (2.78) = 2.49 \text{ kips por pulg.}$$

La longitud de soldadura requerida es

$$\ell = \frac{17}{2(2.49)} = 3.41 \text{ pulg.}$$

Usar una soldadura de 3 1/2 pulg de longitud a lo largo de las 4 1/2 pulg de la placa.

b) Soldadura al patín de la columna. El tamaño mínimo de soldadura es 1/4 pulg (basado en el espesor del patín de la columna). La máxima soldadura de filete para ambos lados de la placa de 3/8 pulg es

$$D_{\max} = 0.0135(0.375)36 = 0.18 \text{ pulg.}$$

Usar soldadura de 1/4 pulg, pero reducir la capacidad de la soldadura.

$$\frac{0.18}{0.25} (14.8)(0.25) = 2.66 \text{ kips por pulg.}$$

La longitud requerida es

$$\ell = \frac{17}{2(2.66)} = 3.2 \text{ pulg.}$$

Incrementar el ancho de la placa atiesadora a 3 1/2 pulg y usar dos soldaduras de filete de 1/4 pulg, a todo lo largo.

### 7.32 CONEXIONES DÚCTILES RESISTENTES AL MOMENTO

Se dijo ya que una importante razón para usar conexiones resistentes al momento es para resistir fuerzas laterales como las producidas por los terremotos. En el capítulo 8 se tratará el diseño resistente a terremotos, y se señalará que bajo ciertas condiciones el marco de acero *debe* constar de *conexiones dúctiles resistentes al momento*. Estas conexiones no sólo deben cumplir con más especificaciones restrictivas para ser clasificadas como dúctiles, sino también se debe tomar en consideración el procedimiento de resistencia última en el diseño.

En el capítulo 11 se trata el diseño de resistencia última; en la sección 11.8 se da una explicación más completa y ejemplos de conexiones dúctiles resistentes al momento.

### PROBLEMAS

1. Diseñar un asiento de viga flexible soldado para una viga W 16 X 36 con una reacción en el extremo de 26 kips. El asiento está sujeto al patín de una columna W 10 X 49. Se debe dejar una holgura de 3/4 pulg entre el extremo de la viga y el patín de la columna. Usar acero A36 y electrodos E60. (Consúltese la sección 7.6 para información sobre el diseño de ángulos de asiento).

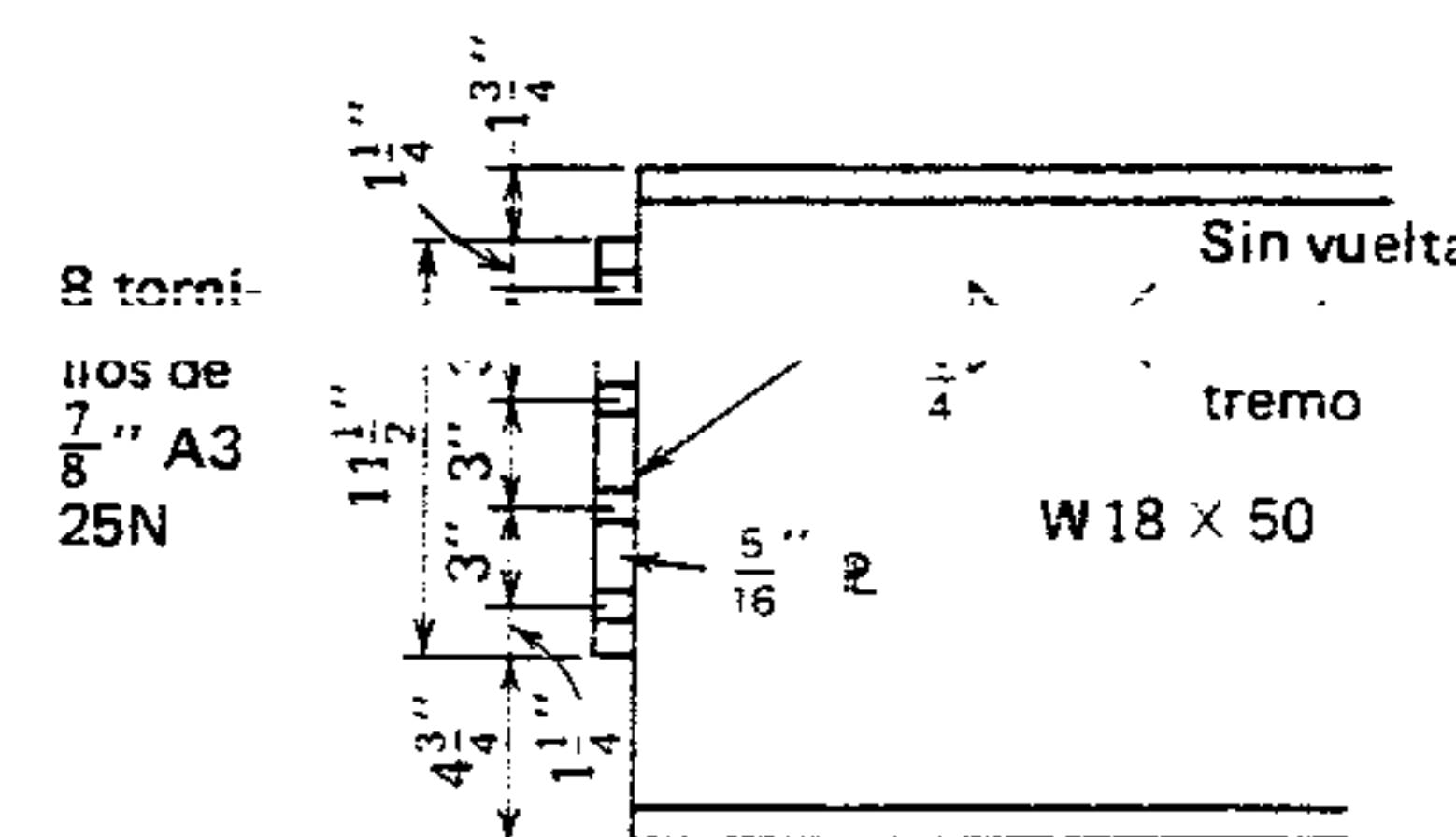
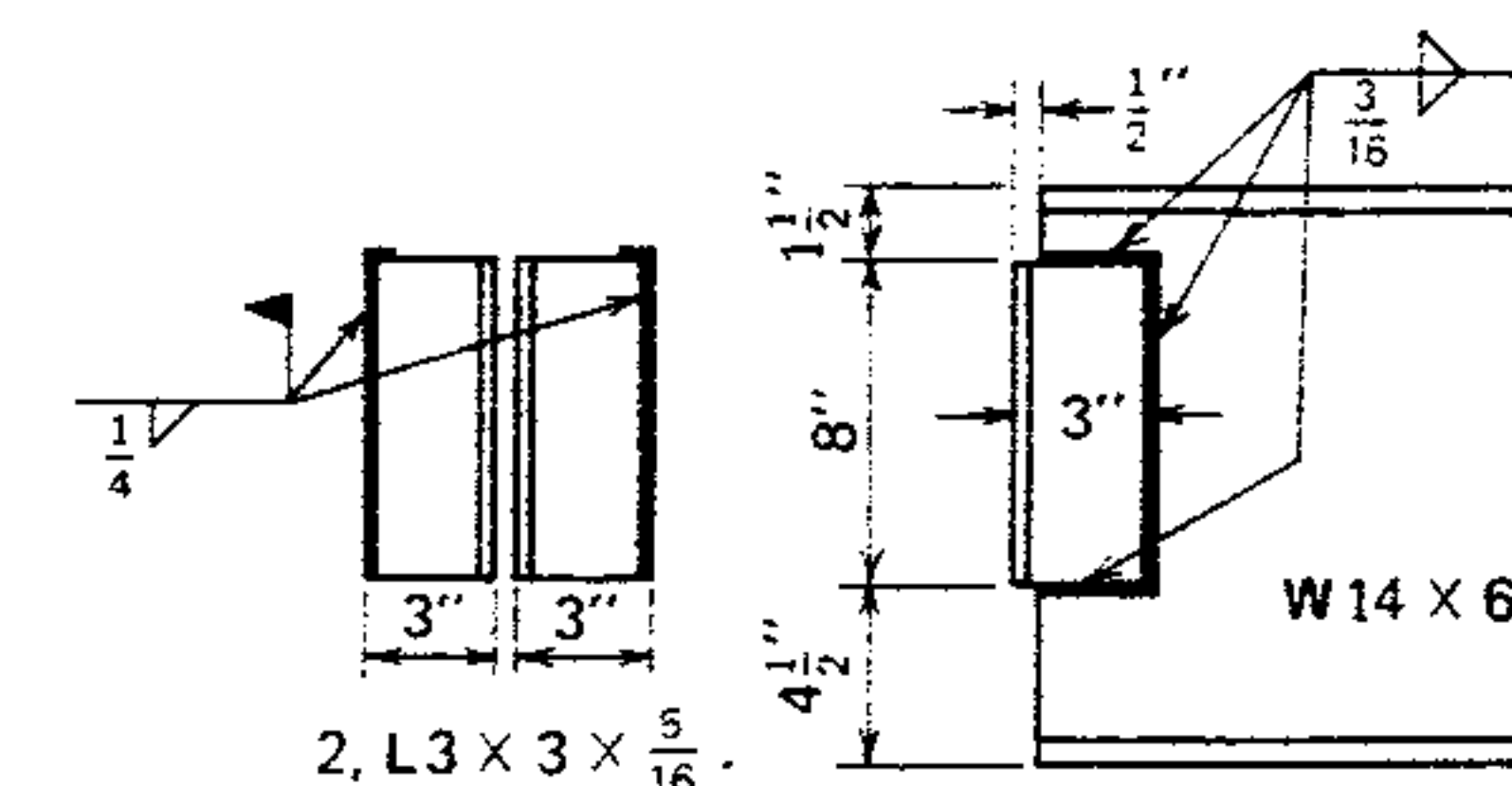


Figura 7.72 Problema 2.

2. a) Determinar la máxima reacción de viga permisible para la conexión cortante de placa del extremo de la figura 7.72. Todo el acero es A36 y se usarán electrodos E60.  
b) Igual que a), pero usando electrodos E70. Verificar respuestas en el Manual AISC (Las respuestas se dan en el Apéndice G).
3. Calcular la reacción de viga máxima permisible para la conexión del ángulo totalmente soldada de la figura 7.73. Usar acero A36 y electrodos E70. (La respuesta se da en el Apéndice G).



a) Alas sobresalientes. b) Alas conectadas.

Figura 7.73 Problema 3.

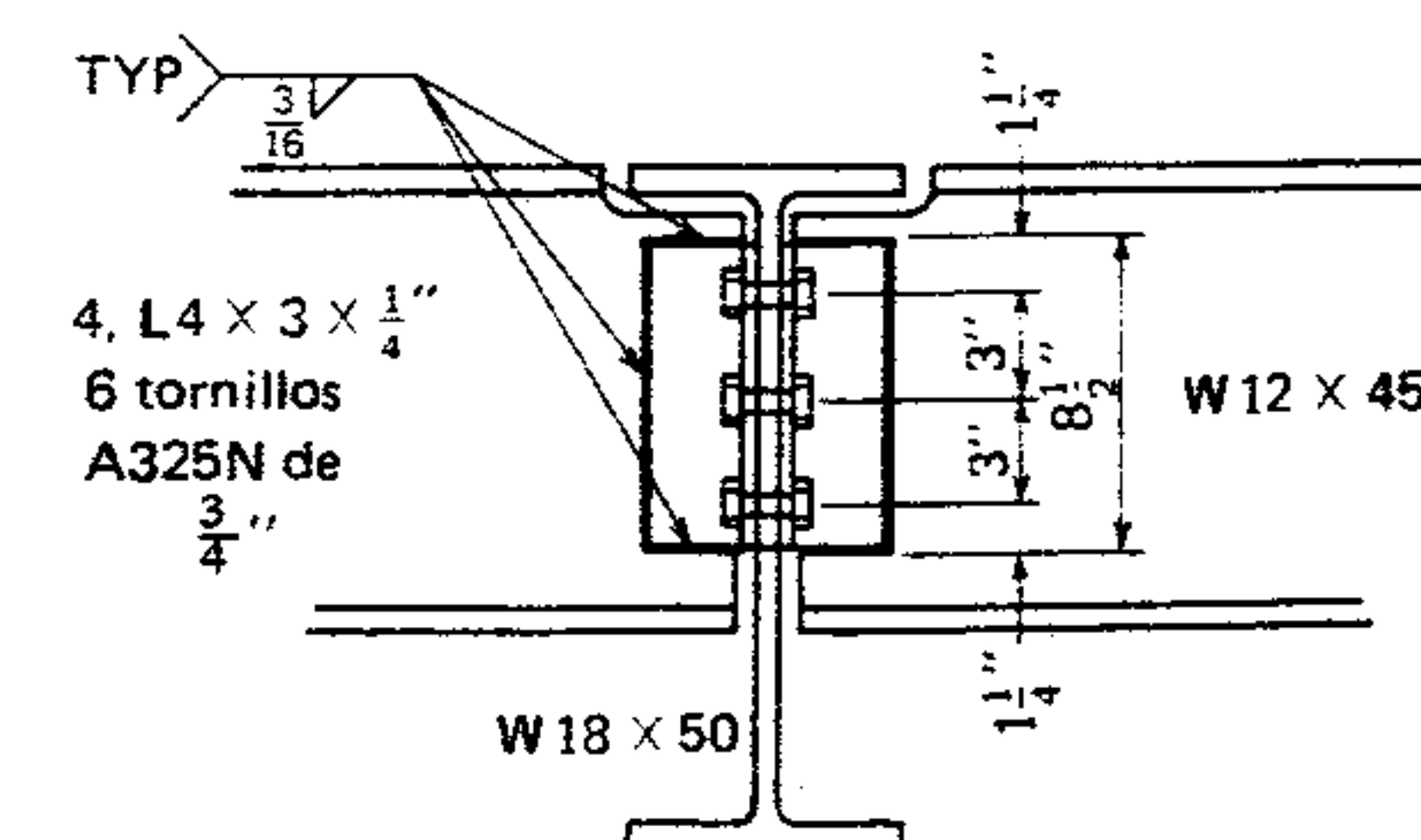
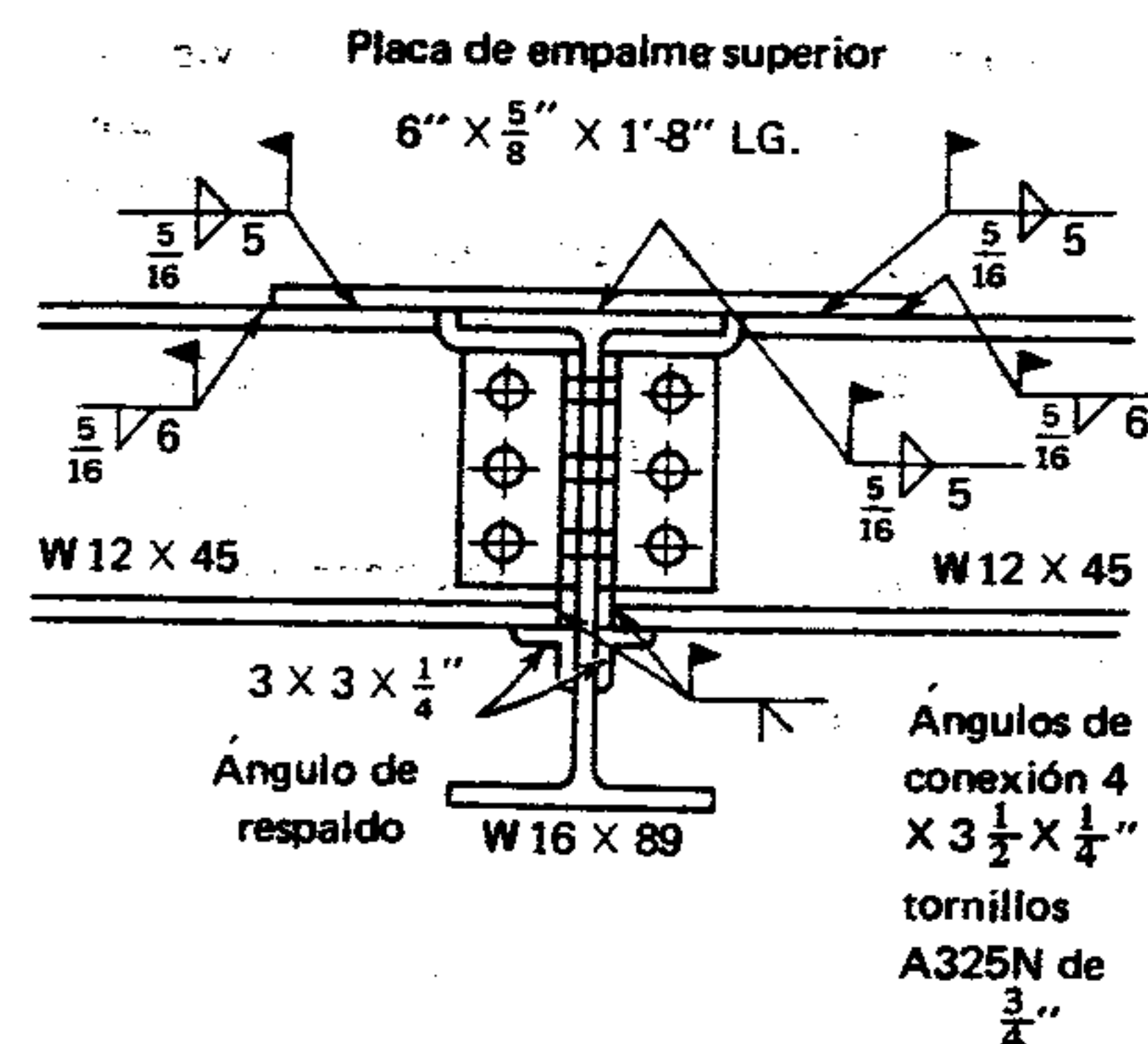


Figura 7.74 Problema 4.

4. La conexión del ángulo de la figura 7.74 está soldada en taller y atornillada en campo. Determinar la reacción máxima para cada viga usando acero A36 y electrodos E70. (La respuesta se da en el Apéndice G).





5. Calcular la capacidad del momento y del cortante en la conexión de la figura 7.75. Todo el acero es A36; electrodos E60 y tornillos A325N de  $\frac{3}{4}$  pulg.

Figura 7.75 Problema 5.

## 8

# Cargas laterales

## 8.1 INTRODUCCIÓN

El término *carga lateral* se aplica a una carga horizontal, a diferencia de una carga de gravedad que actúa verticalmente hacia abajo. Las cargas laterales sobre un edificio no son raras. Pueden deberse a la presión del suelo o el agua, al empuje de nieve sobre un lado del edificio, o a circunstancias tan singulares como el frenado de un vehículo al detenerse en el piso de un estacionamiento para autos. Sin embargo, lo que interesa en este capítulo son las cargas laterales causadas por el viento y los sismos.

Todos los edificios deben poseer cierta capacidad para resistir cargas laterales. Los edificios con marcos de acero o elementos de acero requieren que estos marcos o elementos proporcionen esta resistencia; si no es así, la deben proporcionar otros elementos estructurales como muros y pisos. Aunque las explicaciones y procedimientos siguientes son suficientemente generales para aplicarlos a cualquier tipo de edificio, se hará énfasis en los edificios con marcos de acero o elementos de acero.

Para propósitos de diseño general, se debe suponer que las cargas de viento y/o sismos pueden provenir de cualquier dirección horizontal, y que la carga de viento lateral podría crear una fuerza ascendente sobre el techo. Se acostumbra considerar solamente dos ejes en los edificios, uno transversal y otro longitudinal (figura 8.1). Entonces, si la estructura se considera segura y adecuada en estas dos direcciones tratadas por separado, también se considerará segura ante cargas provenientes de cualquier dirección. Se debe agregar que las cargas laterales se aplican concurrentemente con las cargas muertas y aquellas otras cargas de gravedad, originando la más desfavorable combinación de carga. Sin embargo, las cargas sísmicas y de viento no necesitan aplicarse al mismo tiempo. (Véase la sección 9.4, Cargas Combinadas).



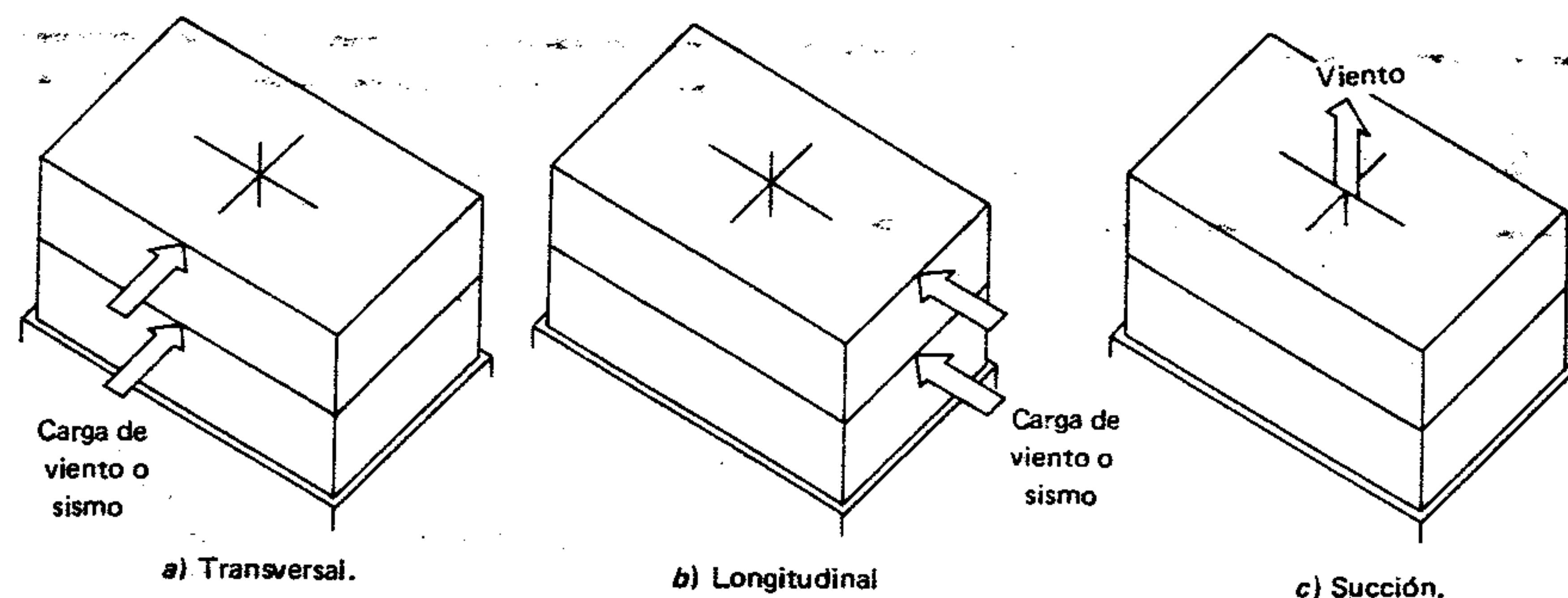


Figura 8.1 Dirección de cargas y ejes de edificio.

## 8.2 APLICACIÓN DE CARGAS LATERALES

La aplicación de las cargas laterales sobre un edificio se debe estudiar dentro del contexto de la solución arquitectónica y/o el tipo de construcción utilizado. Lo único que tienen en común las cargas de viento y las sísmicas es que su dirección se considera básicamente horizontal. Por lo tanto, se debe concebir un esquema estructural que transfiera estas cargas horizontales hacia abajo hasta la cimentación. En el caso del viento, usualmente la envoltura exterior del edificio transmite la carga horizontal a cada nivel de piso y al techo. En el caso de los sismos, se supone que el peso del edificio está concentrado en cada nivel de piso y techo y luego se convierte en cargas horizontales equivalentes. Por lo tanto, en ambos casos, viento y sismo, la fuerza horizontal en cada nivel es la que se debe transferir hacia abajo a los cimientos.

Hay dos tipos diferentes de elementos estructurales que se usan para transferir estas cargas, y son horizontales y verticales. El elemento horizontal (figura 8.2) no tiene necesariamente que estar situado en un plano horizontal (por ejemplo, se podría usar un techo inclinado). Su propósito principal es transferir la carga lateral en una dirección horizontal al elemento vertical. Los pisos arriostrados (arriostramiento cruzado) y los diafragmas se

usan generalmente para este propósito, y a veces se requieren ambos en el mismo edificio.<sup>1</sup>

En la figura 8.2a se ilustra un piso arriostrado con cargas aplicadas solamente en una dirección. La porción triangulada central actúa como una armadura (capítulo 9) horizontal cubriendo el claro entre los elementos verticales situados en cada extremo.

En la figura 8.2b se ilustra un diafragma de piso, con cargas laterales aplicadas solamente en una dirección. Todo el piso actúa como una viga de gran peralte acostada, cubriendo el claro entre los elementos verticales situados a cada extremo. Un diafragma es un elemento sometido principalmente a esfuerzo cortante, pero también se deben tomar en cuenta fuerzas de tensión y compresión (véase la sección 8.3).

El elemento vertical transfiere la carga horizontal verticalmente hacia abajo a los cimientos (figura 8.3). Los elementos verticales se pueden situar en cualquier parte dentro del edificio, pero su localización es un factor esencial en el diseño del elemento horizontal y tiene un efecto significativo sobre la

<sup>1</sup> En ocasiones, una serie de vigas espaciadas estrechamente puede funcionar como elemento horizontal en el sentido transversal, si los elementos verticales están distribuidos en todo el edificio como se ve en la figura 8.23.

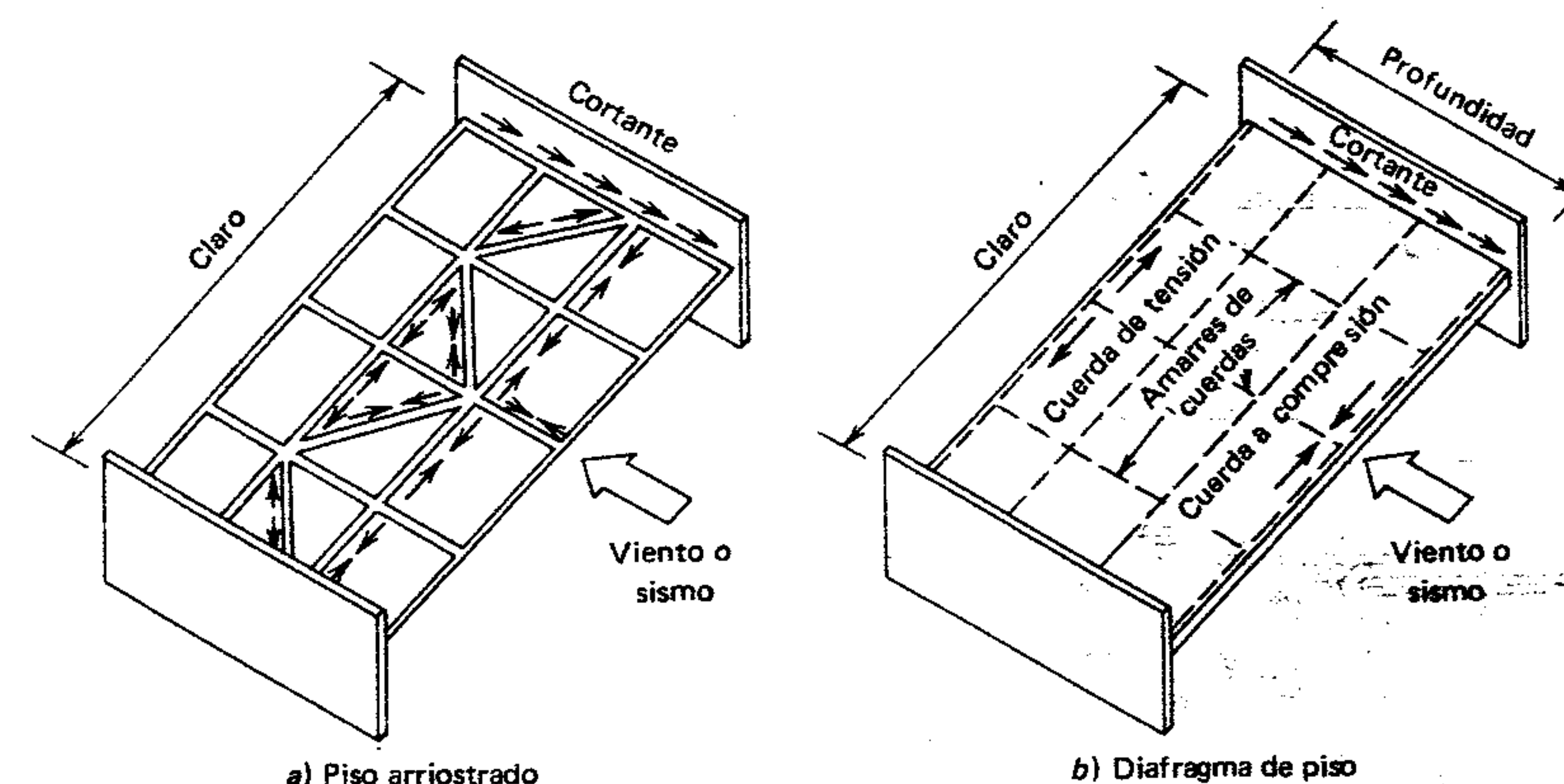


Figura 8.2

debe considerar desde dos direcciones, se requiere un mínimo de tres elementos verticales para la estabilidad de cualquier edificio dado.

En la figura 8.3a se ilustran dos marcos rígidos (capítulo 10) situados en los muros exteriores de un edificio. Las cargas laterales se muestran solamente en una dirección, y los marcos transfieren hacia abajo la carga horizontal, a la cimentación. En la figura 8.3b se ilustran dos armaduras verticales (arriostramiento cruzado) situadas en los muros exteriores, y en la figura 8.3c se ilustran los elementos verticales como muros cortantes. Con frecuencia, el marco rígido y el arriostramiento cruzado se construyen de acero, mientras que generalmente el muro cortante es ya sea de concreto reforzado o mampostería reforzada. En el capítulo 9 se tratan detalladamente los elementos verticales consistentes en marcos arriostrados y se dan ejemplos.

El edificio del ejemplo 2 de la sección 8.7 (figura 8.20) puede ser un ejemplo de este tipo de construcción. En este ejemplo sólo se considera el viento en dirección transversal, y la carga horizontal se toma mediante los largueros de fachada y techo. La carga del viento sobre la superficie del edificio se transfiere directamente a los marcos a dos aguas por ambos tipos de

largueros de amarre (algunas veces la flexión es respecto al eje menor). No se usa arriostramiento cruzado ni diafragma. Sin embargo, cuando se considera el viento en la dirección longitudinal, se puede requerir uno u otro para transferir las cargas al arriostramiento cruzado en los muros laterales.

La localización de los elementos verticales en un edificio es una consideración crítica y usualmente la determinan las necesidades arquitectónicas. En la figura 8.4 se ilustran los tres elementos verticales mínimos localizados en tres de los cuatro muros exteriores. La carga lateral se muestra en una sola dirección, y en este caso es paralela al muro A. En estas condiciones, debe notarse que hay una tendencia a la rotación en un plano horizontal, y la estructura podría desplomarse si no existieran los muros A y B. Siempre se debe investigar la torsión horizontal debida a cargas laterales.

### Ejemplo (Techo con arriostramiento cruzado)

En la figura 8.5 se ilustra un edificio rectangular de un solo piso, con dimensiones generales de planta de 60 X 100 pies. La retícula principal es de 20 X



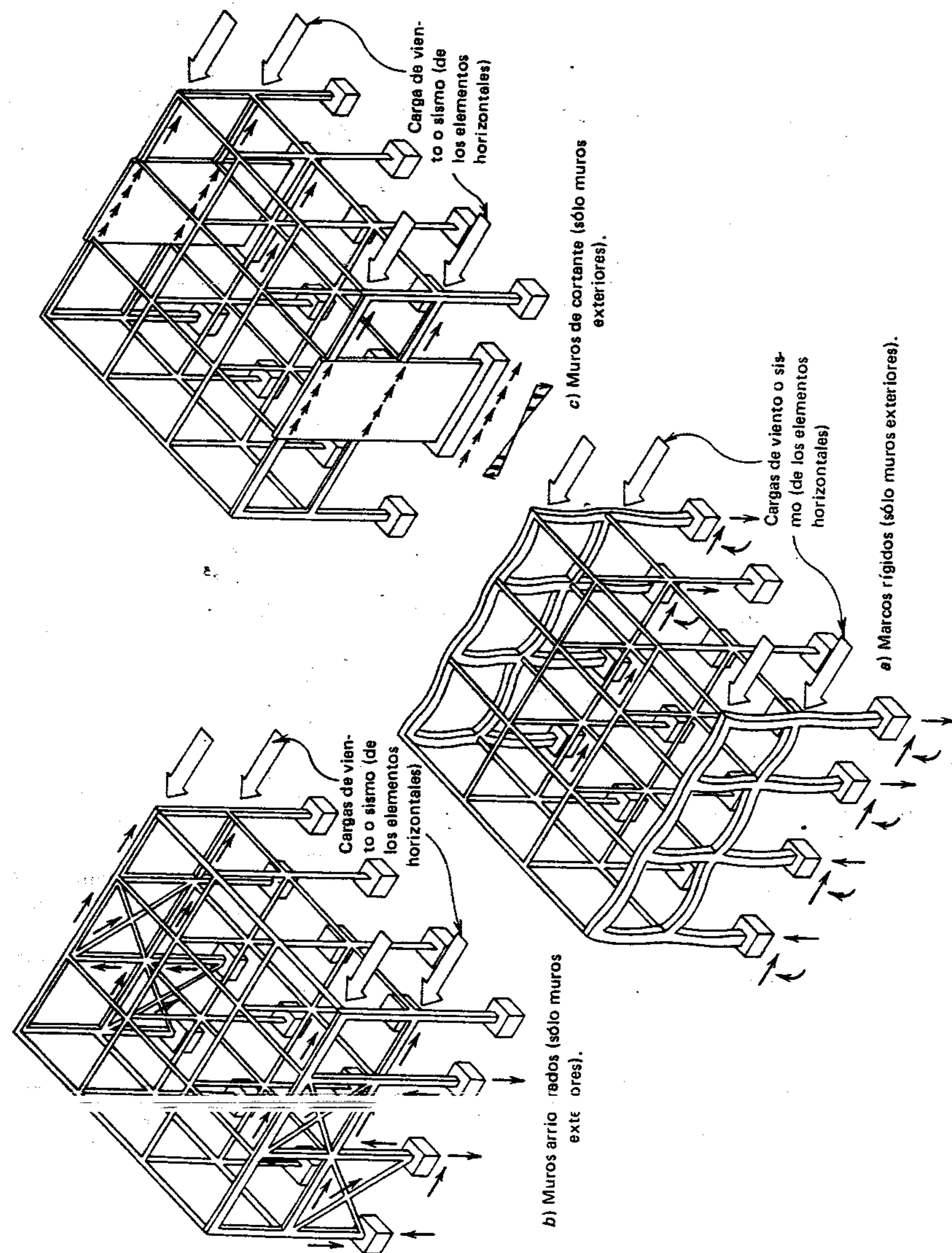


Figura 8.3 Elementos estructurales verticales.

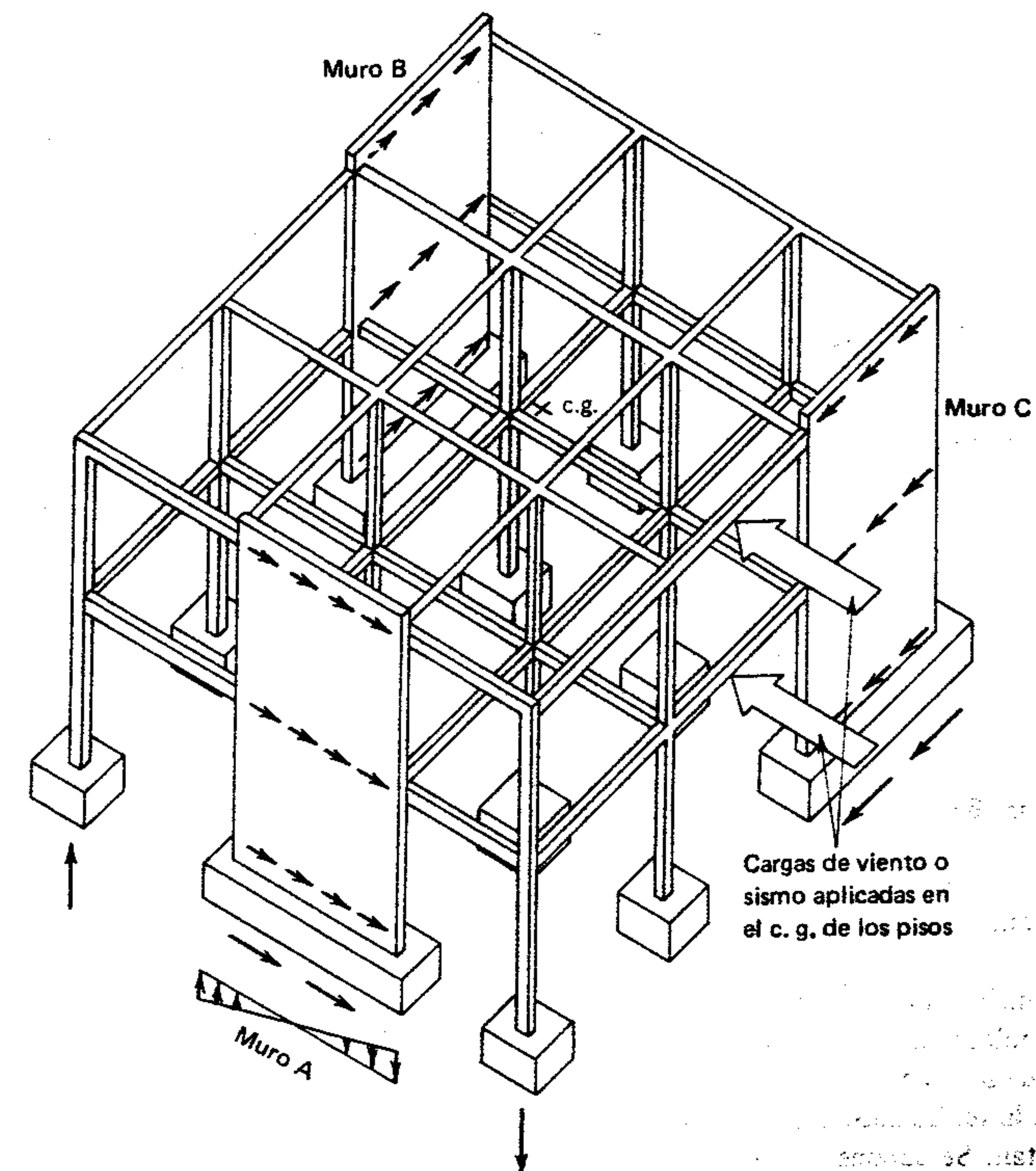


Figura 8.4 Torsión de un edificio.

25 pies. No se muestra la estructura completa necesaria para las cargas de gravedad. Este sistema de retícula se podría lograr mediante diversos métodos. En este ejemplo se supone que los largueros del techo (vigas pequeñas) salvan el claro en la dirección de los 25 pies con un espaciamiento de 5 pies o a o. de modo que un larguero va a lo largo de la línea del alero y a lo largo de todas las líneas de la retícula en el sentido longitudinal. Se supone también que las vigas principales, y las trabes o armaduras, van a lo largo de las líneas de la retícula en dirección transversal. Por ejemplo, *DE* y *JK* son largueros y *JD* y *KE* son vigas principales o armaduras.

Se aplicará una carga de 200 lb/pie lineal en sentido transversal, como se ve a lo largo de la línea de los aleros traseros en la figura 8.5. Esta carga puede deberse al viento o al sismo. El esquema general para tomar esta carga lateral serán los elementos verticales que se ven en los extremos del edificio y el elemento horizontal que consiste en el armazón transversal a lo largo del vano central. Se ilustrarán los cálculos de la fuerza de diseño para la carga del elemento horizontal que se muestra; sin embargo, debe tenerse presente que se requiere una solución similar para la carga lateral aplicada en el sentido opuesto. Asimismo, aunque no se ilustra, se necesitaría determinar el esquema es-



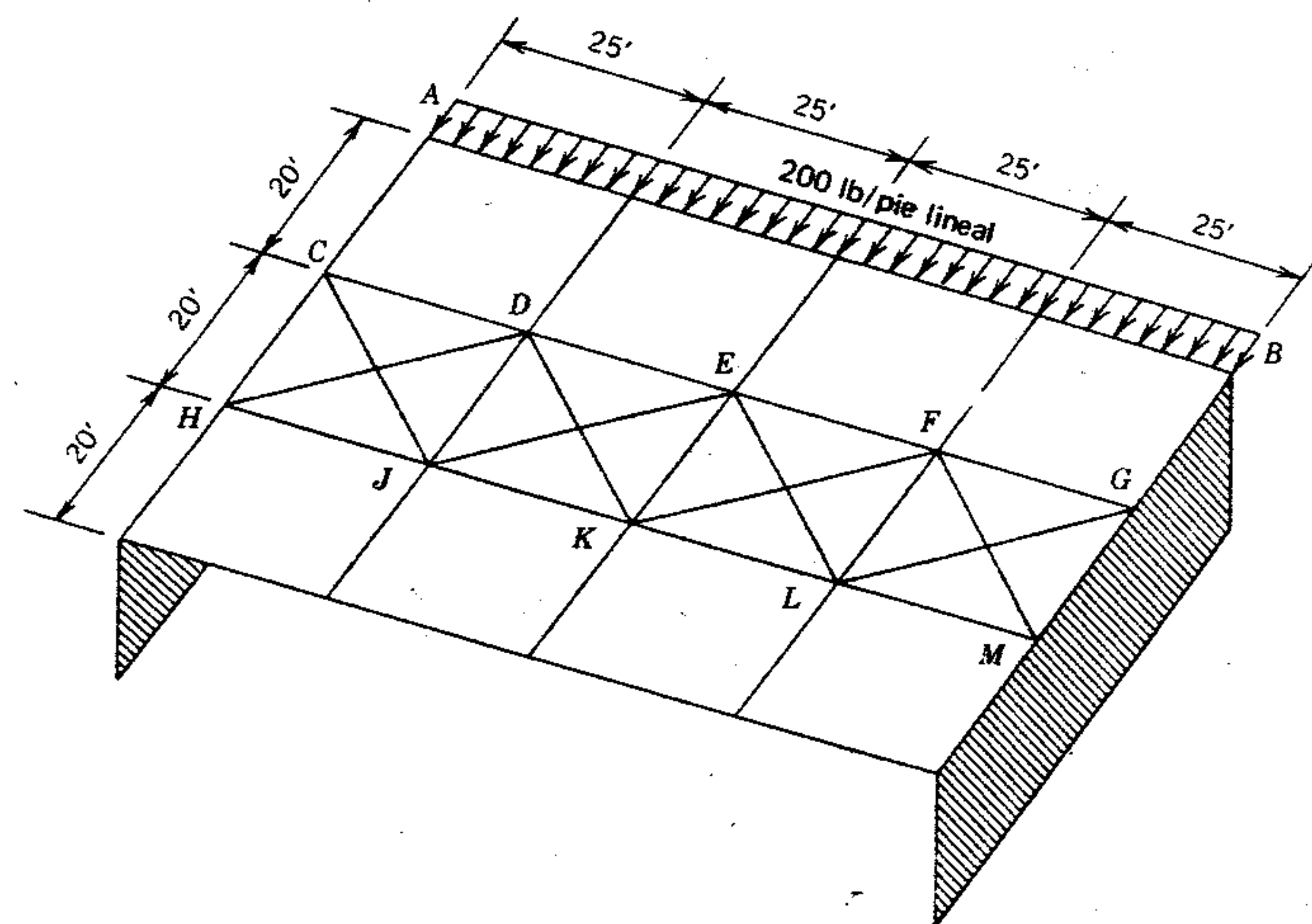


Figura 8.5 Ejemplo de techo con arriostramiento cruzado.

estructural resistente para una fuerza aplicada longitudinalmente.

Por lo común, los miembros de arriostramiento cruzado son ángulos flexibles, o cables o varillas con templadores, que se extienden diagonalmente entre las esquinas de la retícula. Se cruzan entre sí pero no se intersectan. Se supone que todas las otras intersecciones son articuladas. En estas condiciones, uno de cada par de tensores cruzados se convierte en un componente efectivo a tensión; el otro (el componente a compresión) no se considera efectivo. Este sería realmente el caso si los tensores fueran cables y casi lo mismo para los otros tipos de amarres cruzados.

### Solución

1. Calcular las reacciones horizontales del puntal de aleros. La construcción de extremos articulados permite una solución de viga simplemente apoyada en la dirección horizontal; por lo tanto

$$R = \frac{wL}{2} = \frac{0.2(25)}{2} = 2.5 \text{ kips}$$

2. Determinar la carga axial sobre cada puntal que transfiere la carga horizontal al sistema de arriostramiento cruzado. Cada puntal interno transmite dos reacciones de puntales, es decir,  $2(2.5) = 5$  kips. El puntal exterior transmite una reacción de puntal, o sea 2.5 kips.

3. Dibujar de nuevo el elemento horizontal mostrando las cargas del puntal (calculado en el paso 2), los amarres cruzados efectivos (ignorar el amarre cruzado a compresión) y los componentes restantes (a lo largo de la línea de la retícula) que forman una armadura triangulada que salva el claro entre los dos elementos verticales. Este paso se ilustra en la figura 8.6a. En este ejemplo, los miembros  $CJ$ ,  $DK$ ,  $FK$  y  $GL$  son los amarres cruzados a

compresión son  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  y  $FG$ . Los puntales que funcionan como miembros a tensión son  $JK$  y  $KL$ . Los componentes  $DJ$ ,  $EK$  y  $FL$  están a compresión y están formados por las vigas principales o partes de la armadura vertical que soporta los puntales.

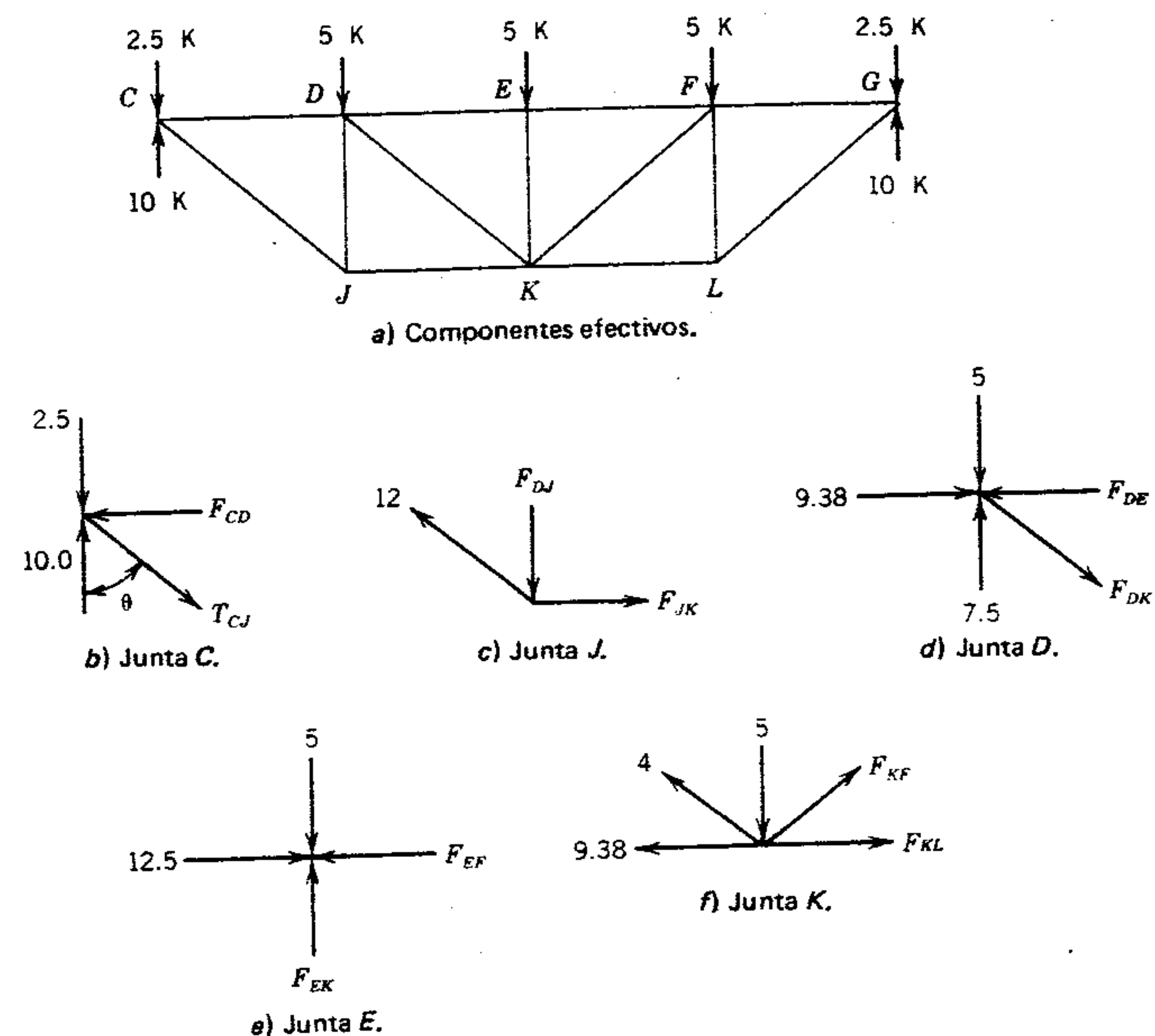


Figura 8.6 Solución del techo con arriostramiento cruzado.

4. Determinar las reacciones horizontales en los elementos verticales. En este ejemplo, cada elemento vertical toma la mitad de la carga lateral total, o sea 10 kips.
5. Calcular la carga axial en cada componente de la armadura. Cada componente está articulado, y hay cargas sólo en la intersección de los componentes. Por lo tanto, no hay esfuerzo flexionante en los componentes y cada uno es un miembro de dos fuerzas. Esto significa que cada miembro está ya sea a tensión o a compresión, lo cual es congruente con el supuesto hecho anteriormente. Por lo tanto, la línea que representa a cada miembro (figura 8.6a) también es la línea de acción de las fuerzas desarrolladas por los miembros.

Dos formas de determinar la fuerza en un miembro son el "método gráfico" y el "método algebraico de juntas". Ambos se tratan

en el capítulo 9. El método algebraico se usará aquí.

Procediendo en el plano horizontal de junta a junta y aplicando las ecuaciones de equilibrio estático, es decir,  $\Sigma V = 0$  y  $\Sigma H = 0$ , la suma algebraica de todas las fuerzas tanto en el sentido longitudinal como transversal debe ser igual a cero. Empezando en una junta que tenga sólo dos fuerzas desconocidas y luego siguiendo a otras juntas donde sólo hay dos fuerzas desconocidas, utilizar una flecha que sale de una junta para indicar un miembro a tensión y una flecha dirigida hacia la junta para indicar un miembro a compresión.

En la figura 8.6b se ilustra la junta C. La longitud de una barra del arriostramiento cruzado es

$$L = \sqrt{25^2 + 20^2} \approx 32 \text{ pies}$$



Por geometría

$$\sin \theta = \frac{25}{32}$$

$$\cos \theta = \frac{20}{32}$$

Aplicando  $\Sigma V = 0$  en la dirección transversal, se observa que el componente transversal de  $T_{CJ}$  es  $10 - 2.5 = 7.5$  kips. Por geometría, se observa que este componente es el producto de  $\cos \theta$  y  $T_{CJ}$ , es decir,

$$(\cos \theta) T_{CJ} = \frac{20}{32} T_{CJ} = 7.5$$

$$T_{CJ} = 12 \text{ kips (tensión)}$$

El componente longitudinal de  $T_{CJ}$  es  $(\sin \theta) T_{CJ}$ . Aplicando  $\Sigma H = 0$  en el sentido longitudinal

$$F_{CD} = (\sin \theta) T_{CJ} = \frac{25}{32} (12) = 9.38 \text{ kips (compresión)}$$

En la junta  $J$  aplicar la fuerza de amarre, calculada en 12 kips (figura 8.6c). Sólo quedan dos incógnitas, y los componentes de  $T_{JC} = 12$  kips ya fueron calculados. Por lo tanto,

$$F_{JK} = 9.38 \text{ kips (tensión)}$$

$$F_{DJ} = 7.50 \text{ kips (compresión)}$$

Avanzar a la junta  $D$  (figura 8.6d). El componente vertical transversal de  $F_{DK}$  es  $(\cos \theta) F_{DK}$ , es decir,

$$\frac{20}{32} F_{DK} = 2.5$$

$$F_{DK} = 4 \text{ kips (tensión)}$$

El componente horizontal de  $F_{DK}$  es  $(\sin \theta) F_{DK}$ , lo cual es

$$\frac{20}{32} (4) = 3.13 \text{ kips}$$

Por lo tanto,

$$F_{DE} = 9.38 + 3.13 = 12.5 \text{ kips (compresión)}$$

Seguir a la junta  $E$  (figura 8.6e). Es obvio que

$$F_{EF} = 12.5 \text{ kips (compresión)}$$

y

$$F_{EK} = 5 \text{ kips (compresión)}$$

en la junta  $K$  (figura 8.6f). Este peso se usa para confirmar que las fuerzas en el esquema son simétricas.

$$F_{KF} = 4 \text{ kips (tensión)}$$

$$F_{KL} = 9.38 \text{ kips (tensión)}$$

6. Resumir las fuerzas de diseño. Para las cargas laterales que se ilustran, los arriostramientos cruzados en los vanos exteriores (adyacentes a los elementos verticales) desarrollan una fuerza de 12 kips, y los arriostramientos cruzados interiores, una fuerza de 4 kips. Estas vienen a ser las fuerzas de diseño si la carga de 200 lb/pie lineal se deben al viento. Por otra parte, si la carga lateral es causada por un sismo, la mayoría de los reglamentos exige que la carga desarrollada se incremente en 25 por ciento. Esto significa una fuerza de diseño de  $1.25(12) = 15$  kips y  $1.25(4) = 5$  kips. Asimismo, debe notarse que los reglamentos exigen un incremento de 25 por ciento en el esfuerzo permisible cuando las fuerzas desarrolladas incluyen el efecto a corto plazo del viento o del sismo.

Los demás miembros de este sistema de elementos horizontales (puntales y vigas) se deben

diseñar de tal manera que se incluya el efecto de las cargas axiales calculadas en combinación con otras cargas de gravedad. En el capítulo 9 se describen diversas combinaciones de carga.

### 8.3 DIAFRAGMAS

Un diafragma es un elemento horizontal muy eficiente y efectivo que se usa con frecuencia. Salva claros horizontales llevando la carga lateral a los elementos verticales (figura 8.2b). El número y localización de estos elementos verticales conllevan una importante relación para el diseño de diafragmas. Los diafragmas se componen de una viga muy peraltada acostada y con claro entre elementos verticales.

Para propósitos de diseño, todos los diafragmas se deben clasificar ya sea como rígidos o como flexibles. Cuatro tipos comunes de construcción de cubiertas que se pueden clasificar como diafragmas rígidos son 1) concreto reforzado, 2) concreto de yeso reforzado, 3) cubiertas de acero con relleno de concreto, y 4) componentes de concreto precolado apropiadamente unidos entre sí. Las cubiertas de acero sin relleno de concreto pueden ser flexibles o rígidas, dependiendo de sus espesores, la unión entre una y otra y la forma de conexión a los elementos soportantes. Dos tipos muy comunes de construcción de cubiertas que se pueden clasificar como diafragmas flexibles son 1) algunas cubiertas de acero sin relleno de concreto, similares a las ilustradas en las figuras 5.42 y 8.10 y 2) madera laminada.

Un diafragma rígido actúa más como una placa plana que como una viga peraltada, y transmite carga lateral a los elementos verticales proporcionalmente a su rigidez relativa. Se puede incluir la torsión; de hecho, si los elementos verticales están situados de modo que se requiera acción de torsión, se necesita un diafragma rígido. Los diafragmas rígidos se deben diseñar tanto para cortante como para flexión debido a fuerzas que actúan en su propio plano. Por otra parte, los diafragmas flexibles no pueden transmitir cargas por torsión. Se consideran muy flexibles en comparación con los elemen-

tos verticales y, por tanto, transmiten cargas actuando como vigas simples o continuas con claros entre elementos verticales.

En las figuras 8.7a y b se ilustran plantas de un edificio con dimensiones generales  $L_1$  y  $L_2$ . Las cargas laterales van a lo largo de la línea de piso ( $L_1$ ) en una sola dirección. Tres elementos verticales se representan con líneas gruesas sobre los lados  $AB$ ,  $AC$  y  $CD$ . La carga uniforme se expresa como  $F = wL_1$ , y para propósitos de estabilidad, se puede considerar como concentrada, actuando como se ilustra. Toda esta carga lateral se debe transmitir a, y ser resistida por, el elemento vertical en el muro  $AC$ , de modo que  $V_1 = F$ . Debe señalarse que esta condición crea una torsión ( $eF$ ) y que el diafragma tenderá a rotar como se indica por las líneas punteadas en la figura 8.7a. La presencia de los otros dos elementos verticales en los muros  $AB$  y  $CD$  estabilizará esta tendencia a rotar, desarrollando cortantes laterales en cada uno, como se ve, es decir,

$$V_2 = V_3 = \frac{eF}{L_2}$$

La figura 8.7b tiene el propósito de ilustrar la misma condición que la de la figura 8.7a, excepto que se presenta un diafragma flexible. Sigue existiendo la misma tendencia a la torsión, pero con un diafragma flexible no se desarrollan fuerzas paralelas en los elementos verticales situados en los muros  $AB$  y  $CD$ . El diafragma se deformaría como se muestra por las líneas punteadas y podría colapsarse. La estabilidad sin torsión requiere un mínimo de dos elementos verticales en el sentido que se está considerando. En estas condiciones, el diafragma flexible transmite cargas por una acción similar a la de las vigas continuas o simples.

En el claro derecho de la figura 8.8a se muestran las proporciones máximas entre claro y peralte (4:1) para los diafragmas flexibles más rígidos. La acción de viga continua desarrolla mejor la función del diafragma. Las deformaciones serían similares a las señaladas por las líneas punteadas, obsérvese la curvatura inversa. Además, la fuerza máxima en el elemento vertical se da en  $B$  y es mayor que  $w(L_1 + L_2)/2$  debido a la continuidad. Por lo tan-



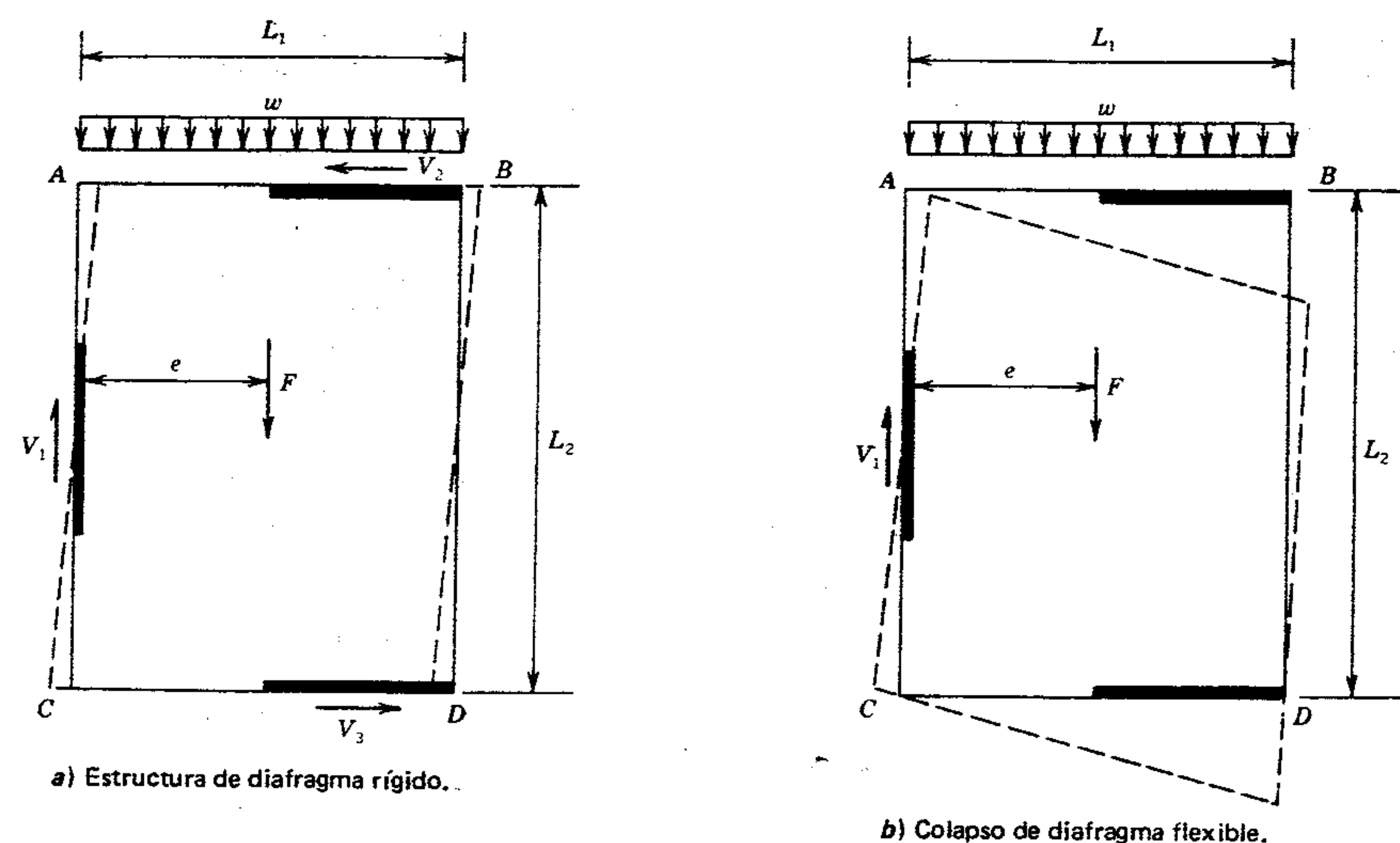


Figura 8.7 Diafragma rígido y flexible.

to, el cortante máximo en el diafragma ocurre a lo largo del elemento B.

La proporción más pequeña claro-peralte que se encuentra más comúnmente es la ilustrada en las figuras 8.8 b y c. En este caso, el supuesto de acción de viga continua no se justifica para el diafragma flexible. En las condiciones que se ilustran se supone una acción de viga simple, y las cargas laterales están distribuidas en los elementos verticales en proporción al área tributaria del diafragma. El elemento del centro (B) desarrollaría  $w(L_1 + L_2)/2$ .

Nótese en la figura 8.8b, que las líneas punteadas que ilustran las deflexiones parecen incompatibles entre sí. Esta condición se debe evitar y se puede hacer usando un "colector" o "puntal de arrastre", como se ilustra en la figura 8.8c. Un puntal de arrastre es un miembro lineal a tensión o compresión situado en el plano del diafragma al cual está unido el diafragma. El puntal de arrastre es paralelo a, y está anclado al elemento vertical. La colocación apropiada de colectores reduce en gran medida el esfuerzo cortante en el diafragma.

La identificación de un diafragma con una viga acostada podría ser engañosa. Hay dos razones

principales para ello: primera, la relación claro-peralte es muy pequeña (figura 8.2b), de modo que a veces el peralte será más grande que el claro, sobre todo cuando se investigan cargas laterales en el sentido longitudinal del edificio (figura 8.1b); segunda, usualmente los diafragmas flexibles constan de cierto número de materiales y piezas independientes que se deben unir entre sí para hacer que todo el diafragma funcione como una unidad, mientras que una viga convencional tiene generalmente una naturaleza homogénea.

La relación claro-peralte pequeña significa que las fuerzas en las cuerdas son muy pequeñas en comparación con las fuerzas cortantes de la cubierta, que son muy grandes. El principal medio para distribuir fuerzas en diafragmas es mediante la acción cortante. Esto significa que la deflexión debida al cortante no se queda atrás como en el caso de una viga regular. Por lo general, la deflexión por cortante en los diafragmas es mayor que la deflexión por flexión.

Debido a que la mayoría de las construcciones de piso y techo que se clasifican como diafragmas flexibles constan de diversas partes independien-

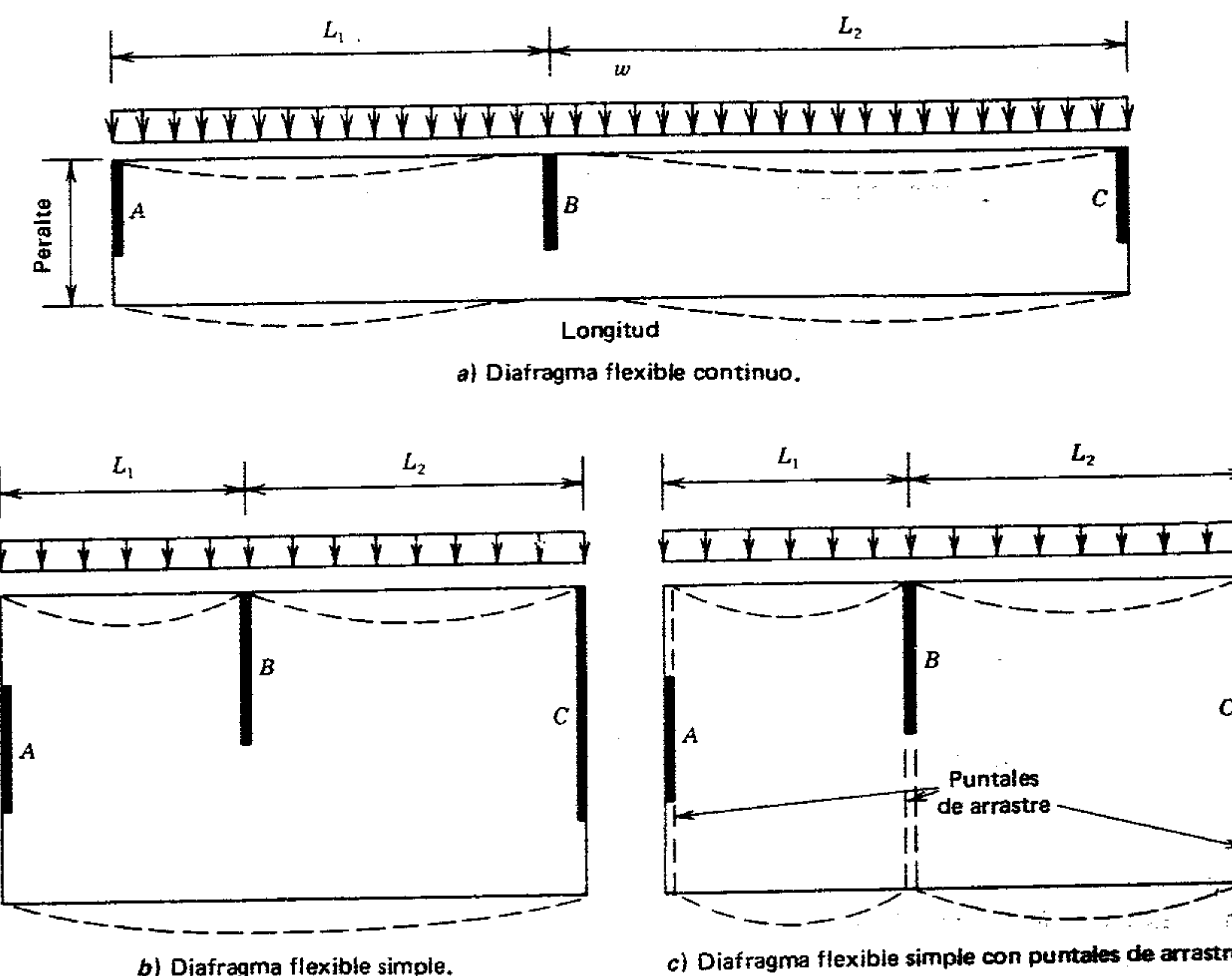


Figura 8.8 Diafragmas flexibles.

tes, se debe tener gran cuidado de unir esas partes entre sí. Las diversas piezas de cubierta, o sea, los paneles que constituyen el alma, se deben unir entre sí y rigidizarse por medio de largueros soportantes. Además, los paneles deben estar apropiadamente sujetos a las cuerdas en todo el perímetro de la cubierta. El examen de fallas ha mostrado que las cuerdas (usualmente en las partes superiores de muros o marcos) tienden a desligarse de la cubierta. En consecuencia, se requieren tirantes de amarre para las cuerdas que funcionen independientemente de la cubierta. Finalmente, el diafragma debe estar sujeto adecuadamente al elemento vertical y a los colectores, de modo que éstos a su vez transmitan la carga horizontal hacia abajo, a la cimentación. Estas consideraciones de diseño y detallado, en lo que respecta

al diafragma de la figura 8.9, se tratarán en seguida, y se desarrollarán fórmulas que se aplican específicamente a la configuración y distribución de los elementos que se ilustran. Sin embargo, debe señalarse que se debe tener cuidado al aplicar estos procedimientos cuando las condiciones no son como las ilustradas.

El edificio de la figura 8.9 tiene una planta rectangular cuyas dimensiones son  $L_1$  y  $L_2$ . Se investigarán las cargas horizontales en un solo sentido, las aplicadas uniformemente a lo largo del borde de la cubierta. Las cargas horizontales se encuentran situadas simétricamente en los muros exteriores a lo largo de las líneas AC y DB. Una cubierta de metal acostillada ancha, similar a la ilustrada en las figuras 5.43 y 8.10, se usará para transmitir la carga vertical a los largueros. Este tipo de construc-



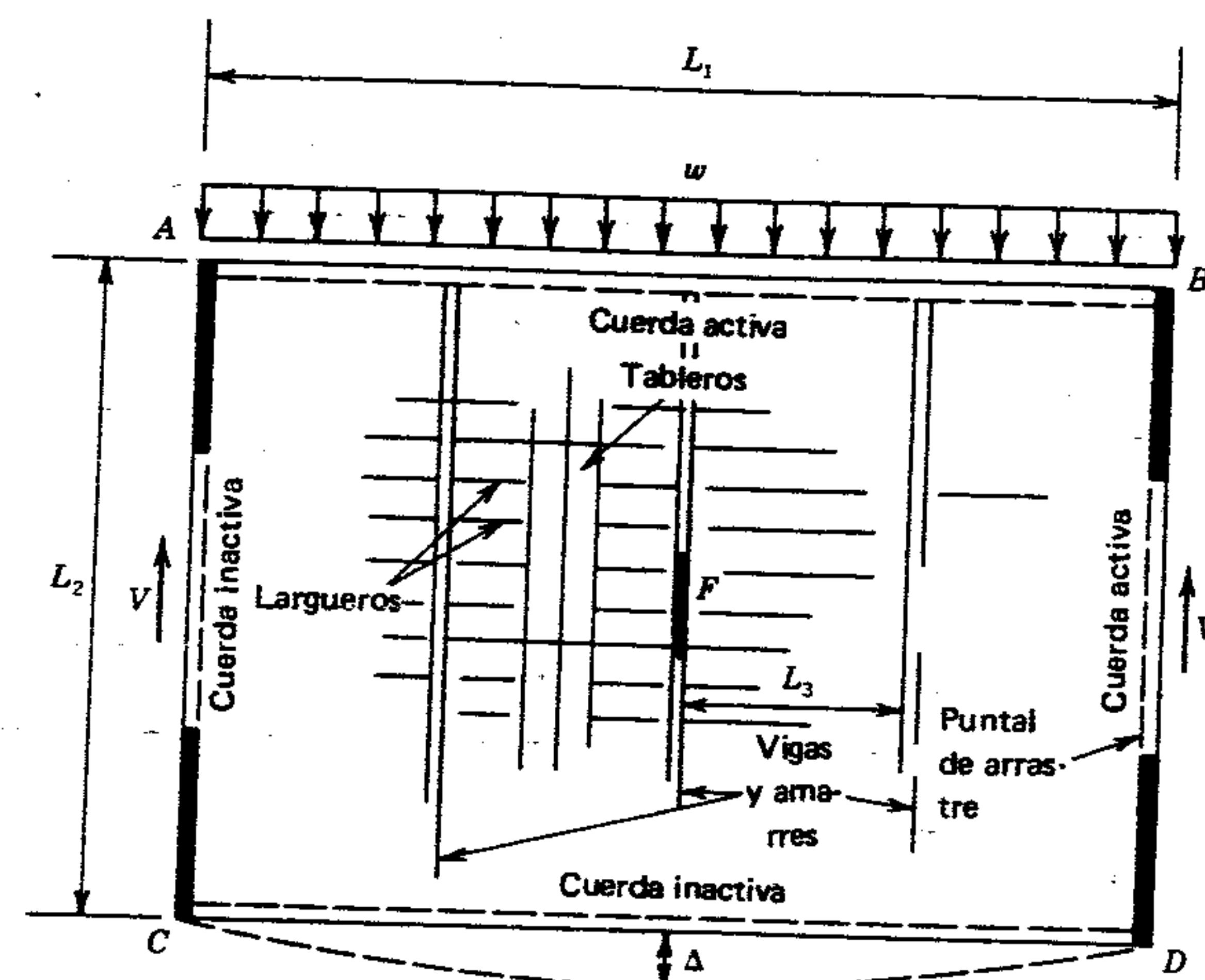


Figura 8.9 Datos de diseño, ejemplo.

ción de piso o techo puede funcionar como diafragma flexible o rígido, transfiriendo la carga lateral ( $w$ ) a los elementos verticales.

Las cubiertas metálicas son producidas por diversos fabricantes; por lo tanto, se dispone de una amplia variedad de propiedades físicas y de valores de diseño. El espesor del metal se mide en calibres, 16, 18, 20 y 22 son los de más amplio uso y algunos se hacen de más de una capa de metal. Usualmente, los paneles tienen 24, 30 o 36 pulg. de ancho, con longitudes con 2 pulgadas de incremento hasta un máximo de 30 pies. Pueden ser galvanizados o pintados. Cada tipo tiene su propia capacidad de carga vertical, y cada fabricante publica y pone a la disposición tablas de claro/carga. De modo similar, los fabricantes publican tablas con datos de diseño para usar sus cubiertas como diafragmas (tabla 8.1). En este caso tienen importancia especial los valores de cortante y el grado de flexibilidad (cantidad de deflexión promedio en micro-pulgadas) en la especificación. Por lo general, las autoridades reglamentadoras de la construcción aceptan estos datos de diseño cuando van acompañados de resultados de pruebas. Usualmente se

requiere un factor de seguridad de 2.5, y un diseño completo y seguro de diafragma de cubierta de metal requerirá referencias a las tablas y especificaciones del fabricante.

Un diafragma de cubierta de metal debe tener tres o más soldaduras batidas por ancho de panel, situadas donde la superficie de la costilla de la cubierta metálica entra en contacto con la vigueta o el larguero. Además, los paneles de cubierta se deben sujetar entre sí por medio de botones de soldadura o tornillos colocados a intervalos que no excedan de 36 pulg. (figura 8.10). La capacidad de esfuerzo cortante y el grado de flexibilidad dependen del número de soldaduras de extremo por panel y el tipo de espaciamiento de las unidades de costura lateral. Algunos fabricantes proporcionan datos de diseño para tornillos de acero inoxidable recubiertos de cadmio autoperforantes para esta unión de costura lateral. Además, el factor de flexibilidad depende de la relación del claro para carga vertical a la longitud total del panel. Esta relación está dada por el símbolo  $R$ . El factor de flexibilidad es la deflexión promedio en micro-pulgadas (en el plano del diafragma) de la cubierta por pie

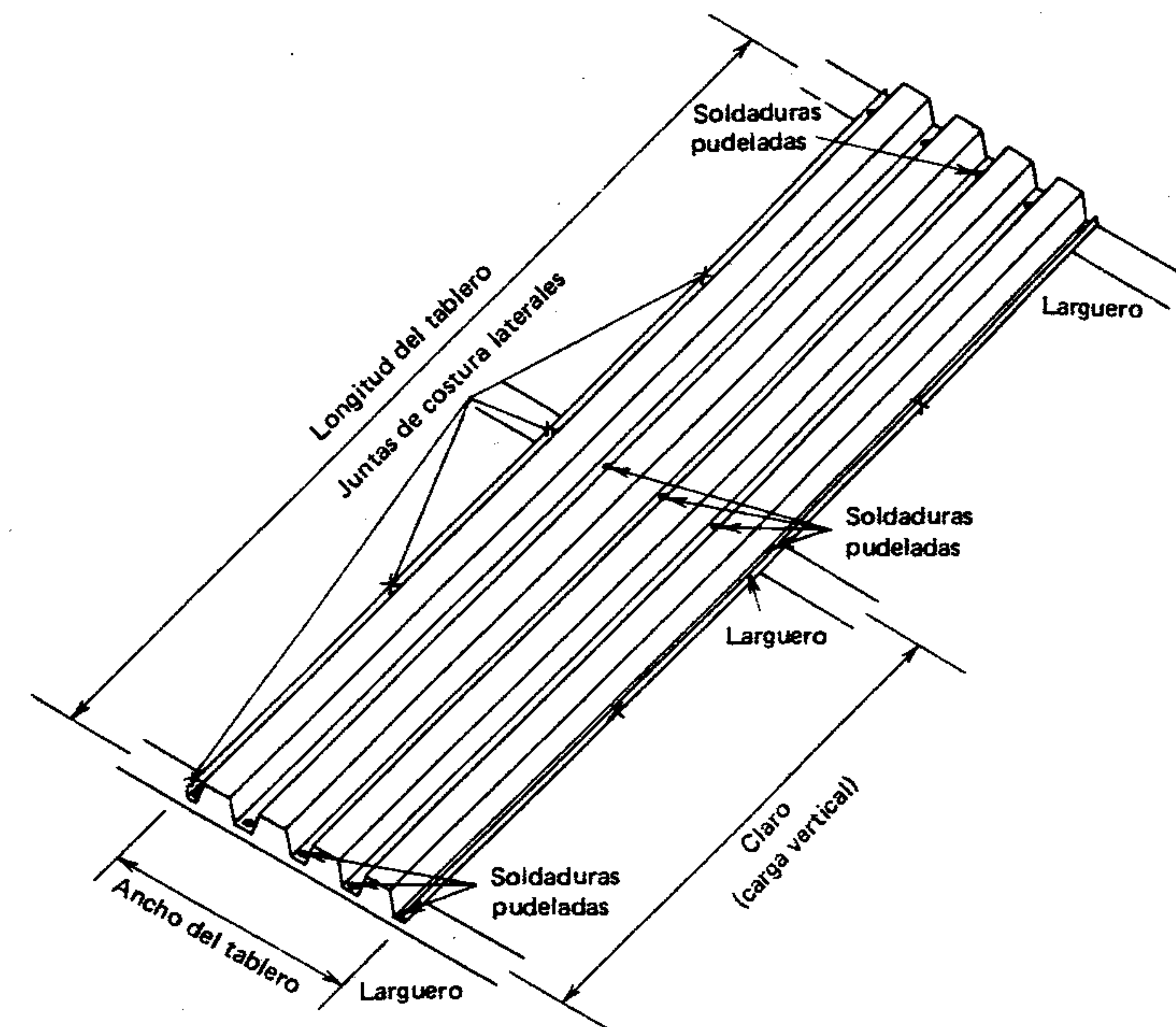


Figura 8.10 Panel de cubierta de piso de calibre ligero.

de distancia desde el apoyo sujeto a un cortante de una libra por pie. Un conjunto completo de tablas de cortante y flexibilidad sería demasiado grande para incluirlo aquí; sin embargo, en la tabla 8.1<sup>2</sup> se da una muestra representativa de estas tablas, tomada del manual militar "Seismic Design for Buildings". Los paneles 1 y 2 son de costilla ancha, de 24 pulg. de ancho, hechas de una sola hoja de acero. El panel 3 está hecho de dos hojas de metal, y el panel 4 de una hoja acostillada angosta de 30 pulg. de ancho. Para la unión de costura lateral de los paneles de costilla ancha se muestran sólo los botones de soldadura a intervalos de 24 pulg. Además, las constantes de diseño son solamente para

paneles galvanizados de 1 1/2 pulg. de peralte. Debe notarse que esta tabla representa sólo una parte de los datos necesarios para el diseño.

En la figura 8.9, la carga lateral total desarrollada por el diafragma es  $F = wL_1$ , y la línea de acción a través de su centro de gravedad pasa por el centro del diafragma, el cual, a su vez, está a la mitad de la distancia entre los elementos verticales situados en los muros  $AC$  y  $BD$ . Por lo tanto, el elemento vertical en cada muro lateral desarrolla la mitad de  $F$ , o sea

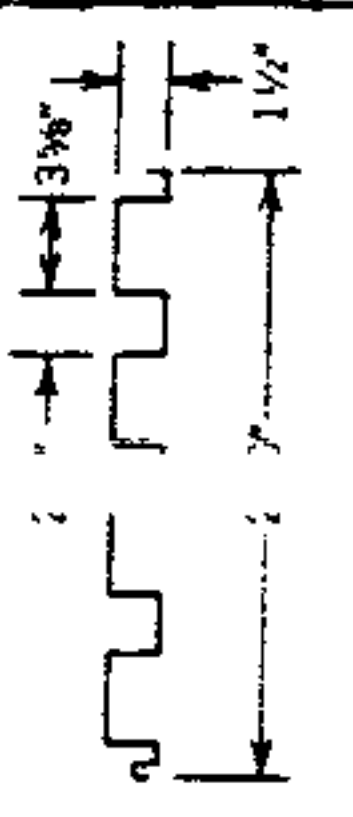
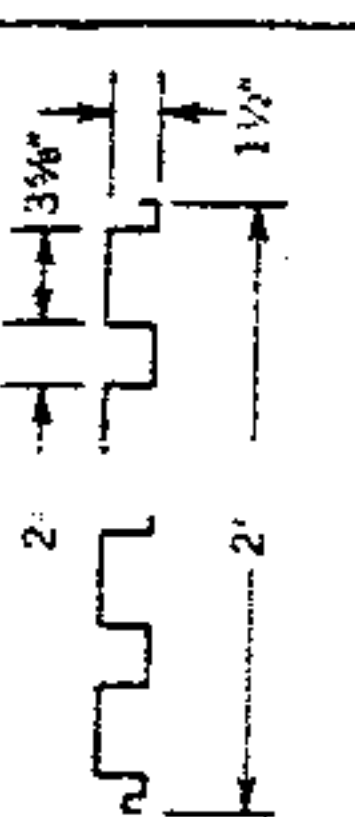
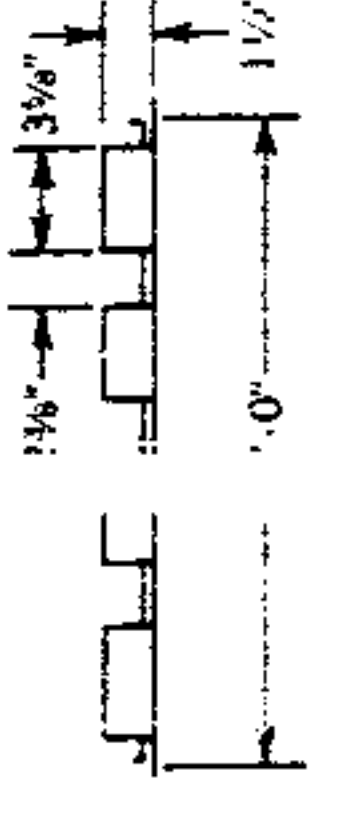
$$V = \frac{1}{2}F$$

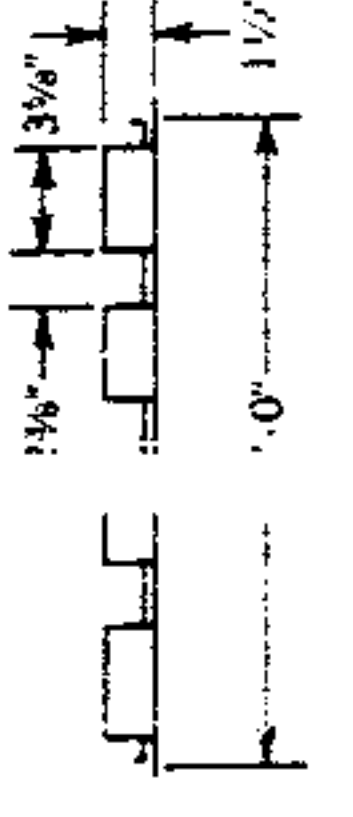
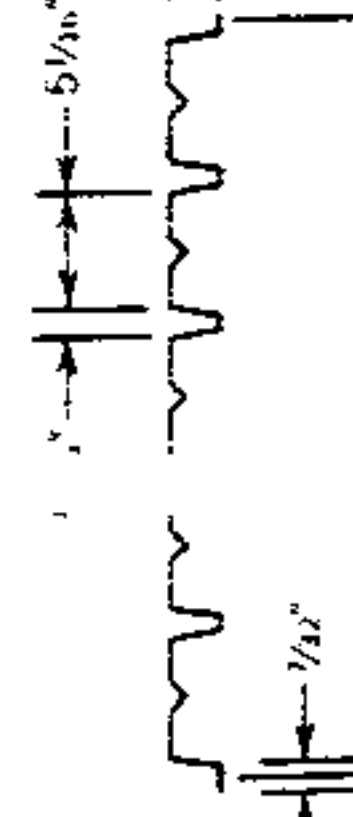
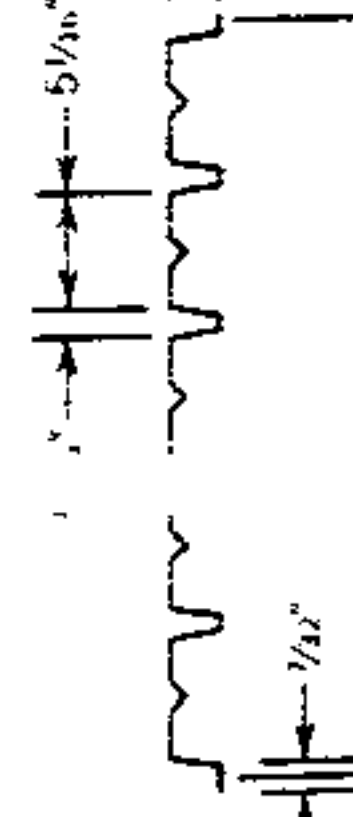
Los puntales de arrastre a lo largo de los bordes  $AC$  y  $BD$  pueden ser cuerdas inactivas. No funcionarían como cuerdas activas a menos que la carga lateral se aplicara en el sentido longitudinal, per-

<sup>2</sup> Se puede obtener en Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. 20402.



Tabla 8. Diafragmas de cubierta de acero.

Sección	Soldaduras en los extremos	Costura lateral	Esfuerzo cortante permisible ( $q_p$ ) y factor de flexibilidad ( $F$ )*									
			Calibre	Claro ( $L_v$ )							9'-0"	10'-0"
				4'-0"	5'-0"	6'-0"	7'-0"	8'-0"	9'-0"	10'-0"		
1.		3	Botón de soldadura @ 24" o.c.	16	$q_b$	1260	1030	870	760	680	620	560
					$F$	5.7 + 34.7R	7.0 + 27.8R	8.3 + 23.1R	9.6 + 19.8R	11 + 17.4R	12 + 15.4R	14 + 13.9R
				18	$q_b$	900	740	630	550	500	450	410
					$F$	8.1 + 67.8R	9.9 + 54.2R	12 + 45.2R	13 + 38.7R	15 + 33.9R	17 + 30.1R	19 + 27.1R
				20	$q_b$	520	430	370	320	290	260	240
2.		5	Botón de soldadura @ 24" o.c.	22	$q_b$	340	280	240	210	190	180	160
					$F$	17 + 278R	20 + 222R	23 + 185R	27 + 159R	30 + 139R	32 + 123R	35 + 111R
				16	$q_b$	1650	1340	1130	980	870	790	720
					$F$	5.0 + 8.68R	6.1 + 6.94R	7.3 + 5.79R	8.5 + 4.96R	9.8 + 4.34R	11 + 3.86R	13 + 3.47R
				18	$q_b$	1220	990	840	730	660	580	520
3.		3	Botón de soldadura @ 24" o.c.	20	$q_b$	700	560	470	410	360	320	290
					$F$	11 + 40.2R	13 + 32.1R	16 + 26.8R	18 + 23.0R	21 + 20.1R	23 + 17.9R	26 + 16.1R
				22	$q_b$	450	370	310	270	240	220	200
					$F$	15 + 69.4R	18 + 55.5R	21 + 46.3R	24 + 39.7R	27 + 34.7R	30 + 30.9R	32 + 27.8R

3.		3	Botón de soldadura a cada 24"	18-18	$q_b$	1580	1280	1080	930	830	750	680
					$F$	3.5 + 3.98R	4.4 + 3.18R	5.3 + 2.65R	6.2 + 2.28R	7.2 + 1.99R	8.3 + 1.77R	9.4 + 1.59R
				16-16	$q_b$	1990	1610	1360	1170	1040	930	850
					$F$	2.5 + 2.81R	3.1 + 2.25R	3.8 + 1.87R	4.5 + 1.61R	5.2 + 1.41R	6.0 + 1.25R	6.9 + 1.13R
				16-18	$q_b$	1920	1550	1310	1130	1000	900	820
4.		6	Cordon de soldadura de 1/2" a cada 18"	20-20	$q_b$	1180	960	810	690	600	530	480
					$F$	5.6 + 5.92R	6.9 + 4.73R	8.2 + 3.94R	9.7 + 3.38R	11 + 2.96R	13 + 2.63R	14 + 2.37R
				18	$q_b$	990	890	820	760	710	680	650
					$F$	5.7 + 17.0R	5.5 + 13.6R	5.4 + 11.3R	5.3 + 9.68R	5.2 + 8.47R	5.1 + 7.53R	5.0 + 6.78R
				20	$q_b$	710	640	590	550	520	490	460
4.		6	Cordon de soldadura de 1/2" a cada 18"		$F$	8.5 + 40.2R	8.1 + 32.1R	7.8 + 26.8R	7.6 + 23.0R	7.3 + 20.1R	7.1 + 17.9R	6.9 + 16.1R
				22	$q_b$	480	420	380	350	330	310	300
					$F$	11 + 69.4R	10 + 55.5R	9.7 + 46.3R	9.3 + 39.7R	8.9 + 34.7R	8.6 + 30.9R	8.3 + 27.8R

Tomado de "Seismic Design for Buildings", NAVFAC, pág. 355, abril, 1973.  
Nota: Los valores para cubiertas de hojas múltiples están designadas primero con el calibre de la hoja plana y luego el de la troquelada. \* Todas las secciones de cubiertas están hechas de láminas galvanizadas.



pendicular a las líneas AC y BD. La cubierta está ligada a esta cuerda inactiva a todo lo largo, y la fuerza promedio cortante es

$$q_D = \frac{V}{L_2} \quad (\text{lb/pie lineal})$$

Se selecciona una cubierta con especificaciones dadas para proporcionar este cortante resistente sin el incremento usual de un tercio que se admite generalmente para carga a corto plazo. La conexión lateral a esta cuerda inactiva también debe desarrollar este mismo cortante resistente.

Las fuerzas en las cuerdas activas (tensión y compresión) se calculan así

$$T = C = \frac{M_{\max}}{L_2} = \frac{w(L_1)^2}{8L_2} \quad (\text{kips o lb})$$

Los tirantes de amarre en la cuerda evitan que las cuerdas activas se separen de la cubierta. Se necesita aplicar el criterio, que depende del origen de la carga  $w$ , para determinar la fuerza desarrollada por los tirantes. Un procedimiento conservador sería suponer que la fuerza del tirante es igual a  $wL_3$ .

La trabe transversal que soporta los largueros podría funcionar como tirante de amarre si fuera continua y estuviera conectada a las cuerdas.

El extremo de los paneles de cubierta se debe conectar a las cuerdas activas para generar el cortante perpendicular, el cual se calcula como sigue

$$v = \frac{VQ}{I} \quad (\text{lb/pie lineal})$$

Este cortante es similar al cortante horizontal entre el patín y el alma de una trabe armada cargada de manera normal.  $Q$  es el primer momento del área del patín respecto al centro del diafragma, e  $I$  es el momento de inercia de todo el diafragma en rela-

fragma. Es difícil establecer sus valores, puesto que la cubierta es un alma irregular. Sin embargo, como  $Q$  es relativamente pequeño en comparación con  $I$ , el cortante es pequeño y raras veces es determinante. El cortante determinante es el de la carga lateral en el sentido longitudinal (no ilustrado) y sería

$$q_D = \frac{w_L L_2}{2L_1}$$

donde  $w_L$  representa la carga longitudinal (no ilustrada).

Los diafragmas flexibles se deben revisar para ver si hay deflexión excesiva, ilustrada como  $\Delta$  en la figura 8.9. La deflexión máxima ocurre en el centro del claro  $L_1$ , y consiste tanto en deflexión por flexión como deflexión por cortante, es decir,

$$\Delta = \Delta_f + \Delta_s$$

La deflexión por flexión se calcula por el procedimiento usual (es decir, como se mostró en el capítulo 4), y será

$$\Delta_f = \frac{5}{384} \left( \frac{wL_1^4}{EI} \right)$$

donde  $I$  generalmente se establece considerando solamente las cuerdas, es decir,

$$I = 2A_c \left( \frac{L_2}{2} \right)^2$$

La deflexión por cortante se puede aproximar por la fórmula

$$\Delta_s = \frac{M}{A_{\text{alma}} G}$$

donde  $G$  es el módulo de elasticidad cortante (11,200 lb/pulg<sup>2</sup> para acero), y  $A_{\text{alma}}$  es el espesor del metal por la longitud  $L_2$ . En la figura 8.9

$$M = \frac{wL_1 L_1}{8} = \frac{VL_1}{4}$$

Por lo tanto

$$\Delta_s = \frac{q_D L_1 L_2}{A_{\text{alma}} G}$$

Esta fórmula de deflexión por cortante no toma en consideración el deslizamiento entre paneles adya-

centes o la distorsión por pandeo local. Por lo tanto, cada fabricante de paneles determina un valor que representa el factor de flexibilidad en cada tipo de panel. Estos factores se listan en las tablas junto con las resistencias al cortante (tabla 8.1). El factor de flexibilidad se ha definido como la deflexión en micro-pulgadas en una longitud unitaria generada por una fuerza cortante unitaria, o sea

$$\Delta_s = \frac{F q_D L}{10^6}$$

donde  $F$  es el factor de flexibilidad y  $L$  es la distancia medida en pulgadas desde el elemento vertical hasta el lugar donde se va a determinar la deflexión. En la tabla 8.1, el término  $R$  representa la relación entre el claro de carga vertical y la longitud total del panel.

Un problema adicional es el de establecer un límite permisible para la deflexión total máxima. Algunos reglamentos son muy específicos en este aspecto, mientras que otros permiten aplicar el criterio del diseñador. Un aspecto importante es el daño potencial a muros y marcos que están sujetos al diafragma. Debe señalarse que los muros de madera o acero pueden admitir mayores deflexiones (perpendiculares al plano del muro) sin daño grave, que los muros hechos de materiales quebradizos como la mampostería. Una fórmula de uso frecuente para la deflexión máxima en muros de mampostería es

$$\Delta_{\max} = \frac{H^2 f_c}{0.01 E t}$$

donde:

$H$  = altura del muro en pies.

$f_c$  = esfuerzo de compresión del material del muro (lb/pulg<sup>2</sup>).

$t$  = espesor del muro en pulgadas.

La Conferencia Internacional de Funcionarios de la Construcción (IBCO) que publica el "Reglamento de Construcción Uniforme" (UBC, véase el capítu-

lo 1), especifica límites claro-peralte y claros máximos totales de diafragmas para diversos rangos del factor de flexibilidad ( $F$ ) en el Informe de Investigación de UBC No. 2078 (1980). Por ejemplo:

Si  $F > 150$ ,

el diafragma no se puede usar para muros de concreto o mampostería; su uso será limitado a muros flexibles, y la relación claro-peralte del diafragma está limitada a 2:1.

Si  $150 > F > 70$ ,

el claro máximo del diafragma está limitado a 200 pies para muros de mampostería o concreto, y la relación claro-peralte está limitada a  $2\frac{1}{2} : 1$  si no se calculan deflexiones; no hay límite para el claro del diafragma si se usan muros flexibles, pero la relación claro-peralte no debe exceder 3:1.

Si  $10 < F < 70$ ,

el diafragma puede ser flexible o rígido; el claro máximo está limitado a 400 pies si se usan muros de mampostería o concreto, y la relación claro-peralte está limitada a  $2\frac{1}{2} : 1$  si no se calculan deflexiones; no hay límite para el claro del diafragma si se usan muros flexibles, pero la relación claro-peralte no debe exceder de 4:1. (Estas son las proporciones que se usan en la figura 8.8a).

#### Ejemplo (techo de diafragma)

En la figura 8.11 se ilustra un edificio rectangular con dimensiones en planta de 80 × 100 pies. La altura es de 11 pies. Como se ilustra, se aplica una carga lateral de 500 lb/pie lineal en un solo sentido. No se ilustra el sistema completo de transferencia de carga de gravedad; no obstante, se usa una cubierta de metal para cubrir el claro de 5 pies de espaciamiento entre largueros. Los



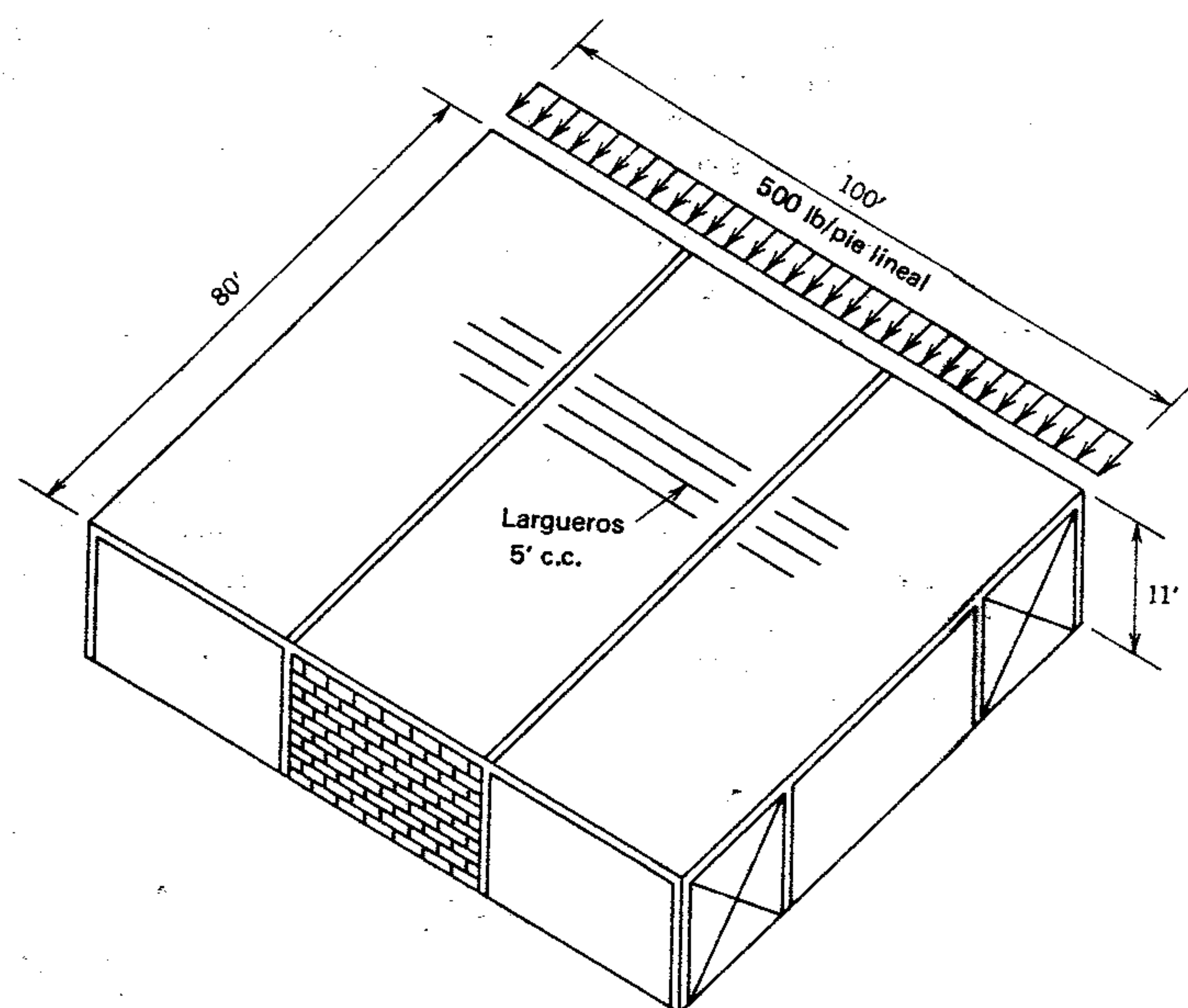


Figura 8.11 Ejemplo.

largueros tienen un claro de  $33\frac{1}{3}$  pies entre trabes principales. Todos los elementos verticales (para el diseño por carga lateral) están en los muros exteriores. Diseñar el diafragma para la carga lateral.

### Solución

1. Calcular y localizar la carga lateral total.

$$F = 0.5(100) = 50 \text{ kips}$$

La línea de acción está a media distancia entre los elementos verticales.

2. Determinar el cortante que se desarrollará en el diafragma. El cortante total en cada elemento vertical es  $V = F/2 = 25$  kips. Se supone que la cuerda inactiva es continua en los 80 pies. Por lo tanto,

$$q_D = \frac{25,000}{80} = 313 \text{ lb/pie lineal}$$

3. Hacer una selección de prueba de cubierta para investigarla. Búsquese en la tabla 8.1 un claro vertical de 5 pies y una fuerza cortante de 313 lb/pie lineal. Se observa que una cubierta de una sola hoja de calibre 20 con tres soldaduras batidas y botones de soldadura a intervalos de 24 pies tiene una capacidad de cortante de 430 lb/pie lineal. (Esta es una cubierta galvanizada de  $1\frac{1}{2}$  pulg. de peralte y, aunque indeterminado en este ejemplo, debe ser adecuada para soportar también las cargas verticales impuestas).
4. Determinar el espaciamiento de soldaduras batidas a lo largo del borde (cuerdas inactivas). Cada soldadura batida debe tener un diámetro efectivo de  $\frac{1}{2}$  pulg. y, como es usual

en este caso, se hará con electrodos E70. La resistencia de cada soldadura es 32,000 veces el espesor total de las hojas de metal. El calibre seleccionado del metal (20) tiene un espesor de 0.0359 pulg. Por lo tanto, el espaciamiento requerido es

$$s = \frac{32,000(t)}{q_D} = \frac{32,000(0.0359)}{313} = 3.67 \text{ pies}$$

La mayoría de los reglamentos especifican un espaciamiento límite máximo de un tercio del claro vertical; por lo tanto,

$$s_{\max} = \frac{5(12)}{3} = 20 \text{ pulg.}$$

5. Diseñar las cuerdas activas. Las fuerzas de cuerda son

$$T = C = \frac{0.5(100)^2}{8(80)} = 7.81 \text{ kips}$$

Esta es una fuerza pequeña, de modo que los elementos usados para su desarrollo dependerían principalmente de la construcción empleada en los aleros. En este ejemplo, supóngase un ángulo con su ala horizontal anclada al elemento soportante vertical y la cubierta soldada a su ala horizontal. Con este detalle, el pandeo del ángulo no es una consideración importante. El área de tensión requerida para acero A36 es

$$A = \frac{7.81}{22} = 0.36 \text{ pulg}^2$$

Usa un ángulo de  $4 \times 3 \times \frac{1}{4}$  pulg. con sus extremidades completas.

6. Investigar la deflexión del diafragma. Calcular el momento de inercia de las dos cuerdas de ángulo.

$$I = 2(1.69)[40(12)]^2 = 779,000 \text{ pulg}^4$$

Determinar la deflexión máxima por flexión en el centro del claro.

$$\Delta_f = \frac{5(0.5)100^4(12)^3}{384(29,000)779,000} = 0.05 \text{ pulg.}$$

Determinar la deflexión máxima por cortante usando los factores de flexibilidad de la tabla 8.1.

Suponer tres longitudes de panel para cubrir la distancia de 80 pies. Deben embonar en el espaciamiento entre largueros de 5 pies; por lo tanto, usar dos a 25 pies y uno a 30 pies. La  $R$  máxima es  $\frac{5}{25} = 0.2$ .

En la tabla 8.1, la cubierta seleccionada tiene un factor de flexibilidad

$$F = 15 + 129R$$

Por lo tanto,  $F = 15 + 129(0.2) = 40.8$ , y la deflexión máxima por cortante es

$$\Delta_s = \frac{40.8(313)50(12)}{10,000,000} = 0.77 \text{ pulg.}$$

y

$$\Delta_f + \Delta_s = 0.05 + 0.77 = 0.82 \text{ pulg.}$$

En la figura 8.11 se ilustra un muro de mampostería en el punto de su deflexión máxima. Usando la resistencia límite para unidades de mampostería de 1350 lb/pulg<sup>2</sup>.

$$f_c = 0.33f'_m = 0.33(1350) = 446 \text{ lb/pulg}^2$$

$$E = 1000f'_m = 1,000(1350) = 1,350,000 \text{ lb/pulg}^2$$

La deflexión máxima permisible en la parte superior del muro de mampostería es

$$\Delta = \frac{H^2 f_c}{0.01 E t} = \frac{11^2 (446)}{0.01 (1,350,000) 8} = 0.50 \text{ pulg}$$

Como  $0.82 > 0.50$  pulg., el diafragma seleccionado es insatisfactorio. Hacer una prueba cambiando las soldaduras batidas de los



extremos a 5 por panel (una en cada costilla). De la tabla 8.1

$$F = 13 + 32.1(0.2) = 19.4$$

y la deflexión por cortante es

$$\Delta_s = \frac{19.4(313)50(12)}{10,000,000} = 0.36 \text{ pulg.}$$

$$\Delta_f + \Delta_s = 0.05 + 0.36 = 0.41 < 0.50 \text{ pulg.}$$

CORRECTO

7. Diseñar los tirantes de amarre de la cuerda. La fuerza máxima en cada tirante es  $0.5(100)/3 = 16.7$  kips. Se podría usar la trabe soportante de los largueros para desarrollar la fuerza del tirante; sin embargo, con frecuencia la posición de la trabe está tan afuera del plano del diafragma que no se puede sujetar a las cuerdas. En estas circunstancias se puede usar un ángulo apoyado sobre la parte superior de los largueros, es decir,

$$A = \frac{16.7}{22} = 0.76 \text{ pulg}^2$$

Usar un ángulo de  $2\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4}$  pulg., hecho continuo de cuerda a cuerda.

## 8.4 VIENTO; INTRODUCCIÓN

El viento crea una carga dinámica sobre un edificio. Estas fuerzas cambiantes actúan en cualquier dirección y duran desde una fracción de segundo hasta varios minutos; pueden ser desde muy pequeñas o incluso alcanzar una magnitud destructiva. Para propósitos de diseño es necesario convertir este caos dinámico a algún patrón ordenado de cargas estáticas equivalentes. Sin embargo, en ciertas condiciones, las cargas estáticas equivalentes no son realistas, y es aconsejable hacer pruebas reales de túnel de viento.

Aunque el viento puede provenir de cualquier dirección y seguir una diversidad de cursos, desde

inclinados a horizontales, e incluso verticales ascendentes o descendentes sobre la fachada de un edificio, por lo general se acepta que el viento se debe tratar como un movimiento horizontal de la masa de aire. No obstante, este movimiento horizontal de aire puede causar presiones y fuerzas sobre estructuras, actuando en cualquier dirección.

El proceso de calcular una carga de viento estática equivalente empieza con el establecimiento de una velocidad básica del viento en millas por hora (mph). Luego esta velocidad se convierte a presión de viento en libras por pie cuadrado ( $\text{lb}/\text{pie}^2$ ). A continuación se aplican una serie de coeficientes para obtener una presión combinada de diseño que se impone sobre partes específicas o sobre todo el edificio.

Por medio de análisis de modelos y de estudios de daños por viento en edificios, se sabe desde hace bastante tiempo que, además de ejercer una presión positiva contra el muro de barlovento (figura 8.12), el viento puede crear simultáneamente una succión en el muro de sotavento y sobre muros paralelos al viento. Además, hay succión externa sobre techos planos, sobre las pendientes de sotavento de techos a dos aguas, y sobre pendientes paralelas al viento; y hay succión, que se convierte en pre-

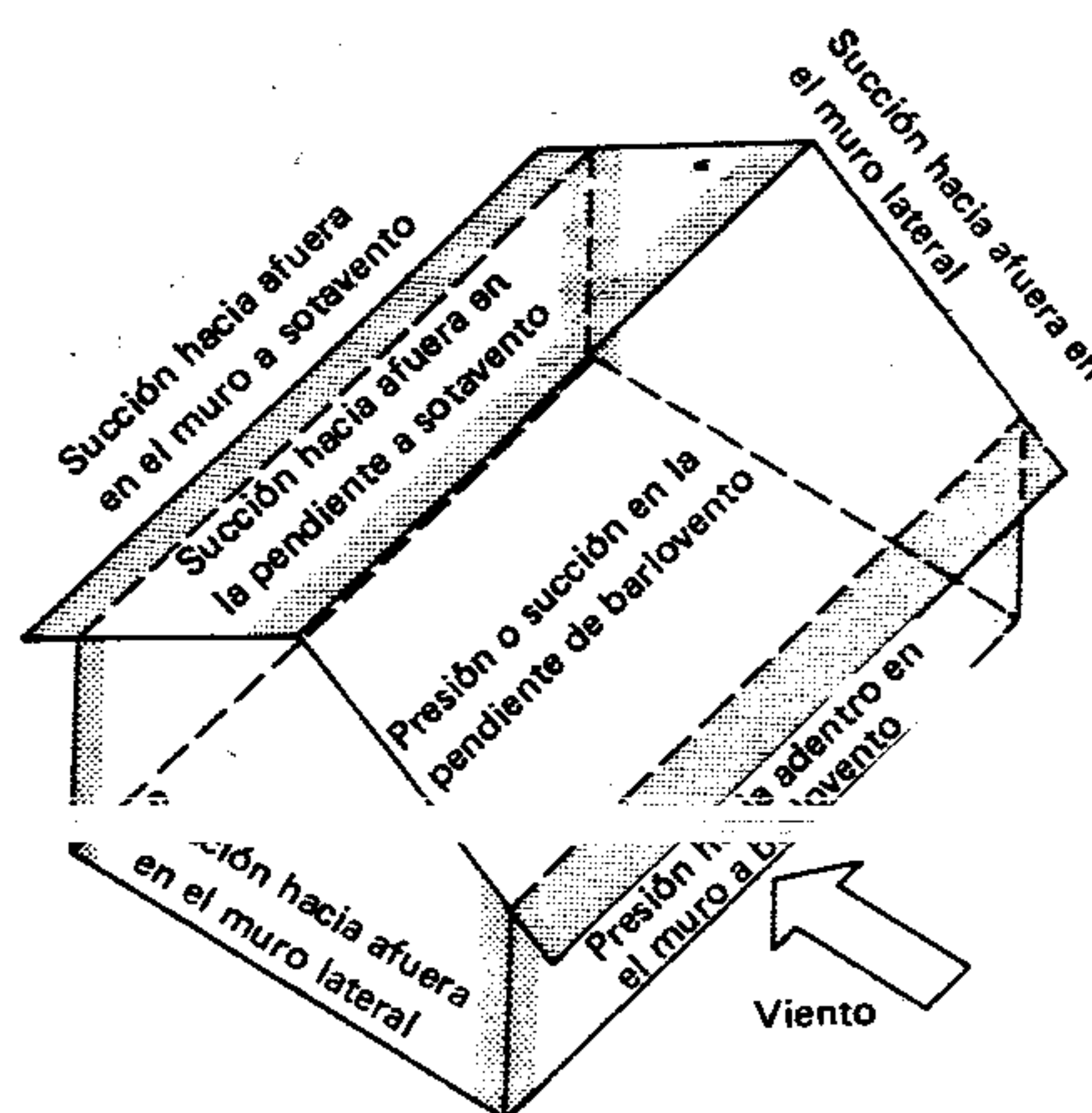


Figura 8.12 Viento sobre superficies exteriores.

sión, sobre pendientes de barlovento, que crece según aumente la pendiente del techo. Aún más, debido a que los edificios no son totalmente herméticos, y porque pueden estar parcialmente abiertos o sujetos a quedarse abiertos o agrietarse y abrirse por desechos llevados por el viento, el interior también puede estar sujeto a presión o succión dependiendo de si las aberturas ocurren esencialmente en los muros de sotavento o de barlovento (figura 8.13). Es necesario investigar la combinación de las fuerzas exteriores (figura 8.12) y la presión interna o la succión interna (figura 8.13) con el fin de determinar la carga crítica de diseño.

Aquí se tratará primero la determinación de valores de carga de viento en los aleros, caballetes y superficies inclinadas de techos de edificios de un solo piso, o en las líneas de piso o techo en edificios de varios pisos. Estas son las cargas sobre los elementos horizontales que se deben transmitir a elementos verticales (sección 8.2). En los reglamentos de construcción estos elementos se denominan "sistemas principales resistentes a la fuerza del viento" o "marcos y sistemas primarios". Sin embargo, se debe remarcar que los componentes individuales de los edificios como largueros, largueros de fachada montantes y recubrimientos de superficies también se deben diseñar adecuadamente en función de las cargas de viento impuestas, y en este aspecto, ciertas áreas en los edificios pueden estar sujetas a grandes presiones superiores a las presiones promedio usadas para el diseño del marco principal. Por lo general, estas áreas son las esquinas del techo y muros, salientes, caballetes a

sotavento y aleros (sombreados en la figura 8.12). Con frecuencia, la falla local en estas áreas de alta presión es la que inicia la falla progresiva de un edificio. Los reglamentos de construcción exigen un tratamiento especial de estos componentes individuales.

Las tres siguientes secciones, todas relacionadas con el viento, tratan los procedimientos para determinar la velocidad básica del viento y para convertirla en presiones de diseño. Sin embargo, debe notarse que estos procedimientos tan detallados, raras veces se justifican en el diseño preliminar. Una fórmula aproximada que se usa con frecuencia para determinar una velocidad de viento en el diseño preliminar es

$$p = 0.0033V^2$$

donde  $V$  = velocidad del viento en mph y  $p$  = presión de diseño en libras por pie cuadrado.

Usando esta fórmula, una velocidad de viento de 77 mph da una presión de diseño de  $20 \text{ lb}/\text{pie}^2$ . Algunos diseñadores consideran este valor como mínimo y lo ajustan aumentándolo para áreas con velocidades de vientos registradas de más de 77 mph. Debe remarcar que este procedimiento aproximado no siempre produce un diseño seguro.

## 8.5 VELOCIDAD DEL VIENTO

El viento puede alcanzar velocidades de 200 a 250 mph; sin embargo, no sería realista diseñar todas

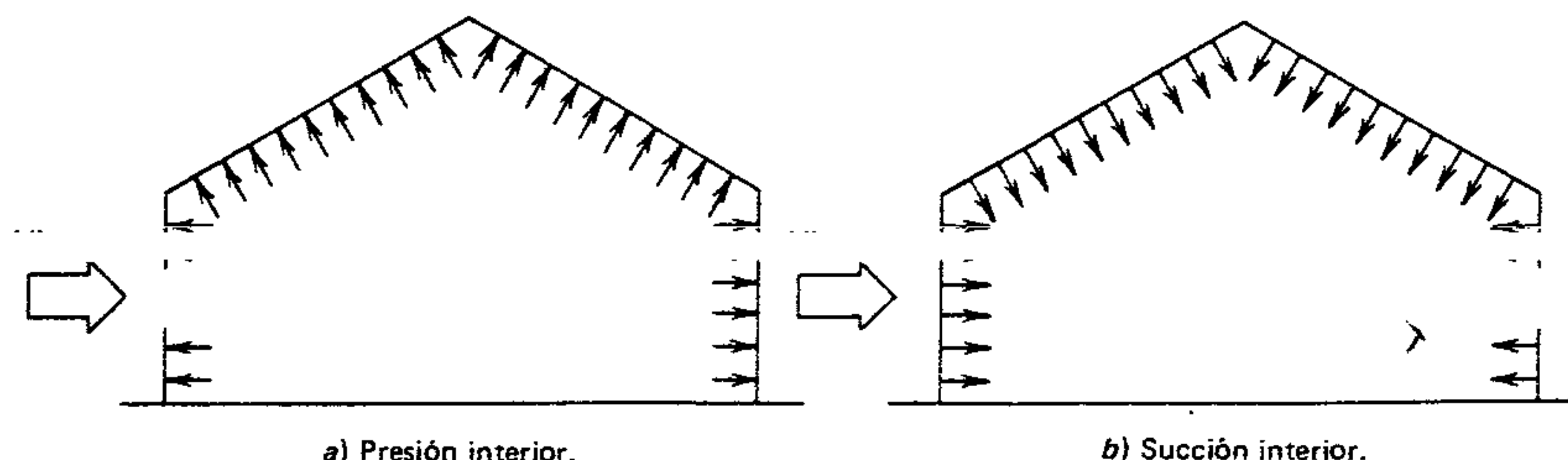


Figura 8.13 Viento sobre superficies interiores.



las estructuras para resistir vientos de esta magnitud. Por lo general los vientos extremos se asocian con perturbaciones ciclónicas, sobre todo con tornados y huracanes, siendo los tornados los de mayores velocidades. El diseño en función de los tornados es un tema especial y por ello no se trata en este texto, así como tampoco se consideran los tornados en la mayoría de los reglamentos de construcción. Debido a que las velocidades de viento asociadas con huracanes son generalmente menores que aquéllas de los tornados graves y usualmente afectan un área geográfica mucho mayor, es más razonable establecer un procedimiento de diseño adecuado basado en vientos con fuerza de huracán. Los huracanes, como severos ciclones tropicales que afectan la masa de tierra de los Estados Unidos, se desarrollan en áreas cálidas del océano Atlántico, el mar Caribe, el golfo de México y en el noroeste del océano Pacífico. Debido a que las aguas costeras, de estuarios y de las grandes áreas de aguas interiores tierra adentro se embravecen, así como el viento directo y los desechos llevados por viento y agua, pueden tener consecuencias devastadoras para la supervivencia de comunidades específicas y sus habitantes, es muy frecuente que tales comunidades tengan requerimientos reglamentarios de construcciones adaptados individualmente o que tendrían que tratarse de una manera individual.

Como se señaló en el capítulo 1, la mayoría de los reglamentos de construcción en las comunidades de tamaño pequeño o mediano en los Estados Unidos son, en mayor o menor medida, adaptaciones de, o están basados en uno u otro de los reglamentos de construcción modelo reconocidos nacionalmente, por lo común el que se adopta más a menudo en esa región. Como regla general, las ciudades grandes tienen su propio reglamento de construcción, pero incluso las especificaciones de éstos armonizan cada vez más con los reglamentos modelo, y viceversa. No obstante, como se señaló ya, las condiciones geográficas de diferentes jurisdicciones que emiten reglamentos, y los patrones de desarrollo pueden tener una poderosa influencia sobre lo que se necesitaría para lograr niveles comparables de salud y seguridad públicas.

En cuanto a huracanes, el sur y el sureste de los Estados Unidos han tenido la mayor experiencia. El

*Reglamento de Construcción Estándar del Sur (Southern Standard Building Code)* es el reglamento modelo predominante en esta área. En cuanto a tornados, las áreas central y central del sur del país han tenido la mayor experiencia. En estas áreas, los tres reglamentos modelo existentes tienen sus partidarios (el *Reglamento de Construcción Nacional* ya no se promulga). El Lejano Oeste ha tenido la mayor experiencia en terremotos devastadores, y en esta área es el *Reglamento de Construcción Uniforme (Uniform Building Code)* el que más se usa.

La Norma Nacional Norteamericana ANSI A58.1-1982, *Cargas Mínimas de Diseño para Edificios y Otras Estructuras* es una norma voluntaria que ha encontrado cada vez mayor aceptación por los organismos de reglamentación modelo y jurisdicciones de emisión de reglamentos. No es un reglamento de construcción; contiene requisitos recomendados para su adopción por los reglamentos modelo y/o jurisdicciones emisoras de reglamentos de construcción.

Aunque sería más apropiado hacer referencia al *Reglamento de Construcción del Sur* al tratar los vientos de fuerza de huracán, se hará referencia al *Reglamento de Construcción Uniforme* porque trata vientos extremos y es el reglamento modelo más apropiado como referencia para diseño sísmico, que es un tema que también se trata en este capítulo. También se hará referencia a ANSI A58.1 debido a su potencial para la adopción más universal como norma voluntaria tanto por los cuerpos de reglamentación modelo como por jurisdicciones emisoras de reglamentos. Por supuesto, siempre deben tener precedencia las especificaciones reglamentarias reales.

Tanto el UBC como ANSI A58.1 requieren investigación local para establecer velocidades básicas de viento que excedan su recomendación. Además, ANSI A58.1 contiene un coeficiente especial

relativa de una estructura en relación con su ocupación y exposición a vientos de fuerza huracanada. El UBC también contiene un factor  $I$ , pero no está relacionado con huracanes. En la tabla 8.2 se dan los valores  $I$  de ambas referencias. La velocidad del viento es una función del tiempo. Las velocidades

Tabla 8.2 Valores del factor de importancia  $I$ .

Categoría de ocupación	ANSI A58.1-1982				
	Viento		Sismo		
	100 millas o más de huracán de costa marina	En costa marina azotada por huracanes			
	1982 UBC				
	Viento	Sismo			
I. Todos los edificios excepto los citados abajo	1.00	1.05	1.00	1.00	1.00
II. Edificios donde se juntan más de 300 personas	1.07	1.11	1.25	1.15	1.25
III. Instalaciones esenciales	1.07	1.11	1.50	1.15	1.50
IV. Edificios que representan escaso riesgo para la vida humana	0.95	1.00	—	—	—

pico del viento duran solamente uno o dos segundos y no se usan en el diseño. Sin embargo, se deja un margen para ráfagas de mayor duración. Las ráfagas no son totalmente efectivas a menos que du-

ren lo suficiente para rodear la estructura. En este estudio y en los reglamentos es importante la "mayor velocidad del viento por milla". Esta se define como la velocidad promedio de 1 milla de aire pa-

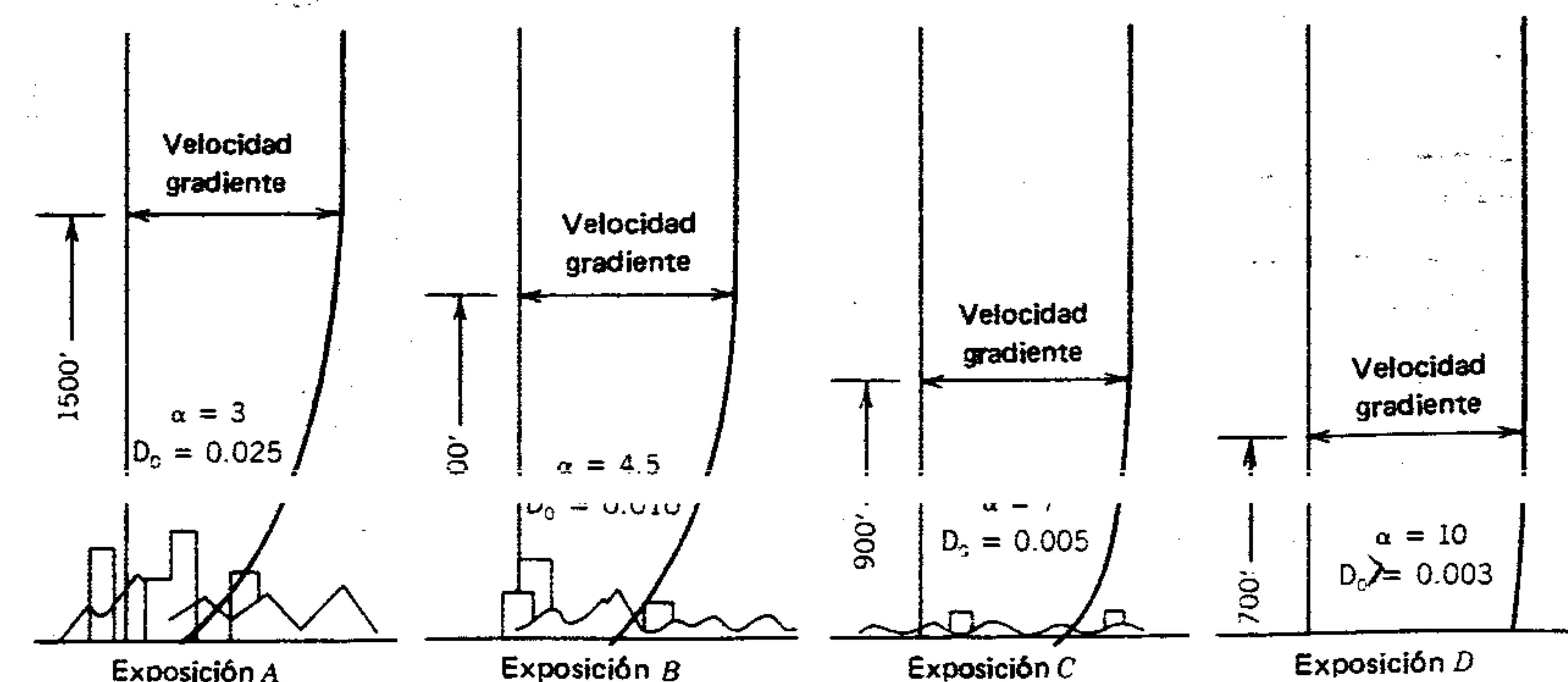


Figura 8.14 Altura gradiente y velocidad gradiente.



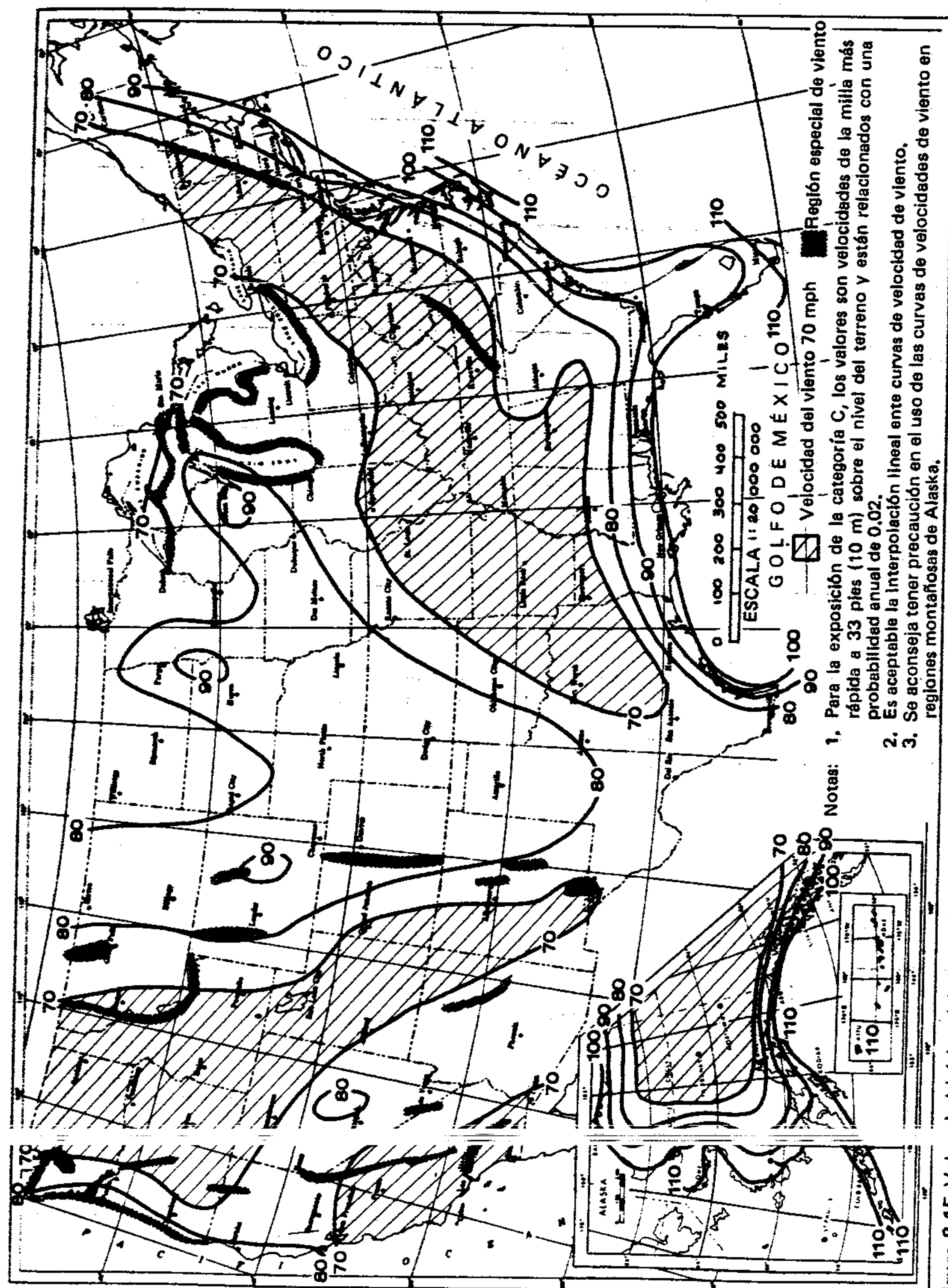


Figura 8.15 Velocidad básica del viento (millas por hora). (Esta figura se reproduce con autorización del American National Standards Institute, 1430 Broadway, Nueva York, NY 10018.)

sando por un anemómetro. Por ejemplo, una velocidad de viento de 120 mph significa que una milla de masa de aire pasó el anemómetro en 30 segundos.

La velocidad del viento es una función de la altura sobre el nivel del suelo y de las condiciones del suelo. El suelo abrupto e irregular y las obstrucciones hechas por el hombre sobre el suelo retardan el movimiento del aire cerca del suelo y reducen la velocidad del viento. Sin embargo, a cierta altura del suelo, las condiciones del suelo no afectan el movimiento del aire. Esta altura se denomina "altura gradiente" y la velocidad se llama "velocidad gradiente".

Por lo general se está de acuerdo para propósitos de diseño, que la variación de la velocidad del viento, para condiciones variables de suelo, se puede expresar con la fórmula

$$V_z = V_g \left[ \frac{z}{z_g} \right]^{1/2}$$

donde:

- $V_z$  = velocidad del viento a cualquier altura  $z$ .
- $V_g$  = velocidad gradiente.
- $z$  = altura sobre el suelo.
- $z_g$  = altura gradiente.
- $1/\alpha$  = coeficiente basado en las condiciones del suelo.

La investigación realizada por el profesor A. G. Davenport de la Universidad de Ontario Occidental ha establecido valores y perfiles que se muestran en la figura 8.14. Se incluyen cuatro grados de rugosidad del suelo. La Exposición A representa la rugosidad más severa y la Exposición D la menor, es decir, sobre agua tranquila. Varios reglamentos de construcción han adoptado estas categorías de exposición; en la sección 8.7 se definen con mayor

Los registros de datos de velocidad del viento son suficientes para elaborar un mapa de los Estados Unidos con perfiles de velocidades de viento. No obstante, es necesario ajustar los perfiles para considerar alguna probabilidad de recurrencia. El mapa generalmente aceptado es el que aparece en la figura

8.15. Este mapa es para intervalos de recurrencia media de cincuenta años. Los valores de los perfiles sobre el mapa son los equivalentes a un terreno relativamente suave (Exposición C) a una altura de 33 pies sobre el suelo. Con este mapa como base se aplican ecuaciones y coeficientes para considerar alturas cambiantes, otras exposiciones, ráfagas y configuraciones de edificios. Obsérvese que la velocidad de viento básica mínima es de 70 mph.

## 8.6 PRESIÓN DEL VIENTO

Una velocidad de viento en mph se pueden convertir a presión de viento en lb/pie<sup>2</sup>. Para hacerlo es necesario hacer algunos supuestos. El viento posee energía cinética por razón de la masa y la velocidad de movimiento del aire. Se supone que la temperatura del aire es de 15°C y que la presión es de 760 mm de mercurio. En estas condiciones, la densidad del aire se puede tomar como 0.0765 lb por pie cúbico.

La energía cinética en pie-lb por un pie cúbico de masa de aire en movimiento es

$$E = \frac{1}{2} m V^2$$

donde  $m$  es la masa de aire. Para usar unidades gravitacionales (lb) la masa se puede expresar como

$$m = \frac{W}{g}$$

donde  $W$  es el peso y  $g$  es la aceleración universal debida a la gravedad, o sea 32.2 pies por segundo.<sup>2</sup> Además, es conveniente mantener las unidades de  $V$  en mph. Por lo tanto,  $V$  se debe multiplicar por 5280 pies por milla y dividir entre 3600 segundos por hora. Haciendo estas sustituciones en la ecuación de la energía cinética y usando el símbolo  $q$  para representar presión de la velocidad

$$q = \frac{1}{2} \left( \frac{0.0765}{32.2} \right) \left( \frac{5280}{3600} \right)^2 V^2$$

$$q = 0.00256 V^2$$



Aquí, se ve que una velocidad de viento de 100 mph se convierte a presión de viento

$$q = 0.00256(100)^2 \\ = 25.6 \text{ lb/pie}^2$$

## 8.7 REGLAMENTOS Y COEFICIENTES DE VIENTO

En la mayoría de los reglamentos se acepta y usa la fórmula de presión del viento  $q$  obtenida en la sección anterior; sin embargo, las velocidades básicas de viento pueden diferir de un área a otra y por tanto para diferentes reglamentos. Si éste no es el caso, la velocidad se podría tomar del mapa de la figura 8.15 para propósitos de diseño real. Se dijo que las velocidades de este mapa eran para alturas de 33 pies sobre un terreno de Exposición C. Por lo tanto, las velocidades de este mapa se deben ajustar a otras alturas y terrenos. Usualmente este ajuste se efectúa multiplicando la presión del viento por un Coeficiente de Exposición de Presión de Velocidad.

La siguiente es una breve descripción de las categorías de exposición:

**Exposición A.** Centros de grandes ciudades y terreno muy abrupto.

**Exposición B.** Áreas suburbanas, poblados, inmediaciones citadinas, áreas boscosas y terreno ondulado.

**Exposición C.** Campo plano y abierto y pastizales.

**Exposición D.** Áreas costeras planas sin obstrucciones expuestas directamente al viento soplando sobre masas de agua.

Como el mapa de velocidad de viento básica se preparó para la Exposición C a una altura de 10 metros (33 pies), es necesario ajustar sus valores para otras alturas y exposiciones. Esto se hace aplicando un Coeficiente de Exposición de Presión de Velocidad,  $K_z$ . Para llegar a la fórmula correcta para  $K_z$ , es necesario colocar en la fórmula de la sección

8.5 los valores de  $\alpha = 7$  y  $z_g = 900$  (Exposición C) como sigue:

$$V_z = \left[ V_{33} \left( \frac{900}{33} \right)^{1/7} \right] \left( \frac{z}{z_g} \right)^{1/\alpha}$$

El término entre corchetes convierte la velocidad básica del viento a velocidad gradiente, mientras que el término entre paréntesis determina la velocidad del viento para cualquier altura y exposición. Debe tenerse presente que la expresión deseada es para un coeficiente de presión, más que para un coeficiente de velocidad. Asimismo, como se vio en la sección 8.6, las presiones varían con el cuadrado de la velocidad. En consecuencia, al derivar la fórmula para  $K_z$ , se hace necesario elevar al cuadrado ambos términos en la fórmula de la velocidad, es decir,

$$K_z = \left[ \frac{V_z}{V_{33}} \right]^2 = \left( \frac{900}{33} \right)^{2/7} \left( \frac{z}{z_g} \right)^{2/\alpha}$$

Esto se simplifica a

$$K_z = 2.58 \left( \frac{z}{z_g} \right)^{2/\alpha}$$

La tabla 8.3 se preparó usando esta fórmula.

Para las ráfagas se debe hacer otra modificación. Esta se hace mediante el uso de un Factor de Ráfaga,  $G_z$ . Este factor toma en consideración el efecto de carga adicional debido a la turbulencia del viento sobre el viento más veloz por milla. Las variables son la categoría de exposición (valores  $\alpha$ ), altura ( $z$ ) y coeficientes de retardo de superficie ( $D_0$ ) para las diversas exposiciones. Se han desarrollado

los trabajos de investigación de J. W. Vellozzi, E. Cohen y A. G. Davenport. Para edificios que no son sensibles a amplificaciones dinámicas, la fórmula para calcular el factor de ráfaga es

$$G_z = 0.65 + 3.65T_z$$

Tabla 8.3 Coeficiente de exposición a la presión de la velocidad,  $K_z$ .

Altura en pies $z$	Exposición A $\alpha = 3.0$ $z_g = 1500'$	Exposición B $\alpha = 4.5$ $z_g = 1200'$	Exposición C $\alpha = 7.0$ $z_g = 900'$	Exposición D $\alpha = 10.0$ $z_g = 700'$
0-15	0.12	0.37	0.80	1.20
20	0.15			1.27
25	0.17	0.46	0.93	1.32
30	0.19	0.50	0.98	1.37
35	0.21	0.54	1.02	1.42
40	0.23			1.46
45	0.25	0.60	1.10	1.49
50	0.27	0.63	1.13	1.52
55	0.28	0.66	1.16	1.55
60	0.30			1.58
70	0.33	0.73	1.24	1.63
80	0.37	0.77	1.29	1.67
90	0.40	0.92	1.34	1.71
100	0.42			1.75
110	0.45	0.89	1.42	1.78
120	0.48	0.93	1.45	1.81
130	0.51	0.96	1.48	1.84
140	0.53	0.99	1.52	1.87
150	0.56			1.90
160	0.58	1.05	1.58	1.92
180	0.63	1.11	1.63	1.97
200	0.67			2.01
250	0.78	1.28	1.79	2.10
300	0.88			2.18
350	0.98	1.49	1.97	2.25
400				2.31
450	1.16	1.67	2.12	2.36
500	1.24	1.75	2.18	2.41

Los cuadros sombreados indican alturas y coeficientes correlativos con el UBC 1982 (tabla 8.5b).



Tabla 8.4 Factores de ráfaga,  $G_z$ .

Altura en pies $z$	Exposición A $\alpha = 3.0$ $D_0 = 0.025$	Exposición B $\alpha = 4.5$ $D_0 = 0.010$	Exposición C $\alpha = 7.0$ $D_0 = 0.005$	Exposición D $\alpha = 10.0$ $D_0 = 0.003$
0- 15	2.36	1.65	1.32	1.15
	2.20			1.14
25	2.09	1.54	1.27	1.13
30	2.01	1.51	1.26	1.12
35	1.94	1.48	1.24	1.11
	1.88			1.11
45	1.83	1.43	1.22	1.10
50	1.79	1.42	1.21	1.10
55	1.76	1.40	1.21	1.09
	1.73			1.09
70	1.67	1.36	1.19	1.08
80	1.63	1.34	1.18	1.08
90	1.59	1.32	1.17	1.07
	1.56			1.07
110	1.53	1.29	1.15	1.06
120	1.50	1.28	1.15	1.06
130	1.48	1.27	1.14	1.06
140	1.46	1.26	1.14	1.05
	1.44			1.05
160	1.43	1.24	1.13	1.05
180	1.40	1.23	1.12	1.04
	1.37			1.04
250	1.32	1.19	1.10	1.03
	1.28			1.02
350	1.25	1.15	1.08	1.02
	1.22			1.01
450	1.20	1.12	1.06	1.00
500	1.18	1.11	1.06	1.00

Los cuadros sombreados indican coeficientes y alturas correlativos con el UBC 1982 (tabla 8.5b).

$T_z$  se define como el factor de intensidad de turbulencia y se puede determinar por la fórmula

$$T_z = \frac{2.35(D_0)^{1/2}}{(z/30)^{1/2}}$$

donde  $D_0$  y  $\alpha$  se obtienen de sus respectivas categorías de exposición presentadas en la figura 8.14. La tabla 8.4 se preparó usando estas fórmulas. Hay además otros coeficientes que se usan para áreas de edificios (interiores y exteriores) y para componentes especiales de edificios. La velocidad del viento ajustada, multiplicada por los coeficientes aplicables, de la presión de diseño ( $p$ ). La Oficina Nacional de Normas ha colaborado en el establecimiento de *Coefficientes de Presión en Edificios* ( $C_p$ ). La figura 8.16 es un extracto de la publicación del Departamento de Marina de los Estados Unidos, NAVFAC DM 2.2. Estos son esencialmente los mismos coeficientes adoptados por ANSI A58.1-1982. Debe señalarse que estos coeficientes de edificios se van a usar solamente para el principal sistema resistente a la fuerza del viento que afecta la superficie exterior del edificio; el signo menos significa que la dirección de la presión es hacia afuera de la superficie, mientras que el signo más implícito significa que la presión es hacia la superficie.

Algunos reglamentos exigen la investigación de presiones tanto internas como externas. ANSI A58.1-1982 especifica este requisito sólo para edificios de un solo piso. El coeficiente interno se denomina coeficiente de ráfaga y presión combinadas y se designa con el símbolo  $GC_{pi}$ . Usualmente tiene el valor de  $\pm 0.25$ . Si se encuentran aberturas de muros inusualmente grandes, entonces el valor cambia a  $+ 0.75$  y a  $- 0.25$ .

La velocidad básica del viento ( $V$ ) se toma de la figura 8.15, y se calcula la presión de la velocidad ( $q$ ). Luego, esta presión de velocidad se multiplica por el *Coefficiente de Exposición a la Presión de la Velocidad* ( $K_z$ ) para obtener la presión adecuada ( $q_z$ ) para la altura y exposición dadas. Se toma en cuenta una consideración más para la condición crítica de ocupación del edificio y exposición a huracanes, y se denomina factor  $I$ . Expresado en forma de ecuación cuando se usa ANSI A58.1-1982,

$$q_z = 0.00256 K_z (IV)^2$$

Los factores  $I$  se pueden obtener en la tabla 8.2 y se ve que varían de 0.95 a 1.11. El coeficiente de exposición a la presión de la velocidad ( $K_z$ ) se puede seleccionar en la tabla 8.3 o calcular por la fórmula

$$K_z = 2.58 \left( \frac{z}{z_g} \right)^{2/\alpha}$$

donde:

$z$  = altura sobre el suelo.

$z_g$  = altura gradiente (figura 8.14).

$\alpha$  = coeficiente de fuerza (figura 8.14).

Las cuatro categorías de exposición A, B, C y D se describen más detalladamente en ANSI A58.1; la categoría A se usa raras veces.

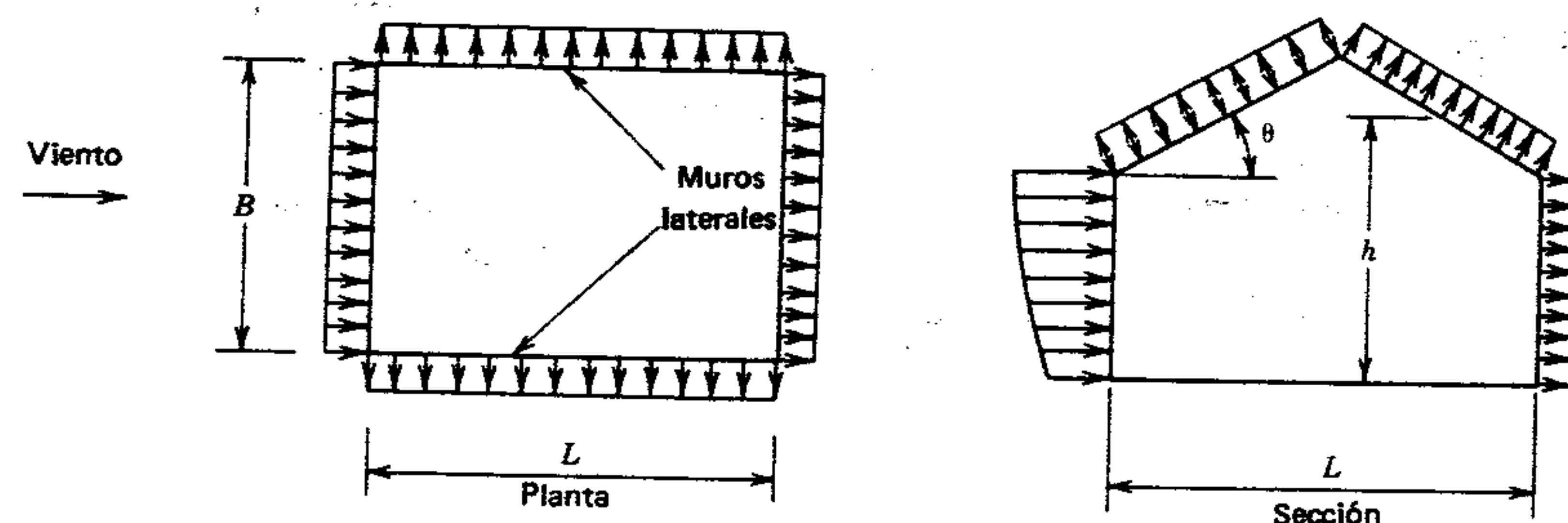
El incremento de la altura (valores  $z$ ) que se va a usar en la determinación de  $K_z$  depende de la naturaleza del problema que se investigue. Usualmente, el mínimo es 5 pies, pero a medida que  $z$  crece, el cambio en  $K_z$  es muy pequeño. En el ejemplo 3 siguiente, se usa una altura de 10 pies para el cambio en el incremento de  $z$ . Este procedimiento se ilustra mejor mediante su uso en el ejemplo.

La aplicación de otros procedimientos descritos en ANSI A58.1-1982 depende de si la estructura es 1) un edificio regular, 2) una estructura diferente de un edificio, o 3) edificios o estructuras que se consideren flexibles o sensibles al viento. Una estructura flexible se define mejor como aquella en que la relación entre altura y anchura es mayor que 5, o aquella en que la frecuencia fundamental de vibración es menor que 1 Hz (ciclo por segundo). Esto se entiende mejor estudiando el ANSI A58.1.

Una división más en el procedimiento depende de si la carga se aplica al principal sistema de resistencia al viento o a los componentes y recubrimientos. En el caso de los marcos principales de edificios regulares, el valor  $q_z$  se multiplica por un *Factor de Ráfagas* ( $G_h$ ), y finalmente por un coeficiente de presión para el edificio ( $C_p$ ). Así, la presión de diseño viene a ser

$$p = q_z G_h C_p$$



Coeficientes de presión externa en muros ( $C_p$ )

Superficie	L/B	$C_p$
Muro a sotavento	Todos los valores	0.8
Muro a barlovento	0-1 2 $\geq 4$	-0.5 -0.3 -0.2
Muro lateral	Todos los valores	-0.7

Coeficientes de presión externa en techos ( $C_p$ )

Dirección del viento	Barlovento								Sotavento
	h/L	Angulo $\theta$ en grados							
		0	10-15	20	30	40	50	$\geq 60$	
Normal al caballete	$\leq 0.3$	-0.7	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.010	-0.7 para todos los valores de h/L
	0.5	-0.7	y -0.9	-0.75	-0.2	0.3	0.5	0.010	
	1.0	-0.7	-0.9	-0.75	-0.2	0.3	0.5	0.010	
	$\geq 1.5$	-0.7	-0.9	-0.9	-0.9	-0.35	0.21	0.010	
Paralelo al caballete	h/B 0	-0.7							-0.7
	h/L $\geq 2.5$								
	h/B 0 h/L $> 2.5$	-0.8							-0.8

Figura 8.16 Coeficientes de presión en edificios.

El factor de ráfaga depende de la altura y la categoría de exposición. Los valores de  $G_h$  se pueden obtener en la tabla 8.4 o derivarlos mediante fórmulas. La altura a usar al seleccionar  $G_h$  es la altura media del techo.

El coeficiente de presión sobre edificios  $C_p$  depende de la localización de la superficie del edificio que se investiga (véase la figura 8.16). Los coeficientes en la tabla pertenecen a superficies de techo y muros exteriores para marcos principales. ANSI A58.1 también contiene tablas de coeficientes para componentes y partes.

#### Resumen de Procedimientos de ANSI A58.1-1982 para Marcos Principales en Edificios Regulares.

1. Establecer la velocidad básica del viento (figura 8.15).
2. Determinar el coeficiente de Importancia  $I$  (tabla 8.2).
3. Calcular  $q_z$  como una función de  $K_z$  con la fórmula:

$$q_z = 0.00256 K_z (V)^2$$

4. Seleccionar las diversas alturas que se van a usar ( $z$ ), dependiendo del problema que se va a resolver, y determinar el valor  $K_z$  correspondiente de la tabla 8.3. Un valor  $z$  que siempre se va a usar es igual a  $h$ , que es la altura media del techo. Este paso proporciona varios valores  $K_z$  y un valor  $K_h$ .
5. Calcular  $q_z$  y  $q_h$  multiplicando valores correspondientes de los pasos 3 y 4. Esto dará las presiones de la velocidad del viento en todos los niveles  $z$ .
6. Seleccionar el Factor de Ráfagas ( $G_h$ ) de la tabla 8.4, usando  $z = h$ .
7. Determinar los coeficientes de presión externa apropiados de la figura 8.16 y multiplicarlos por la presión de la velocidad (paso 5) y el factor de ráfagas (paso 6). Este paso determina todos los efectos de las presiones externas sobre el edificio.
8. Si el edificio es de un solo piso, determinar el coeficiente de ráfaga y presión interna combinadas apropiado y multiplicarlo por la presión de la velocidad ( $q_h$ ) que se encontró en el paso 5.

9. Combinar los efectos de las fuerzas externas y el efecto interno. Esto determinará la carga crítica.

Este procedimiento así descrito se usa en los siguientes problemas de ejemplo, con pequeñas variaciones necesarias para cada ejemplo. Se usan procedimientos similares para determinar cargas sobre componentes o recubrimientos y así están estipulados en ANSI A58.1.

La edición de 1982 del UBC especifica una versión simplificada del ANSI A58.1-1982. El mismo mapa de velocidad básica del viento se usa y se debe modificar cuando lo exigen las condiciones locales. Luego, esta velocidad de viento se convierte a presión de velocidad de manera similar a la que se muestra en la tabla 8.5a. UBC denomina a esto presión de estancamiento ( $q_s$ ) y los valores concuerdan con los derivados usando la fórmula de presión de velocidad del viento desarrollada en la sección 8.6. Esta velocidad de presión se convierte luego en presiones de diseño mediante la aplicación de tres coeficientes, es decir,

$$p = C_e C_q q_s I$$

El coeficiente  $C_e$  es un factor combinado de altura, exposición y ráfaga obtenido en la tabla 8.5b. Se usan sólo dos exposiciones ( $B$  y  $C$ ) y corresponden razonablemente bien con la descripción de exposición dada en ANSI A58.1. El término  $C_q$  es el coeficiente de presión del edificio, obtenido en la tabla 8.5c. Obsérvese que hay un tratamiento separado de marcos primarios, elementos y componentes, y otras estructuras. En el UBC no hay requisitos respecto a las presiones internas.

El término  $I$  en la fórmula de presión de diseño lo designa el UBC como un factor de importancia. Se debe usar un valor de 1.0 o de 1.15 (véase la tabla 8.2).

La aplicación de los requisitos del UBC se ilustrará en los ejemplos 1 y 2 siguientes.

#### Ejemplo 1. Edificio de un solo piso

Un gimnasio que se usa para juntas públicas de más de 300 personas está construido con columnas de



Tabla 8.5 Coeficientes de viento del UBC.\*

Velocidad del viento (mph) <sup>1</sup>	70	80	90	100	110	120	130
Presión $q_s$ (lb/pie <sup>2</sup> )	13	17	21	26	31	37	44

a) Presión de estancamiento del viento ( $q_s$ ) a alturas estándar de 30 pies.

Alturas arriba del nivel promedio de suelo contiguo, en pies	Exposición C	Exposición B
0-20	1.2	0.7
20-40	1.3	0.8
40-60	1.5	1.0
60-100	1.6	1.1
100-150	1.8	1.3
150-200	1.9	1.4
200-300	2.1	1.6
300-400	2.2	1.8

b) Coeficiente combinado de altura, exposición y ráfaga ( $C_q$ ).

Estructura o parte de ella	Descripción	Factor $C_q$
Marcos y sistemas primarios	Método 1 (método de fuerza normal)	0.8 hacia adentro 0.5 hacia afuera 0.7 hacia afuera
	Muro a barlovento	
	Muro a sotavento	
	Techo a sotavento o techo plano	
	Techo a barlovento	
	Pendiente < 9:12	0.7 hacia afuera
	Pendiente 9:12 a 12:12	0.4 hacia adentro 0.7 hacia adentro
	Pendiente > 12:12	
	Viento paralelo al caballete	
	Estructuras cerradas	0.7 hacia afuera 1.2 hacia afuera
	Estructuras abiertas	
	Método 2 (método de área proyectada)	
	Sobre área vertical proyectada	1.3 horizontal en cualquier dirección
	Estructuras de 40 pies o menos de altura	1.4 horizontal en cualquier dirección
	Estructuras de más de 40 pies de altura	0.7 hacia arriba 1.2 hacia arriba

Tabla 8.5 (continúa).

Estructura o parte de ella	Descripción	Factor $C_q$
Elementos y componentes	Sobre área horizontal proyectada	
	Estructuras cerradas	
	Estructuras abiertas	1.2 hacia adentro 1.1 hacia afuera 1.6 hacia afuera 1.3 hacia adentro o hacia afuera
	Elementos de muro	
	Todas las estructuras	
	Estructuras cerradas	
	Estructuras abiertas	
	Parapetos	
	Elementos de techo	
	Estructuras cerradas	
	Pendiente < 9:12	1.1 hacia afuera
	Pendiente 9:12 a 12:12	1.1 hacia afuera o 0.8 hacia adentro
	Pendiente > 12:12	1.1 hacia afuera o hacia adentro
	Estructuras abiertas <sup>1</sup>	1.6 hacia afuera
	Pendiente < 9:12	
	Pendiente 9:12 a 12:12	1.6 hacia afuera o 0.8 hacia adentro
	Pendiente > 12:12	1.6 hacia afuera o 1.1 hacia adentro
Áreas locales en discontinuidades <sup>2</sup>	Esquinas de muro	2.0 hacia afuera
	Voladizo en aleros	2.8 hacia arriba
	Caballetes de techo en extremos de edificios o aleros y bordes de techo en esquinas de edificios	3.0 hacia arriba
	Aleros sin voladizos lejos de esquinas de edificios y caballetes lejos de los extremos de los edificios	2.0 hacia arriba
	Conexiones de recubrimientos	
Chimeneas, tanques y torres sólidas	Agregar 0.5 al $C_q$ afuera o hacia arriba	
	Cuadrado o rectangular	1.4 cualquier dirección
	Hexagonal u octagonal	1.1 cualquier dirección



Tabla 8.5 (Continuación).

Estructura o parte de ella	Descripción	Factor $C_q$
Torres de marco abierto <sup>3,4</sup> Anuncios, asta-banderas, arbotantes, estructuras menores	Redondo o elíptico	0.8 cualquier dirección
		2.0 cualquier dirección
		1.4 cualquier dirección

<sup>1</sup> Una estructura con más del 30 por ciento de cualquier lado abierto se considerará una estructura abierta. Los vidrios no resistentes a impactos se considerarán como aberturas.

<sup>2</sup> Las presiones locales se aplicarán a una distancia de la discontinuidad de 10 pies o 0.1 veces al ancho menor de la estructura, la que sea menor.

<sup>3</sup> El área a la cual se aplicará la presión de diseño será el área proyectada de todos los elementos que no estén en planos paralelos al sentido de la aplicación.

<sup>4</sup> Para torres de radio o de transmisión, el área será la proyectada de todos los miembros sobre una cara, multiplicada por 2.0 para torres rectangulares y 1.8 para torres triangulares.

\* Reproducido del *Uniform Building Code*, edición 1982, Copyright 1982, con autorización del editor, la International Conference of Building Officials.

c) Coeficientes de presión ( $C_q$ )

acero continuas desde el piso a los aleros, y armaduras de acero (figura 8.17). Estas estructuras de columna y armadura distan 30 pies entre sí y cubren un claro de 90 pies. La altura libre es de 23 pies y el peralte de la armadura de 7 pies. No se ilustran la cubierta de techo ni los largueros, pero el elemento horizontal está en el plano de la cubierta del techo. Todos los lados exteriores tienen montantes verticales que se extienden desde el piso hasta los aleros. Hay arriostramientos cruzados entre dos columnas en cada lado largo del edificio. El edificio está situado en Omaha, Nebraska, y tiene una exposición local de la categoría B y aberturas exteriores mínimas.

a) Calcular las presiones de diseño y las cargas sobre aleros debidas al viento, conforme al UBC de 1982. Suponer que las cargas sobre aleros son uniformes aunque los montantes verticales están espaciados 10 pies uno de otro.

b) Calcular las presiones de diseño y las cargas sobre aleros debidas al viento, conforme al ANSI A58.1. Suponer que la carga sobre aleros es uniforme, aunque los montantes verticales estén separados 10 pies entre sí.

#### Solución a (UBC)

- a) Determinar la velocidad básica del viento. En la figura 8.15, la interpolación entre los contornos da una velocidad básica de viento de 85 mph.
- b) Determinar la presión de estancamiento del viento en la tabla 8.5a. Se requiere de nuevo interpolación.

$$q_s = 19 \text{ lb/pie}^2$$

- c) Seleccionar el factor combinado de altura, exposición y ráfaga de la tabla 8.5c. Usando la altura de aleros de 30 pies y Exposición B

$$C = \{C_e = 0.8$$

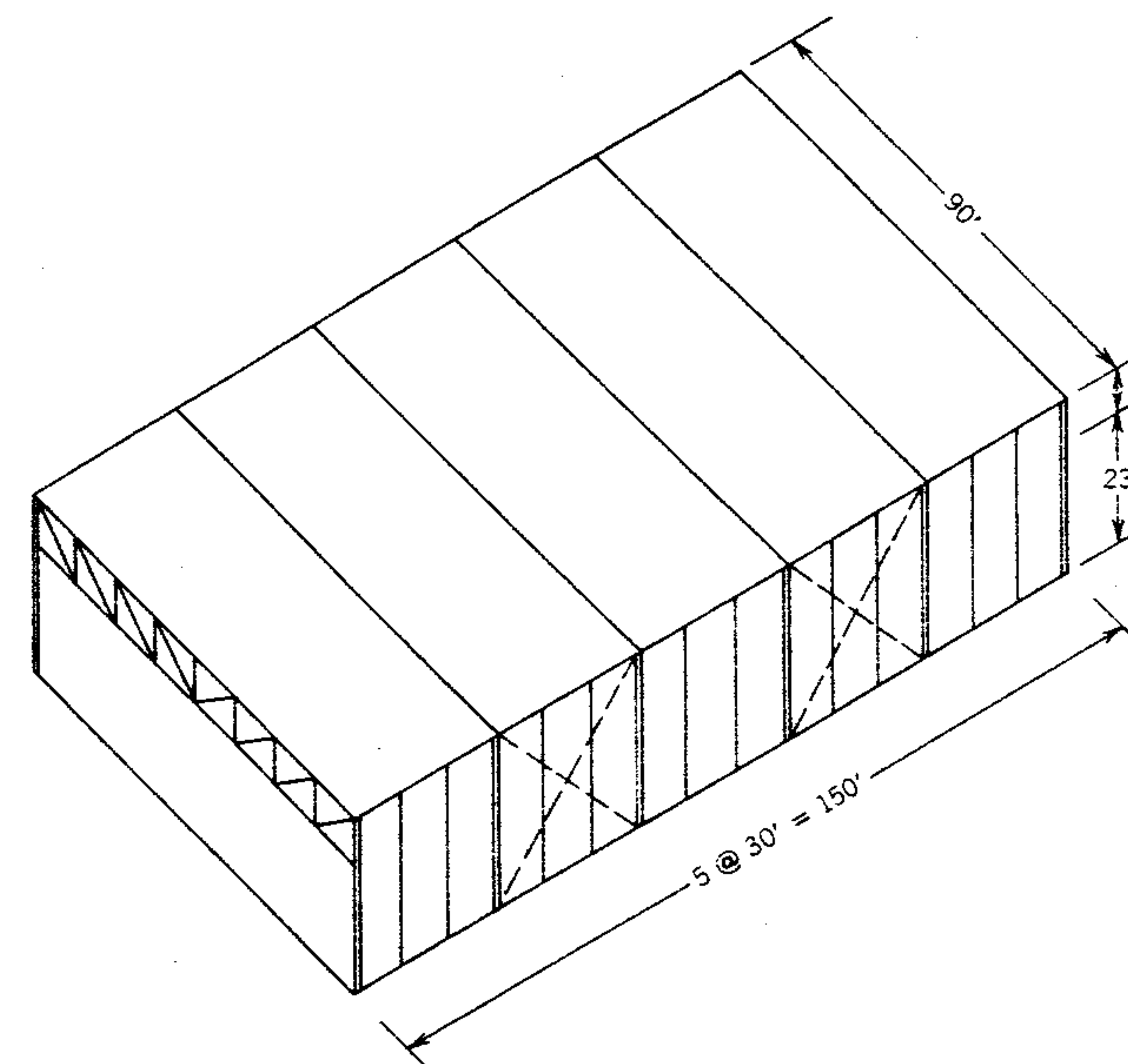


Figura 8.17 Ejemplo 1: Edificio de un piso.

- d) Determinar el factor de importancia. Como se espera acomodar más de 300 personas en el gimnasio,  $I = 1.15$  (tabla 8.2).

- e) Seleccionar los coeficientes de presión para la principal estructura resistente al viento. Estos coeficientes son los mismos en los sentidos transversal y longitudinal. De la tabla 8.5c,

Muro de barlovento,  $C_q = 0.8$  hacia adentro

Muro de sotavento,  $C_q = -0.5$

Techo (plano),  $C_q = 0.7$  hacia afuera

- f) Calcular las presiones de muros y techo como el producto de  $q_s$  y los coeficientes.

Muro de barlovento

$$p = 0.8(0.8)19(1.15) = 13.98; \text{ usar } 14.0 \text{ lb/pie}^2$$

Muro de sotavento

$$p = 0.5(0.8)19(1.15) = 8.74; \text{ usar } 8.7 \text{ lb/pie}^2$$

Techo

$$p = 0.7(0.8)19(1.15) = 12.24; \text{ usar } 12.2 \text{ lb/pie}^2$$

causadas por el viento transversal; el viento longitudinal generará las mismas presiones. Estas presiones se ilustran en la figura 8.18 a y b.

- h) Calcular las cargas sobre aleros para el elemento horizontal en el plano de la cubierta



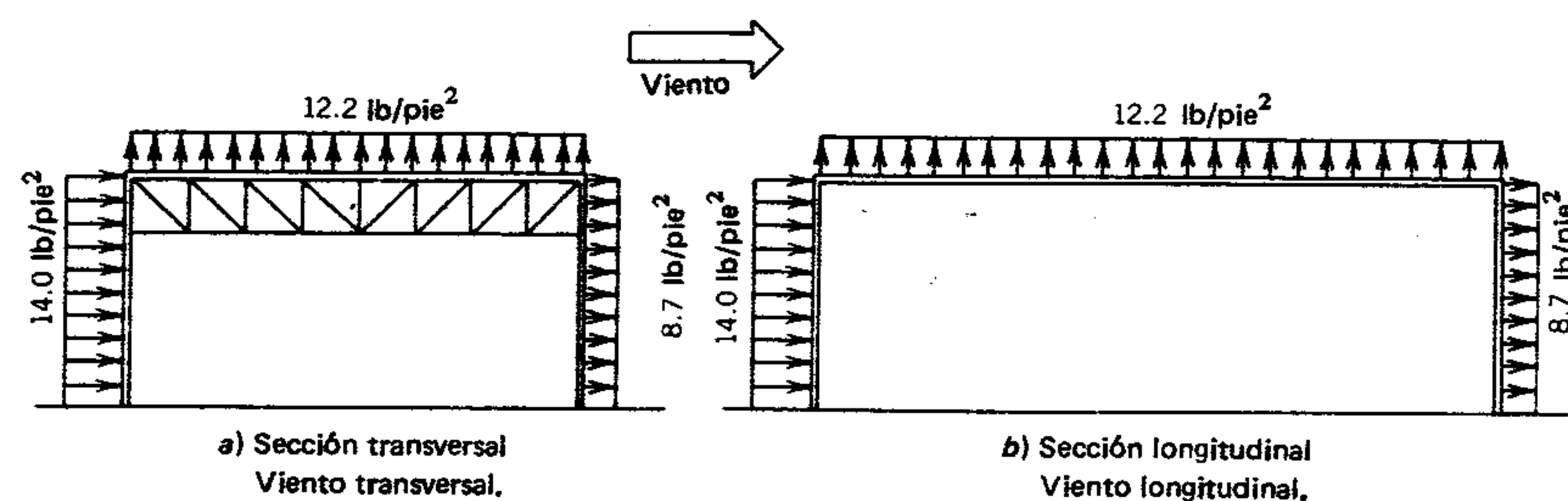


Figura 8.18 Presiones de diseño, UBC.

de techo. Los montantes verticales van del piso a los aleros; por lo tanto se desarrolla la mitad de la carga del muro en los aleros. Esta condición es válida tanto para viento transversal como longitudinal; por lo tanto, las cargas sobre aleros son

Muro de barlovento,  $w = 14.0(30/2) = 210$  lb/pie lineal

Muro de sotavento,  $w = 8.7(30/2) = 131$  lb/pie lineal

En la figura 8.19 se ilustran las cargas del diafragma.

#### Solución b (ANSI)

- a) Determinar la velocidad básica del viento. Interpolando en la figura 8.15,  $V = 85$  mph.

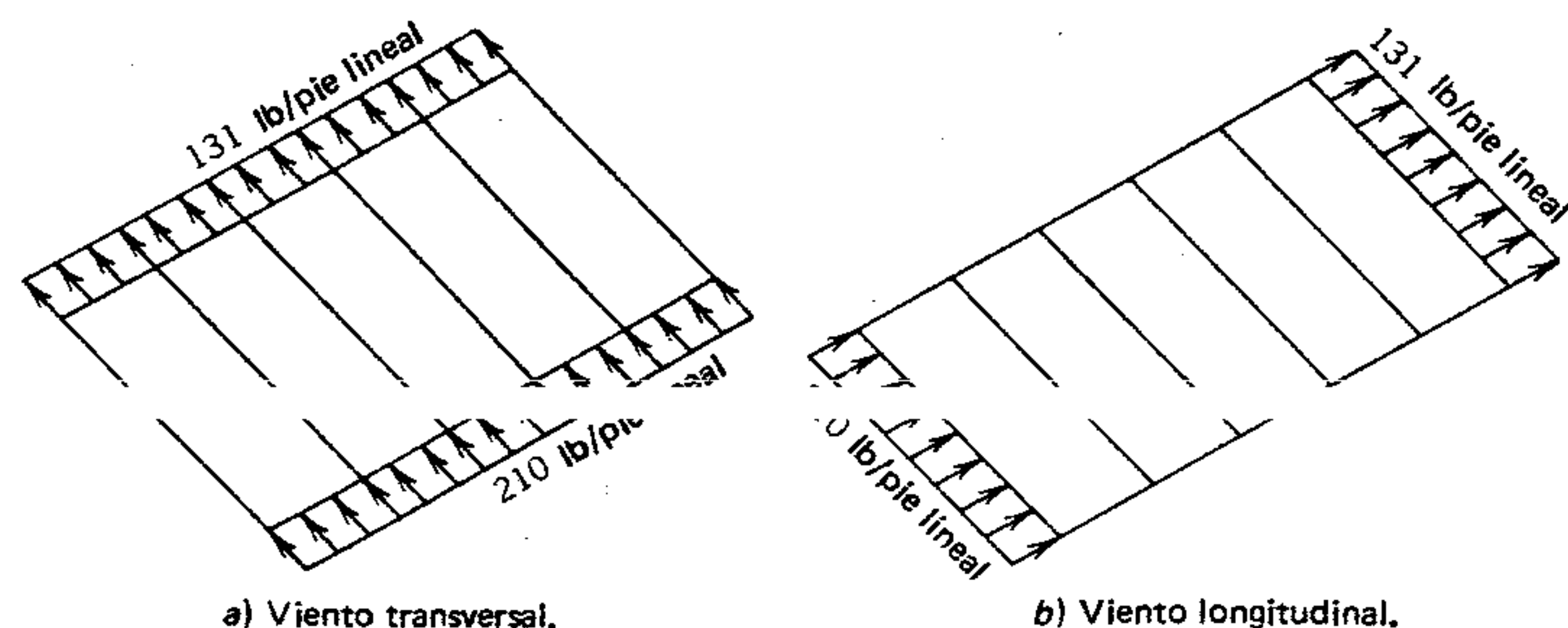


Figura 8.19 Cargas de diafragma, UBC.

- b) Determinar el coeficiente de importancia. En la tabla 8.2, con una clasificación de edificio tipo II,

$$I = 1.07$$

- c) Seleccionar los coeficientes de exposición a la presión de la velocidad ( $K_z$ ) en la tabla 8.3. Usar  $z$  en incrementos de 5 pies.

$$0-15 \text{ pies, } K_z = 0.37$$

$$15-20 \text{ pies, } K_z = 0.42$$

$$20-25 \text{ pies, } K_z = 0.46$$

$$30 \text{ pies, } K_z = 0.50$$

- d) Calcular la presión de la velocidad del viento para cada rango de altura.

$$q_z = 0.00256 K_z [1.07(85)]^2 = 21.18 K_z$$

$$0-15 \text{ pies, } = 21.18(0.37) = 7.84 \text{ lb/pie}^2$$

$$15-20 \text{ pies, } = 21.18(0.42) = 8.90 \text{ lb/pie}^2$$

$$20-25 \text{ pies, } = 21.18(0.46) = 9.74 \text{ lb/pie}^2$$

$$30 \text{ pies, } = 21.18(0.50) = 10.59 \text{ lb/pie}^2$$

- e) Seleccionar el Factor de Ráfaga ( $G_h$ ) de la tabla 8.4. Usar  $z = 30$  pies.

$$G_h = 1.51$$

- f) Determinar el coeficiente de presión interna y calcular la presión interna que se usará para todas las alturas.

$$GC_{pi} = \pm 0.25$$

$$p = GC_{pi} q_h = \pm 0.25(10.59) = \pm 2.65; \text{ usar } 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

Debe señalarse que  $2.7 \text{ lb/pie}^2$  es succión interna o presión interna.

- g) Seleccionar el coeficiente de presión externa apropiado de la figura 8.16 y calcular y trazar esquema de las presiones de diseño para un viento transversal.

$$L/B = 90/150 < 1.0$$

$$\text{Muro de barlovento, } C_p = 0.8$$

$$\text{Muros laterales, } C_p = -0.7$$

$$\text{Muro de sotavento, } C_p = -0.5$$

$$\text{Techo (plano), } C_p = -0.7$$

Las presiones de diseño  $p = q_z G_h C_p + 2.7$ ; por lo tanto,

Muro de barlovento

$$0-15 \text{ pies, } = 7.84(1.51)(0.8) \pm 2.7 = 9.5 \pm 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

$$15-20 \text{ pies, } = 8.90(1.51)(0.8) \pm 2.7 = 10.8 \pm 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

$$20-25 \text{ pies, } = 9.74(1.51)(0.8) \pm 2.7 = 11.8 \pm 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

$$30 \text{ pies, } = 10.59(1.51)(0.8) \pm 2.7 = 12.8 \pm 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

Muro de sotavento (todas las alturas)

$$p = 10.59(1.51)(-0.5) \pm 2.7 = -8.0 \pm 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

Muros laterales

$$p = 10.59(1.51)(-0.7) \pm 2.7 = -11.2 \pm 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

Techo (plano)

$$p = 10.59(1.51)(-0.7) \pm 2.7 = -11.2 \pm 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

En la figura 8.20 se ilustran las presiones de superficie de diseño calculadas.

- h) Repetir el paso g) para el viento longitudinal.

$$L/B = 150/90 = 1.67$$

En la figura 8.16 se ve que todos los coeficientes de presión permanecen iguales, excepto aquellos para los muros de sotavento, donde  $C_p = -0.37$ .

$$p = 10.59(1.51)(-0.37) \pm 2.7 = -5.9 \pm 2.7 \text{ lb/pie}^2$$

En la figura 8.21 se ilustran las presiones de superficie de diseño calculadas.

- i) Calcular y trazar esquema de cargas de aleros sobre el diafragma en cada sentido. Los montantes de los muros verticales van desde el piso a los aleros de modo similar a una viga simple. Bajo presiones uniformes en los muros, la mitad de la carga de muro total se desarrolla en los aleros. La carga variable sobre los muros de barlovento requiere que se calculen las reacciones de los aleros a partir de la carga escalonada similar a los procedimientos descritos para vigas simples en el capítulo 2.

**Viento transversal.** La sección longitudinal de las figuras 8.20 c y d muestra que las presiones en los muros laterales hacia afuera se anulan entre sí. Por lo tanto, no hay carga lateral neta.

La sección transversal de las figuras 8.20 a y b muestra una carga a barlovento mayor en a que en



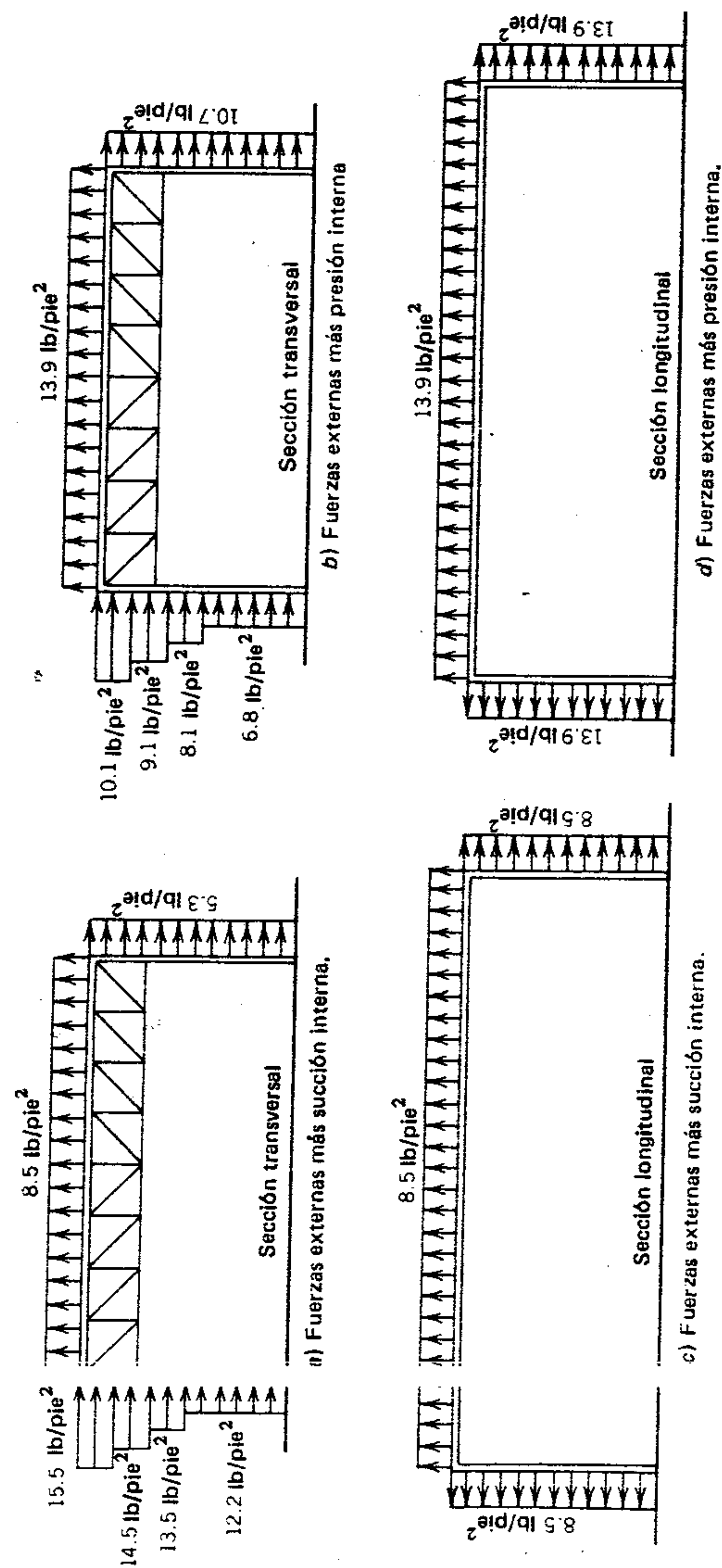


Figura 8.20 Presiones de diseño de viento transversal, ANSI.

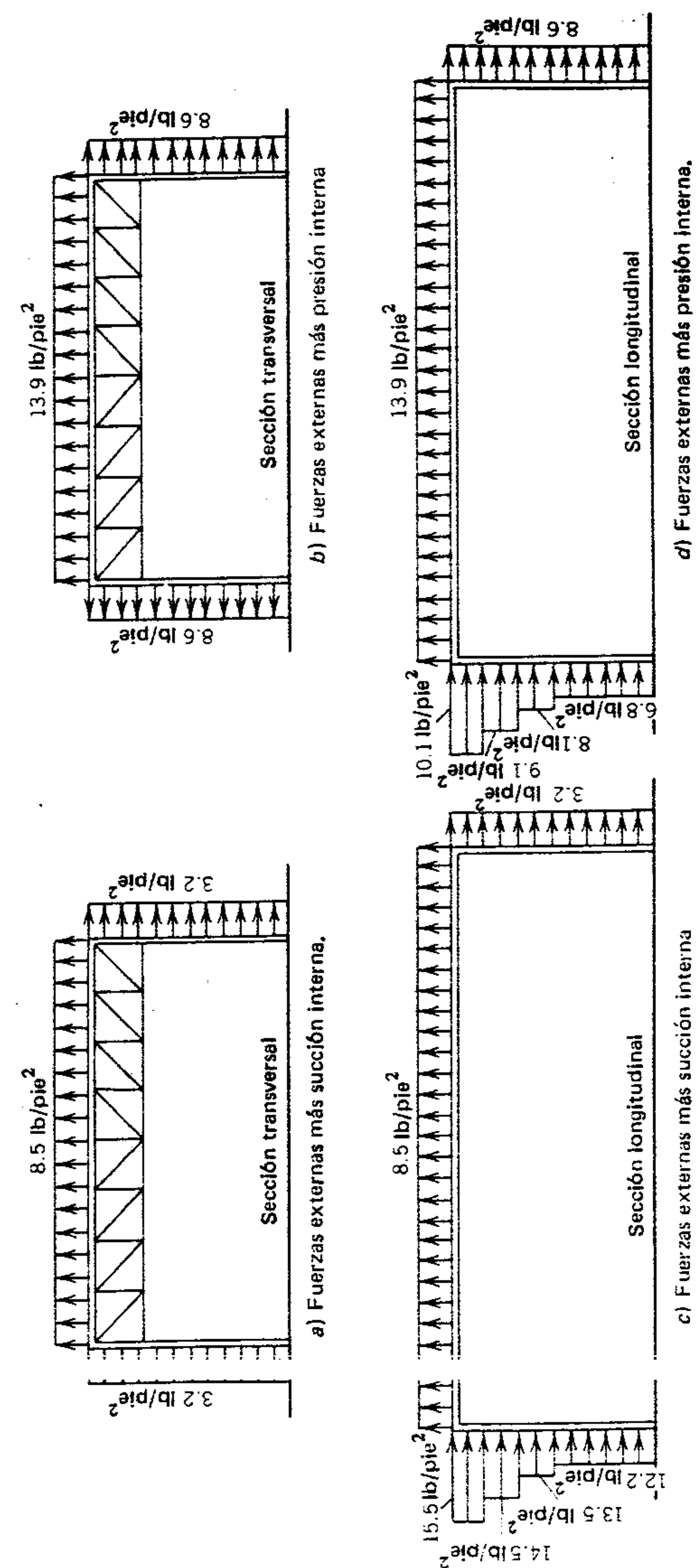


Figura 8.21 Presiones de diseño de viento longitudinal, ANSI.



b, pero lo contrario sucede en los muros de sotavento. Aunque el resultado neto será el mismo, es necesario calcular reacciones de muros en los aleros sobre cada lado, con el fin de determinar los requisitos de sujeción.

Marco transversal de la figura 8.20a:

La reacción de los aleros para el muro de sotavento es

$$w = 5.3(30/2) = 79.5; \text{ usar } 80 \text{ lb/pie lineal}$$

La reacción de los aleros para el muro de barlovento es

$$12.2(15) \frac{7.5}{30} = 45.75$$

$$13.5(5) \frac{17.5}{30} = 39.38$$

$$14.5(5) \frac{22.5}{30} = 54.38$$

$$15.5(5) \frac{27.5}{30} = \frac{71.04}{210.55}; \text{ usar } 211 \text{ lb/pie lineal}$$

Marco transversal de la figura 8.20b:

La reacción de los aleros del muro de sotavento es

$$w = 10.7(30/2) = 160.5; \text{ usar } 161 \text{ lb/pie lineal}$$

La reacción de los aleros para el muro de barlovento es

$$6.8(15) \frac{7.5}{30} = 25.50$$

$$8.1(5) \frac{17.5}{30} = 23.63$$

$$9.1(5) \frac{22.5}{30} = 34.13$$

$$10.1(5) \frac{27.5}{30} = \frac{46.00}{129.55}; \text{ usar } 130 \text{ lb/pie lineal}$$

En la figura 8.22 a y b se ilustran las cargas de diafragma debidas al viento transversal. Obsérvese que la carga total en cada caso es 291 lb/pie lineal.

**Viento longitudinal.** En las figuras 8.21 a y b, la sección transversal muestra las presiones de muros laterales hacia fuera anulándose entre sí; por lo tanto, no hay carga lateral neta. Cada carga de aleros se debe calcular para la sección longitudinal de las figuras 8.21 c y d. Obsérvese que las fuerzas del muro de barlovento son las mismas que las del viento transversal. Por lo tanto, la carga de aleros para c) es  $w = 211 \text{ lb/pie lineal}$ , y la carga de alero para d) es  $w = 130 \text{ lb/pie lineal}$ . La carga de aleros del muro de sotavento es  $w = 3.2(30/2) = 48 \text{ lb/pie lineal}$  para c) y  $w = 8.6(30/2) = 129 \text{ lb/pie lineal}$  para d).

En la figura 8.22 c y d se ilustran las cargas del diafragma debidas al viento longitudinal. Obsérvese que la carga total en cada caso es 259 lb/pie lineal.

### Ejemplo 2. Marcos a dos aguas

En la figura 8.23 se ilustran cinco marcos a dos aguas de un solo piso, que salvan un claro de 64 pies y están espaciados a 28 pies entre sí; la planta del edificio es de  $64 \times 112$  pies. La altura de los aleros es de 20 pies y la altura del caballete de 32 pies. Este es un edificio tipo industrial no esencial localizado en un área de Exposición C en Corpus Christi, Texas. Los largueros horizontales de fachada en los muros y los largueros a lo largo del techo están espaciados muy estrechamente entre sí y las aberturas exteriores son mínimas. Determinar la carga debida al viento transversal sobre un marco interior típico usando ANSI A58.1-1982.

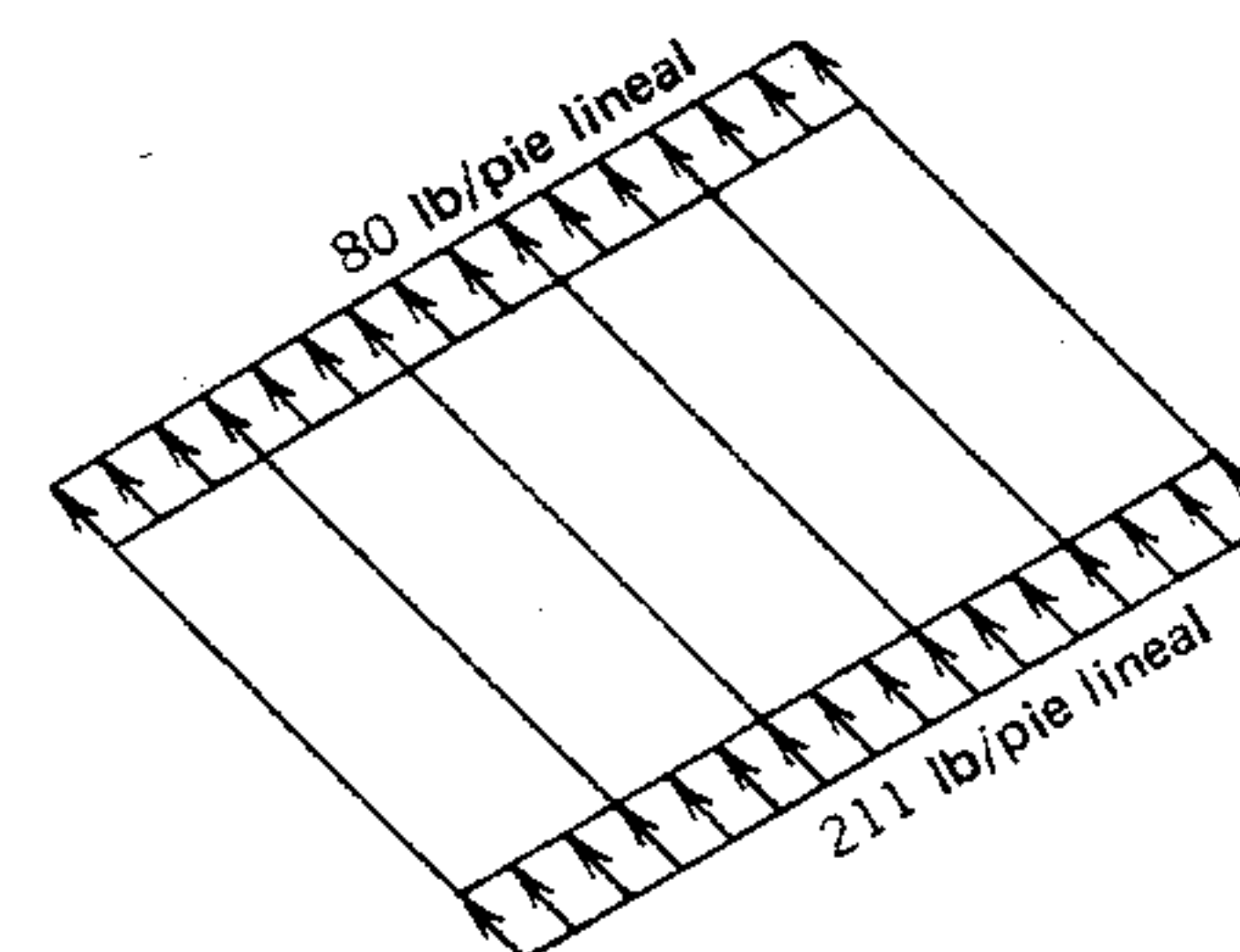
### Solución

1. Determinar la velocidad básica del viento. Interpolando del mapa de la figura 8.15,

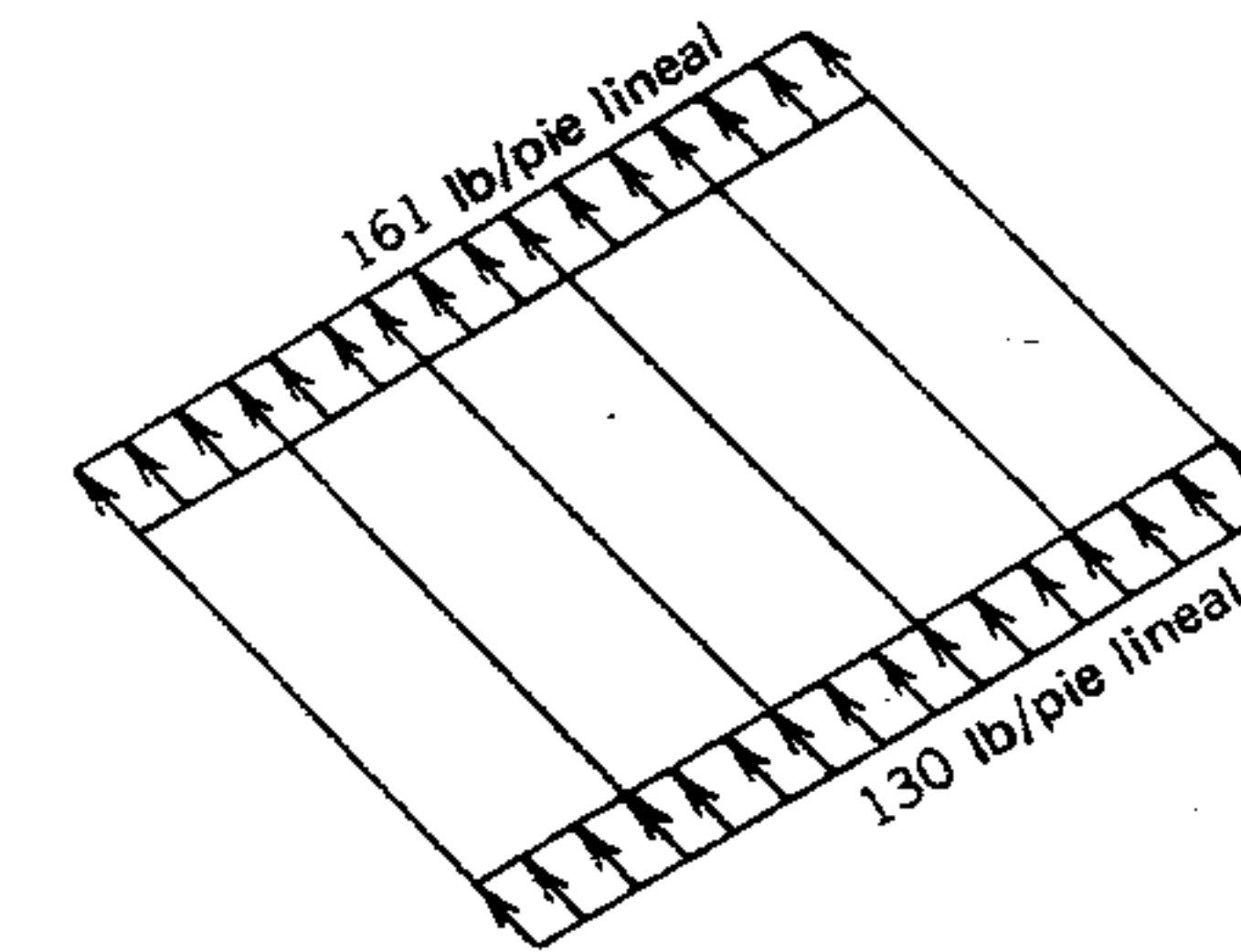
$$V = 95 \text{ mph}$$

2. Determinar el factor de importancia. En la tabla 8.2 para una ocupación de edificio del tipo 1,  $I = 1.05$  para la costa marina de huracanes.

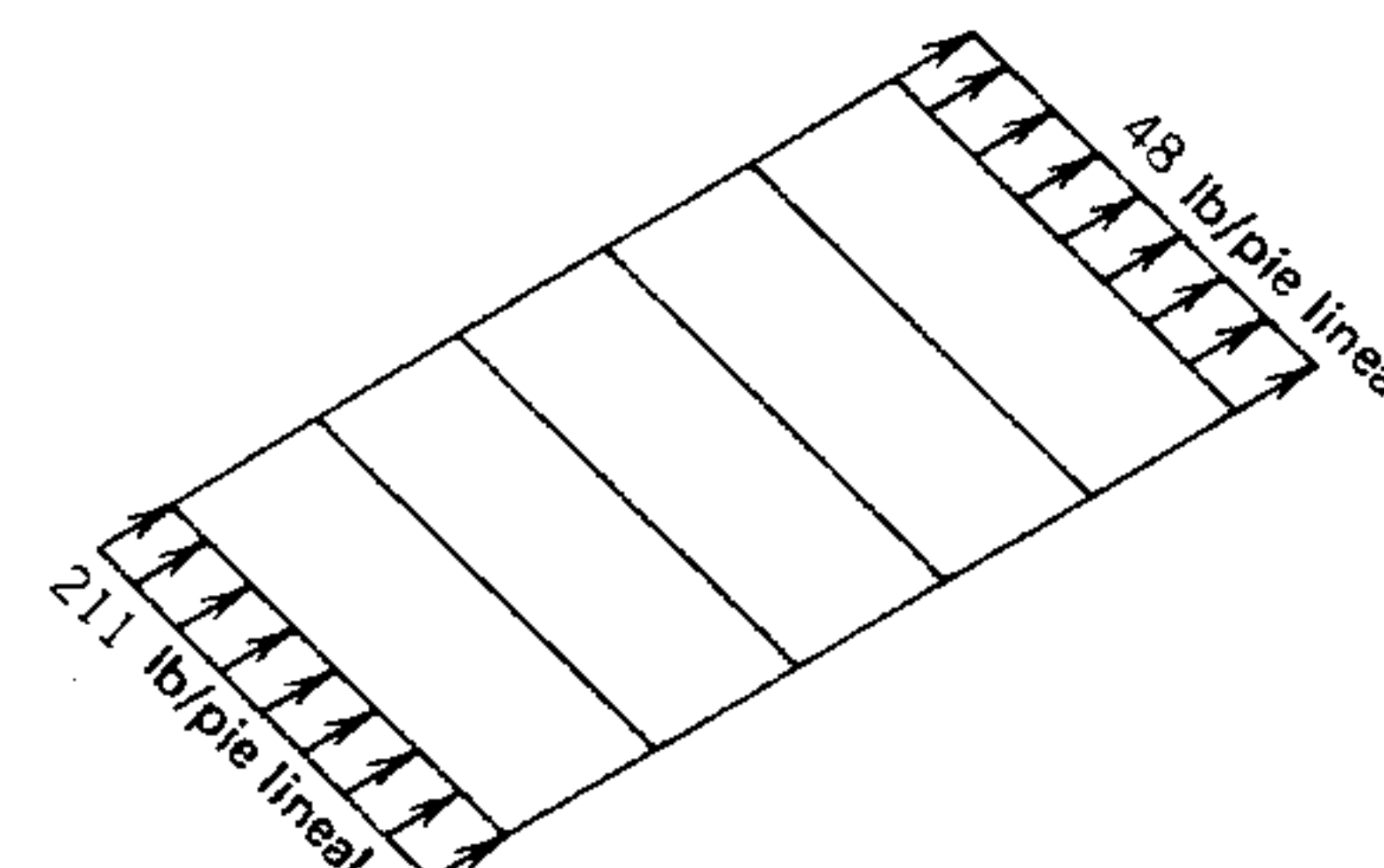
3. Seleccionar los coeficientes de presión de velocidad ( $K_z$ ) de la tabla 8.3:



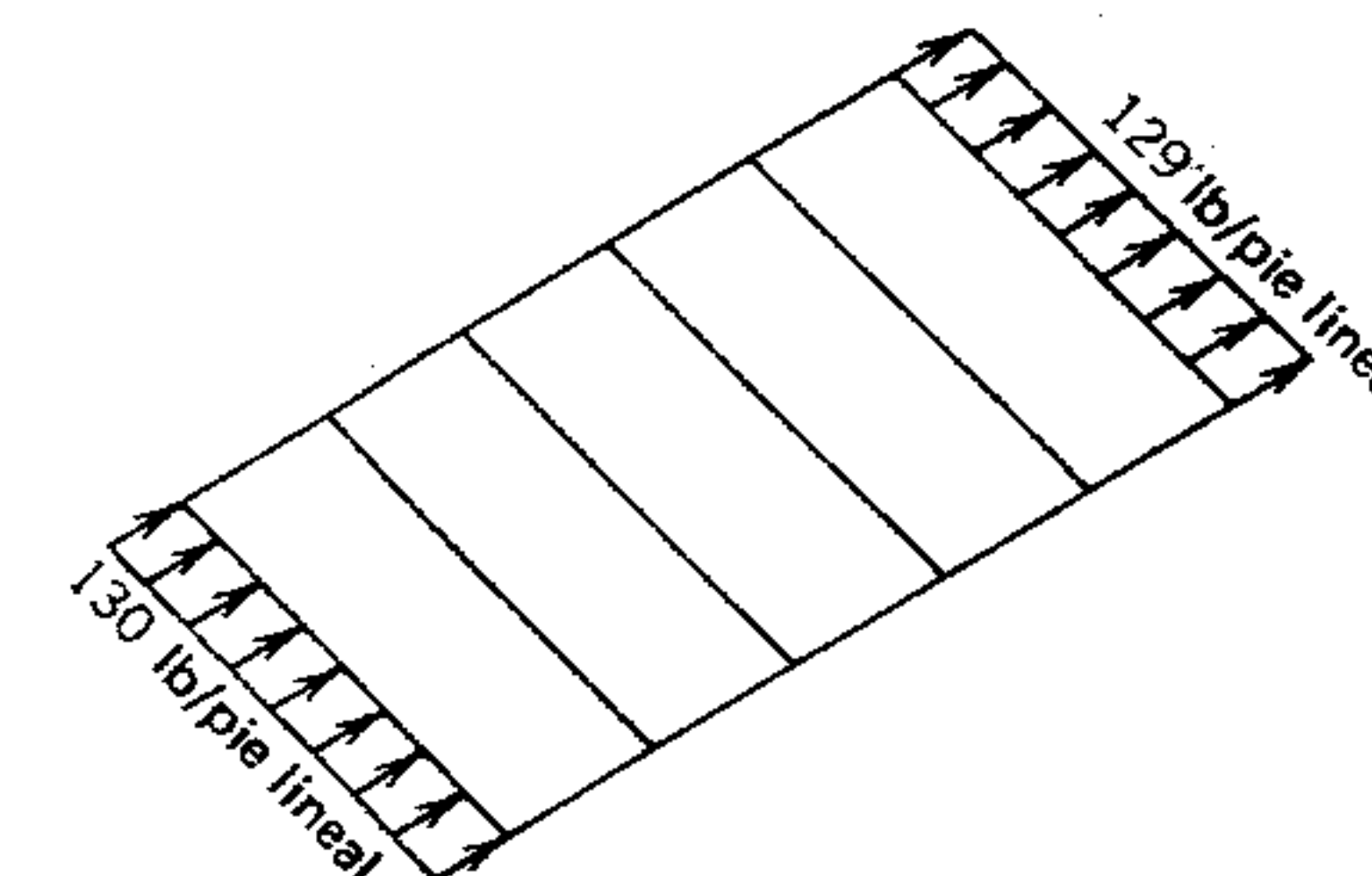
a) Fuerzas externas más succión interna. Viento transversal.



b) Fuerzas externas más presión interna. Viento transversal.



c) Fuerzas externas más succión interna. Viento longitudinal.



d) Fuerzas externas más presión interna. Viento longitudinal.

Figura 8.22 Cargas de diafragma, ANSI.

$$0 - 15 \text{ pies, } K_z = 0.80$$

$$15 - 20 \text{ pies, } K_z = 0.87$$

$$h = 26 \text{ pies, } K_h = 0.94 \text{ (altura media del techo)}$$

4. Calcular la presión de velocidad del viento para cada rango de altura, usando la fórmula  $q_z = 0.00256K(V)^2$ . Para cada rango de altura, el valor  $0.00256 [1.05(95)]^2 = 25.47$  permanece constante; por lo tanto,

$$0 - 15 \text{ pies, } q_z = 25.47(0.80) = 20.38 \text{ lb/pie}^2$$

$$15 - 20 \text{ pies, } q_z = 25.47(0.87) = 22.16 \text{ lb/pie}^2$$

$$h = 26 \text{ pies, } q_h = 25.47(0.94) = 23.94 \text{ lb/pie}^2$$

5. Seleccionar el factor de  $d$ , ráfaga de la tabla 8.4, usando una altura de 26 pies.

$$G_h = 1.27$$

6. Determinar el coeficiente de presión interna y calcular la presión interna que se usará para todas las alturas (sólo hay aberturas menores en el edificio).

$$GC_{pi} = \pm 0.25$$

$$p = GC_{pi} q_h = \pm 0.25(23.94)$$

$$= \pm 5.99; \text{ usar } \pm 6.0 \text{ lb/pie}^2$$

7. Seleccionar los coeficientes de presión exter-

$$\text{Muro de barlovento, } C_p = 0.8$$

$$\text{Muro de sotavento, } L/B = 64/112 < 1.0$$

$$C_p = -0.5$$

$$\text{Techo de barlovento, } h/L = 26/64 = 0.41$$

$$\theta = \arctan 12/32 \approx 20^\circ$$



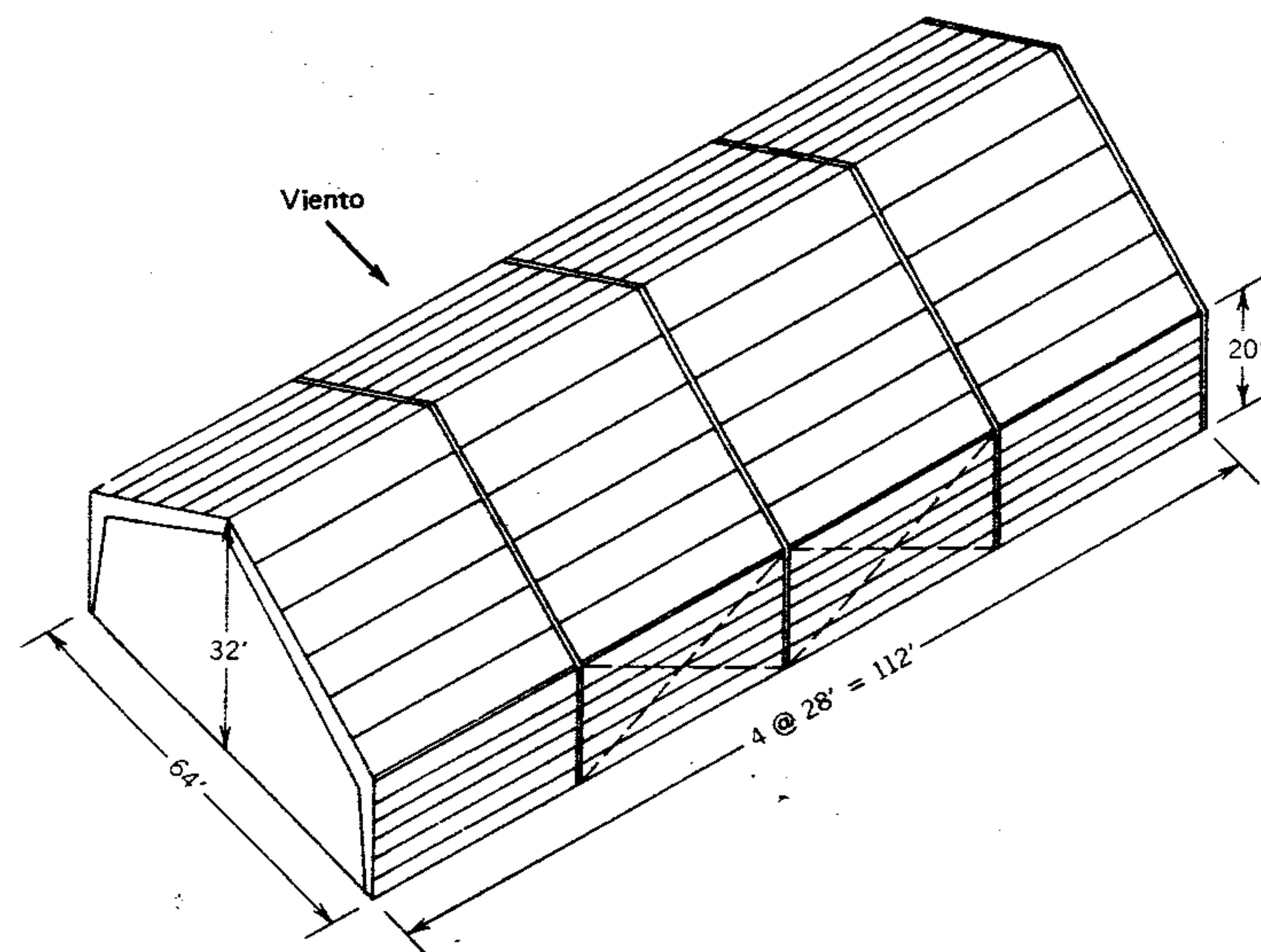


Figura 8.23 Ejemplo 2: Marcos a dos aguas.

Interpolando entre 0.2 y -0.75,

$$C_p = 0.2 + \left[ \frac{0.41 - 0.30}{0.2} \right] (-0.95) = -0.32$$

Techo a sotavento,  $C_p = -0.7$

8. Calcular las presiones de diseño para las fuerzas externas para cada segmento.

Muro a barlovento

$$0-15 \text{ pies, } = 20.38(1.27)(0.8) = 20.71 \text{ lb/pie}^2$$

$$15-20 \text{ pies, } = 22.16(1.27)(0.8) = 22.51 \text{ lb/pie}^2$$

Muro a sotavento

$$p = 22.16(1.27)(-0.5) = -14.07 \text{ lb/pie}^2$$

Techo a barlovento

$$p = 23.94(1.27)(-0.32) = -9.73 \text{ lb/pie}^2$$

Techo a sotavento

$$p = 23.94(1.27)(-0.7) = -21.28 \text{ lb/pie}^2$$

9. Combinar la presión externa para cada segmento determinado en el paso 8 con las presiones internas ( $\pm 6.0$ ) encontradas en el paso 6. Estas presiones se transfieren a los marcos a través de las vigas de fachada y los largueiros. Multiplicar las presiones combinadas por 28 pies, que es el espaciamiento entre los marcos. Trazar un esquema de la carga sobre el marco (figura 8.24). Los marcos se deben diseñar para tomar con seguridad cada uno de estos patrones de carga.

### Ejemplo 3. Un edificio de varios pisos

En la figura 8.25 se ilustra un edificio de oficinas no esencial de cuatro pisos, construido de marcos de

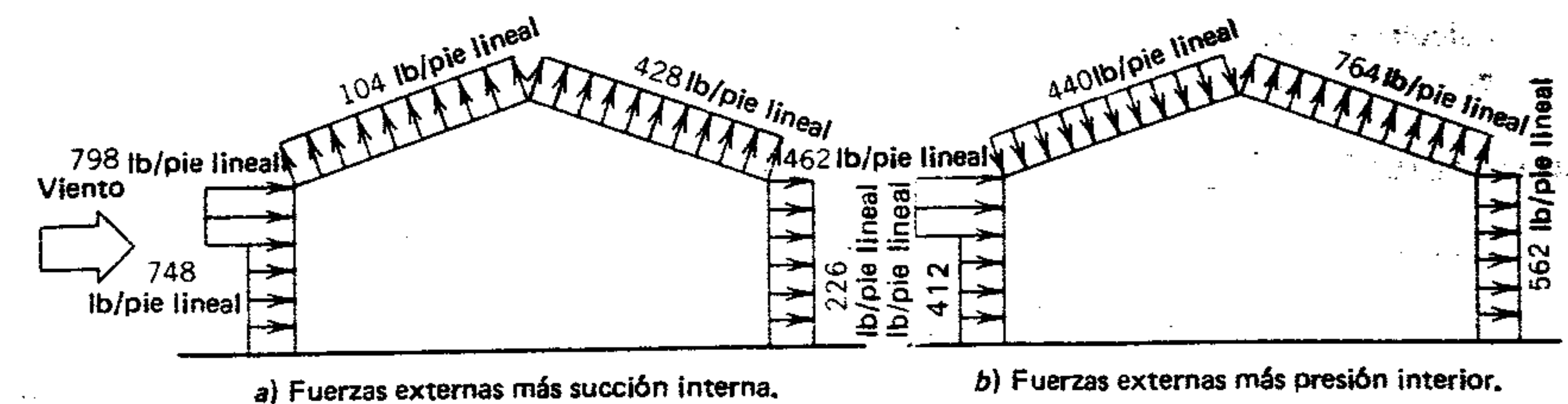


Figura 8.24 Cargas de viento sobre marcos a dos aguas.

acero situados sobre líneas reticulares. La envoltura del edificio está constituida por paneles de muros con ventanas fijas, que van de piso a piso. En cada piso y a nivel del techo se desarrollan diafragmas. Este no se considera un edificio sensible al viento. Está situado en un área de Exposición C, en

Salt Lake City, Utah. Investigar solamente el viento transversal.

- a) Calcular la carga del diafragma en el cuarto piso usando el UBC de 1982.

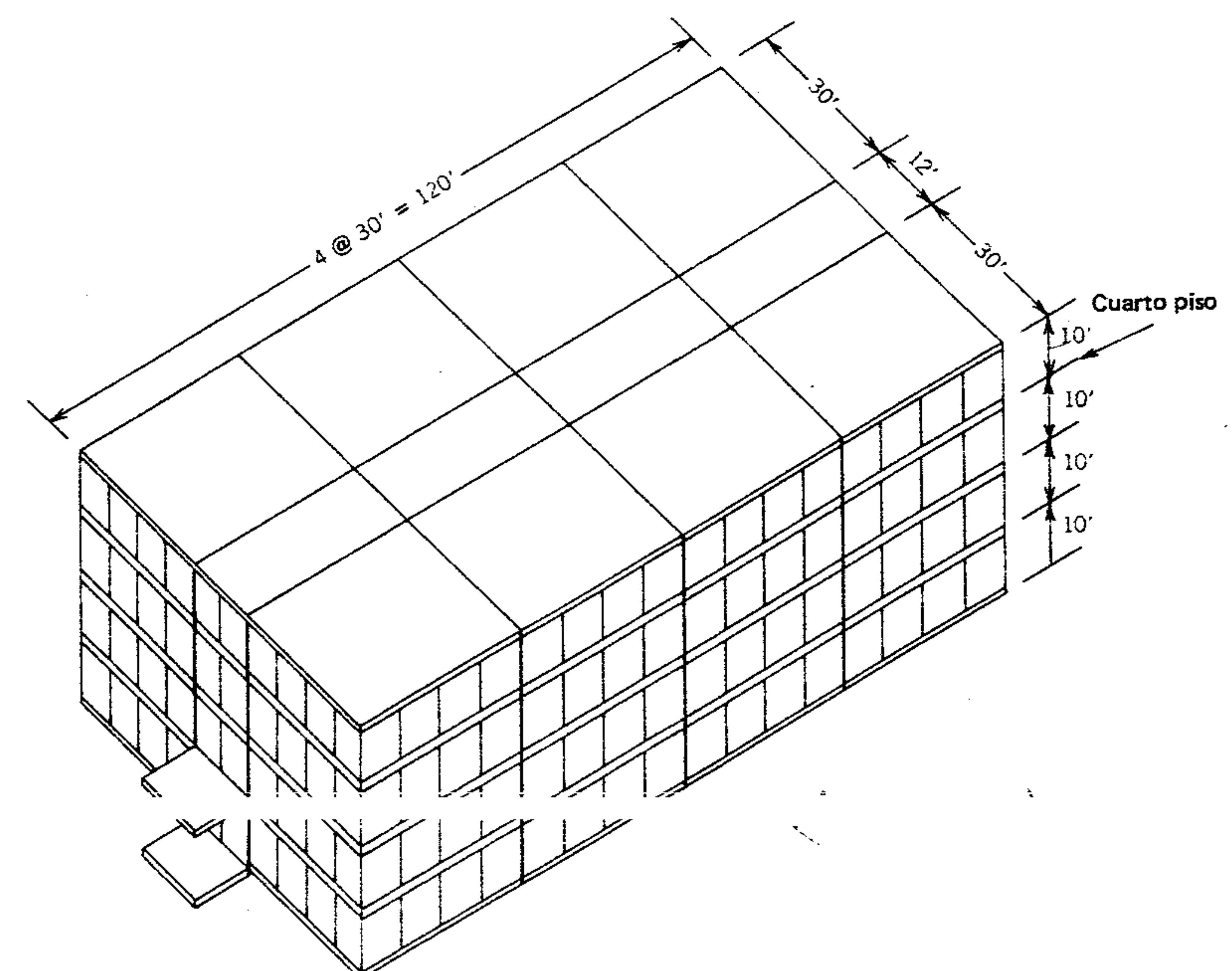


Figura 8.25 Ejemplo 3: Edificio de varios pisos.



- b) Calcular la carga del diafragma en el cuarto piso usando ANSI A58.1-1982.

**Solución a (UBC)**

- a) Determinar la velocidad básica del viento en la figura 8.15.

$$V = 70 \text{ mph}$$

- b) Seleccionar la presión de estancamiento en la tabla 8.5a.

$$q_s = 13 \text{ lb/pie}^2$$

- c) Seleccionar el coeficiente combinado de altura, exposición y ráfaga de la tabla 8.5b.

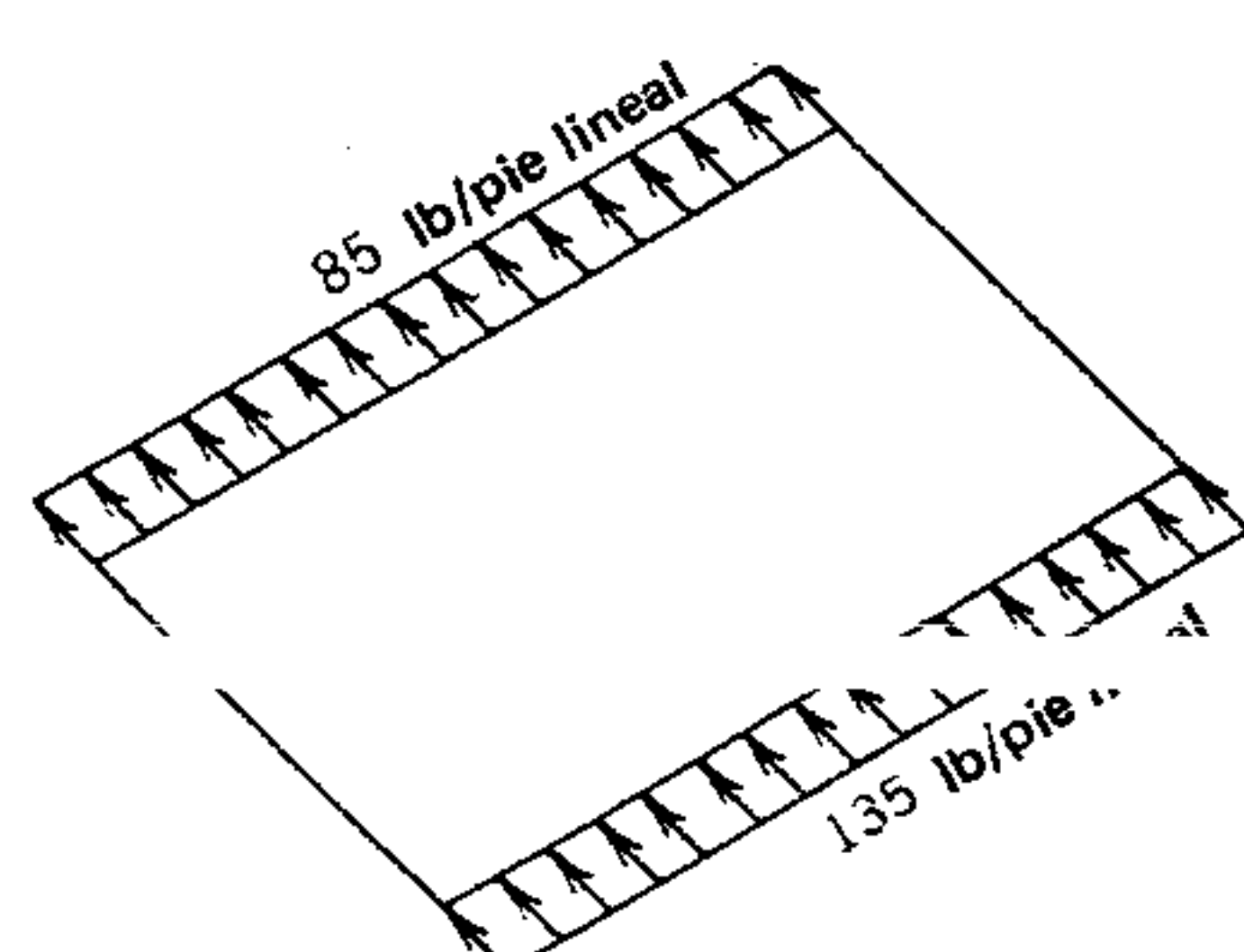
$$C_e = 1.3$$

- d) Determinar el factor de importancia (para una instalación no esencial), tabla 8.2.

$$I = 1.0$$

- e) Determinar los coeficientes de presión para los diafragmas, en la figura 8.5c.

Muro a barlovento,  $C_q = 0.8$  hacia adentro  
Muro a sotavento,  $C_q = 0.5$  hacia afuera



a) Cargas del UBC.

- f) Calcular las presiones sobre los muros.

$$\text{Muro a barlovento, } p = 1.3(0.8)13(1.0) = 13.52 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Muro a sotavento, } p = 1.3(0.5)13(1.0) = 8.45 \text{ lb/pie}^2$$

- g) Calcular la carga del diafragma multiplicando las presiones por la altura de muro de 10 pies.

$$\text{Muro a barlovento, } w = 13.52(10) \approx 135 \text{ lb/pie lineal}$$

$$\text{Muro a sotavento, } w = 8.45(10) = 84.5 \text{ lb/pie lineal}$$

Esta carga de diafragma se ilustra en la figura 8.26a.

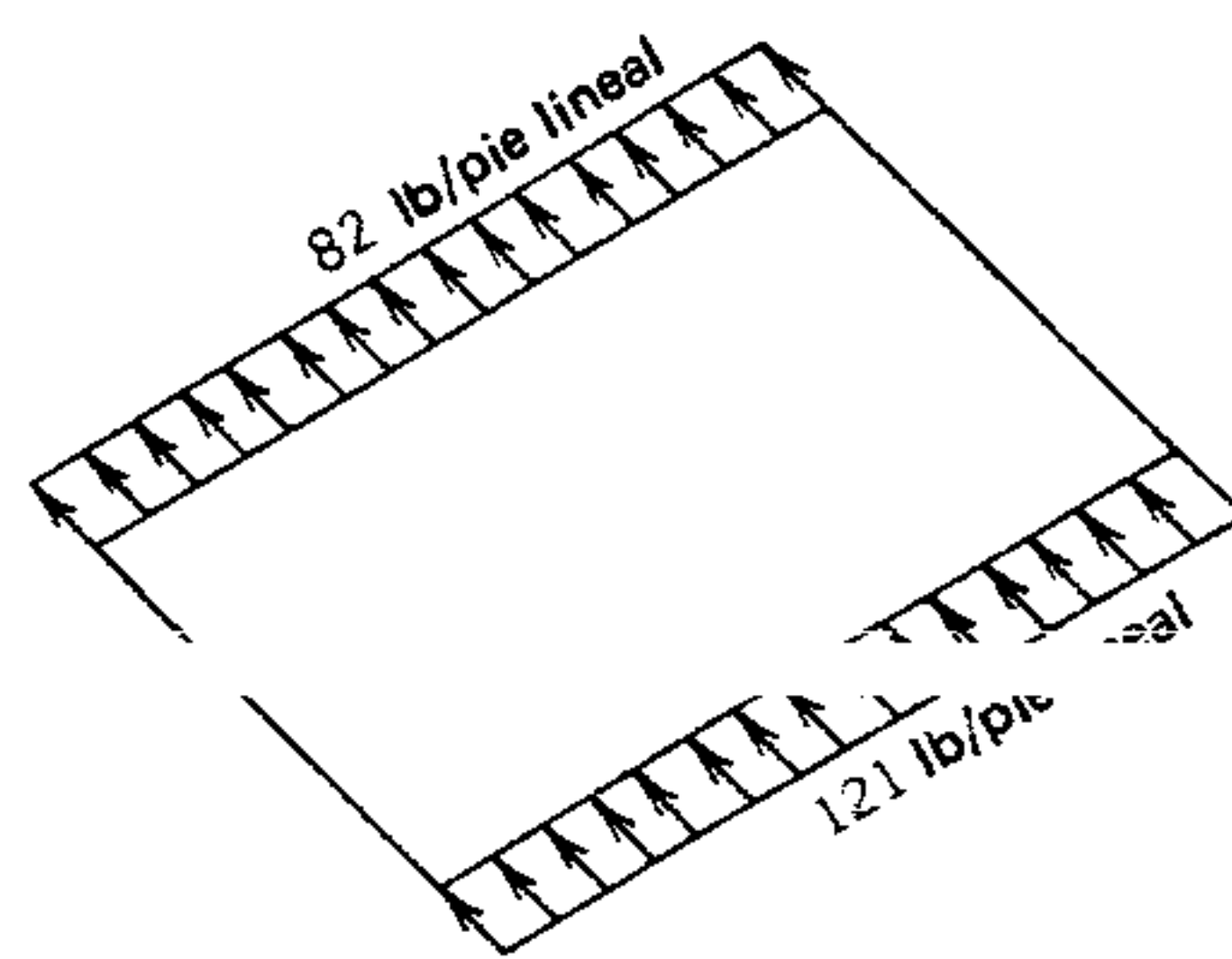
**Solución b (ANSI)**

- a) Determinar la velocidad básica del viento en la figura 8.15.

$$V = 70 \text{ mph}$$

- b) Determinar  $I$  en la tabla 8.2. El edificio de oficinas tiene una Categoría  $I$  de ocupación; por lo tanto,

$$I = 1.0$$



b) Cargas del ANSI.

Figura 8.26 Ejemplo 3: Cargas de diafragma de cuarto piso.

- c) Calcular el coeficiente de exposición a la presión de la velocidad de la tabla 8.3. La altura que se investiga va de la mitad del tercer piso (25 pies) a la mitad del cuarto piso (35 pies). Usar 30 pies para el muro a barlovento.

$$z = 30 \text{ pies, } K_z = 0.98$$

$$h = 40 \text{ pies, } K_z = 1.06$$

- d) Calcular las presiones de velocidad.

$$q_z = 0.00256(0.98)[1.0(70)]^2 = 12.29 \text{ lb/pie}^2$$

$$q_h = 0.00256(1.06)[1.0(70)]^2 = 13.30 \text{ lb/pie}^2$$

- e) Seleccionar los coeficientes de ráfaga de la tabla 8.4.

$$G_h = 1.23$$

- f) Determinar los coeficientes de presión para ambos muros en la figura 8.16.

$$\text{Muro a barlovento, } C_p = 0.8$$

$$\text{Muro a sotavento, } C_p = -0.5$$

- g) Calcular la presión sobre los muros.

$$\text{Muro a barlovento, } p = 12.29(1.23)(0.8) = 12.09 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Muro a sotavento, } p = 13.30(1.23)(-0.5) = -8.18 \text{ lb/pie}^2$$

- h) Calcular la carga del diafragma multiplicando las presiones por los 10 pies de altura de muro.

$$\text{Muro a barlovento, } w = 12.09(10) \approx 121 \text{ lb/pie lineal}$$

$$\text{Muro a sotavento, } w = -8.18(10) \approx -82 \text{ lb/pie lineal}$$

Esta carga del diafragma se ilustra en la figura 8.26b.

**PROBLEMAS**

1. Hacer de nuevo el ejemplo 1, figura 8.17, con los siguientes cambios: la armadura cubre un claro

de 120 pies, la altura de los aleros es de 35 pies, y la localización del edificio es Tampa, Florida. Calcular las cargas a lo largo de los aleros en el sentido transversal solamente.

- a) Usar ANSI A58.1-1982. (Las respuestas se dan en el apéndice G).  
b) Usar UBC 1982. (Las respuestas se dan en el apéndice G).

2. Hacer de nuevo el ejemplo 2, figura 8.23, de acuerdo con las especificaciones UBC 1982.  
3. El edificio es el mismo que el utilizado en el ejemplo 3, figura 8.25.

- a) Calcular la carga del diafragma en el techo conforme a las especificaciones de ANSI A58.1-1982.  
b) Calcular la carga del diafragma en el techo conforme a las especificaciones de UBC 1982.

**8.8 SISMOS: INTRODUCCIÓN**

En todas partes ocurren sismos varias veces al día; no obstante y por fortuna la mayoría de ellos son pequeños y sólo los registran los instrumentos. La ocurrencia de sismos no está uniformemente distribuida en el globo terrestre. Ocurren principalmente en franjas o líneas que siguen rutas identificables sobre la superficie de la Tierra. La geología ha obtenido evidencias convincentes de que la corteza terrestre está compuesta por piezas o placas irregulares que están "flotando" y, por tanto, moviéndose constantemente la una respecto a la otra. Aunque la tasa de movimiento de estas placas es pequeña, es medible y significativa cuando se miden en tiempo geológico. Se cree que el movimiento de estas placas es la causa principal de los terremotos.

Dos placas adyacentes moviéndose la una respecto a la otra pueden causar una elevación de esfuerzos en la estructura de la corteza. Cuando estos esfuerzos son lo suficientemente grandes, se produce una fractura que se reconoce como sismo. Los científicos aseguran que el 90 por ciento de los sismos ocurre en la cercanía de los límites de las placas.

Algunos sismos son de magnitud o intensidad suficiente para causar daños severos, e incluso el



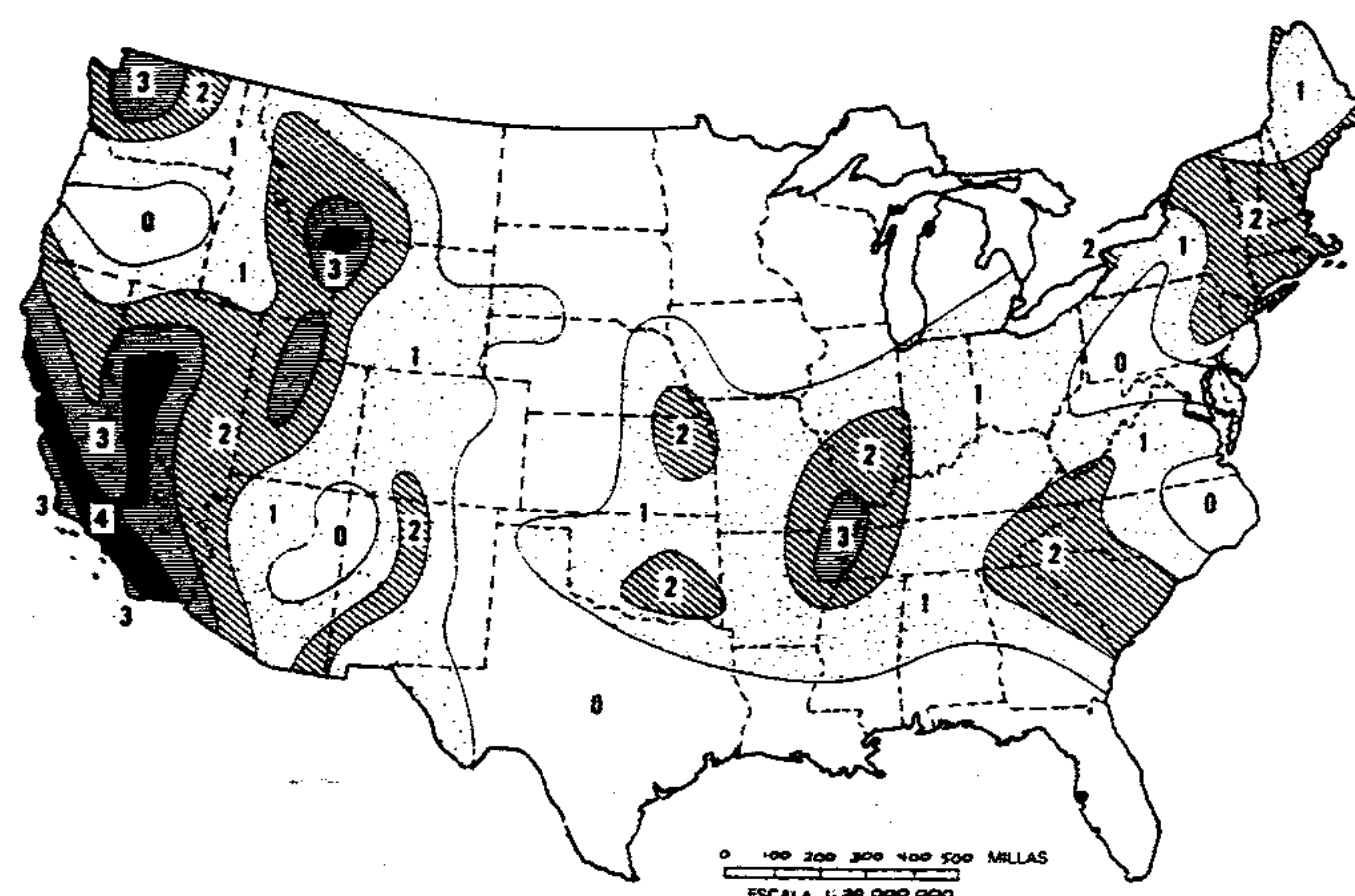


Figura 8.28 Mapa de zonas sísmicas contiguas en 48 estados de Estados Unidos. (Esta figura se reproduce con autorización del American National Standard Minimum Design Loads for Building and Other Structures, ANSI A58.1-1982, copyright 1982 por el American National Standards Institute, 1430 Broadway, Nueva York, NY 10018.)

materiales y elementos estructurales, mientras que ANSI A58.1 es una norma y trata principalmente cargas, y se refiere a materiales y estructuras sólo en la medida en que influyen en las cargas.

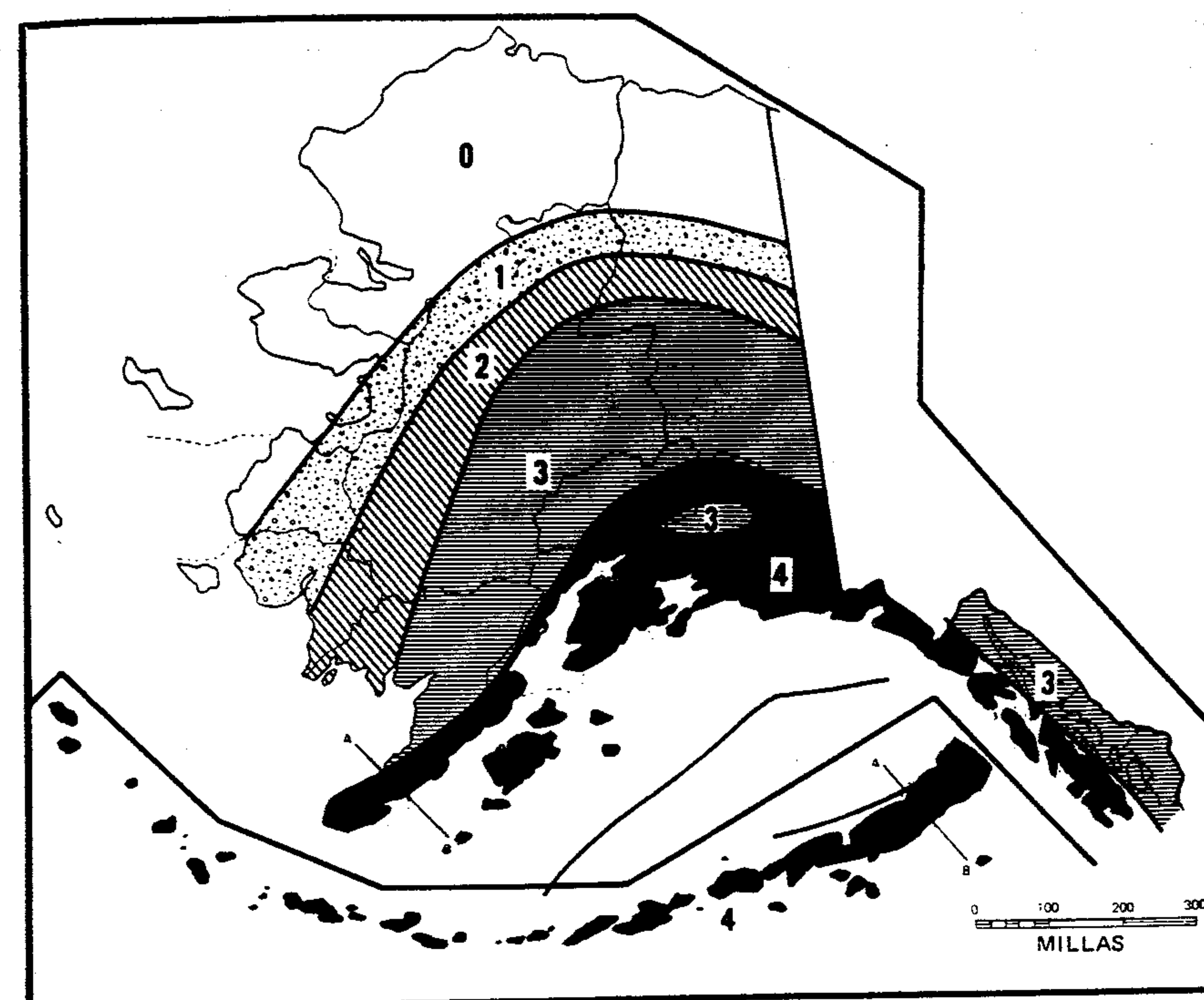
Las especificaciones sísmicas tanto del UBC como de ANSI A58.1-1982 se basan en gran medida en recomendaciones de la Asociación de Ingenieros Estructurales de California (SEAOC)<sup>3</sup> y el Consejo de Tecnología Aplicada (ATC).<sup>4</sup> Sin embargo, hay suficientes diferencias entre las especificaciones del UBC y ANSI A58.1 como para necesitarse consultar ambos. ANSI parece considerar que partes del UBC son demasiado conserva-

doras o que se requiere pericia no disponible en las áreas sísmicas menos críticas de los Estados Unidos.

El procedimiento general del diseño es primero calcular el cortante en la base, el cual es la carga lateral total sobre el edificio. Luego este esfuerzo cortante en la base se distribuye entre los elementos verticales y horizontales de acuerdo con reglas específicas. Una vez determinada la carga en los elementos, su diseño se lleva a cabo usando procedimientos normales, es decir, ya sea el diseño (elástico) de esfuerzo de trabajo usando el incremento de un tercio en el esfuerzo permisible (en algunos casos) o en el diseño de resistencia última usando 1.3 como factor de carga.

#### 8.10 CARGA LATERAL EQUIVALENTE O FUERZA CORTANTE EN LA BASE

La base para establecer la carga lateral estática equivalente es la segunda ley del movimiento de Newton, es decir,



ALASKA

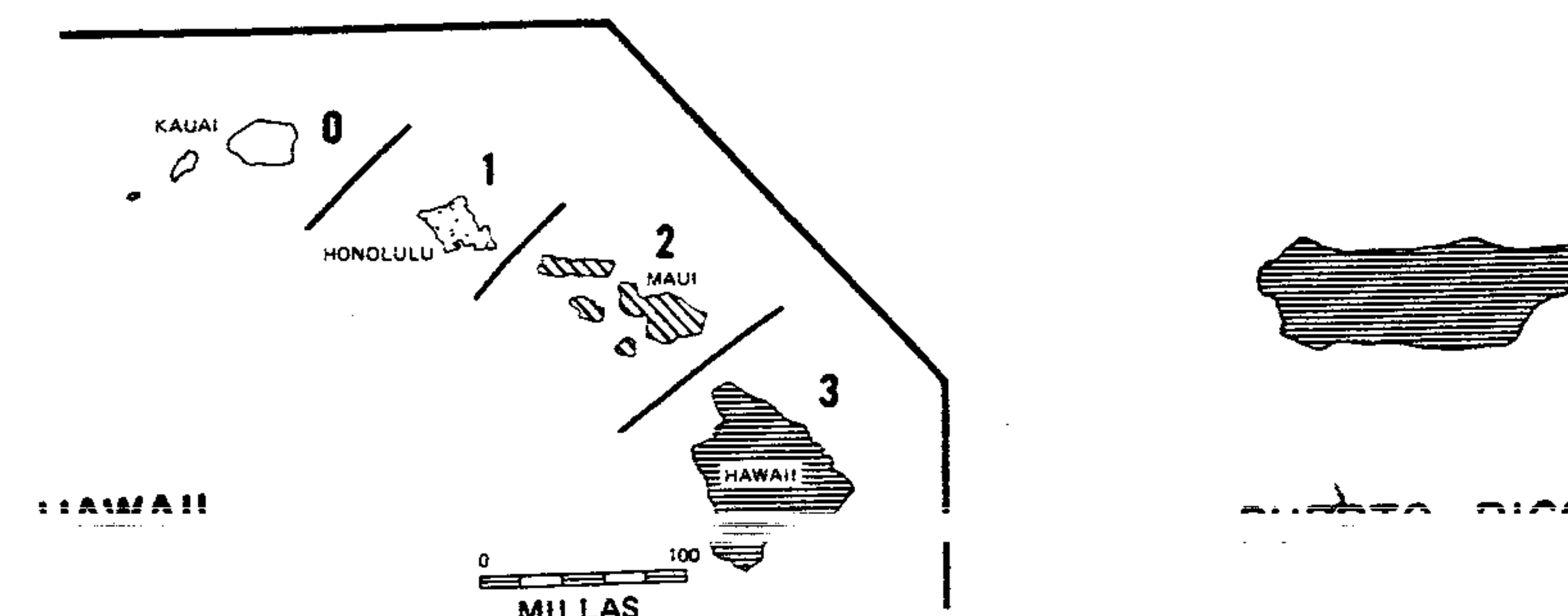


Figura 8.29 (Esta figura se reproduce con autorización del American National Standard Minimum Design Loads for Building and Other Structures, ANSI A58.1-1982, copyright 1982 por el American National Standards Institute, 1430 Broadway, Nueva York, NY 10018.)

<sup>3</sup> Seismology Committee of the Structural Engineers Association of California, *Recommended Lateral Force Requirements and Commentary* (San Francisco: SEAOC, 1980).

<sup>4</sup> Applied Technology Council, *Tentative Provisions for the Development of Seismic Regulations for Buildings* (Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1975).



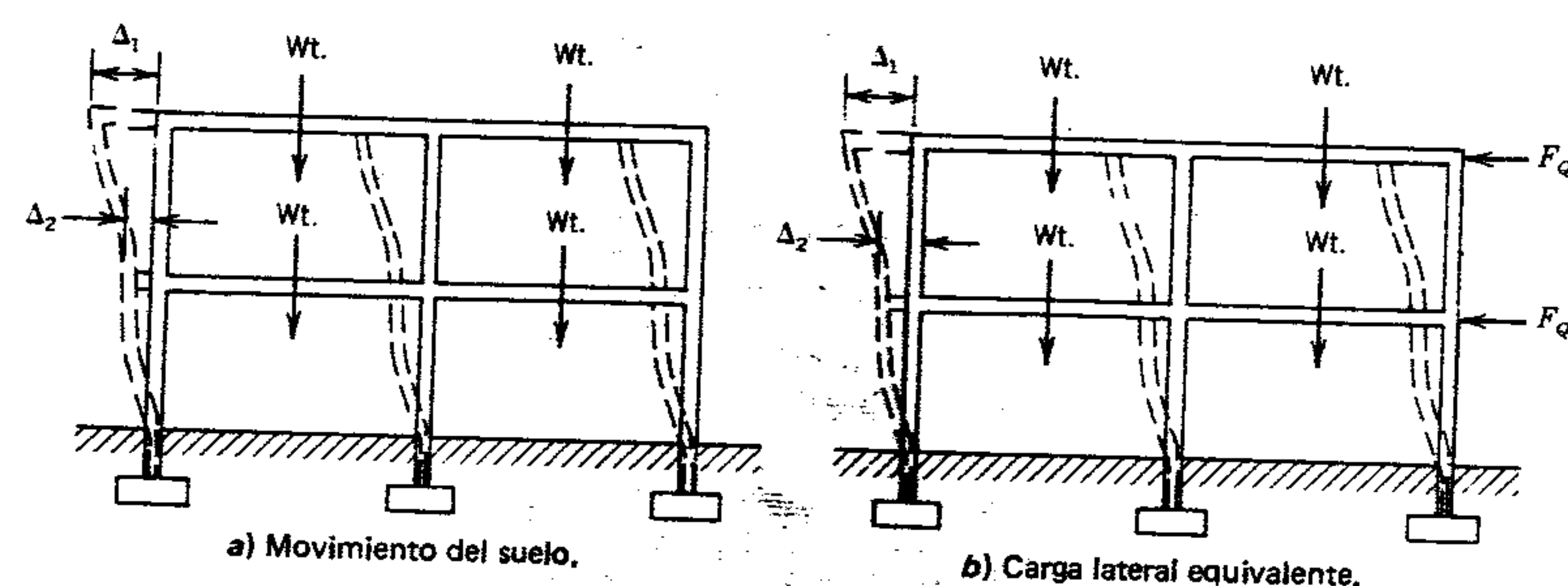


Figura 8.30 Deflexión igual de una estructura.

$$F = ma$$

donde  $F$  es la fuerza resultante que hace que la masa ( $m$ ) tenga una aceleración " $a$ ". La masa se puede obtener dividiendo el peso entre la aceleración debida a la gravedad, o sea aproximadamente 32 pies por segundo cuadrado. Expresado en forma de ecuación

$$F = \left( \frac{W}{g} \right) a$$

Es conveniente cambiar esta ecuación a

$$F = \left( \frac{a}{g} \right) W$$

En el diseño sísmico, el símbolo  $F$  es la carga lateral equivalente estática de un edificio o de un elemento de edificio con un peso  $W$ . La cantidad  $(a/g)$  se denomina *coeficiente sísmico*. Una estructura infinitamente rígida sujeta a un movimiento sísmico con una aceleración de 16 pies/seg<sup>2</sup> tendría un factor sísmico de  $16/32 = 0.5$ . Nótese que el coeficiente sísmico no tiene unidades. Se define como un número adimensional que, al multiplicarlo por el peso, produce una carga lateral estática equivalente.

Al llegar al coeficiente sísmico, tanto el UBC como ANSI A58.1 estipulan que se tomen en consideración la probabilidad de ocurrencia de un sis-

mo intenso, el tipo de ocupación del edificio, la flexibilidad de la estructura y las características físicas del lugar. Usando símbolos para representar estas consideraciones, el coeficiente sísmico se ve como el producto de un número de coeficientes sin unidades, como sigue:

$$\frac{a}{g} = ZIKCS$$

y la forma final para el cortante en la base, o fuerza lateral equivalente total es

$$V = ZIKCSW$$

Estos términos, es decir,  $Z$ ,  $I$ ,  $K$ ,  $C$  y  $S$ , se denominan *factores de fuerza sísmica*, y se definen en la tabla 8.6.

### 8.11 FACTORES DE FUERZA SÍSMICA

Las definiciones del factor de fuerza sísmica son las mismas en el UBC y ANSI A58.1-1982, como el nivel de valores para cada factor. Sin embargo, se necesita explicar varias diferencias. Aunque las especificaciones del UBC y ANSI A58.1 se aplican a edificios de todos tipos de materiales y construcción, aquí se tratarán con detalle sólo los edificios a base de marcos de acero.

Tabla 8.6 Factores de fuerza sísmica.

1982 UBC	ANSI A58.1-1982
Factor de zona $Z$	
Valores entre 0 y 1.0 establecidos por zonas que aparecen en el mapa del UBC.	Valores entre $\frac{1}{8}$ y 1.0 establecidos por zonas que aparecen en el mapa de ANSI.
Factor de importancia $I$	
Valores entre 1 y 1.5 dependiendo de la ocupación y la importancia del edificio.	
Factor de fuerza horizontal $K$	
Valores entre 0.67 y 1.33 basando en el sistema estructural principal y la confiabilidad de la estructura.	
Coeficiente de cortante en la base $C$	
Valor de la fórmula, $C = \frac{1}{15\sqrt{T}}$ , pero no más que 0.12. Variación menor en el cálculo de $T$ , período de vibración del edificio.	
Factor de resonancia del terreno y la estructura $S$	Factor del suelo $S$
Valores que van de 1.0 a 1.5 dependiendo de la relación del período de la estructura al período del suelo.	Valores de 1.0, 1.25 o 1.5 dependiendo de las características descriptivas del suelo.
Peso del edificio $W$	
Peso muerto total del edificio más el 25 por ciento de cargas vivas de almacenes más (en algunos casos) parte de la carga de nieve.	



**Factor de Zona Z.** Tanto los mapas del UBC (figura 8.27) como los de ANSI (figuras 8.28 y 8.29) muestran cinco zonas de riesgo sísmico para los Estados Unidos. Existen muchas similitudes, pero hay diferencias en algunos límites de zonas, sobre todo en el oeste de Estados Unidos. Los mapas de ANSI son probablemente los más exactos en términos de límites de riesgo real, mientras que los mapas del UBC reflejan ajustes de límites como resultados de la acción política estatal. Los siguientes son valores de Z para cada zona:

	UBC	ANSI
Zona 0	0	$\frac{1}{8}$
Zona 1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$
Zona 2	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
Zona 3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
Zona 4	1	1

El UBC supone que no hay peligro en la zona 0, mientras que ANSI A58.1-1982 le asigna un valor Z de  $\frac{1}{8}$ . Un examen más estrecho revelará que esto tiene poco efecto sobre los edificios de acero. Las especificaciones de ANSI A58.1-1982 no se aplican a edificios localizados en la zona 0, excepto dos secciones que tratan sobre conexiones del sistema resistente lateral.

**Factor de Importancia I.** Las estipulaciones de UBC 1982 y ANSI A58.1-1982 concuerdan en que los edificios clasificados como instalaciones esenciales deben tener un valor I de 1.5. Sin embargo, ANSI A58.1 es más específico al identificar tipos de ocupaciones que son esenciales (véase la tabla 8.2). UBC y ANSI A58.1 concuerdan en la estipulación de que edificios en que se espera que más de 300 personas ocupen un salón o área deben tener un valor I de 1.25. A todos los otros edificios se asigna un

**Factor de Fuerza Horizontal K.** Este factor representa la efectividad del sistema estructural e incluye la consideración tanto del sistema transmisor de cargas laterales como el sistema soportante de carga de gravedad. Hay algunas pequeñas diferen-

cias entre las estipulaciones de ANSI A58.1-1982 y UBC 1982 cuando se investigan todos los materiales y sistemas. No obstante, no hay diferencias cuando la investigación está limitada a edificios de marcos de acero.

$K = 0.67$  si el edificio es de una construcción "especial" de marcos de acero tanto para cargas de gravedad como laterales. El término "especial" se refiere a marcos con conexiones *dúctiles resistentes al momento*, una conexión diferente de la conexión regular resistente al momento (véase la sección 10.8 para un estudio detallado y un ejemplo ilustrativo). Estas conexiones tienen características de alta absorción de energía, lo cual es deseable en la mayoría de los casos.

Si se usan conexiones ordinarias resistentes al momento y el marco de acero es esencialmente completo para cargas de gravedad y laterales, entonces el valor K se incrementa a 1.0. Este mismo valor se usa para el marco resistente al momento, esencialmente completo, para cargas de gravedad, que tiene marcos arriostrados o muros cortantes para el sistema de carga lateral.

Los marcos de acero con conexiones flexibles (no resistentes a momentos) requieren arriostramiento o muros cortantes para el desarrollo de las cargas laterales. Sin embargo, el valor K es el mismo de 1.00.

También es posible usar un sistema estructural dual para cargas laterales. El marco de acero debe ser esencialmente completo para cargas de gravedad y, además, las cargas laterales deben ser resistidas ya sea por una combinación de marcos especiales (conexiones dúctiles resistentes al momento) y arriostramiento, o bien, una combinación de marcos especiales y muros cortantes. Con estos sistemas duales, el valor K es 0.80. No obstante, debe notarse que el arriostramiento o los muros cortantes se deben diseñar para desarrollar el cortante en la base completo ( $V = ZIKCSW$ ) usando un valor de 0.80 y, además, los marcos dúctiles resistentes a momento se deben diseñar para desarrollar el 25 por ciento de este mismo cortante en la base. Los marcos especiales en estos casos vienen a ser lo que se denomina sistema "de respaldo".

En edificios en que el marco estructural es incompleto para cargas de gravedad (implicando mu-

ros de carga), tanto ANSI como UBC estipulan  $K = 1.33$ .

Otra diferencia más entre las estipulaciones de ANSI A58.1-1982 y UBC 1982 es digna de mencionarse. En las zonas 3 y 4, el UBC limita la altura de los edificios a 160 pies para todos los sistemas, excepto aquellos que incluyen conexiones dúctiles resistentes al momento; ANSI no.

**Coefficiente de Cortante en la Base C.** Este factor considera la rigidez del edificio actuando como una unidad. Tanto ANSI A58.1-1982 como UBC 1982 contienen la misma fórmula para calcular C, es decir,

$$C = \frac{1}{15\sqrt{T}} \geq 0.12$$

donde T es el período elástico fundamental de vibración del edificio o estructura en el sentido que se esté considerando.

No hay una manera sencilla o directa para calcular con exactitud este período de vibración. Tal vez el procedimiento que ofrece mayor credibilidad es uno basado en análisis dinámico, de donde se extraen los valores característicos. Sin embargo, incluso este método necesita supuestos que raras veces se encuentran en un edificio real.

El valor de T también se puede calcular mediante procedimientos basados en análisis estático. Sin embargo, se deben calcular también aquí los desplazamientos de piso (deflexión lateral), y esto requiere supuestos básicos que tienen influencia significativa en la exactitud de los resultados. Tanto el UBC como el ANSI A58.1 indican una preferencia por la fórmula de Rayleigh para calcular T, es decir,

$$T = 2\pi \sqrt{\left( \sum w_i \delta_i \right) / \left( g \sum f_i \delta_i \right)}$$

En la figura 8.31 se explican los términos de esta fórmula.

Un edificio consiste en pesos que se suponen concentrados en el centro de cada piso y en el techo ( $w_1, w_2, w_3, \dots$ ). Se supone o estima un es-

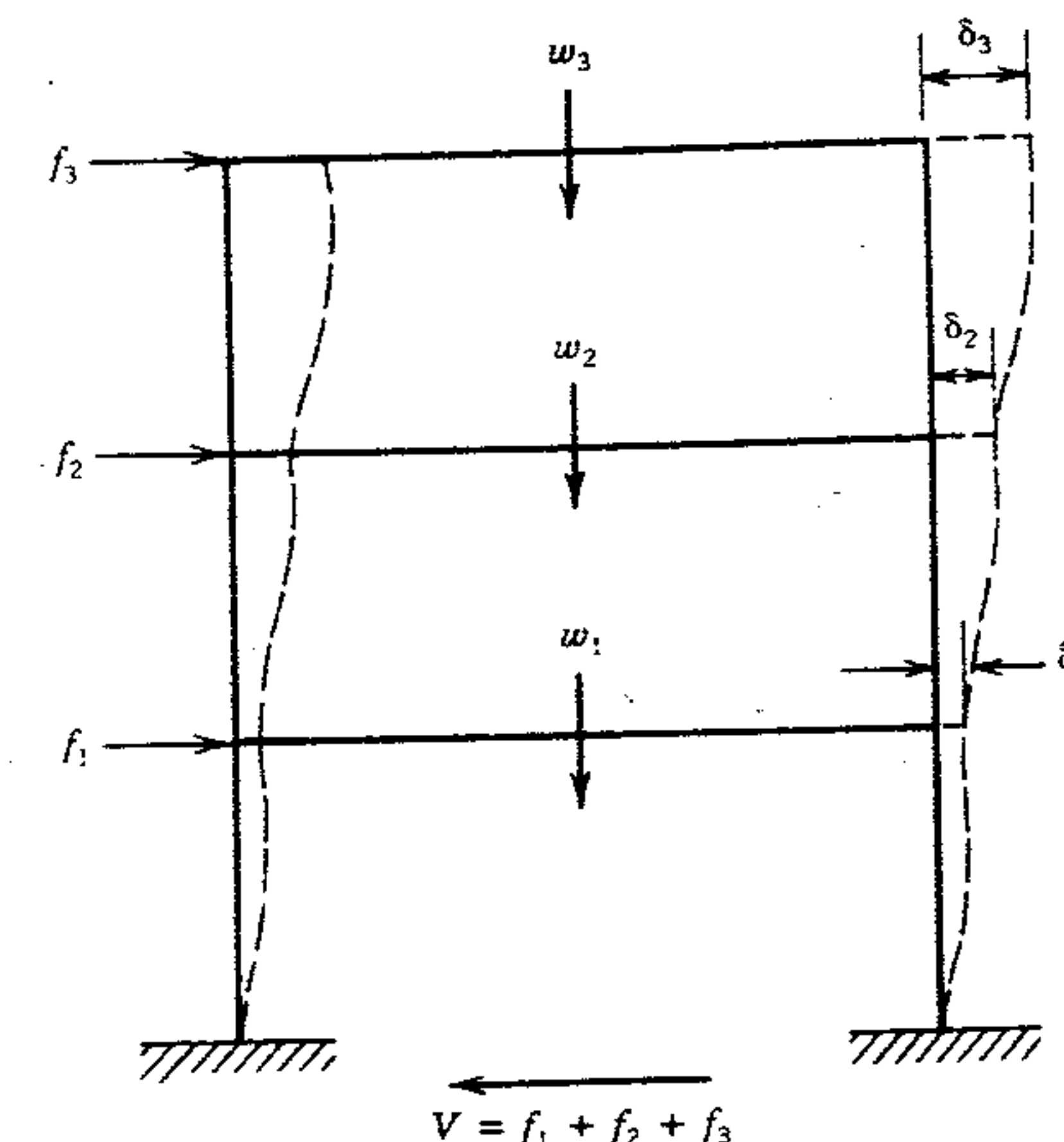


Figura 8.31 Fuerzas y deflexiones para calcular T.

fuerzo cortante en la base (V). Este cortante en la base se redistribuye en cada piso ( $f_1, f_2, f_3, \dots$ ) de acuerdo con los procedimientos descritos en la sección 8.13. Estas fuerzas laterales hacen que la estructura se deflexione en cada nivel de piso ( $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ ). Debe notarse en la fórmula de Rayleigh que el término g es la aceleración debida a la gravedad; si se usan 384 pulg. por  $\text{seg}^2$  como valor para g, entonces  $\delta_i$  se debe medir en pulgadas. Las unidades de peso y fuerza en la fórmula pueden ser libras o kips, pero deben ser consistentes.

La dificultad de aplicar esta fórmula es obvia, es decir, el valor de V se debe conocer de antemano. Por lo tanto, se usan otras fórmulas para obtener un valor aproximado y conservador de T. La fórmula de Rayleigh se usa luego como un refinamiento o comprobación de la idoneidad del primer valor estimado de T. Este método se usa en el ejemplo de la sección 8.13 siguiente.

La fórmula del ANSI A58.1-1982, válida para marcos de acero resistentes al momento que desarrolla la fuerza lateral total, es

$$T = 0.035 h_n^{3/4}$$

donde  $h_n$  es la altura en pies, desde la base hasta el techo.



El UBC 1982 tiene una versión un poco diferente de esta fórmula:

$$T = 0.10N$$

donde  $N$  es el número total de pisos. Sin embargo, debe señalarse que en el UBC se establece que esta fórmula se puede usar sólo si se usan marcos dúctiles resistentes a momento para desarrollar la fuerza lateral total. Si no, se puede usar la siguiente fórmula alternativa, también contenida en ANSI A58.1:

$$T = \frac{0.05h_n}{\sqrt{D}}$$

donde  $D$ , en el UBC 1982, es simplemente la dimensión de la planta de la estructura (en pies) en el sentido bajo consideración. En ANSI A58.1 1982 se establece que esta dimensión total se debe usar solamente para edificios con muros cortantes y edificios de marco de concreto reforzado. Si se usan muros cortantes o marcos arriostrados aislados, entonces  $D$  debe de ser la dimensión mayor de un muro cortante o marco arriostrado en el sentido considerado.

**Factor  $S$ .** ANSI A58.1-1982 denomina a  $S$  "Factor del Suelo", mientras que UBC 1982 define  $S$  como el factor de resonancia de la estructura y el suelo. Ambos documentos reconocen la necesidad de un factor que considera el efecto de las características del suelo sobre el cual estará desplantada la estructura específica, y que este factor debe ser igual o mayor que 1.0, pero no mayor que 1.5.

Además, el UBC especifica que si no se establecen datos geotécnicos para un lugar específico, entonces el valor de  $S$  se debe tomar como 1.5. Sin embargo, si se han usado datos geotécnicos para establecer el período característico del lugar ( $T_s$ ), entonces el valor de  $S$  se puede calcular como sigue:

$$\text{Cuando } \frac{T}{T_s} \leq 1.0, \quad S = 1.0 + \frac{T}{T_s} - 0.5\left(\frac{T}{T_s}\right)^2$$

$$\text{Cuando } \frac{T}{T_s} > 1.0, \quad S = 1.2 + 0.6\frac{T}{T_s} - 0.3\left(\frac{T}{T_s}\right)^2$$

En el UBC 1982 se especifica además que cuando se usen las fórmulas anteriores,  $T$  no puede ser menor que 0.3 seg. y que  $T_s$  se debe tomar entre 0.5 y 2.5 segundos.

La posición tomada por el ANSI es que no hay experiencia geotécnica suficientemente confiable a lo largo y ancho de los Estados Unidos para establecer  $T_s$ . Por lo tanto, ANSI A58.1 especifica tres perfiles descriptivos de suelo y asigna un valor  $S$  a cada uno. El suelo muy rígido o roca se clasifica como  $S_1$ , con un valor  $S$  de 1.0. Los suelos blandos y profundos se clasifican como  $S_3$ , con un valor  $S$  de 1.5, y  $S_2$  tiene un valor  $S$  de 1.2. (Véase ANSI A58.1-1982 para una descripción más detallada de la clasificación del suelo).

**Producto de Factores.** Tanto el UBC 1982 como el ANSI A58.1-1982 especifican que  $CS$  no debe ser mayor que 0.14. ANSI A58.1 va más allá, especifica que para el perfil de suelo  $S_3$  en zonas 3 y 4, el producto de  $C$  y  $S$  no debe exceder de 0.11. Además, ANSI A58.1 pone un límite superior de 0.29 sobre  $KCS$ , excepto para el perfil de suelo  $S_3$  en las zonas 3 y 4, donde  $KCS$  no debe exceder 0.23.

**Peso del Edificio  $W$ .** Ambos documentos especifican que el peso debe incluir tolerancias para divisiones móviles y que se debe incluir el 25 por ciento de la carga viva en el caso de almacenes. Se requiere aplicar el criterio para incluir partes de nieve o cualquier otro tipo de carga. Con frecuencia, los funcionarios locales de la construcción establecen sus propios requisitos para la inclusión de carga de nieve, para propósitos de diseño sísmico.

**Resumen.** Se ve que el procedimiento para calcular el "cortante en la base total" es un proceso empírico sujeto a reglas cambiantes establecidas por diversos reglamentos y autoridades asesoras de la construcción. Sin embargo, una vez establecido el cortante en la base, es necesario determinar qué parte de ese cortante en la base es desarrollado por cada elemento vertical y horizontal. Este procedimiento se puede comparar con aquel que determina las cargas sobre las vigas después de establecer las reacciones. La suma de las cargas desarrolladas

por cada elemento vertical es igual al esfuerzo cortante en la base.

Los procedimientos para distribuir el cortante en la base en todos los elementos verticales y horizontales de edificios de varios pisos requieren el cálculo adicional de la respuesta dinámica del edificio. En las secciones 8.12 y 8.13 se tratan estos temas. El cálculo de cargas elementales para edificios de un solo piso es mucho más fácil y se efectúa mediante mecánica estructural ordinaria, como se verá en el siguiente ejemplo 2.

### Ejemplo 1. Fuerza cortante en la base

En la figura 8.32 se muestra un edificio de oficinas de tres pisos y marcos de acero. La colocación de

las columnas forma un vano de 20 X 30 pies en todo el edificio. Hay vigas y trabes en ambas direcciones y están conectados a columnas con conexiones estándar resistentes a momento. Se usan largueros, pero no se muestran.

El edificio está situado en Salt Lake City, Utah. El informe del análisis de suelos muestra que el terreno del lugar está compuesto por una mezcla de grava y arena hasta una profundidad de 200 pies. Un informe de ingeniería geotécnica establece que el período característico del lugar ( $T_s$ ) está entre 0.8 y 1.2 segundos.

Todos los muros exteriores son de vidrio y paneles prefabricados de metal, que se estima pesan un promedio de 12 lb/pie<sup>2</sup> de área de muro.

La construcción de pisos y techo y los pesos respectivos de los elementos de cada uno son los siguientes:

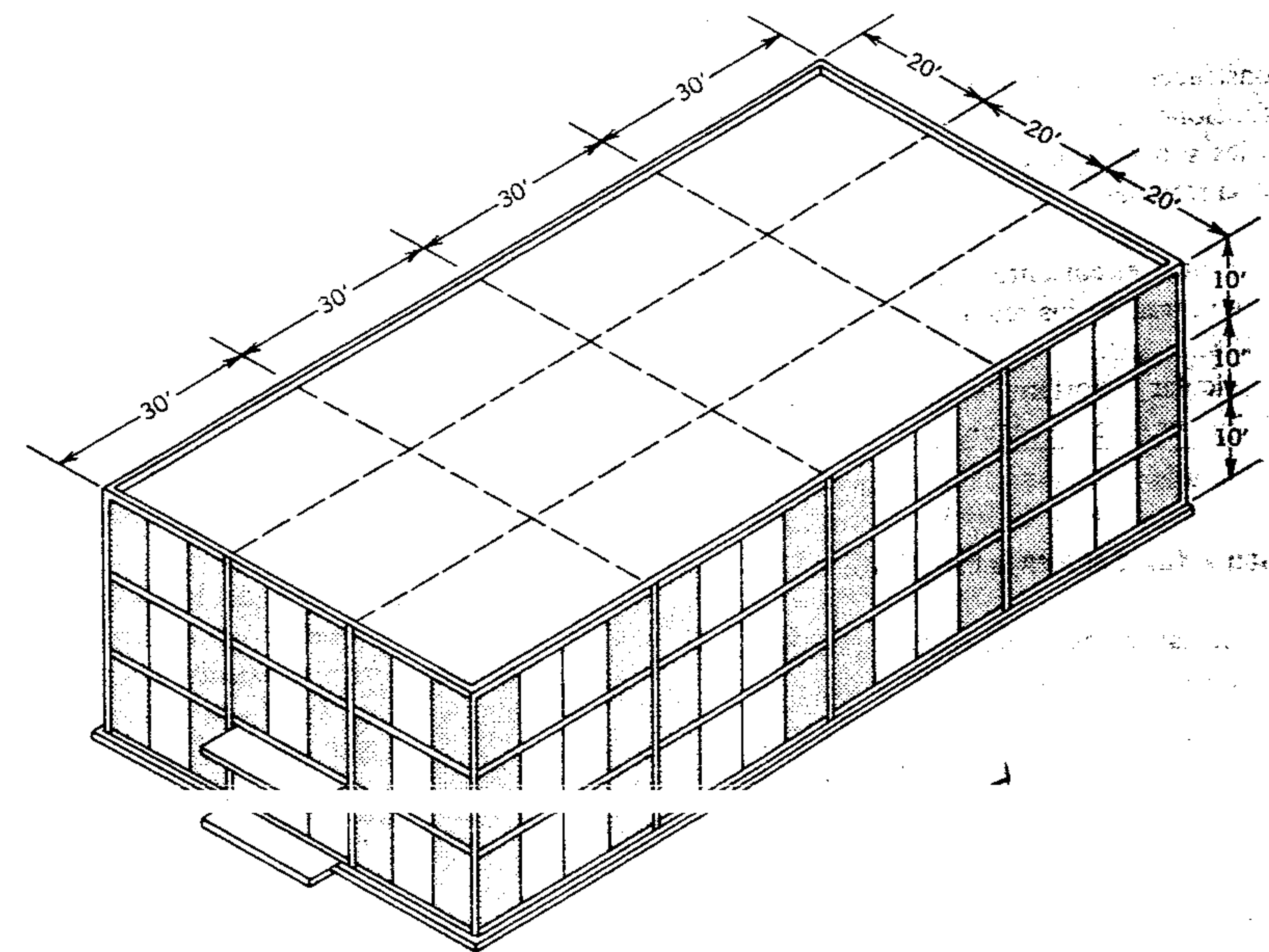


Figura 8.32 Ejemplo 1.



Juan José López Aguilar

Techo

Techo	6 lb/pie <sup>2</sup>
Cubierta de acero	2
Estructura de acero	4
Plafones	5
Diversos	3

Total 20 lb/pie<sup>2</sup>

Pisos

Recubrimiento de piso	2 lb/pie <sup>2</sup>
Cubierta de acero y relleno ligero	30
Estructura de acero	6
Plafones	5
Muros divisorios	8

Total 51 lb/pie<sup>2</sup>

La construcción de los pisos está hecha de modo que funcione como un diafragma. Los elementos verticales son marcos de acero localizados en los ejes de la retícula.

- Calcular el cortante en la base en cada dirección, usando los requisitos del ANSI A58.1-1982.
- Calcular el cortante en la base en cada dirección, usando los requisitos del UBC 1982.

**Solución a. (Cortante en la base, ANSI)**

- Calcular el peso del edificio (sin cargas de nieve).

Peso del techo =  $60(120)0.02 \approx 144$  kips

Peso del segundo piso =  $60(120)0.51 \approx 367$

Peso de muros exteriores =  $30 [2(120) + 2(60)] 0.12 \approx 130$

Total  $W \approx 1008$  kips

- Determinar el valor del factor de zona. En el mapa de ANSI A58.1 (figura 8.28) se observa que el edificio está situado en la zona 3.

$$Z = 0.75$$

- Determinar el factor de importancia. El edificio tiene una ocupación tipo oficina. En la tabla 8.2

$$I = 1.0$$

- Establecer el factor de fuerza horizontal. El edificio se compone de un marco de acero completo con conexiones estándar resistentes a momento. En la tabla de factor de fuerza horizontal de ANSI A58.1-1982, se encontraría que

$$K = 1.0 \text{ (ambas direcciones)}$$

- Calcular el período fundamental de vibración del edificio.

$$T = 0.035(h_n)^{3/4} \\ = 0.035(30)^{3/4} = 0.45 \text{ seg. (ambas direcciones)}$$

- Calcular el coeficiente de cortante en la base.

$$C = \frac{1}{15\sqrt{T}} \\ = \frac{1}{15\sqrt{0.45}} = 0.10 < 0.12 \text{ CORRECTO}$$

- Determinar el factor del suelo. Del informe del análisis de suelos del ANSI A58.1-1982 el tipo de perfil está calculado como  $S_2$ .

$$S = 1.2$$

$$CS = 0.1(1.2) = 0.12$$

Como el producto no excede de 0.14, su valor se debe usar en el cálculo del cortante en la base.

- Calcular el cortante en la base.

$$V = ZIKCSW \\ = 0.75(1.0)1.0(0.1)1.2(1008) \\ = 91 \text{ kips}$$

Obsérvese que el cortante en la base de 91 kips es válido para ambos ejes, transversal y longitudinal, del edificio. Esto no siempre sucede. Los valores de  $T$  y  $C$  podrían ser diferentes para cada eje y, por tanto, podrían dar diferentes cortantes en la base de cada eje.

También se debe señalar que el cálculo del cortante en la base se considera conservador. Un análisis más exacto *podría* dar un cortante en la base más pequeño. Para hacer esta más cuidadosa investigación, sería necesario distribuir el cortante en la base en cada nivel de piso (sección 8.13), calcular el desplazamiento lateral de cada piso (figura 8.31) y luego calcular de nuevo el período del edificio mediante la fórmula de Rayleigh. Si este nuevo valor de  $T$  es mayor que el calculado en el paso e) (de 0.45 seg.), en el paso f) se calcularía un coeficiente  $C$  de cortante en la base más pequeño. Sin embargo, se especifica además en ANSI A58.1-1982 que el período calculado por la fórmula de Rayleigh no excederá al valor calculado en el paso e) en más del 20 por ciento, o en este caso

$$T_{\text{máx}} = 1.2(0.45) = 0.54 \text{ seg.}$$

El coeficiente acompañante de cortante en la base reducido al máximo sería

$$C = \frac{1}{15\sqrt{0.54}} = 0.091$$

Continuando con el supuesto de que el cálculo con la fórmula de Rayleigh produciría un período de 0.54 seg., el nuevo cortante en la base de este ejemplo sería

$$V \approx 83 \text{ kips}$$

Esta es una reducción máxima posible de 8.8 por ciento.

**Solución b. (Cortante en la base, UBC)**

- Calcular el peso  $W$  del edificio. (Igual que la solución a, paso a)

$$W = 1008 \text{ kips}$$

- Determinar el valor del factor de zona. En el mapa de zonas sísmicas del UBC (figura 8.27), el edificio está localizado en la zona 3, y

$$Z = 0.75$$

- Establecer el factor de importancia. El UBC tiene las mismas estipulaciones que ANSI A58.1-1982; por lo tanto, usar el mismo valor de la solución a), paso c) (tabla 8.2).

$$I = 1.0$$

- Establecer el factor de fuerza horizontal. El edificio se compone de un marco de acero completo con conexiones estándar resistentes a momento. La tabla de factores de fuerza horizontal del ANSI A58.1-1982 es tan válida como las estipulaciones del UBC; por lo tanto,

$$K = 1.0$$

- Determinar el período de vibración. El UBC permite el tipo de construcción especificado (marcos de acero estándar resistentes a momento) en todas las zonas si la altura del edificio no excede de 160 pies y se usa un valor de 1.0 para  $K$ . En esta sección se dijo que el UBC 1982 permite el cálculo de  $T$  por la fórmula de Rayleigh o siguiendo la fórmula más aproximada:

$$T = \frac{0.05h_n}{\sqrt{f}}$$

Usando la fórmula más aproximada

$$T = \frac{0.05(30)}{\sqrt{60}} = 0.19 \text{ seg. (transversal)}$$



$$T = \frac{0.05(30)}{\sqrt{120}} = 0.14 \text{ seg. (longitudinal)}$$

- f) Determinar el coeficiente de cortante en la base.

$$C = \frac{1}{15\sqrt{T}}$$

Por lo tanto,

$$C = \frac{1}{15\sqrt{0.19}} = 0.15 > 0.12; \text{ usar } 0.12 \text{ (longitudinal)}$$

y

$$C = \frac{1}{15\sqrt{0.14}} = 0.18 > 0.12; \text{ usar } 0.12 \text{ (transversal)}$$

- g) Determinar el factor de respuesta suelo-estructura. Mediante el informe geotécnico se obtuvo un período característico para el suelo de entre 0.8 y 1.2 seg. Como se dijo antes en esta sección, el valor  $S$  depende de la relación  $T/T_s$ , y al calcularla,  $T$  no debe ser menor que 0.3 seg. Asimismo,  $T_s$  se debe tomar como el valor más próximo a  $T$ ; por lo tanto,

$$\frac{T}{T_s} = \frac{0.3}{0.8} = 0.38$$

y

$$S = 1 + \frac{T}{T_s} - 0.5\left(\frac{T}{T_s}\right)^2 \\ = 1 + 0.38 - 0.5(0.38)^2 \\ = 1.31$$

- h) Revisar el producto de  $C$  y  $S$ .  
Para los ejes transversales

$$CS = 0.12(1.31) = 0.16 > 0.14; \text{ usar } 0.14$$

Para los ejes longitudinales

$$CS = 0.12(1.31) = 0.16 > 0.14; \text{ usar } 0.14$$

- i) Calcular el cortante en la base.

$$V = ZIKCSW \\ = 0.75(1.0)1.0(0.14)1008 \\ = 106 \text{ kips}$$

El cortante en la base de 106 kips es válido en ambos sentidos, transversal y longitudinal, del edificio. Esto no siempre es el caso, ya que  $T$ ,  $K$ ,  $C$  y  $S$  podrían ser diferentes en cada eje. Sin embargo, el UBC especifica que si  $K = 1.33$  en un sentido, se debe usar en ambas direcciones.

El cortante en la base de 106 kips se considera conservador. De modo similar a la solución usando ANSI A58.1-1982, se puede calcular de nuevo el período de vibración para ambos sentidos usando una carga lateral distribuida de 106 kips y la fórmula de Rayleigh. A diferencia de ANSI, el UBC 1982 no tiene límite del 20 por ciento sobre el período de vibración incrementado.

### Ejemplo 2. Un edificio de un solo piso

En la figura 8.33 se muestra un edificio industrial ligero de un solo piso. La estructura interior está compuesta de largueros y marcos de acero con conexiones flexibles (no resistentes a momento). Los muros exteriores son simétricos respecto a cada eje y están contruidos de mampostería reforzada de 10 pulgadas de espesor que pesa 62 lb/pie<sup>2</sup> de superficie de muro. Los muros de mampostería son de carga para las cargas de gravedad y tipo cortante para las cargas laterales. La localización del edificio, la información del suelo y la construcción del techo son las mismas que las dadas en el ejemplo 1.

Calcular el cortante en la base, las cargas del diafragma de techo y cargas de diseño para los muros cortantes. Seguir las especificaciones del ANSI A58.1-1982 o del UBC 1982 (darán los mismos resultados).

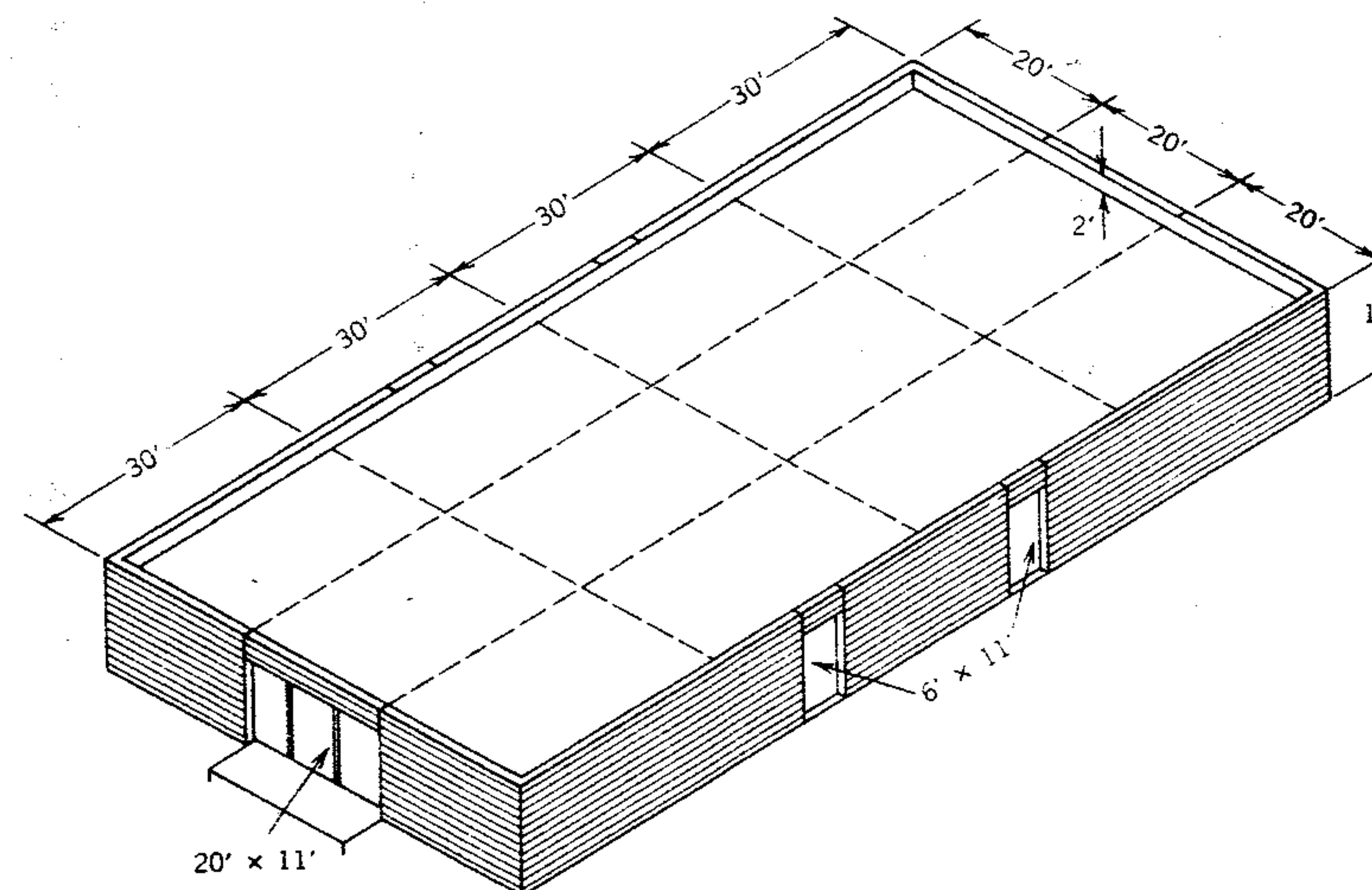


Figura 8.33 Ejemplo 2.

### Solución

1. Calcular el peso del techo

$$W_R = 144 \text{ kips}$$

(Ejemplo 1, solución a, paso a)

2. Calcular el peso de los muros de mampostería. Hacer cálculos separados para los muros laterales y los muros de los extremos.

$$\text{Muros laterales, } 2[14(120) - 2(6)11]0.062 = 192 \text{ kips}$$

$$\text{Muros de extremos, } 2[14(60) - 20(11)]0.062 = 77 \text{ kips}$$

3. Determinar el valor del factor de zona. Consultar el mapa de zona sísmica apropiado.

$$Z = 0.75$$

4. Determinar el factor de importancia. El uso del edificio es industrial ligero; por lo tanto

$$I = 1.0$$

5. Establecer el factor de fuerza horizontal. El marco de acero incompleto con muros de carga hacen que este edificio sea "tipo cajón", de acuerdo con UBC 1982. El ANSI A58.1-1982 clasifica este tipo de edificio como un "Sistema de Muros de Carga" con muros cortantes sísmicos de mampostería reforzada. Ambos dan el mismo factor, es decir:

$$K = 1.33$$

6. Calcular el período fundamental de vibración. Tanto el ANSI A58.1 como el UBC dan la misma fórmula aproximada para este tipo de construcción, i.e.,

$$T = \frac{0.05h_n}{\sqrt{V}}$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{0.05(12)}{\sqrt{60}} = 0.08 \text{ seg. (transversal)}$$



y

$$T = \frac{0.05(12)}{\sqrt{120}} = 0.05 \text{ seg. (longitudinal)}$$

7. Calcular el coeficiente de cortante en la base.

$$C = \frac{1}{15\sqrt{T}}$$

Por lo tanto,

$$C = \frac{1}{15\sqrt{0.08}} = 0.24 > 0.12;$$

usar 0.12 (transversal)

y

$$C = \frac{1}{15\sqrt{0.05}} = 0.30 > 0.12;$$

usar 0.12 (longitudinal)

8. Calcular el factor  $S$ . La descripción del perfil del suelo coincide con la categoría  $S_2$  del ANSI, i.e.,

$$S = 1.2$$

El UBC 1982 especifica que al calcular el factor de respuesta suelo-estructura  $T$  no debe ser menor que 0.3 seg. y  $T_s$  se debe tomar como el valor más cercano a  $T$ ; por lo tanto,

$$\frac{T}{T_s} = \frac{0.3}{0.8} = 0.38$$

y

$$S = 1 + \frac{1}{T_s} - 0.5\left(\frac{1}{T_s}\right)^2 \\ = 1 + 0.38 - 0.5(0.38)^2 \\ = 1.31$$

9. Revisar el producto de  $C$  y  $S$ , siendo iguales ambos ejes.

$$CS = 0.12(1.2) = 0.14 \text{ (ANSI)}$$

y

$$CS = 0.12(1.31) = 0.16 > 0.14 \text{ (UBC); usar 0.14}$$

10. Revisar el producto  $KCS$  (ANSI, solamente)

$$KCS = 1.33(0.14) = 0.19$$

Como este producto es menor que 0.29, su valor se debe usar para calcular el cortante en la base.

11. Calcular el factor sísmico total.

$$ZIKCS = 0.75(1.0)1.33(0.14) = 0.14$$

Este valor sísmico es el mismo para ambos ejes del edificio.

12. Calcular el cortante en la base. El peso total del techo y los muros de mampostería es

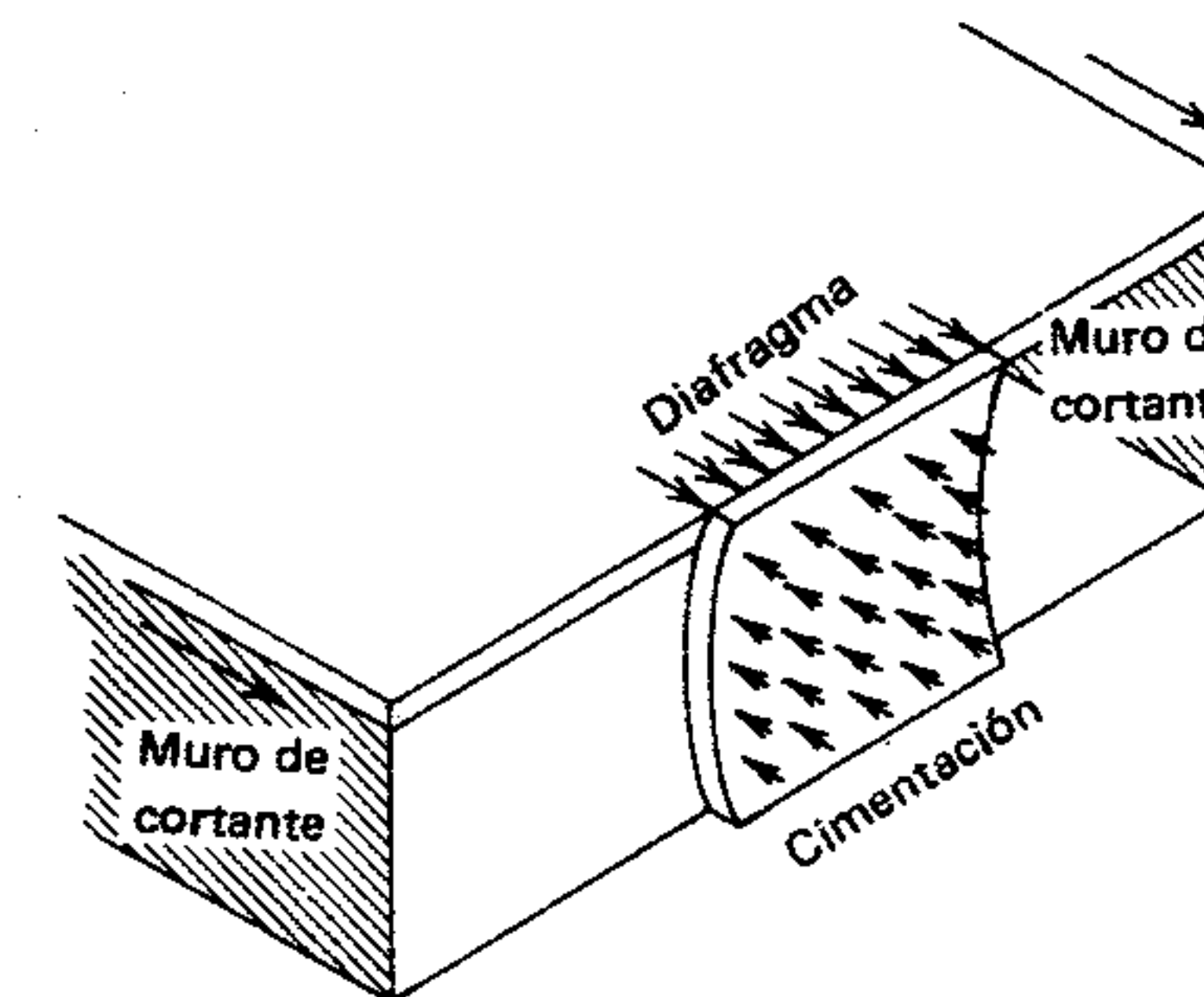
$$W = 144 + 192 + 77 = 413 \text{ kips}$$

$$V = 0.14(413) = 58 \text{ kips}$$

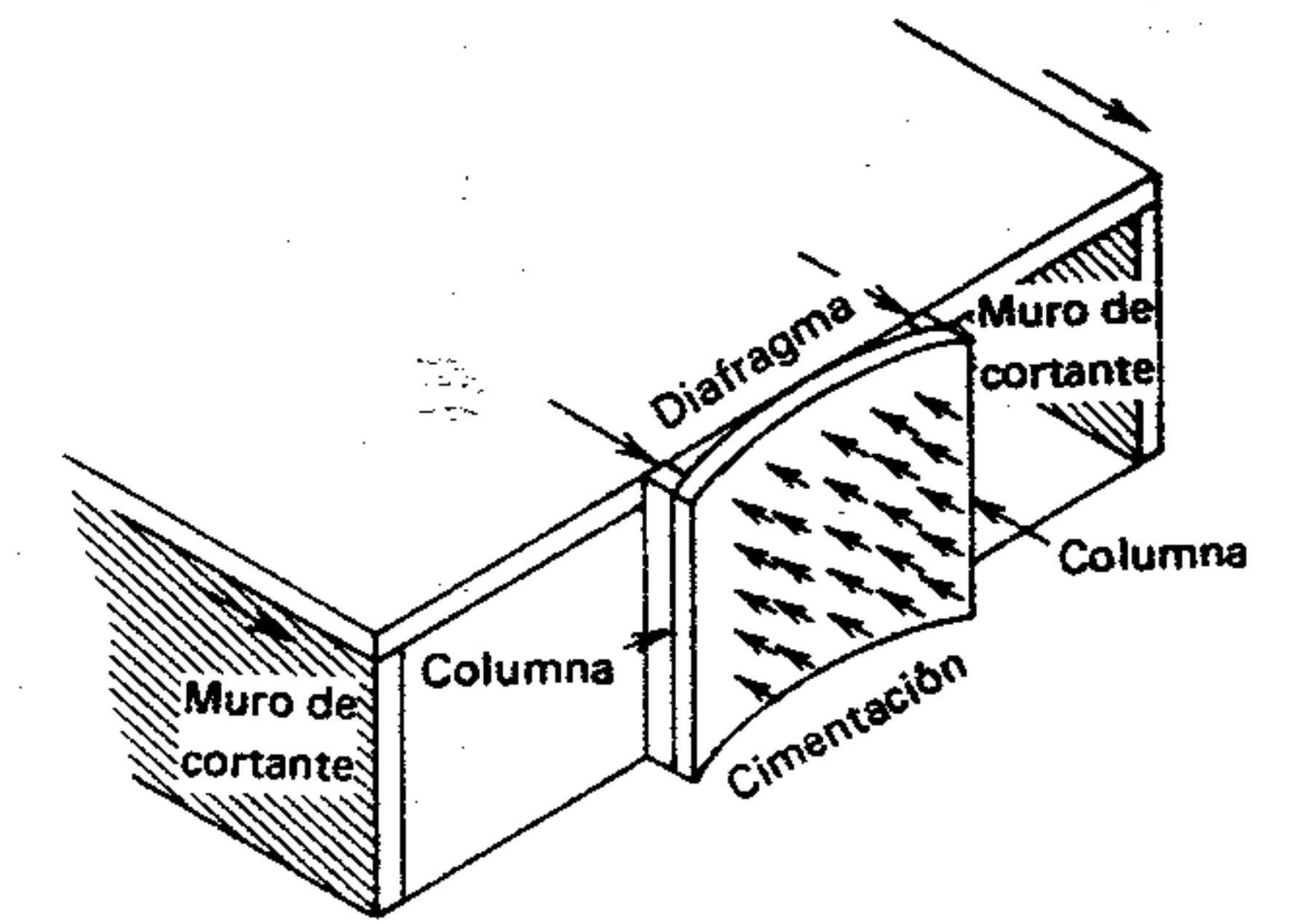
Este paso no es necesario y por tanto raras veces se efectúa en edificios de un solo piso con muros cortantes pesados.

13. Calcular la carga de diseño sobre el diafragma del techo. Este paso requiere investigación de la acción y función de los muros cortantes de mampostería. Los muros funcionan como muros cortantes sólo cuando las cargas están en un sentido paralelo a los muros. Las cargas perpendiculares a los muros tienden a volcarlos; por lo tanto estos muros requieren una estructura lateral de apoyo. En la figura 8.34 se muestran dos

a los muros. En cada caso la vibración sísmica bajo consideración es perpendicular al plano del muro. Esto crea (en efecto) la carga del muro lateral que se ilustra. En la fi-



a) El muro cubre el claro verticalmente



b) El muro cubre el claro horizontalmente.

Figura 8.34 Estructura lateral para muros.

gura 8.34 se ve el muro cubriendo el claro entre la parte superior de la cimentación y los aleros del diafragma. El diafragma cubre el claro entre los dos muros cortantes de los extremos; por lo tanto, se supone que el peso de la mitad superior del muro está en el plano del diafragma, y la mitad inferior aplicada directamente a la cimentación.

En la figura 8.34b se ve el muro entre los dos elementos verticales, que en este caso son columnas. Estas podrían ser pilastras, muros cruzados o contrafuertes. Sin embargo, en el caso de columnas o pilastras, éstas deben estar unidas tanto a la cimentación como el diafragma para transferir la carga del muro. Los muros cruzados o contrafuertes podrán desarrollar la resistencia lateral sin la ayuda del diafragma.

En este ejemplo, las longitudes de los muros laterales no son las mismas que las de los muros de extremos, y es necesario efectuar una investigación separada para cada eje del edificio. Para el sentido transversal, el peralte del parapeto más la mitad del peso de los dos muros laterales se asignan al nivel del diafragma, o

$$W_T = 144 + \left(\frac{2 + 12/2}{14}\right)192 = 254 \text{ kips}$$

Para el sentido longitudinal, el peralte del parapeto más la mitad de la altura de los dos muros extremos se asigna al diafragma, o sea

$$W_L = 144 + \left(\frac{2 + 12/2}{14}\right)77 = 188 \text{ kips}$$

La carga lateral sobre el diafragma de techo se determina usando la fórmula del cortante en la base para los pesos asociados con cada sentido. El símbolo  $F_Q$  se asigna a esta carga lateral total del techo, entonces

$$F_{QT} = ZIKCS(W_T) \\ = 0.14(254) = 36 \text{ kips}$$

y

$$F_{QL} = ZIKCS(W_L) \\ = 0.14(188) = 26 \text{ kips}$$

Para propósitos de diseño del diafragma, se supone que la carga lateral total está uniformemente distribuida a lo largo de la longitud del diafragma; por lo tanto

$$w_T = \frac{36,000}{120} = 300 \text{ lb/pie lineal}$$



y

$$w_L = \frac{26,000}{60} = 433 \text{ lb/pie lineal}$$

El diafragma de techo se diseña para proporcionar resistencia y flexibilidad entre los muros cortantes usando estas cargas conforme al procedimiento descrito en la sección 8.3.

14. Calcular las cargas de diseño para los muros cortantes. Se calculan dos cargas en cada sentido, una en la parte superior y otra en la inferior de los muros.

**Sentido transversal.** Para  $F_{QT} = 36$  kips, cada muro cortante de extremo desarrolla la mitad de la carga en la parte superior, o

$$R = 36/2 = 18 \text{ kips}$$

El cortante en la parte inferior incluye una tolerancia para el peso de los muros de extremos; por lo tanto, usar el factor sísmico que se calculó para todo el edificio. Entonces, la carga cortante en la parte inferior es

$$V = 18 + 0.14\left(\frac{77}{2}\right) = 23.4 \text{ kips}$$

Cada muro de extremo tiene dos segmentos de las mismas dimensiones y rigidez; por lo tanto, cada segmento se diseña para desarrollar la mitad de la carga cortante, o sea 11.7 kips.

**Sentido longitudinal.** Para  $F_{QL} = 26$  kips, cada muro lateral cortante desarrolla la mitad de la carga en la parte superior, o sea

$$R = 26/2 = 13 \text{ kips}$$

tolerancia para el peso de los muros de extremos, usando el factor sísmico para el edificio, es decir

$$V = 13 + 0.14\left(\frac{192}{2}\right) = 26.4 \text{ kips}$$

Cada muro lateral consiste en tres segmentos de diferentes longitudes, y por lo tanto de diferentes rigideces. La carga cortante total (26.4 kips) es desarrollada por cada segmento de muro en proporción a su rigidez relativa.

La fórmula para calcular rigideces relativas para pilares de espesor y material constantes, fijos en las partes superior e inferior, es

$$K_{REL} = \frac{1}{0.1\left(\frac{h}{d}\right)^3 + 0.3\left(\frac{h}{d}\right)}$$

donde:

$$\begin{aligned} h &= \text{altura del pilar.} \\ d &= \text{ancho del pilar.} \end{aligned}$$

El segmento central de un muro lateral tiene dimensiones de 11 pies (altura)  $\times$  24 pies (ancho).

$$\frac{h}{d} = \frac{11}{24} = 0.46$$

Por lo tanto

$$K_{REL} = \frac{1}{0.1(0.46)^3 + 0.3(0.46)} = 6.77$$

Cada segmento de extremo de un muro lateral tiene dimensiones de 11 pies (altura)  $\times$  42 pies (ancho).

$$\frac{h}{d} = \frac{11}{42} = 0.26$$

Por lo tanto

$$K_{REL} = \frac{1}{0.1(0.26)^3 + 0.3(0.26)} = 12.54$$

La suma de las rigideces son

$$K_{REL} = 6.77 + 2(12.54) = 31.85$$

Distribuir la carga total del muro de cortante de 26.4 kips como sigue:

$$\text{Segmento central, } V = \frac{6.77}{31.85} (26.4) = 5.6 \text{ kips}$$

Cada segmento extremo,

$$V = \frac{12.54}{31.85} (26.4) = 10.4 \text{ kips}$$

Revisando,

$$2(10.4) + 5.6 = 26.4 \text{ kips}$$

## PROBLEMAS

1. Hacer de nuevo el ejemplo 1 (figura 8.32) con los dos siguientes cambios:

- Aumentar la altura a cinco pisos iguales.
- Usar conexiones dúctiles resistentes a momento.

(Las respuestas se dan en el apéndice G).

2. Hacer de nuevo el ejemplo 2 (figura 8.33) con los siguientes cambios:

- Aumentar la altura de 14 a 16 pies.
- Cambiar los muros exteriores a concreto de piedra regular con un peso de 150 lb/pie<sup>3</sup>.
- Cambiar las aberturas de muros laterales de 6 pies a 10 pies de ancho.

(Las respuestas se dan en el apéndice G).

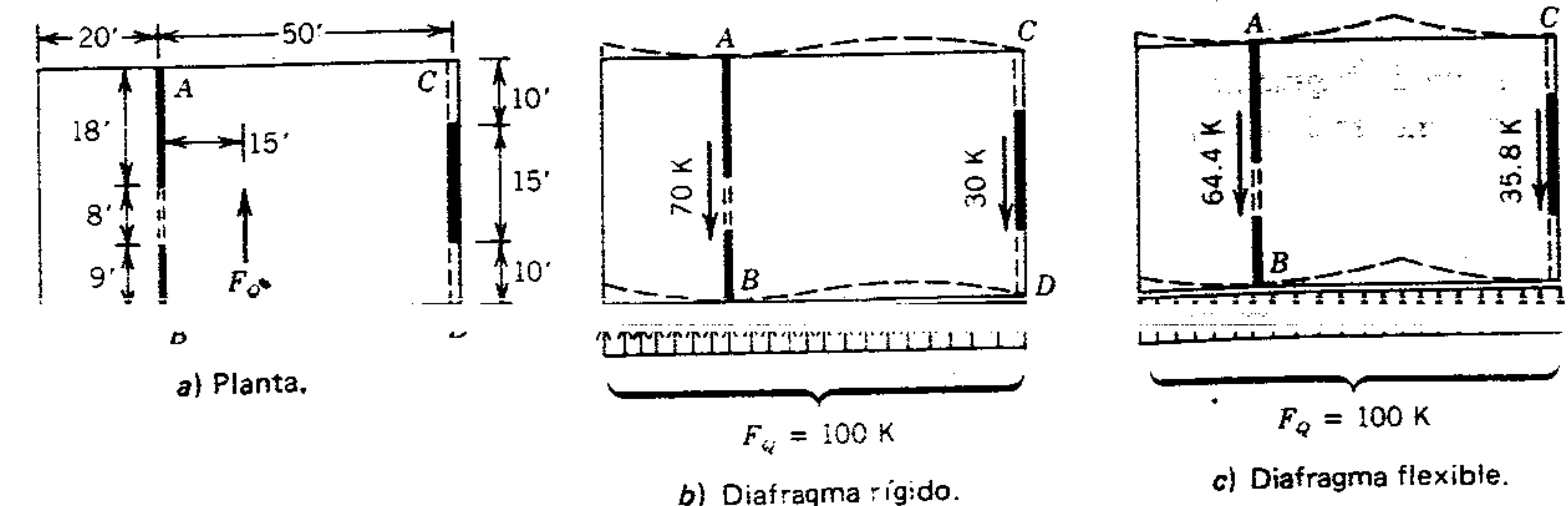


Figura 8.35 Distribución en planta.

## 8.12 DISTRIBUCIÓN DE FUERZA EN EDIFICIOS DE UN SOLO PISO

El esfuerzo cortante en la base, establecido por los procedimientos descritos en la sección anterior, es la fuerza lateral total que debe resistir una estructura y para la cual se debe diseñar. Este cortante en la base (para cada sentido) se distribuye a cada momento resistente horizontal y vertical que esté situado de tal modo en la estructura que sea capaz de desarrollar una parte de la carga. Para edificios de un solo piso, la distribución de carga se determina usando los principios ordinarios de mecánica estructural relacionados con cargas estáticas. Las variables que se deben considerar son: 1) tipo de elemento horizontal; 2) sentido de la carga horizontal; 3) posición de los elementos verticales; y 4) rigideces relativas de los elementos verticales.

El ejemplo 2 de la sección anterior servirá como una buena introducción a este tema. Se mostró cómo el diafragma desarrollaba casi todo el cortante en la base (sólo se omitió la parte inferior de los muros). El diafragma transmitía su carga por partes iguales a ambos elementos verticales situados en los muros exteriores. Asimismo, estos muros cortantes tomaron carga lateral adicional debido a su propio peso y la transmitían a la cimentación.

Los elementos verticales no siempre necesitan estar en los muros exteriores de un edificio. Por ejemplo, en la planta del edificio de un piso de la figura 8.35a, donde la fuerza lateral ( $F_Q$ ) se aplica solamente en el sentido transversal, los elementos



verticales están a lo largo de las líneas *AB* y *CD*. Hay dos segmentos del elemento vertical a lo largo de la línea *AB*. Para ilustrar la función del diafragma, supóngase que la carga lateral ( $F_Q$ ) es de 100 kips, actuando en el centro del techo, lo cual implica que  $F_Q$  se debe a una carga uniforme a lo largo del edificio.

Una cubierta de techo de diafragma rígido (sección 8.3) se deflexionaría como se ve en la figura 8.35b. Esto es similar a una viga continua. La fuerza en el elemento vertical a lo largo de la línea *CD* se puede determinar tomando momentos de las fuerzas respecto a cualquier punto sobre la línea *AB* y aplicando la condición de equilibrio, es decir,  $\Sigma M = 0$ , o sea

$$15(100) - 50 V_{CD} = 0$$

$$V_{CD} = 30 \text{ kips}$$

De modo similar, tomando momentos respecto a un punto de la línea *CD*

$$35(100) - 50 V_{AD} = 0$$

$$V_{AD} = 70 \text{ kips}$$

El elemento vertical a lo largo de la línea *CD* ocurre sólo para 15 pies de los 35 de ancho del edificio. Se debe diseñar para desarrollar toda la carga de 30 kips del diafragma más cualesquiera cargas laterales adicionales. El elemento vertical a lo largo de la línea *AB* consiste de dos segmentos, cada uno de diferentes dimensiones. La carga combinada de los dos segmentos que se debe diseñar para desarrollar es 70 kips.

La cubierta de techo se podría diseñar y construir como un diafragma flexible (sección 8.3). En estas condiciones se deflexionaría como se ve en la

figura 8.35c. Las cargas desarrolladas por elementos verticales serán de acuerdo con las áreas tributarias para cada elemento. Convirtiendo los 100 kips a una carga uniforme

$$w = \frac{100}{70} = 1.43 \text{ kips por pie}$$

y la carga para cada elemento vertical es

$$V_{AB} = 1.43 (20 + 25) = 64.4 \text{ kips}$$

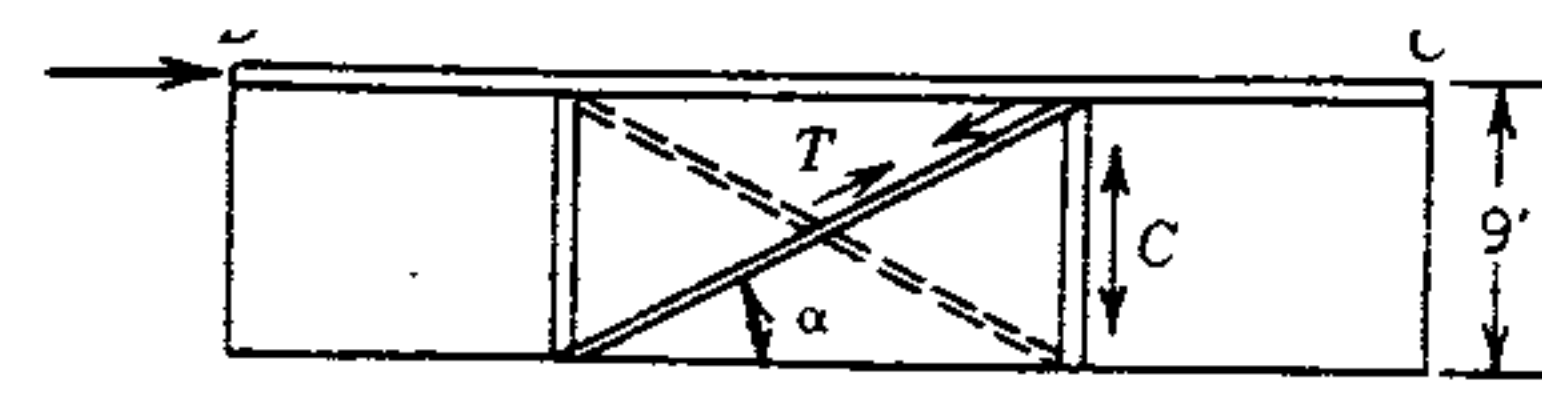
$$V_{CD} = 1.43 (25) = 35.8 \text{ kips}$$

Estos valores son diferentes de los desarrollados usando un diafragma rígido. El elemento vertical a lo largo de la línea *CD* puede ser un muro cortante, un marco rígido o un marco con arriostramiento cruzado, y se debe diseñar para resistir una carga ya sea de 35.8 kips o 30 kips. En la figura 8.36a se muestra este elemento como un marco con arriostramiento cruzado y la carga proveniente de un diafragma rígido. Sólo el brazo a tensión del arriostramiento cruzado se considera efectivo. El arriostramiento a compresión no efectivo se representa con una línea punteada. Se supone que las juntas están articuladas. El puntal horizontal a lo largo de las líneas del techo se diseña para una fuerza de compresión de 30 kips. El ángulo que la riostra a tensión forma con la horizontal es

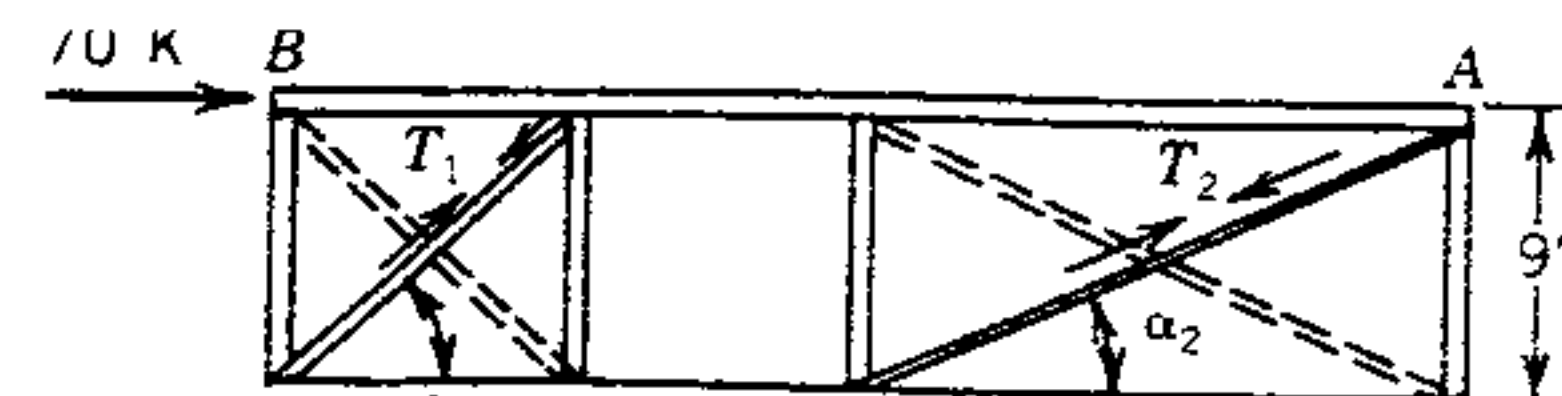
$$\tan \alpha = \frac{9}{15}$$

$$\alpha = 31^\circ$$

Aplicando el principio de que la suma de las fuerzas en la junta debe ser igual a cero, se determina que la fuerza de tensión en la riostra es

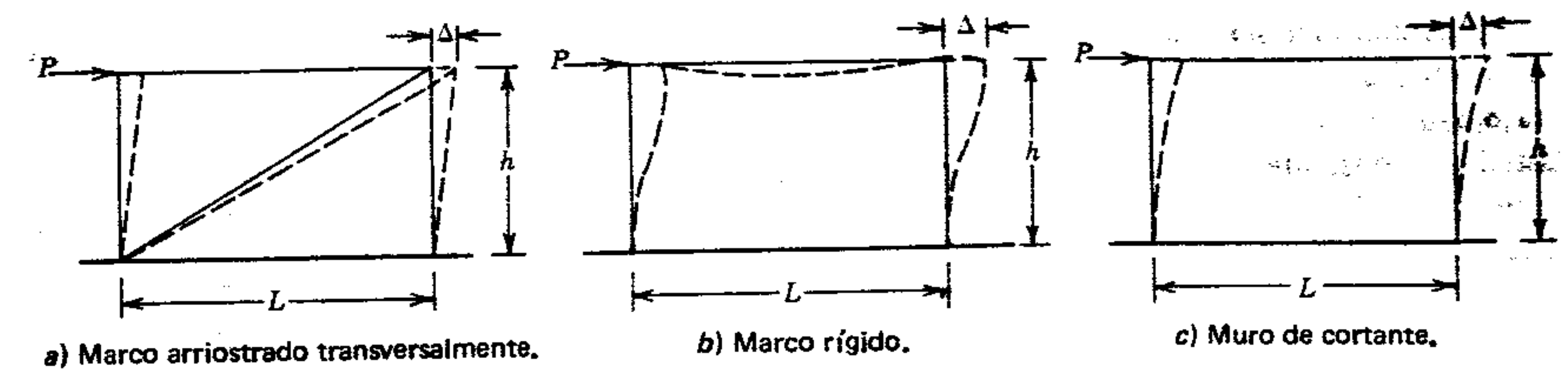


a) Muro exterior CD.



b) Muro interior AB.

Figura 8.36 Elementos verticales.



$$P = R_p \Delta$$

$$P = \left[ \frac{E}{\sum \frac{SUL_1}{A}} \right] \Delta$$

donde :

$S$  = esfuerzo en cada miembro causado por la carga  $P$ ,  
 $U$  = esfuerzo en cada miembro causado por la carga unitaria en  $P$ ,  
 $L_1$  = Longitud de cada miembro  
 $A$  = Área de cada miembro.

$$P = R_r \Delta$$

$$P = \left[ \frac{17EI_c}{h^3} \right] \Delta$$

donde :

$I_c$  = Momento de inercia de una columna

Supuestos :  
 $I$  es el mismo para ambas columnas  
 $I/L$  de la viga sigue siendo igual a  $I/h$  de las columnas.

$$P = R_s \Delta$$

$$P = \left[ \frac{E}{h \left( \frac{h^2}{3I} + \frac{3}{A} \right)} \right] \Delta$$

donde :

$t$  = espesor del muro  
 $I = \frac{tL^3}{12}$   
 $A = tL$

Supuesto:

El módulo de cortante es el 40% del módulo elástico.

Figura 8.37 Rigideces de elementos verticales.

$$T = \frac{30}{\cos 31^\circ} = 35 \text{ kips}$$

y la fuerza de compresión en la columna es

$$C = (30) \tan 31^\circ \approx 18 \text{ kips}$$

Es interesante notar que el UBC contiene el requisito de que la carga calculada del miembro (30, 35 y 18 kips) se incremente en un 25 por ciento para marcos arriostrados si el edificio está localizado en la zona 3 o la zona 4.

El elemento vertical a lo largo de la línea *AB* que consta de dos segmentos pueden ser marcos arriostrados (similares a la línea *CD*), marcos rígidos o muros cortantes. Cada segmento contribuye al desarrollo de la fuerza total. En la figura 8.36b se ilustran marcos con arriostramiento cruzado para la carga de diafragma rígido de 70 kips. Se supone que las diagonales a compresión no son efectivas y se presentan con líneas punteadas. Obsérvese que la deflexión lateral de cada segmento será la misma.

Por lo tanto, la proporción de la carga total desarrollada por cada segmento depende de la rigidez relativa de cada uno. Esta observación sigue siendo válida (dentro del rango elástico del material) si los elementos consisten en marcos arriostrados, marcos rígidos o muros cortantes.

Como se usa aquí, el término *rigidez* se refiere a la resistencia contra la deflexión ante una carga dada. En la figura 8.37 se ilustran los tres tipos de elementos verticales. Las variables en cada tipo son la altura ( $h$ ) y la longitud ( $L$ ). Se dan fórmulas para cada uno que relacionan la deflexión ( $\Delta$ ) causada por la carga ( $P$ ) que es resistida por la rigidez del sistema ( $R$ ). La rigidez de cada sistema se representa por la cantidad entre corchetes. La rigidez se define a veces como la rigidez de todo el sistema. Pero como estos tipos raras veces se combinan para alguna línea de elementos verticales, las fórmulas absolutas para  $R$  (entre corchetes) se pueden simplificar para producir solamente valores relativos de rigidez para cualquier tipo. Este es el procedimiento que se utiliza comúnmente en el diseño.



Por ejemplo, una serie de marcos con arriostramiento cruzado similares a los ilustrados en la figura 8.37a, con áreas transversales y módulos de elasticidad constantes para cada miembro correspondiente, podrían tener la fórmula de rigidez relativa reducida a

$$R_B = \frac{1}{L[1 + r^3 + (1 + r^2)^{3/2}]}$$

donde  $r$  es  $h/L$ .

Al aplicar esta fórmula a los dos segmentos de los marcos arriostrados de la figura 8.36b se tendrán sus rigideces relativas como:

Segmento en B,  $h/L = 9/9 = 1$

$$R_B = \frac{1}{9[1 + 1^3 + (1 + 1^2)^{3/2}]} = 0.023$$

Segmento en A,  $h/L = 9/18 = 0.5$ .

$$R_B = \frac{1}{18[1 + 0.5^3 + (1 + 0.5^2)^{3/2}]} = 0.022$$

Obsérvese que las rigideces están muy próximas entre sí a pesar del hecho de que un segmento tiene el doble de longitud del otro. Esto es típico. Usando estos valores de rigidez relativa, la carga total de 70 kips se puede proporcionar en cada segmento como sigue:

Segmento en B,

$$\frac{R_B}{\Sigma R_B} 70 = \frac{0.023}{0.045} (70) = 35.8 \text{ kips}$$

Segmento en A,

$$\frac{R_A}{\Sigma R_B} 70 = \frac{0.022}{0.045} (70) = 34.2 \text{ kips}$$

El procedimiento descrito aquí se puede usar en marcos rígidos y muros cortantes, así como para marcos arriostrados. Sin embargo, en casos en que el marco arriostrado o rígido está hecho de

acero, esto se hace raras veces. Esto se debe a que el acero es un material dúctil y las cargas sísmicas duran poco tiempo. El acero no falla de repente, sino que cede (desarrollando aún su carga de fluencia) y permite que otros elementos estructurales compartan el desarrollo de la carga. Este es básicamente un enfoque de Diseño de Resistencia Límite (capítulo 11).

Aceptando este fenómeno de cedencia (podría ocurrir alguna distorsión permanente), todo lo que se necesita es que la capacidad de resistencia combinada de los segmentos sea igual a la carga total. Aplicando estos principios a los marcos arriostrados de la figura 8.36b

$$T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 70 \text{ kips}$$

Este tipo de razonamiento para acero dúctil no se puede aplicar a estructuras hechas de materiales quebradizos. Una vez alcanzada la capacidad de resistencia de la mampostería o el concreto, fallan súbitamente y esencialmente pierden toda resistencia. Si más de un segmento efectúa el desarrollo de las cargas, y un segmento falla, lo más probable es que los demás también fallen. Este fenómeno se conoce como falla progresiva. Por lo tanto, el procedimiento descrito para proporcionar cargas a segmentos conforme a sus rigideces relativas, siempre debe ser observado en muros cortantes de madera, mampostería y concreto.

Véase la fórmula para la rigidez absoluta de muros cortantes de la figura 8.37c. Si el espesor del muro permanece constante y hay un módulo de elasticidad consistente, la fórmula se puede ajustar para representar valores relativos como se ve a continuación:<sup>5</sup>

$$R_S = \frac{1}{\left(\frac{h}{r}\right)^3 + 0.75\left(\frac{h}{r}\right)}$$

<sup>5</sup> Esta fórmula es ligeramente diferente de la empleada para muros de cortantes en el ejemplo 2 de la sección 8.10. La razón de esta diferencia es que en este ejemplo se supone que la parte superior del muro es libre (no restringida), mientras que en el ejemplo 2 se supone que la parte superior está fija contra rotación.

Para ilustrar la significativa diferencia entre los marcos y los muros cortantes, supóngase que dos segmentos del marco ilustrado en la figura 8.36 se reemplazan por dos segmentos de muro cortante. El segmento en B tiene un  $h/L = 1$  y una rigidez relativa

$$R_S = \frac{1}{1^3 + 0.75(1.0)} = 0.571$$

El segmento en A tiene un  $h/L = 0.5$  y una rigidez relativa

$$R_S = \frac{1}{0.5^3 + 0.75(0.5)} = 2.0$$

Obsérvese que el segmento  $9 \times 18$  pies en A es  $2.0/0.571 = 3.5$  más rígido que el segmento de  $9 \times 9$  en B. Este es un abrupto salto en comparación con los marcos con arriostramiento cruzado.

Finalmente, la distribución de los 70 kips en cada segmento de muro se determina como sigue:

Segmento en A,

$$\frac{0.571}{2.571} (70) = 15.5 \text{ kips}$$

Segmento en B

$$\frac{2.0}{2.571} (70) = 54.5 \text{ kips}$$

### 8.13 DISTRIBUCIÓN DE FUERZA EN EDIFICIOS DE VARIOS PISOS

La distribución de carga para edificios de varios pisos es muy diferente de la de edificios de un solo piso. La razón de esta diferencia es que la distribución de carga se basa en la dinámica estructural. Hay dos distintos procedimientos separados a seguir, uno para elementos verticales y otro para elementos horizontales.

La distribución del cortante en la base en edificios de varios pisos se basa en la respuesta estruc-

tural del edificio debida a las vibraciones del suelo. Para llevar a cabo un análisis dinámico, la estructura debe estar modelada de una forma apropiada para la aplicación de la teoría dinámica. Un modelo de uso frecuente consiste en usar "masas discretizadas" en cada nivel de piso y techo, con conexiones elásticas entre cada par de masas adyacentes. La conexión elástica representa la estructura del elemento vertical entre los pisos.

En la figura 8.38a se ilustra una sección parcial de un edificio de varios pisos. La "masa discretizada" consiste en el peso del piso y muros, divisiones, columnas de un piso y, en algunos casos, parte de una carga viva permanente. La  $R$  para la estructura ilustrada en la figura 8.38b representa elementos verticales, como marcos rígidos o arriostrados o muros cortantes. Se deben (o se supone) conocer todos los pesos, propiedades y dimensiones antes de completar el modelado.

Las vibraciones del suelo ponen en movimiento estas "masas discretas", y el principal propósito del análisis dinámico es describir el movimiento, o posición relativa de las "masas discretas". Esto se debe hacer respecto al tiempo y, por razones prácticas, casi siempre implicará el uso de computadoras. El resultado del programa de computadora es la respuesta en función del tiempo de la estructura distorsionada.

Las estructuras vibran de acuerdo a sus modos particulares únicos de vibración. Un modo se describe como una forma de desplazamiento básico de la estructura distorsionada. En la figura 8.39a se ilustra un modelo de una estructura de tres pisos. En b), c) y d) se muestran tres modos básicos de

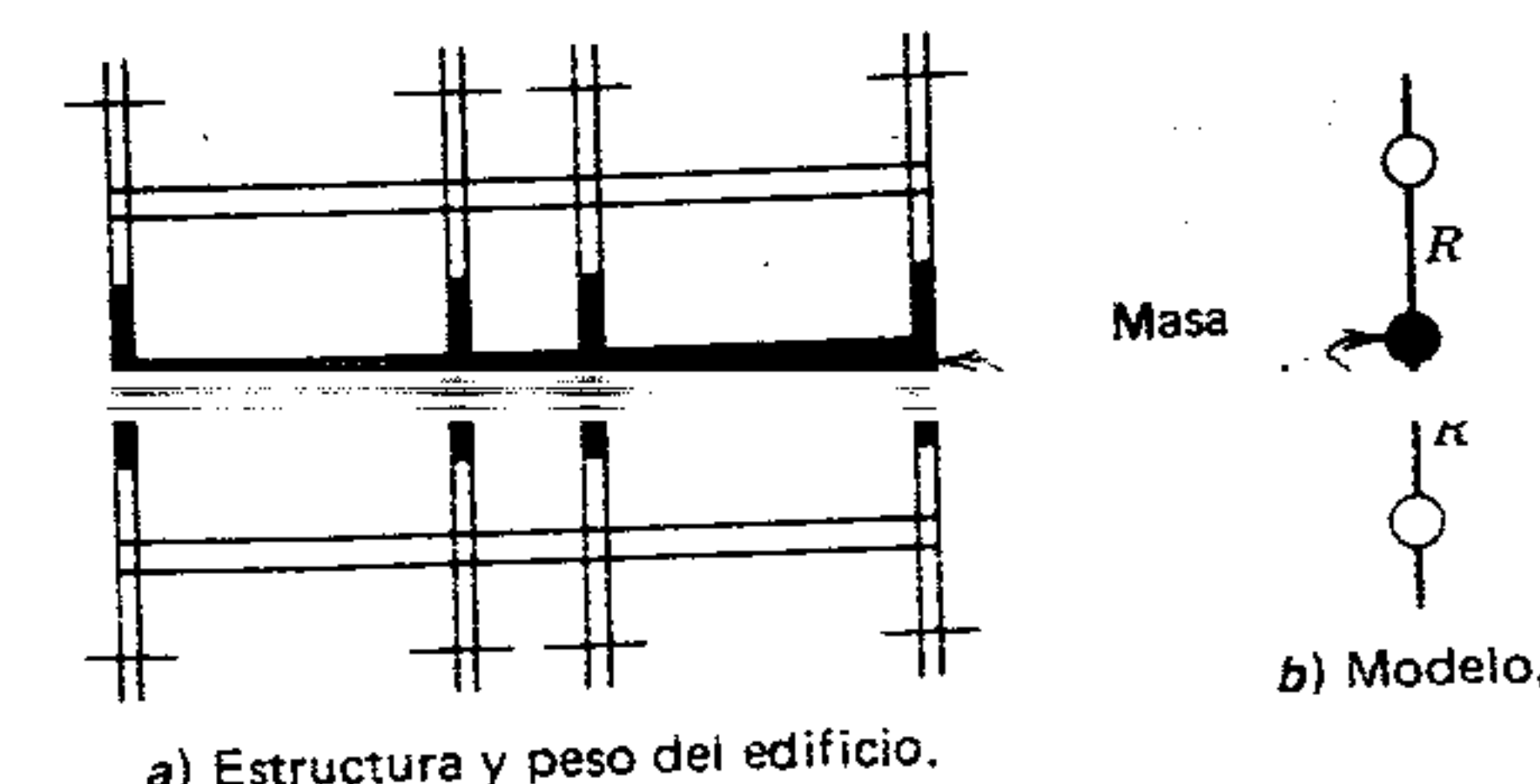


Figura 8.38 Modelo para análisis dinámico.



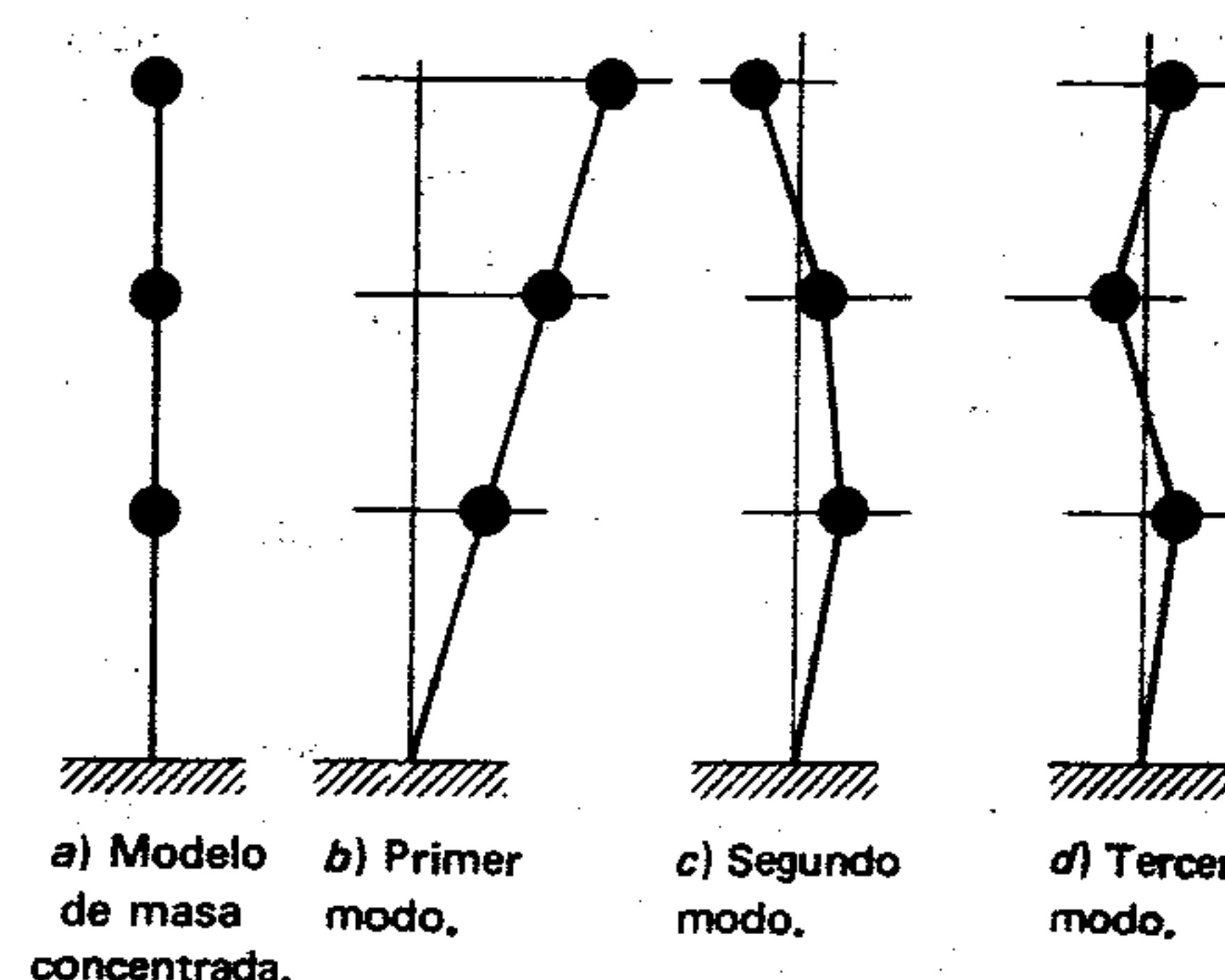


Figura 8.39 Formas de modos.

vibración. El primer modo es el más predominante y se denomina modo fundamental. Este modo también tiene el período más largo de vibración de los tres. La forma deflexionada real en cualquier momento es la suma de cierto porcentaje de cada modo. Sin embargo, el desplazamiento más severo en cualquier momento se parece más a la forma del modo fundamental. Por lo tanto, los reglamentos usualmente implican que las cargas laterales estáticas equivalentes se deben aplicar en cada nivel de

piso de tal manera que causen una forma deflexionada similar a la forma del modo fundamental. Una distribución de carga de acuerdo con esta regla genera una envolvente de cortante que es similar en forma a la causada por la superposición de las fuerzas asociadas con cada modo.

Esta distribución de carga se denomina con frecuencia carga triangular inversa. Las fuerzas varían linealmente desde cero en la parte inferior hasta un máximo en la superior. Sin embargo, se debe remarcar que esta carga triangular exacta sólo ocurre cuando hay una distribución uniforme de masa. Para una mejor explicación, véase la figura 8.40a donde la sección del edificio representa pesos iguales ( $W$ ) e iguales alturas de pisos ( $h$ ) para cada piso. El modelo teórico se ilustra en la figura 8.40b, donde todas las masas discretas son las mismas y la rigidez entre las masas es la misma. El modo fundamental se ilustra en la figura 8.40c, con un cortante en la base de  $V$ . Este cortante en la base se distribuye en una forma uniformemente variable empezando con  $1/10$  de  $V$  en el segundo piso y terminando con  $4/10$  de  $V$  en el nivel del techo. En la figura 8.40c se muestra la envolvente de fuerza cortante empezando con la fuerza cortante  $4/10-V$  en el piso superior y agregando sucesivamente el cortante de piso para cada piso hacia abajo.

Por lo general, los reglamentos de construcción adoptan estos principios pero modifican las fórmu-

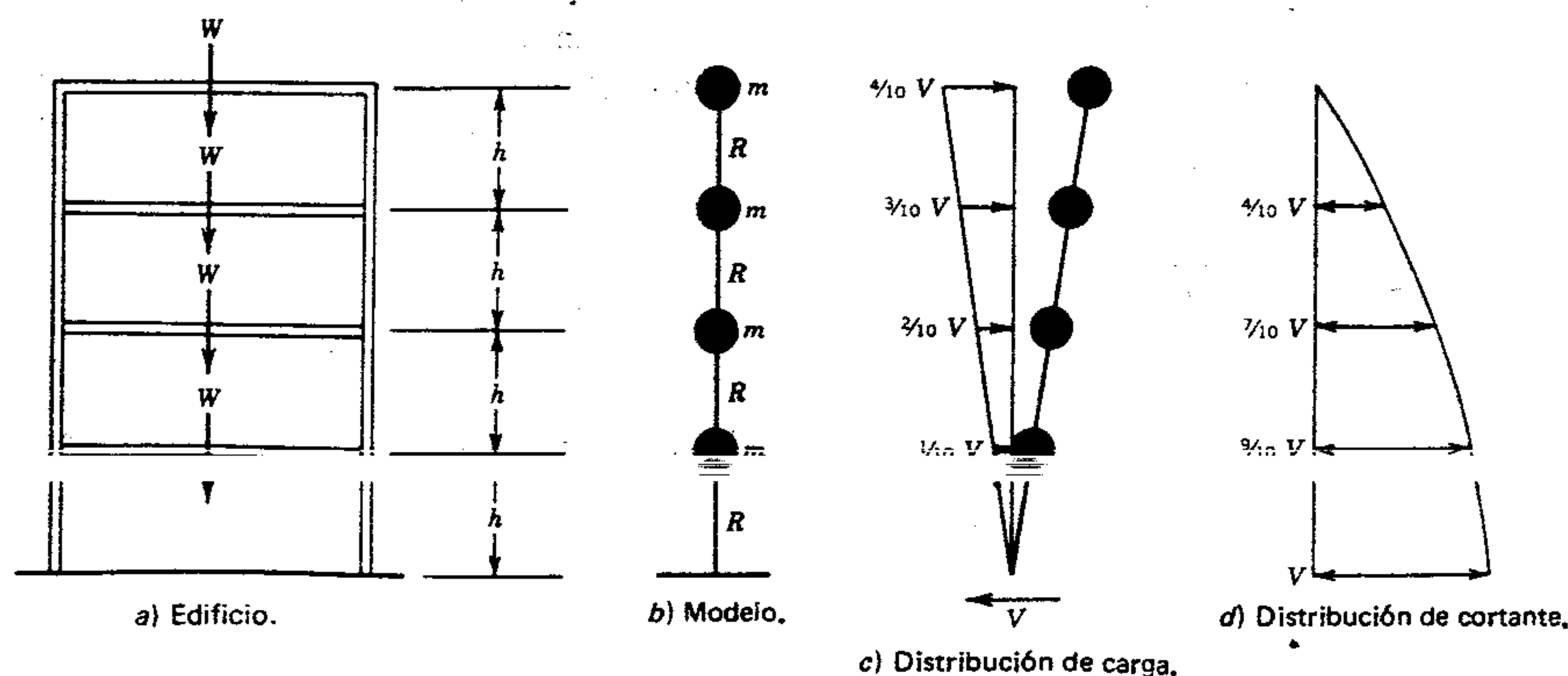


Figura 8.40 Igual distribución de masa.

las de distribución de carga para tomar en cuenta edificios altos y variaciones en los pesos y alturas de los pisos. Las deflexiones en voladizo puro y los edificios con grandes relaciones entre altura y ancho (relación de aspecto), tienen un modo fundamental que se aparta ligeramente de la línea recta. Para considerar esta variación, se aplica una fuerza adicional en el nivel superior. Esta sólo se necesita aplicar en casos en que el período de vibración es mayor que 0.7 seg. El valor de esta fuerza adicional en la parte superior ( $F_t$ ) es  $0.07TV$ , pero no tiene que exceder de  $0.25V$ . La parte restante del cortante base ( $V - F_t$ ) se distribuye en cada piso y nivel de techo conforme a la carga triangular inversa si las alturas y los pesos de pisos permanecen constantes. Usualmente esto no sucede. La siguiente fórmula es válida para masas uniformes o para una variación en pesos y alturas:

$$F_x = \frac{(V - F_t)w_x h_x}{\sum_{i=1}^n w_i h_i}$$

Esta fórmula requiere una mayor explicación. El subíndice  $x$  se refiere al nivel para el cual se calcula la fuerza lateral, es decir,  $F_x$ . El valor de  $w_x$  es la carga de gravedad en el nivel  $x$ , y  $h_x$  es la altura so-

bre la base del nivel  $x$ . El denominador de la fórmula es la suma de todos los pesos de piso por sus alturas respectivas sobre la base. Se ve que la fuerza en cualquier nivel es el cortante en la base modificado ( $V - F_t$ ) multiplicado por una fracción adimensional calculada como  $w_x h_x / \sum w_i h_i$ . En la figura 8.41 se da un resumen de la distribución de carga a los elementos verticales para un edificio de cuatro pisos.

La distribución de carga a los elementos verticales no se puede usar para el diseño de los elementos horizontales porque la distribución se estableció en un patrón que requirió duplicación de la deflexión del modo fundamental de vibración. Al hacerlo así, se asignaron mayores fuerzas a los pisos superiores y fuerzas mucho menores a los pisos inferiores. Estas fuerzas en los pisos inferiores son irrealmente bajas cuando se comparan con el movimiento dinámico que se efectúa. La carga sobre cualquier diafragma (elemento horizontal) en cualquier nivel debe representar la aceleración actuando a ese nivel sobre la masa en ese nivel. Para lograr esto, tanto el ANSI A58.1-1982 como el UBC 1982 proporcionan una fórmula empírica para calcular cargas de diseño mínimas en los diafragmas. Los resultados no corresponden bien con el cortante en la base y, por ello, se convierten en un factor perturbador.

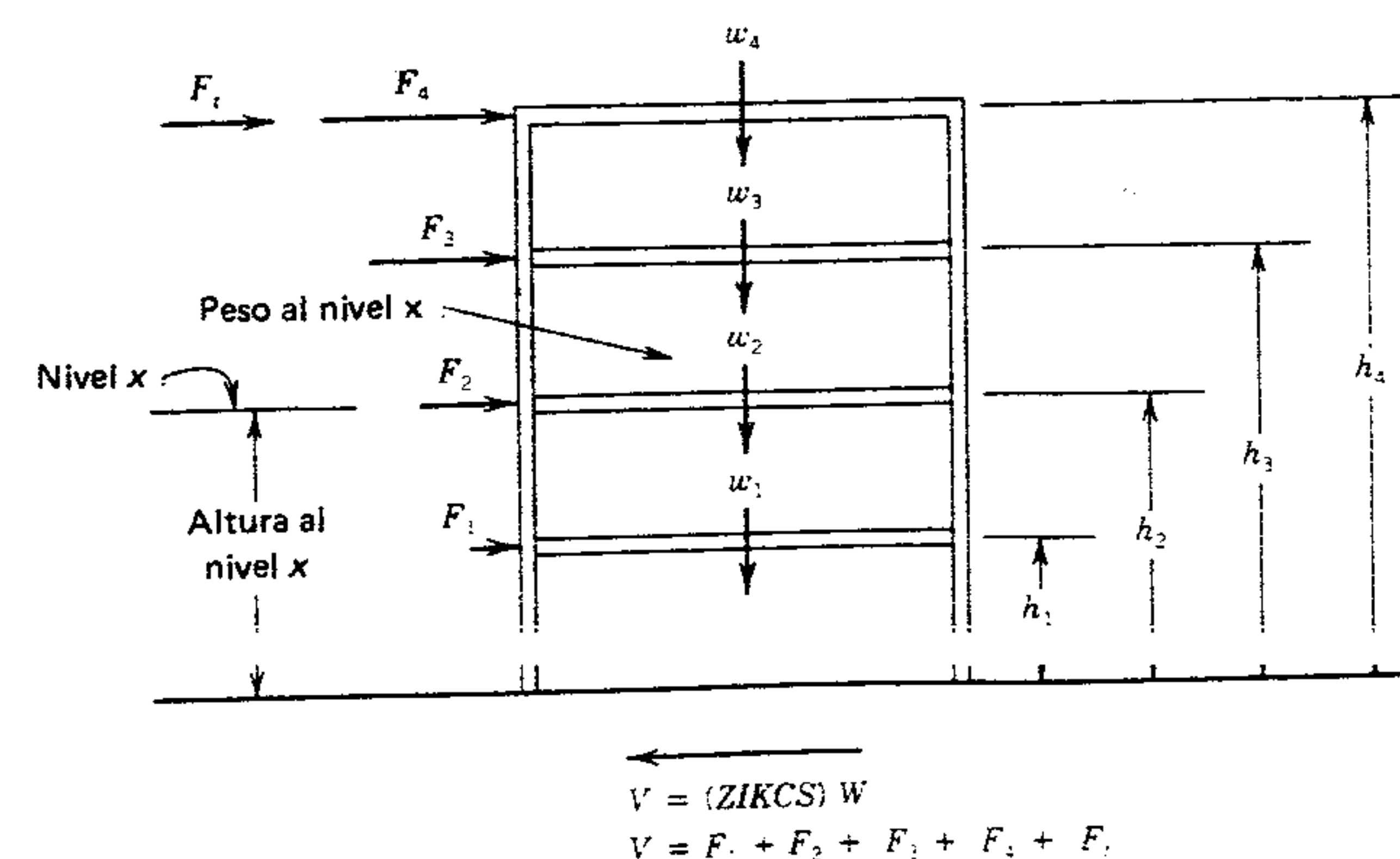


Figura 8.41 Distribución de carga en elementos verticales.



Se debe tener presente que estas cargas sísmicas no son reales. Durante un sismo no se imponen cargas laterales realmente sobre la estructura; se presenta simplemente una distorsión debida a las vibraciones del suelo, y las cargas que se seleccionan para cada elemento son tales que dupliquen la distorsión máxima en ese elemento.

La fórmula de carga del diafragma es

$$F_{px} = \frac{\sum_{i=x}^n F_i}{\sum_{i=x}^n w_i} (w_{px})$$

donde:

$F_{px}$  = carga del diafragma, pero no tiene que ser mayor que  $0.3ZIw_{px}$ , ni menor que  $0.14ZIw_{px}$ .

$w_{px}$  = carga de gravedad impuesta sobre el diafragma al nivel  $x$ .

$\sum_{i=x}^n F_i$  = suma de todas las cargas laterales al nivel  $x$  y arriba. (Estas son las cargas laterales —triángulo inverso— que se supone que actúan en cada nivel sobre los elementos verticales).

$\sum_{i=x}^n w_i$  = suma de todas las cargas de gravedad al nivel  $x$  y arriba. (En la fórmula anterior, el UBC usa el subíndice  $l$  en vez de  $i$ , pero tiene el mismo significado).

#### Ejemplo. Distribución de carga

En la figura 8.42 se ilustra un edificio de marcos de acero y cuatro pisos. Los marcos de acero conforman las líneas de la retícula y tienen conexiones dúctiles resistentes a momento, lo cual los hace marcos especiales. Cada cubierta de piso así como

Construcción del techo, incluyendo plafones 48 lb/pie<sup>2</sup>  
Construcción de piso, incluyendo plafones 68 lb/pie<sup>2</sup>

Peso de muros divisorios interiores (por área de piso) 12 lb/pie<sup>2</sup>  
Peso muro exterior (promedio por área de muro) 20 lb/pie<sup>2</sup>

Para hacer aplicable este ejemplo las estipulaciones tanto del ANSI A58.1-1982 como del UBC 1982, se supondrá que el coeficiente sísmico es 0.084, y  $T$  menor que 0.7 seg.

Calcular las cargas laterales por marco, en el sentido transversal solamente (en realidad ambos sentidos requerirían investigación). Asimismo, calcular las cargas de diseño del diafragma en el sentido trasversal.

#### Solución

- Determinar todas las cargas de gravedad que contribuyen al cortante en la base e itemizarlas conforme al nivel al que se asignan

#### Cargas en kips

Construcción del techo	50(150)0.048 = 360
Construcción de piso	50(150)0.068 = 510
Divisiones de piso	50(150)0.012 = 90
Muros típicos	12(400)0.020 = 96
Muros de techo	6(400)0.020 = 48
Muros del segundo piso	13(400)0.020 = 104
Nivel 4 (techo) $w = 360 + 48$	= 408 kips
Nivel 3, $w_3 = 510 + 90 + 96$	= 696
Nivel 2, $w_2 = 510 + 90 + 96$	= 696

$$W = 2504 \text{ kips}$$

- Calcular el cortante total en la base.

$$V = 0.084(2504) = 210 \text{ kips}$$

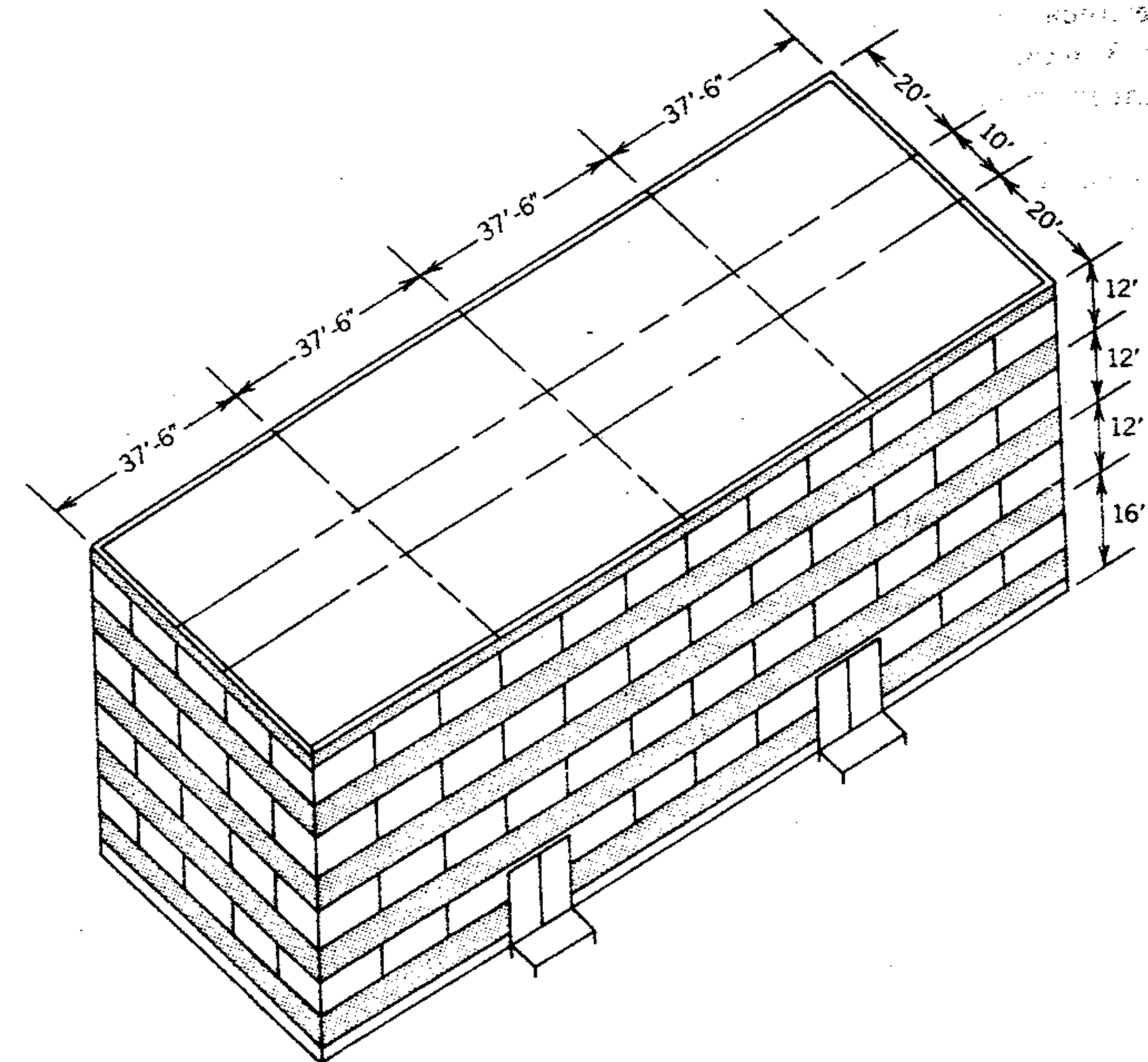


Figura 8.42 Ejemplo de distribución de carga.

- Determinar la carga especial ( $F^*$ ) situada a nivel del techo. Como se dio que  $T < 0.7$  seg,  $F_t = 0$ .
- Calcular la porción de  $(V - F_t) = 210$  kips que se aplica a cada nivel. Este paso se hace completando la tabla 8.7 como sigue:

- Colocar los pesos de gravedad en cada nivel determinado en el paso 1 en la columna 2.
- Colocar la altura de cada nivel sobre la base en la columna 3.

Tabla 8.7 Distribución de cortante en la base.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Nivel	$w_x$ (kips)	$h_x$ (pie)	$w_x h_x$ (kip-pie)	$\frac{w_x h_x}{\sum w_i h_i}$	$F_x = \frac{(V - F_t) w_x h_x}{\sum w_i h_i}$
4	408	16	6528	0.28	58.8
3	696	38	26,448	0.35	73.5
2	696	26	18,096	0.24	50.4
1	704	14	9,856	0.13	27.3
			$\Sigma = 74,800$	$\Sigma = 1.00$	$\Sigma = 210.0$



- c) Determinar el producto de las columnas 2 y 3 en cada nivel, y agregar el total en la parte inferior de la columna 4.
- d) Dividir cada valor de la columna 4 entre el total de la columna 4, observando que estas fracciones deben totalizar 1.0.
- e) Determinar el valor de  $F_x$  en cada nivel multiplicando el valor en la columna 5 por  $(V - F_t)$  y poner los resultados en la columna 6.

5. Convertir la carga lateral  $F_x$  y la carga de gravedad  $w_x$  en cada nivel a sus respectivos valores por marco. Como los diafragmas son rígidos y hay cinco marcos de igual rigidez, cada valor se divide entre cinco. Mostrar estos valores para los marcos en un croquis y determinar la envolvente de cortante (figura 8.43).

Muchos diseñadores pensarían que la investigación en esta etapa constituye solamente un análisis preliminar. Si esto es así dependería en parte de la exactitud de los valores usados en el análisis, en particular, el valor del coeficiente sísmico. Tal vez se pudiera justificar un coeficiente sísmico más preciso y reducido. Para determinar si tal reducción

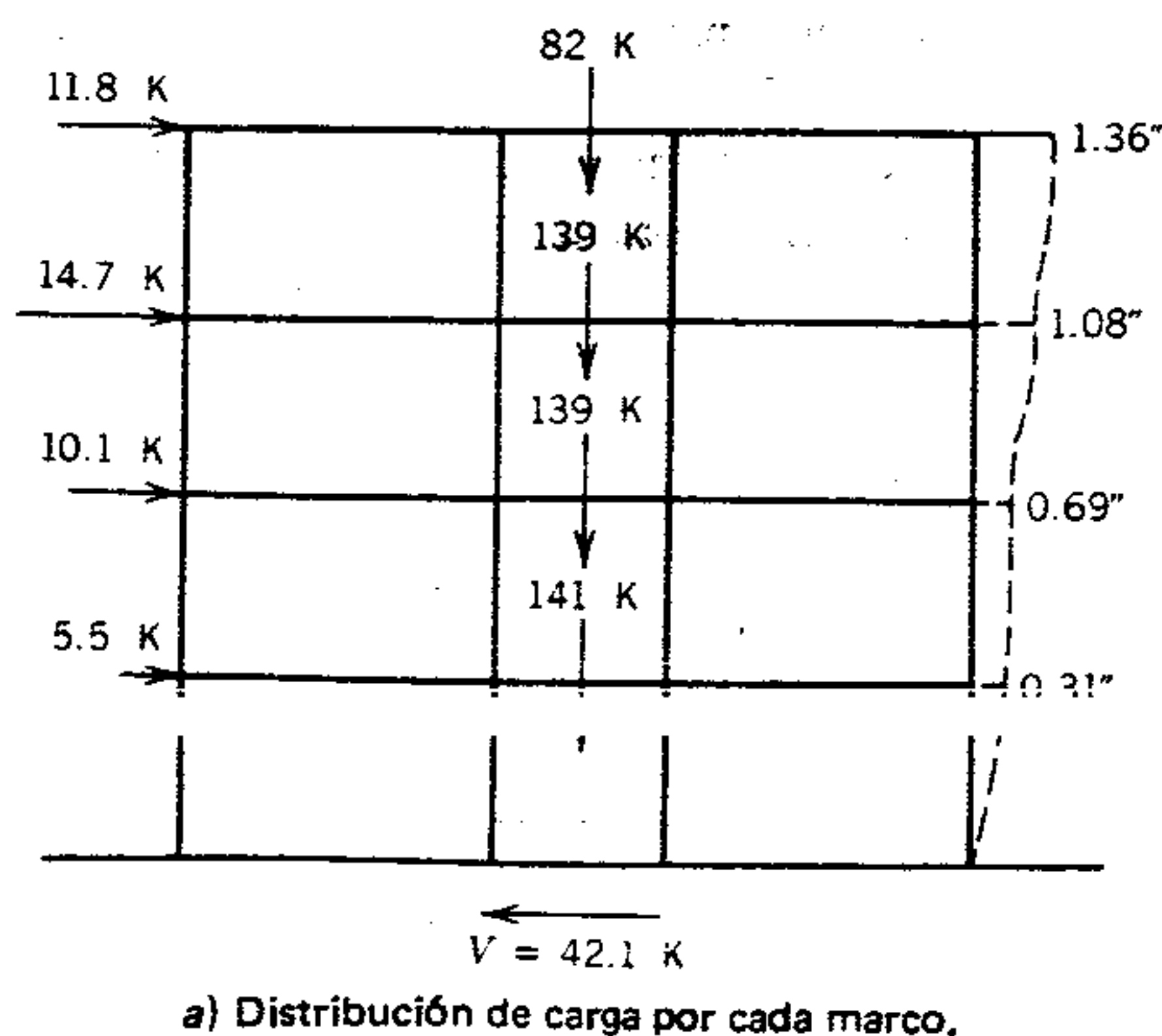


Figura 8.43 Ejemplo de distribución de carga.

es posible, es necesario establecer el tamaño de las vigas y columnas en el marco y calcular el desplazamiento lateral de cada piso a causa de la carga lateral como se calculó. Este paso se podría hacer manualmente mediante la teoría estructural elástica o mediante el uso de un programa de computadora como se indica y describe en el apéndice E. Para lograr esta precisión se hace una corrida de computadora y los desplazamientos de piso (con relación a la base) se anotan así en la figura 8.43a.

De los datos de la figura 8.43a, el período fundamental de vibración ( $T$ ) se calcula usando la fórmula de Rayleigh (sección 8.10), es decir,

$$T = 2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n [w_i \delta_i^2] \div g \sum_{i=1}^n [f_i \delta_i]}$$

$$\sum w_i \delta_i = 1.41(0.31)^2 + 139(0.69)^2 + 139(1.08)^2 + 82(1.36)^2 \approx 380$$

$$\sum f_i \delta_i = 5.5(0.31) + 10.1(0.69) + 14.7(1.08) + 11.8(1.36) \approx 41$$

$$T = 2\pi \sqrt{380/384(41)} = 0.98 \text{ seg.}$$

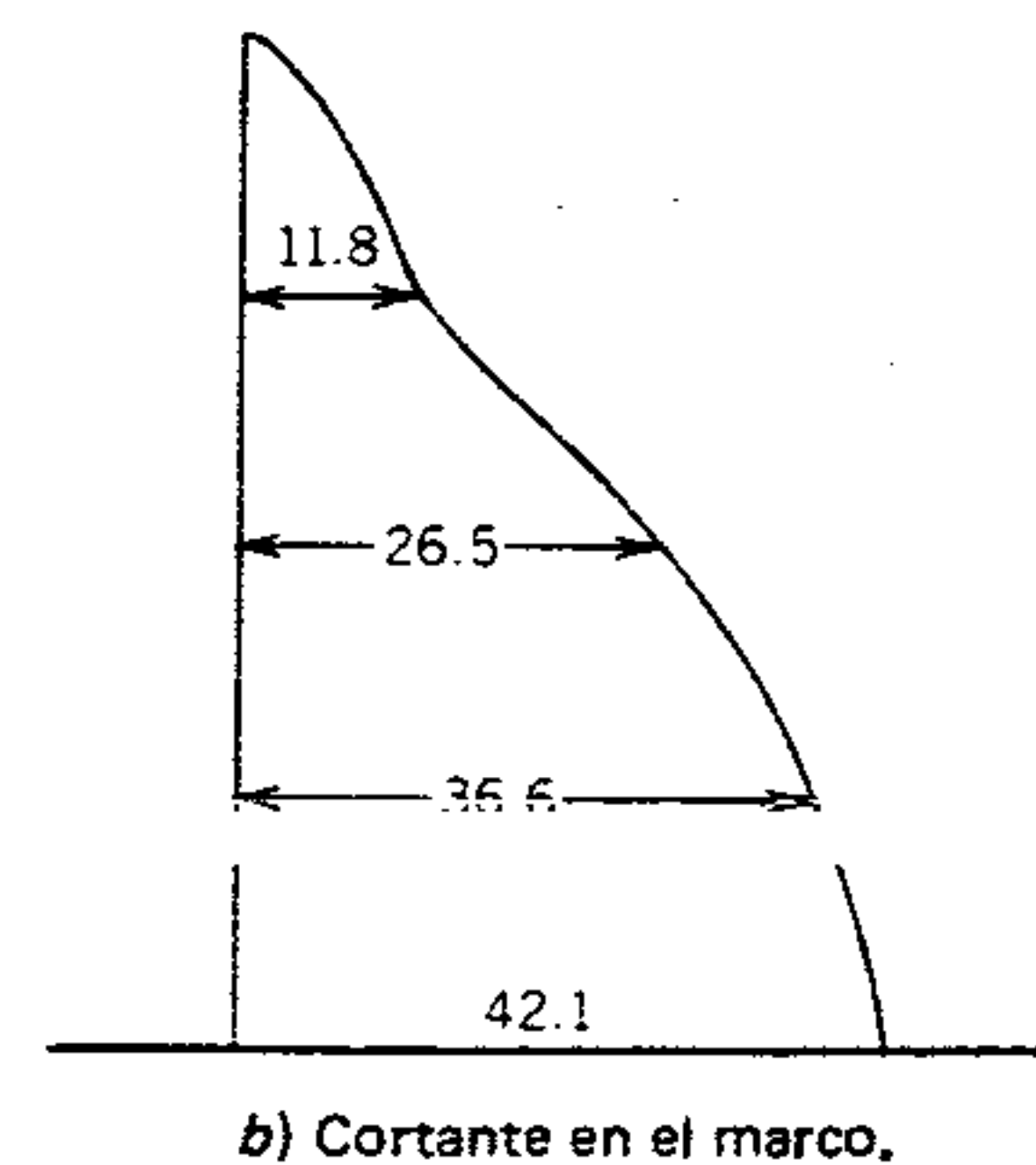


Tabla 8.8 Carga de diafragma.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Nivel	$F_i$	$\Sigma F_i$	$w_i$	$\Sigma w_i$	$\frac{F_i + \Sigma F_i}{\Sigma w_i}$	Mín. Máx.	$F_{px}$
4 (techo)	58.8	58.8	408	408	0.144	—	58.8
3	73.5	132.3	696	1104	0.120	—	83.5
2	50.4	182.7	696	1800	0.102	0.105	73.1
1	27.3	210.0	704	2504	0.084	0.105	73.9

Si este período de vibración es mayor que el usado en establecer el coeficiente sísmico original (0.084), entonces es posible que las fuerzas laterales se pudieran reducir, y se debe repetir el procedimiento que se acaba de describir.

6. Usando los valores calculados en el paso 4, determinar la carga de diseño para el diafragma en cada nivel. Este paso se hace completando la tabla 8.8 como sigue:

- a) Colocar la carga lateral del marco en cada nivel determinado en el paso 4 en la columna 2.
- b) Colocar la suma progresiva de los valores en la columna 2 en la columna 3.

- c) Los valores de la columna 4 son los pesos en cada nivel, determinados en el paso 1.
- d) Colocar la suma progresiva de los valores de la columna 4 en la columna 5.
- e) El valor en cada nivel en la columna 3 se divide entre el valor correspondiente en la columna 5 y se coloca en la columna 6.
- f) Se requiere una revisión de los factores de diafragma máximo y mínimo. Suponiendo la zona 3 ( $Z = 3/4$ ) y un edificio no esencial ( $I = 1.0$ ), los factores de diafragma son

$$\text{Máx} = 0.30 \text{ ZI} = 0.3(0.75)1 = 0.225$$

$$\text{Mín} = 0.14 \text{ ZI} = 0.14(0.75)1 = 0.105$$

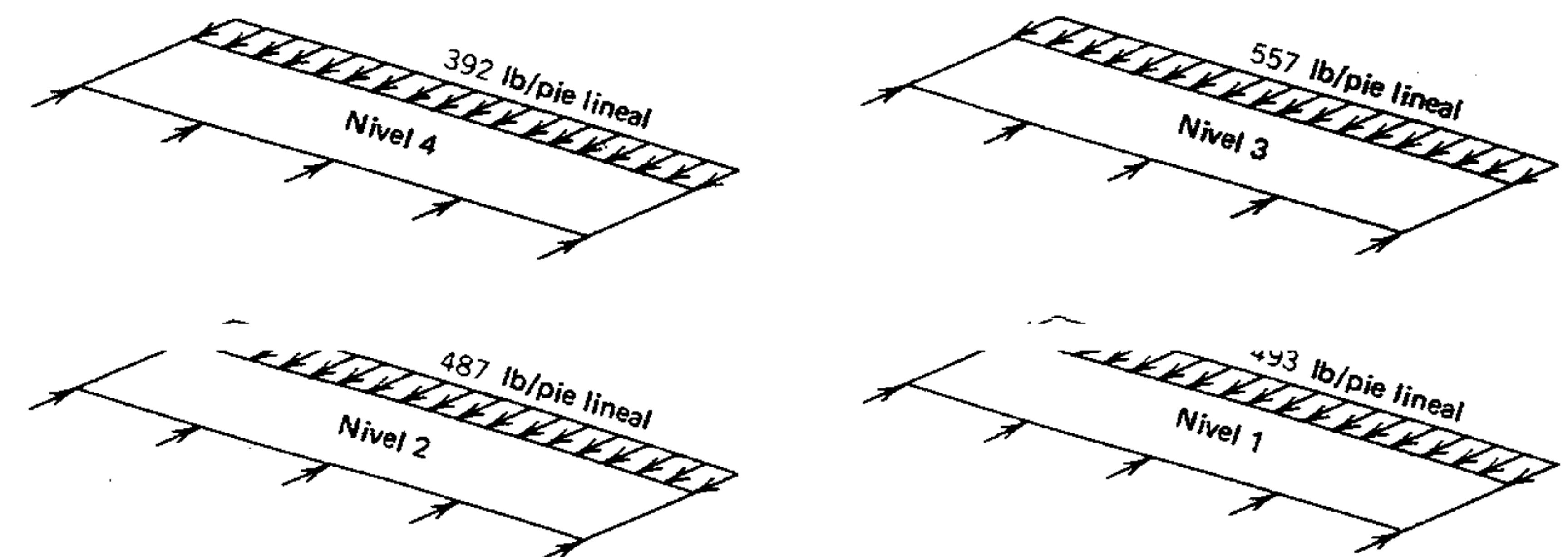


Figura 8.44 Diagramas de cuerpo libre de diafragmas.



Como el máximo es mayor que el valor en la columna 6, no se usa. Sin embargo, el mínimo excede los de los niveles 1 y 2; por lo tanto, se coloca en la columna 7.

- g) Multiplicar el valor apropiado de la columna 6 o 7 por el peso de diafragma del nivel correspondiente en la columna 4 y colocarlo en la columna 8.

La carga de diseño del diafragma  $F_{px}$ , como se ve en la tabla 8.8, se aplica a toda la longitud del diafragma de una manera uniforme y es resistida por los cinco marcos de acero. En la figura 8.44 se ilustra el diagrama de cuerpo libre de cada diafragma.

El diseño completo de efectos sísmicos y/o cargas de viento requiere más investigación que la presentada en este capítulo. Con frecuencia, los componentes o partes individuales de un edificio tienen un requerimiento de carga local que es diferente al que se utiliza cuando se considera el edificio como un todo. El énfasis de este capítulo se ha puesto en

edificios completos y sistemas estructurales principales en vez de sus partes individuales.

### PROBLEMAS

El edificio ilustrado en la figura 8.42 se supone que es de oficinas y tiene cuatro pisos, con *todas* las alturas de piso a piso de 11 pies. Las otras dimensiones, pesos y propiedades siguen siendo las mismas que se describieron en el ejemplo. Se usan diafragmas rígidos en todo el conjunto. Sin embargo, los principales marcos de acero tienen conexiones estándar resistentes a momento. Calcular las cargas solamente en el sentido transversal para:

1. Un terreno de construcción con suelo blando y profundo en Charleston, Carolina del Sur. Usar las estipulaciones del ANSI A58.1-1982.
2. Un terreno de construcción está situado en Los Angeles, California, para el cual no hay datos geotécnicos. Usar las recomendaciones del UBC 1982.

## 9

# Edificios de baja altura y tipo industrial



### 9.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se tratarán principalmente el análisis y el diseño de armaduras de techo y marcos arriostrados mediante métodos estáticamente determinados, y la utilización de estos elementos en edificios de baja altura y de tipo industrial.

En el capítulo 10 se verá por separado el análisis de marcos estáticamente indeterminados (método convencional), en el capítulo 11 el diseño plástico y en el capítulo 12 el método computarizado.

### 9.2 CARGAS SOBRE ELEMENTOS EXTERNOS DE EDIFICIOS: CONSIDERACIONES GENERALES

En el capítulo 1 se presentó el tema en general de las cargas sobre edificios y elementos de edificios. En él se señaló que, aun cuando hay un acuerdo general sobre los tipos de cargas que se deben considerar en el diseño de edificios, el acuerdo es menor en cuanto a la forma de clasificar, determinar, especificar y aplicar estas cargas. No obstante, en general las cargas a considerar son las siguientes:

**Cargas muertas:** El peso de materiales de construcción permanentes (fijos), incluyendo los propios elementos estructurales y el equipo.

**Cargas vivas:** Cargas de ocupación (es decir, gente, vehículos y otros equipos móviles, muebles, fluidos y materiales almacenados, equipo móvil y cancelles divisorios); cargas inherentes a la construcción, mantenimiento y reparación; cargas de impacto.

**Cargas ambientales:** viento, nieve, lluvia, incluyendo fuerzas debidas a encharcamiento de agua, peso y presión del suelo y del agua del suelo; y fuerzas y efectos autodeformantes (expansión y contracción) debidos a cambios en la temperatura y la humedad, al flujo plástico y al movimiento debido a asentamientos diferenciales.



No será necesario aplicar todas estas cargas a todos los edificios, ni serán aditivas, y ciertamente no todas se aplicarán externamente a los elementos del edificio, es decir, a techos y muros exteriores.

En el caso de los techos, la carga muerta soportada por los miembros estructurales que sostienen el techo consistirán principalmente en el peso de la cubierta del techo y su recubrimiento, y el peso de los propios miembros estructurales.<sup>1</sup> La carga muerta sobre muros de carga exteriores o sobre pilastras de apoyo integradas a los muros será la carga transmitida a éstos por los miembros estructurales soportantes del techo más su peso propio. La carga muerta sobre columnas a las que está sujeto el sistema envolvente contra la intemperie será la carga transmitida a éstas por los miembros estructurales que soportan el techo, el peso de las columnas y los elementos de la envoltura contra la intemperie sujetos a ellas. Cuando el elemento estructural soportante del techo es una armadura o un elemento armado de un marco arriostrado, por lo general la carga muerta del techo se transmite a las armaduras por medio de vigas y/o largueros, que a su vez agregan su propio peso a la carga muerta.

Las cargas vivas sobre elementos exteriores del edificio dependerán en gran medida de la función y el diseño finales del edificio dado. Por ejemplo, un techo plano puede necesitar soportar cierto número de cargas asociadas con la ocupación, si, por ejemplo, también tiene el propósito de servir como terraza o estacionamiento de automóviles. Todos los techos, ya sean planos, con pendiente o a dos aguas, necesitan soportar cargas relacionadas con la construcción, el mantenimiento y las reparaciones. Y en el caso de techos soportados por armaduras o marcos arriostrados en que la armadura o el elemento arriostrado de un marco está expuesto al exterior, será necesario considerar la posibilidad de que las armaduras se usarán para soportar

<sup>1</sup> Con frecuencia las armaduras soportan plafones suspendidos y, a veces, también pisos suspendidos. Los plafones se pueden colgar de los largueros o de la cuerda inferior de las armaduras. En el primer caso, el peso del plafón llega a la armadura a través de los largueros apoyados sobre la cuerda superior; en el último, las cargas se consideran generalmente aplicadas a los puntos del tablero de la cuerda inferior.

cargas concentradas no planeadas, como las que se deberían al izaje con aparejo de poleas desde la cuerda inferior o de un punto de un tablero (usualmente se especifica un mínimo de 2 kips de capacidad de carga). Son menos probables las cargas vivas sobre muros exteriores, que no sean cargas de impacto inusuales; sin embargo, se debe investigar la posibilidad.

Las cargas ambientales son aquéllas que se derivan de la localización geofísica del edificio. La mayoría actúa sobre elementos exteriores del edificio. En el capítulo 8 se trataron las cargas sísmicas y de viento en la forma de cargas laterales, es decir, en el contexto de cargas que actúan horizontalmente sobre techos y muros o que pueden convertirse a una equivalente horizontal y luego transferirse hacia abajo a través de elementos estructurales verticales hasta la cimentación del edificio. La nieve y la lluvia son también importantes factores relacionados con el ambiente y se tratarán en la siguiente sección. Si hay razón para creer que las fuerzas y efectos autodeformantes serán significativos, también se deben tratar individualmente; sin embargo, estas fuerzas y efectos no se aplican necesariamente sólo a los elementos exteriores del edificio.

### 9.3 CARGAS DE NIEVE Y LLUVIA

El diseño adecuado de cargas de nieve para techos dependerá de cierto número de factores, siendo la localización geográfica el más obvio. Sin embargo, también son importantes la exposición y la configuración del techo, la nieve tiende a deslizarse en superficies de techos lisos y con gran pendiente, y a acumularse sobre techos rugosos y relativamente planos.

Es más probable que la nieve se disperse de un techo cuando éste está expuesto al viento, y que se acumule a un mayor espesor que el normal sobre la superficie de un suelo donde puede haber deslizamientos y donde la nieve acumulada se puede resbalar del nivel superior al inferior del techo o caer desde estructuras adyacentes hechas por el hombre o naturales como el follaje. Es muy probable que la nieve se acumule sobre techos de edificios sin cale-

facción y de edificios superaislados. Finalmente, es importante confirmar la posibilidad y el grado de cargas agregadas que se podrían crear por la lluvia sobre la nieve y por el encharcamiento de nieve derretida y/o agua de lluvia.

La nieve seca recién caída puede pesar tan poco como 5 libras por pie cúbico, mientras que la nieve húmeda puede pesar 12 lb por pie cúbico. Puede ser necesario estimar la altura acumulativa máxima, así como hacer supuestos sobre el tipo de nieve más probable, con el fin de establecer una carga de diseño segura. Asimismo, en algunos climas no es rara la secuencia de nieve fresca, fusión parcial, congelación y posterior acumulación. En tales casos una estimación conservadora de la carga probable será prudente. En muchas zonas, por supuesto, las autoridades competentes establecen la carga de diseño.

En ANSI A58.1-1982 se dan mapas de cargas de nieve sobre el suelo en los 48 estados de Estados Unidos y una tabla para diversos lugares de Alaska, y se señala que hay muchas áreas cuyas variaciones locales imposibilitan el trazo de mapas, mientras que en otras los valores dados pueden no ser apropiados porque en ellos no se consideran todas las grandes elevaciones. El procedimiento de A58.1-1982 para determinar el diseño apropiado de la carga de nieve consiste en:

1. Determinar el peso por pie cuadrado de la carga de nieve sobre el suelo para la localización geográfica específica e investigar los registros climatológicos locales y la experiencia, donde haya razón para creer que la carga real podría exceder la carga dada en el mapa o en la tabla.
2. Calcular la carga de nieve sobre techo plano, usando las siguientes fórmulas:

$$p_f = 0.6C_e C_t I p_g \text{ para Alaska}^2$$

<sup>2</sup> Nótese que en ANSI A58.1-1982 se dan los valores mínimos para la carga de nieve sobre techo plano.

donde

- $p_f$  = carga de nieve sobre techo plano en lb/pie.<sup>2</sup>  
 $C_e$  = factor de exposición (para considerar efectos del viento).  
 $C_t$  = factor térmico (para considerar el efecto del calentamiento de la estructura).  
 $I$  = factor de importancia (para considerar las consecuencias relativas de falla estructural).  
 $p_g$  = carga de nieve sobre el suelo en lb/pie<sup>2</sup> (como se vio antes).

3. Considerar la pendiente del techo, si la tiene, usando la siguiente fórmula:

$$p_s = C_s p_f$$

donde:

- $p_s$  = carga de nieve de diseño sobre techo inclinado en lb/pie<sup>2</sup> actuando sobre la proyección horizontal de la superficie del techo.  
 $C_s$  = factor de pendiente (para considerar techos calientes o fríos, y si es o no resbalosa la superficie).<sup>3</sup>  
 $p_f$  = carga de nieve sobre techo plano en lb/pie.<sup>2</sup>

4. Considerar cargas desbalanceadas, es decir, carga uniforme de nieve sobre el lado de sotavento solamente, de techos con pendientes entre 15 y 70 grados, usando la siguiente fórmula.<sup>3</sup>

$$p_l = 1.5p_s/C_e$$

<sup>3</sup> Nótese que en ANSI A58.1-1982, las partes de techos curvos en que la pendiente excede de 70 grados se consideran libres de carga de nieve, y que no se aplica reducción de carga de nieve debida a la pendiente en techos de placas plegadas múltiples, dientes de sierra y de bóvedas de cañón.



5. Considerar deslizamientos de nieve sobre los techos inferiores de la estructura y de estructuras adyacentes y del terreno, donde la carga de nieve sobre el suelo ( $p_g$ ) excede de 10 lb/pie.<sup>2</sup>
6. Considerar deslizamiento de nieve de voladizos del techo mayores de 15 pies.
7. Considerar deslizamiento de nieve de superficies de techos superiores hacia inferiores.
8. Considerar las partes no cargadas, es decir, el efecto de eliminar la mitad de la carga de nieve de cualquier parte de un área cargada.
9. Considerar cargas extra de lluvia sobre nieve en áreas en que es probable que ocurran lluvias intensas junto con nieve, por ejemplo, agregar una sobrecarga de 5 lb/pie.<sup>2</sup> por lluvia sobre nieve para techos con pendientes menores de  $\frac{1}{2}$  pulg/pie.
10. Considerar efectos de encharcamiento (es decir, deflexiones y subsecuente incremento de la carga) de lluvia sobre nieve y/o nieve derretida.

Debe notarse que también se debe investigar, como se dijo antes, la posibilidad del deslizamiento de nieve contra muros y contra techos que se extienden hasta cerca del suelo.

El siguiente ejemplo ilustrará el uso de este procedimiento.

### Ejemplo

Determinar la carga de nieve sobre un edificio que tiene un techo a dos aguas apoyado por la armadura de la figura 9.3. El edificio está situado en Springfield, Illinois, donde la carga de nieve sobre el suelo es de 20 lb/pie.<sup>2</sup> No hay protección contra el viento y el edificio tiene calefacción interior. Tendrá una superficie de techo resbaladiza, podrá haber más de 300 personas en su interior sin divisiones, y los aleros estarán muy por encima de la superficie del suelo.

1. Determinar la carga de nieve sobre techo plano.

$$p_f = 0.7C_e C_t I p_g$$

donde: el factor de exposición  $C_e = 0.8$  para áreas expuestas al viento y el techo expuesto por todos los lados sin que el terreno, los árboles o las estructuras más altas ofrezcan protección; el factor térmico  $C_t = 1.0$  para estructuras con calefacción; el factor de importancia  $I = 1.1$  para una estructura que podría tener más de 300 personas en su interior sin divisiones.

$$p_f = 0.7(0.8)(1.0)(1.1)20 = 12.32 \text{ lb/pie}^2$$

2. Considerar el efecto de la pendiente del techo

$$p_s = C_s p_f$$

donde el factor de pendiente del techo<sup>4</sup>  $C_s \approx 0.6$  para una pendiente = 37° y  $p_f = 12.32 \text{ lb/pie}^2$

$$p_s = 0.6(12.32) = 7.39 \text{ lb/pie}^2$$

3. Considerar una carga de nieve desbalanceada

$$p_l = 1.5p_s/C_e \text{ para pendiente a sotavento}$$

$$p_l = 1.5(7.39)/0.8 = 13.86 \text{ lb/pie}^2$$

4. No se tiene que considerar la nieve que se desliza o desploma, ni la lluvia sobre la nieve (la pendiente excede de  $\frac{1}{2}$  pulg/pie), o encharcamiento.

Por lo tanto, la carga de nieve de diseño sería 7.39 lb/pie.<sup>2</sup> aplicada sobre toda la superficie del techo, o la carga desbalanceada de 13.86 lb/pie.<sup>2</sup> aplicada a cualquiera de las dos pendientes del techo (considerando que el viento puede venir de cualquier dirección); regirá la que produzca el esfuerzo mayor.

La ANSI A58.1-1982 contiene gráficas para determinar el factor de pendiente del techo,  $C_s$ , para techos calientes y fríos. Para superficies sin obstrucciones y resbalosas de techos calientes,  $C_s = 1.0$  para pendientes desde cero a 15° (es decir, 3 en 12) y luego decrece uniformemente a cero en pendientes de 70° y más. Expresado esto en forma de ecuación,  $C_s = 1.0 - (\text{pendiente} - 15^\circ)/55^\circ$ , lo cual para una pendiente de 37°  $\approx 0.6$ .

## 9.4 CARGAS COMBINADAS

Como se señaló anteriormente, no existe acuerdo general sobre la manera en que se deben combinar las cargas. En el capítulo 8 se señaló que se acepta razonablemente bien que no hay necesidad de aplicar simultáneamente las cargas sísmicas y de viento. La Especificación AISC incluye la carga de nieve en su definición de cargas vivas, pero en la sección 1.3.7 de la Especificación, ANSI A58.1, última edición, se especifica su uso a falta de algún requisito reglamentario. Las reducciones de carga viva se aplican solamente a miembros.

ANSI A58.1-1982 estipula que la carga de diseño será cualquiera de las siguientes combinaciones que produzca el efecto más desfavorable, reconociendo que el efecto puede ocurrir cuando una o más de las cargas contribuyentes no está actuando:

$D$  = carga muerta

$D + G$  = carga muerta más carga de gravedad variable, es decir, cargas viva, de nieve y de lluvia

$D + (W \text{ o } E)$  = carga muerta más carga de viento o sísmica  
 $D + G + (W \text{ o } E)$

En ANSI A58.1 también se establece que las cargas combinadas totales se pueden multiplicar por el siguiente factor (para aquellas cargas que aquí tienen la mayor importancia):

$$D + 0.75[G + (W \text{ o } E)]$$

## 9.5 ARMADURAS DE TECHO

Una estructura de techo arriostrada completa consiste en una cubierta de techo, un sistema de vigas y largueros que soportan la cubierta y armaduras de techo que soportan los largueros y cubren la distancia entre los muros, pilares o columnas de apoyo. El área cubierta entre dos armaduras se llama vano.

Los largueros son las vigas horizontales que cubren la distancia entre armaduras. En algunos casos la cubierta se apoya directamente sobre largueros; en otros, se apoya sobre vigas secundarias o cabios o bien sobre sublargueros perpendiculares a y apoyados en largueros.

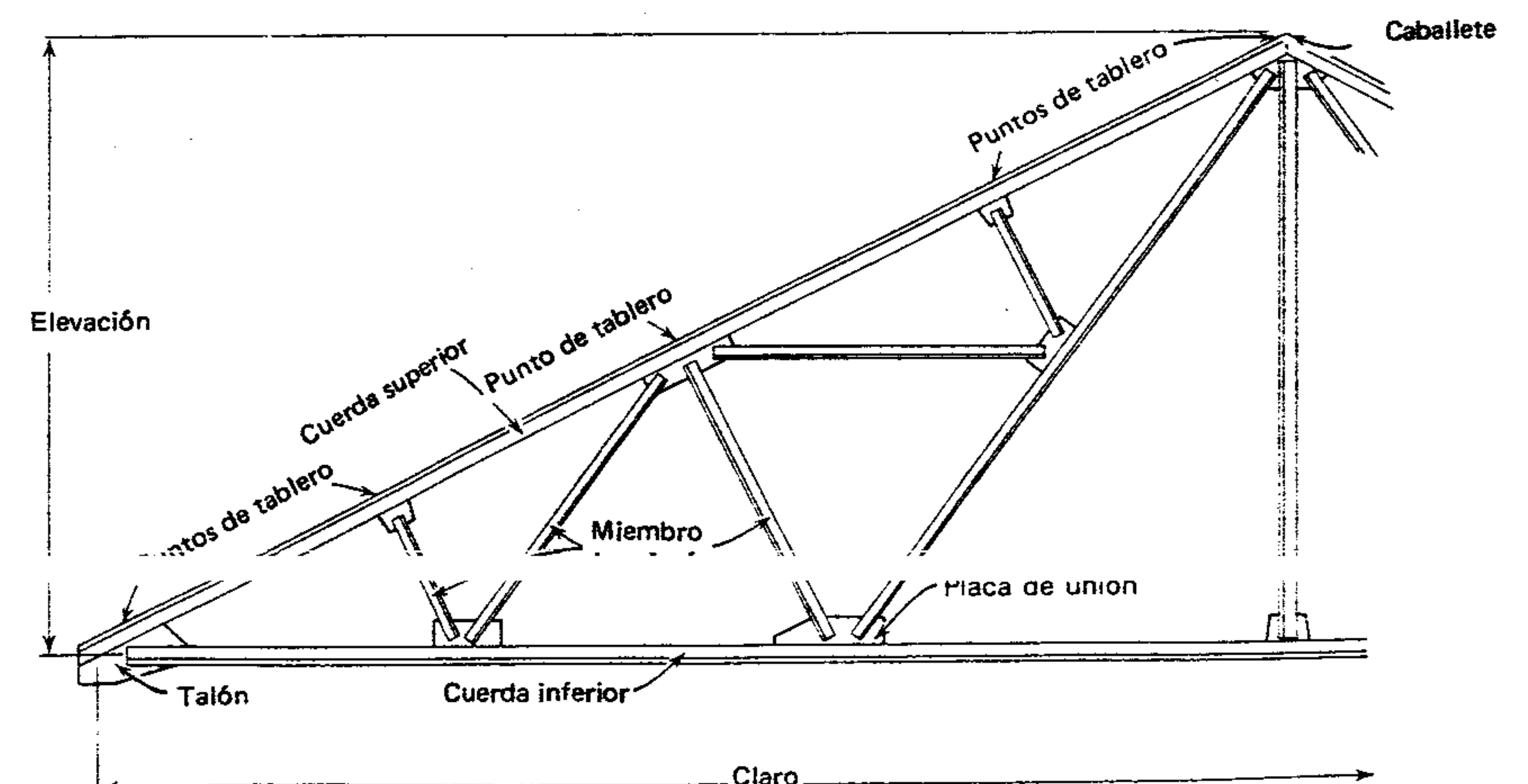


Figura 9.1 Típica armadura de techo.



Por lo general los componentes de una armadura de techo son una cuerda superior, una cuerda inferior y un sistema de alma. Aunque tal vez es más común tener una cuerda superior inclinada y una cuerda horizontal inferior, como se ve en la figura 9.1, hay numerosas variaciones. Por ejemplo, la cuerda superior puede ser horizontal para que el techo sea plano, o bien, la cuerda inferior puede ser inclinada o arqueada para aumentar el espacio abajo de la armadura. Y las armaduras de un tipo similar al de la figura 9.1 se pueden invertir.

Con la armadura típica de la figura 9.1, la junta superior o pico soporta el caballete del techo; las juntas de los extremos se denominan talones. Las juntas donde los miembros del alma se intersectan con las cuerdas se llaman puntos de tablero y la distancia entre estas juntas es la longitud de un tablero. Las placas que se usan para conectar miembros se conocen como placas de nudo o cartabones. Generalmente los miembros están conectados a las placas de nudo o entre sí mediante tornillos o soldaduras.

La elevación o altura de una armadura se mide verticalmente desde el pico hasta la cuerda horizontal inferior. La altura de una armadura con cuerda inferior arqueada se mide desde el pico hasta una línea horizontal que pase a través de los apoyos.

La inclinación es la relación entre la elevación y la longitud del claro; es decir, una armadura con una altura de 10 pies y un claro de 40 pies tiene una inclinación de  $\frac{10}{40}$ , o sea  $\frac{1}{4}$ . Esto no se debe confundir con la pendiente, que es la relación de la altura con la mitad del claro. En el caso mencionado antes, la pendiente es de  $\frac{10}{20}$  ó  $\frac{1}{2}$ . Con frecuencia estos dos términos se usan de modo intercambiable y, por tanto, erróneamente, sobre todo por los trabajadores de este campo. Una manera común de expresar la pendiente de un techo es dar la cantidad de elevación por pie horizontal; por ejemplo, una pendiente de  $\frac{1}{2}$  es lo mismo que una elevación de 6 pulg en 12 pulg, o una pendiente de "6 en 12".

La pendiente y la inclinación se determinan por consideraciones arquitectónicas o por las posibilidades de los materiales de techumbre; cuando no hay un factor determinante, una elevación igual a  $\frac{1}{4}$  del claro por lo general será económica.

## 9.6 TIPOS DE ARMADURAS DE TECHO

Existe una gran cantidad de formas de armaduras de techo que se emplean en la construcción de edificios. Para claros promedio, la armadura Fink, que se ilustra en las figuras 9.2a y b, es una de las más comunes. Para construir una armadura Fink como la de la figura 9.2a, se sitúan miembros perpendiculares desde el centro de las cuerdas superiores izquierda y derecha y se extienden hasta llegar a la cuerda inferior. Los dos restantes miembros del alma van desde estas intersecciones hasta el pico, como se ve. El número de tableros en la mitad de la armadura se puede aumentar a 4 subdividiendo cada tablero en 2, como se ve en la figura 9.2b. Este proceso se puede repetir de nuevo y tener 8 tableros. La línea punteada en el centro indica la posición de un tirante que se agrega con frecuencia para dar rigidez, pero en teoría no está sometido a esfuerzo. Una desventaja de este tipo de armadura es que el número de tableros sólo se puede aumentar duplicando el número previo. Una modificación de la armadura Fink, que permite mayor flexibilidad en el número de tableros, es la armadura de abanico de las figuras 9.2c y d, es decir, los miembros del alma no intersectan la cuerda superior en ángulos rectos. En la figura 9.2 se ilustran varios tipos diferentes de armaduras de techo que también se usan con frecuencia. Los ilustrados en las figuras 9.2i y j se consideran armaduras planas aunque sus cuerdas superiores estén ligeramente inclinadas.

Cuando las armaduras soportan largueros solamente en puntos de tablero, una longitud de tablero de cuerda superior conveniente es de cerca de 8 pies. Esto daría un claro máximo de cerca de 30 pies para la armadura que se ilustra en la figura 9.2a, 40 pies para c, 55 pies para b y 75 pies para d. Por supuesto, estos claros máximos son sólo aproximados y pueden variar para satisfacer condiciones locales.

## 9.7 ESPACIAMIENTO DE ARMADURAS

Los sistemas de techado abarcan tantas variables que no se pueden dar reglas sencillas para la selec-

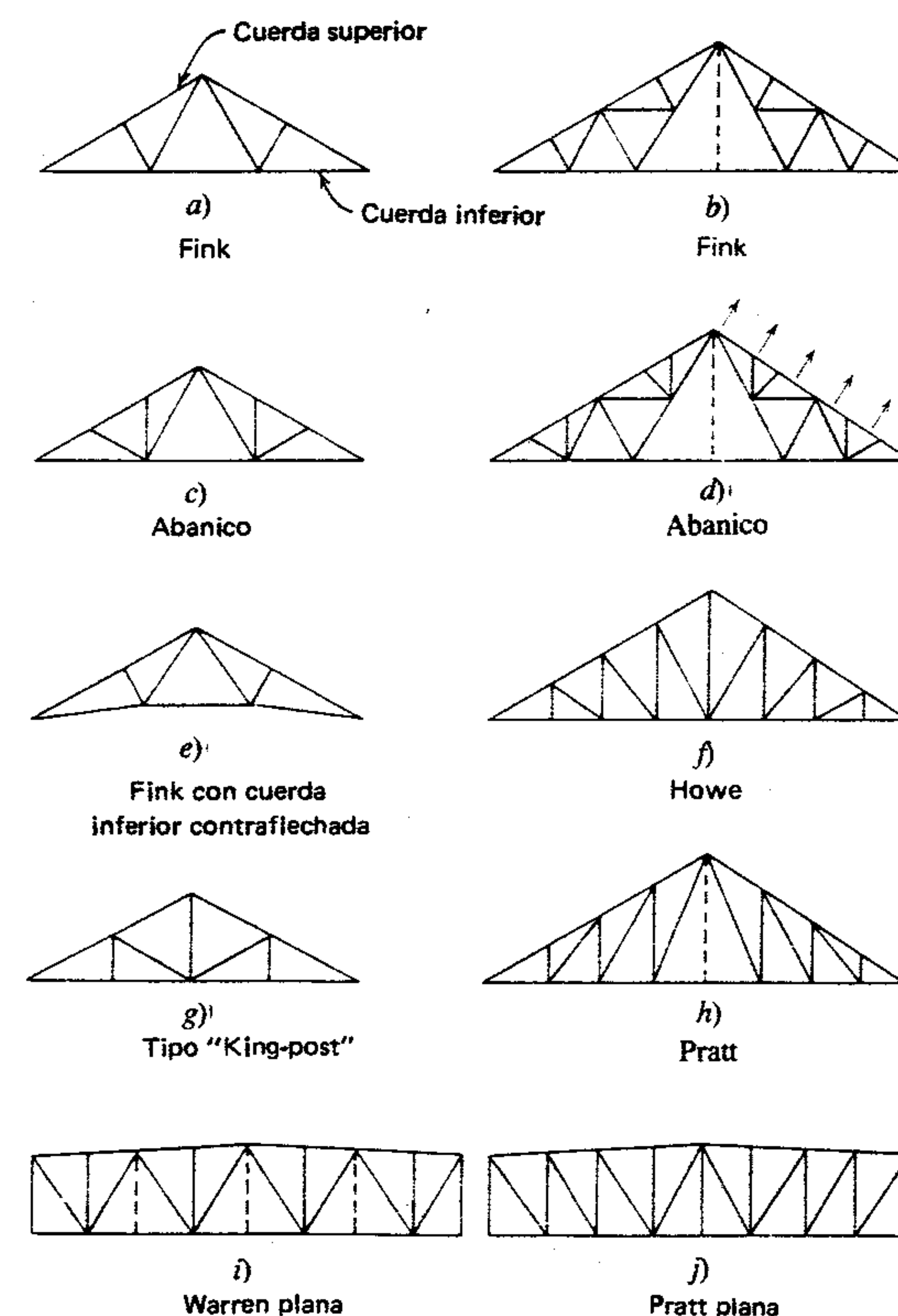


Figura 9.2 Tipos de armaduras de techo.

ción del espaciamiento más económico de armaduras para cada situación determinada. Sin embargo, usualmente es conveniente usar vanos de tamaño aproximadamente igual sobre cada una de las partes o alas de un edificio, de modo que sean idénticas tantas armaduras como sea posible. Para claros hasta de 70 pies, por lo general es satisfactorio un espaciamiento de 15 a 20 pies para cargas de más o menos 30 lb/pie.<sup>2</sup> En la mayoría de los casos, la localización de ventanas, pilares, etc., también será factor significativo en la selección de un espaciamiento de armaduras.

## 9.8 APLICACIÓN DE CARGAS; CONSIDERACIONES GENERALES

Todas las cargas son transportadas a la armadura por los largueros, excepto el peso muerto de la armadura y las cargas posiblemente soportadas de la cuerda inferior. Usualmente hay una conexión de larguero en cada punto de tablero de la cuerda superior, y con frecuencia, uno o más largueros está apoyado entre puntos de tablero. En el primer caso, la cuerda superior actúa como un miembro a compresión ordinario, mientras que en el segundo,



la flexión se combina con esfuerzos directos. Por ahora la explicación se limitará a armaduras que reciben cargas solamente en puntos de tablero.

El área de superficie de techo soportadas por un larguero es igual a la longitud del tablero (distancia entre largueros) multiplicada por la longitud de un vano (distancia entre armaduras). En la mayoría de los manuales (sección 1.3) se encontrarán tablas de los pesos de diversos materiales de construcción que se emplean para cubiertas y techos.

Todos los componentes de la carga muerta, excepto el peso de la armadura, se pueden determinar directamente basándose en las especificaciones del techo y su distribución, y el peso propio de la armadura se puede estimar para claros y vanos de tamaño ordinario usando valores de 2 a 5 lb/pie<sup>2</sup> de área soportada. Para claros de 75 pies o menores, generalmente este peso representa una pequeña parte de la carga total que se soportará; sin embargo, se tiene que tomar en cuenta. El peso propio de la armadura es realmente una carga distribuida, pero para simplificar se supone concentrada en los puntos de tablero de la cuerda superior y distribuida en partes iguales entre ellos. Una vez diseñada la armadura, el peso real de ésta se debe calcular y comparar con el peso supuesto. Si no coinciden razonablemente, se debe suponer un nuevo peso, usando como guía el de la primera armadura; luego se repite el diseño.

En el capítulo 8 se vio el cálculo de cargas de viento y sísmicas, y en la sección 9.4 las cargas de nieve y lluvia. En la sección 9.5 se trataron las cargas combinadas, y en la sección 9.2 se señaló que el encharcamiento y las fuerzas autodeformantes también se necesitan considerar cuando pueden ser importantes; en el siguiente ejemplo no se considerarán importantes. Sin embargo, cada miembro componente de la armadura se debe diseñar para soportar con seguridad la fuerza máxima a que estará sujeto. Dependiendo del tipo de armadura y de la naturaleza de las cargas, esta fuerza puede producir tensión o compresión en cualquier miembro. Es posible que un miembro esté a tensión bajo una condición de carga y a compresión en otra. Entonces se dice que ese miembro tiene una inversión de esfuerzo y es obvio que debe tener la resistencia adecuada tanto a la tensión como a la compresión.

Queda por determinar cuál de las anteriores combinaciones de carga recomendadas producirá la fuerza máxima (de tensión o de compresión) en cualquier miembro dado.

En la parte 1, sección 1.5.6 de la Especificación AISC de 1978, se establece que los esfuerzos permisibles se pueden incrementar en  $\frac{1}{3}$  sobre los valores estipulados, cuando los producen cargas sísmicas o de viento actuando solas o en combinación con las cargas muertas y vivas de diseño, siempre que la sección necesaria calculada sobre esta base no sea menor que la requerida por carga muerta y viva e impacto (si lo hay), calculada sin el aumento de  $\frac{1}{3}$  en el esfuerzo, ni menor que la requerida en la sección 1.7 (esfuerzos repetidos) cuando sea aplicable. Esto significa que generalmente un miembro puede soportar cargas sísmicas o de viento  $\frac{4}{3}$  mayores que las cargas muertas, de nieve y lluvia.

Se ha encontrado que la inversión de esfuerzos en armaduras de techo apoyadas sobre muros de mampostería es muy rara, excepto en aquellos casos en que la carga muerta es pequeña y la de viento o sísmica es grande. Debido a esto, algunos diseñadores prefieren considerar una carga vertical "equivalente" para simular el efecto combinado de todas las cargas posibles. Cuando se hace esto, se necesita un solo análisis de armadura. Aquí no se dará una explicación de "cargas verticales equivalentes" porque su enfoque es demasiado arbitrario, y en última instancia se debe hacer un análisis detallado en cualquier caso para cada combinación de cargas para asegurar un diseño seguro.

## 9.9 CARGAS DE TABLERO

Con las armaduras de techo de uso más frecuente, en que los tableros de cuerda superior son de longitud igual y hay sólo una pendiente entre la cresta y el apoyo, las cargas verticales del tablero debidas (cuando son aplicables) son iguales excepto en el apoyo, donde el valor es la mitad de la carga de todo el tablero. Para determinar la carga del tablero debida a la nieve, la distancia horizontal entre los puntos del tablero se multiplica por el espaciamiento entre armaduras, y este producto se multiplica por la

carga máxima de nieve expresada en lb/pie<sup>2</sup> de proyección horizontal. Para determinar la carga del tablero debida a la carga muerta, la longitud del tablero se multiplica por el espaciamiento de armaduras, y este producto se multiplica por la carga muerta unitaria de la construcción de la cubierta. A esto se debe agregar el peso de los largueros y el peso propio de la armadura. El peso de la armadura se calcula como se explicó en la sección anterior y se distribuye entre los puntos del tablero. Se debe considerar el hecho de que tanto las cargas muertas en puntos de tablero como las de nieve actúan verticalmente hacia abajo.

Las cargas estáticas equivalentes de viento se supone que actúan perpendicularmente a las superficies del techo, tanto hacia adentro como hacia afuera, y se calculan como se vio en el capítulo 8 (véase Sección 8.7, ejemplo 2, Marcos a dos aguas). Las cargas de tablero debidas al viento son frecuentemente diferentes para las pendientes a sotavento y barlovento de una armadura.

### Ejemplo

La típica armadura interior Fink ilustrada en la figura 9.3 se apoya en columnas que forman parte de muros de mampostería, y la altura del alero es de 20 pies. Las armaduras están espaciadas a 18 pies de centro a centro. La cubierta de techo es de metal corrugado galvanizado que pesa 6 lb/pie<sup>2</sup>. Todos los largueros son W 10 X 15 y cubren el claro entre armaduras en cada punto de tablero. La estructura es de tipo industrial, está localizada en

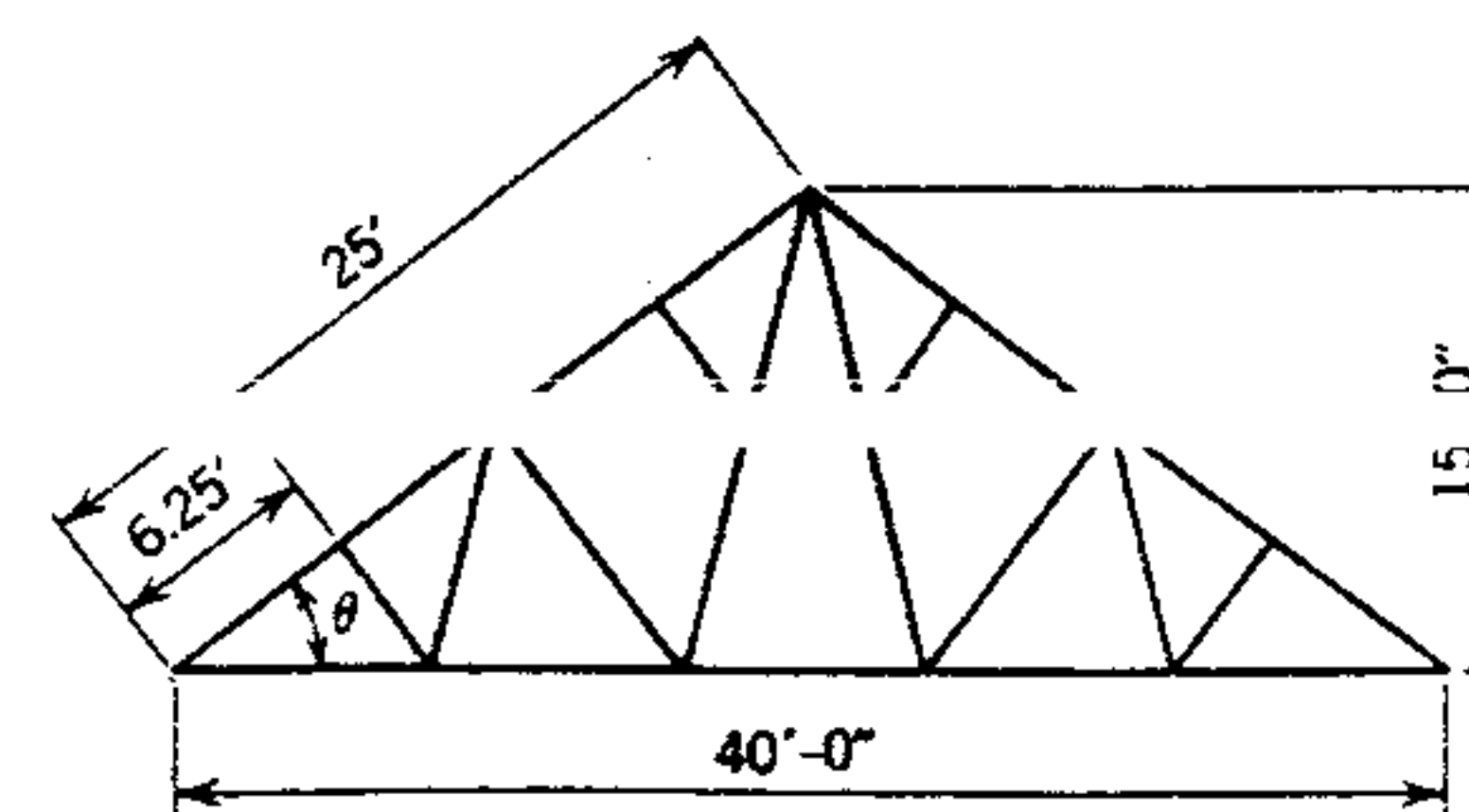


Figura 9.3 Armadura Fink.

Springfield, Illinois, como en la sección 9.3 y sólo tiene aberturas menores. Calcular todas las posibles cargas sobre puntos del tablero para: a) carga de nieve, b) carga muerta, c) carga de viento.

### Solución

#### a) Carga de nieve

Las cargas de nieve se determinan como en el ejemplo de la Sección 9.3, es decir,

7.3 lb/pie <sup>2</sup>	aplicadas sobre toda la superficie del techo
13.86 lb/pie <sup>2</sup>	en la condición desbalanceada aplicadas a la superficie a sotavento del techo (viento proveniente del lado izquierdo)

1. Determinar el área proyectada horizontalmente apoyada en un larguero.

$$A = 5(18) = 90 \text{ pies}^2$$

2. Calcular cargas de nieve sobre puntos del tablero para ambas condiciones, multiplicando el área por la carga unitaria de nieve.

$$P = 90(7.3) = 657 \text{ lb; usar 0.66 kips}$$

$$P = 90(13.86) = 1247 \text{ lb; usar 1.25 kips (condición desbalanceada)}$$

Estas cargas se ilustran en las figuras 9.4a y b.

#### b) Carga muerta

1. Determinar el área de tablero soportada por un larguero

$$A = 6.25(18) = 112.5 \text{ pies}^2$$

2. Calcular la carga de cubierta de techo soportada por un larguero.

$$112.5(6) = 675 \text{ lb}$$



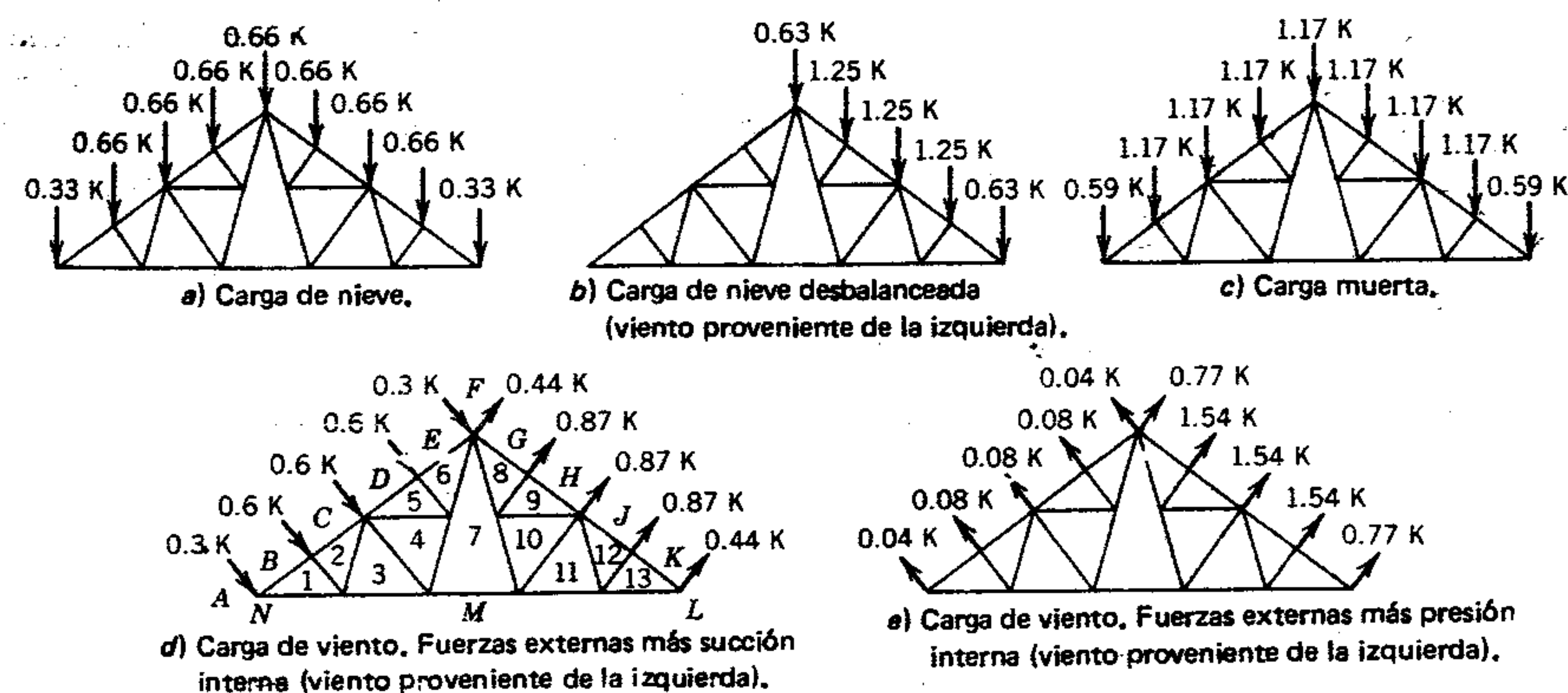


Figura 9.4 Cargas sobre puntos de tablero (ejemplo).

3. Agregar a esto el peso de cada larguero;  
15(18) = 270, o

$$675 + 270 = 945 \text{ lb}$$

4. Como éste es un claro relativamente corto, será suficiente una armadura ligera; por lo tanto, estimar el peso que será de 2.4 lb/pie<sup>2</sup> de área soportada. Las armaduras están espaciadas a 18 pies y tienen un claro de 40 pies; por lo tanto,  $A = (18)40 = 720 \text{ pie}^2$ . El peso estimado de cada armadura es  $(720)2.4 \approx 1730 \text{ lb}$ . Este peso, dividido igualmente entre los puntos del tablero, es  $1730/8 \approx 216 \text{ lb}$ ; usar 220 lb.

$$P = 945 + 220 = 1165; \text{ usar } 1.17 \text{ kips}$$

Estas cargas se ilustran en la figura 9.4c.

#### a) Carga de viento

1. Velocidad básica de viento  $V = 70 \text{ mph}$ , de la figura 8.15.
2. Determinar el factor de importancia. De la tabla 8.2 y una clasificación de construcción  $I$

$$I = 1.00$$

3. Seleccionar en la tabla 8.3 el coeficiente de presión de velocidad para una altura media de techo  $h = 20 + 15/2 = 27.5$  pies, y una exposición  $C$  sin protección. Interpolando entre 0.93 y 0.98

$$K_z = 0.955 \approx 0.96$$

4. Calcular la presión de la velocidad.

$$\begin{aligned} q_h &= 0.00256 K_z (IV)^2 \\ &= 0.00256 (0.96) [1.00(70)]^2 \\ &= 12.04 \text{ lb/pie}^2 \end{aligned}$$

5. Seleccionar el factor de ráfagas para 27.5 pies en la tabla 8.4.

$$G_h \approx 1.27$$

6. Para aberturas de muro normales, el coeficiente de presión interna es  $\pm 0.25$ . Calcular la presión interna.

$$p = GC_{pi} q_h = \pm 0.25(12.04) = \pm 3.01 \text{ lb/pie}^2$$

7. Seleccionar el coeficiente de presión externa de la figura 8.16 (normal al caballete).

$$\text{Barlovento: } h/L = 27.5/40 = 0.688$$

$$\theta = \arctan 15/20 = 37^\circ$$

$$\text{Interpolando entre } 30^\circ \text{ y } 40^\circ \text{ para } h/L = 0.688$$

$$C_p = 0.15$$

$$\text{Sotavento: } C_p = -0.70$$

8. Calcular las presiones externas de diseño.

$$p = q_h G_h C_p$$

$$\text{Barlovento: } p = 12.04(1.27)(0.15) = 2.29 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Sotavento: } p = 12.04(1.27)(-0.70) = -10.7 \text{ lb/pie}^2$$

9. Combinar la presión externa del paso 8 con la presión interna del paso 6.

$$\text{Barlovento: Fuerza externa más succión interna}$$

$$229 + 3.01 = 5.30 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Fuerza externa más presión interna}$$

$$2.29 - 3.01 = -0.72 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Sotavento: Fuerza externa más succión interna}$$

$$-10.7 + 3.01 = -7.69 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Fuerza externa más presión interna}$$

$$-10.7 - 3.01 = -13.71 \text{ lb/pie}^2$$

$$\text{Área de tablero} = 112.5 \text{ pie}^2$$

$$\text{Fuerza externa más succión interna}$$

$$\begin{aligned} \text{Barlovento: } 5.30(112.5) &= 596 \text{ lb} \\ &\approx 0.60 \text{ kips} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sotavento: } -7.69(112.5) &= -865 \text{ lb} \\ &\approx -0.87 \text{ kips} \end{aligned}$$

Fuerza externa más presión interna

$$\begin{aligned} \text{Barlovento: } -0.72(112.5) &= -81 \text{ lb} \\ &\approx -0.08 \text{ kips} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sotavento: } -13.71(112.5) &= -1542 \text{ lb} \\ &\approx -1.54 \text{ kips} \end{aligned}$$

Estas cargas se ilustran en las figuras 9.4d y e.

## 9.10 SUPUESTOS EN EL ANÁLISIS DE ARMADURAS

Sería muy difícil hacer la determinación exacta de esfuerzos en una armadura cargada e implicaría procedimientos complejos; de hecho, hay tantas variables comprendidas que raras veces se intenta un análisis exacto excepto mediante el método de computadora que se estudia en el capítulo 12. Sin embargo, la experiencia ha demostrado que los valores *exactos* de los esfuerzos no son necesarios para obtener un diseño razonable y seguro. Por lo tanto, se hacen supuestos para lograr una solución fácil.

Se supone que todos los miembros componentes de una armadura están en un plano, el cual es también el plano de las cargas. La mayoría de las construcciones de armaduras satisface razonablemente bien este supuesto. Al hacer un croquis de una armadura, una sola línea representa a un miembro, y el análisis subsecuente se basa en el supuesto de que esta línea coincide con el centro de gravedad de ese miembro. Por lo tanto, los centros de gravedad de todos los miembros que llegan a una junta se combinan. La distribución final de la armadura se dimensiona correspondientemente. Además se supone que todas las juntas son articuladas, es decir, que no puede haber momentos flexionantes o transferirse por esa junta. Este supuesto se hace aunque la cuerda superior pueda ser realmente continua desde el



apoyo hasta el caballete, y las conexiones se hagan sujetando cada miembro a una placa de nudo con soldaduras o tornillos que crean una junta que ofrece cierto grado de empotramiento o restricción.

En conclusión, si se supone que los miembros componentes y cargas están en el mismo plano, se supone que las juntas están articuladas y que las cargas se aplican solamente en las juntas del tablero, se elimina la flexión en toda la armadura. Entonces, cada miembro de junta a junta, es en efecto un miembro de "dos fuerzas", es decir, trabajará sólo a tensión o a compresión, y el esfuerzo resultante desarrollado es axial y actúa a lo largo del centro de gravedad del miembro.

Comúnmente, las armaduras se diseñan sólo para esfuerzos primarios que resultan de la condición de carga estática. Con esto se supone que no hay movimiento en las juntas. En realidad, cuando se aplican las cargas, la armadura se flexiona y las juntas se desplazan. Este desplazamiento de juntas también produce esfuerzo en los miembros, es decir, esfuerzos secundarios. Estas deflexiones y esfuerzos secundarios se pueden calcular; sin embargo, debido a que el esfuerzo resultante en cualquier miembro es normalmente menor del 8 por ciento del total, y a menudo las deflexiones no tienen mayor consecuencia, éstos se omitirán en la siguiente exposición.

El análisis de armaduras para cargas no verticales, como las debidas al viento, requiere un supuesto de cómo tomar la componente de la fuerza horizontal en las reacciones. Una manera de tratar estas cargas laterales consiste en suponer que todas las fuerzas horizontales son resistidas por una reacción, y que la otra reacción está apoyada sobre rodillos sin fricción. Esto puede requerir dos soluciones de esfuerzo, una para el viento de la izquierda y otra para el viento de la derecha. Otra manera de tratar el mismo problema es suponer que las fuerzas horizontales están igualmente distribui-

### 9.11 NOTACIÓN DE BOW

Como se explicó antes, las cargas sobre una armadura son cargas concentradas y cada miembro

desarrolla una fuerza que actúa a lo largo del centro de su eje de gravedad. La notación de Bow proporciona un método sistemático para asignar letras a espacios entre fuerzas externas y números a espacios entre miembros, lo cual a su vez permite identificar fácilmente cada fuerza y cada miembro.

Una vez hecho un diagrama a escala de la armadura, se calculan las cargas y las reacciones y se anotan sobre el diagrama de la armadura. Los espacios entre fuerzas se señalan con letras en orden alfabético comenzando a la izquierda de la reacción izquierda y en el sentido de las manecillas del reloj. En casos en que resulta conveniente indicar reacciones de sus componentes horizontal y vertical, también se asignan letras al espacio entre componentes. A cada espacio triangular dentro de la armadura se le asigna un número. Usualmente los espacios triangulares se colocan en orden numérico empezando a la izquierda y progresivamente a la derecha.

Con este sistema de letras y números cada fuerza externa se puede identificar por dos letras sucesivas y cada miembro (o fuerza en el miembro) se puede identificar con una letra y un número, o bien, con dos números.

En la figura 9.4d se muestra la aplicación de la notación de Bow. La carga de tablero en el talón izquierdo se identifica con A-B, y la reacción derecha con L-M. La cuerda superior, inmediata a la izquierda del caballete, es E-6. En este ejemplo, se supone que el apoyo izquierdo absorbe todo el empuje lateral; por lo tanto, se ve que la reacción ahí tiene componentes vertical y horizontal, M-N y N-A, respectivamente.

### 9.12 ANÁLISIS GRÁFICO DE VECTORES

La mayoría de las armaduras permite una fácil solución gráfica se basa en definiciones y principios de mecánica, cuyo repaso se da a continuación.

Una fuerza se puede mostrar gráficamente como una línea a escala, denominada vector (figura 9.5). La magnitud de la fuerza está indicada por la longitud del vector, y su dirección mediante una

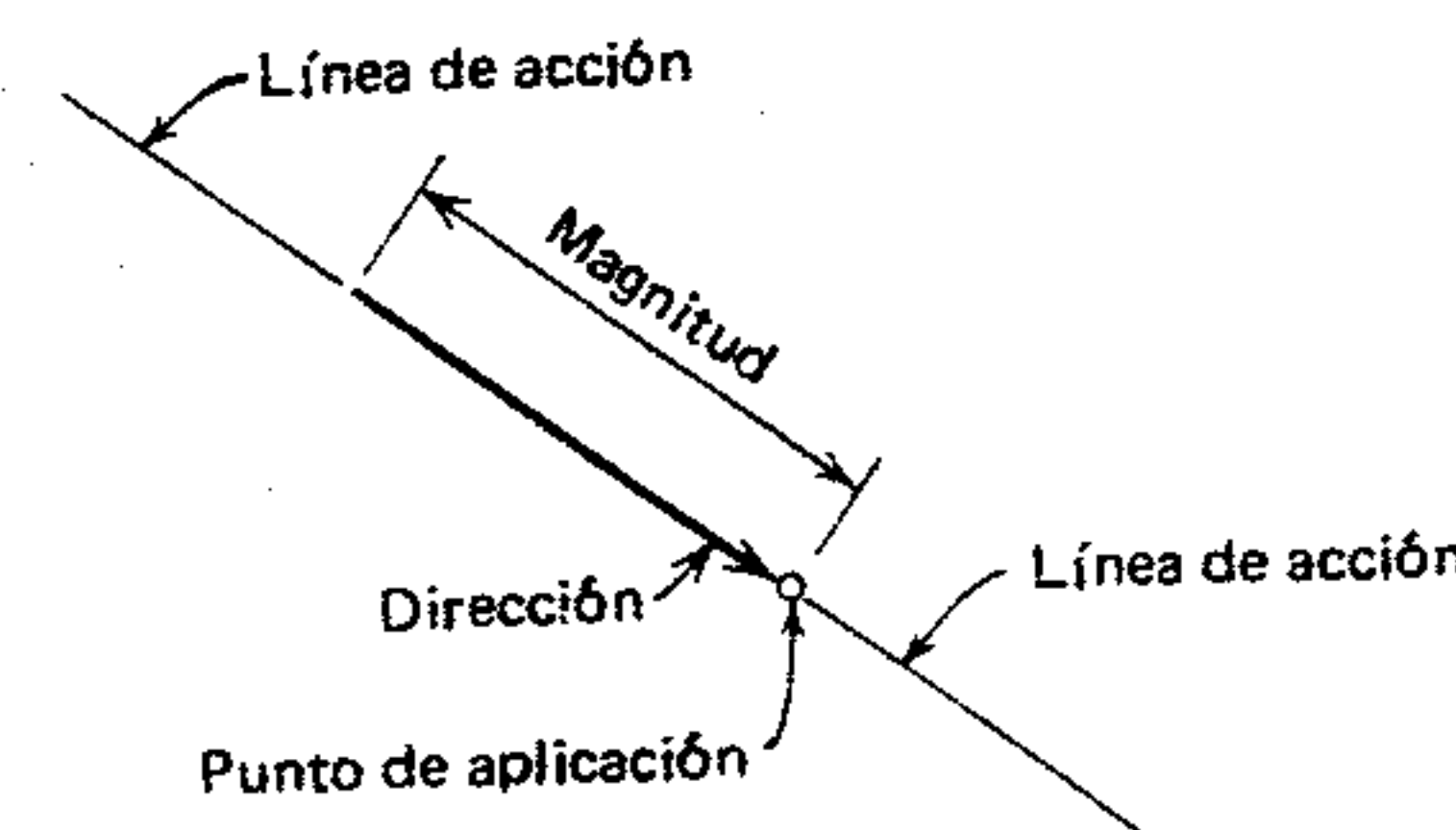


Figura 9.5 Vector.

flecha. Si el vector se extiende en dos direcciones, se puede ver la línea de acción. Una fuerza puede actuar en cualquier parte a lo largo de su línea de acción; usualmente se conoce el punto de aplicación.

Cuando dos fuerzas se encuentran en un punto, su suma algebraica (resultante) se puede determinar construyendo un paralelogramo, como se muestra en la figura 9.6a. Cada vector se representa con su propia dirección y a una longitud a escala igual a su magnitud. La resultante es la diagonal del paralelogramo, y un punto sobre su línea de acción es el punto en que se encuentran las dos fuerzas originales. La magnitud de la resultante se determina tomando a escala su longitud. Si en un punto se encuentran más de dos fuerzas, la resultante de todas las fuerzas se puede determinar construyendo paralelogramos sucesivos, cada uno teniendo la resultante anterior como una fuerza y otro de los vectores originales como la otra.

La resultante de dos fuerzas concurrentes también se puede determinar construyendo un triángulo como el de la figura 9.6b. La cola de un vector se sitúa en la punta del otro vector, y la resultante es una línea trazada desde la cola del primer vector hasta la punta del segundo. Sin embargo, debe observarse que una resultante determinada de esta manera no se coloca en su propia posición, es decir, no se muestra pasando a través de su verdadera línea de acción.

Si más de dos vectores se encuentran en un punto, la resultante se podría determinar construyendo un polígono como el de la figura 9.6c. Cada vector se traza con su cola sobre la punta del otro vector. Hecho esto, la resultante es la línea trazada desde la cola del primer vector hasta la punta del último.

Si dos o más fuerzas se encuentran en un punto y están en equilibrio, esta suma vectorial es igual a cero, es decir, no hay resultante y, por tanto, el triángulo (o polígono, como puede ser el caso) debe estar cerrado (figura 9.6d).

En la figura 9.7a se muestran tres fuerzas que concurren en un punto en común. Sólo se conoce la fuerza A-B. No obstante, las líneas de acción de las fuerzas B-C y C-A son como se ilustran. Si las tres fuerzas están en estado de equilibrio, las magnitudes y direcciones de las dos fuerzas desconocidas se pueden determinar construyendo un triángulo de fuerzas cerrado, como sigue (figura 9.7b):

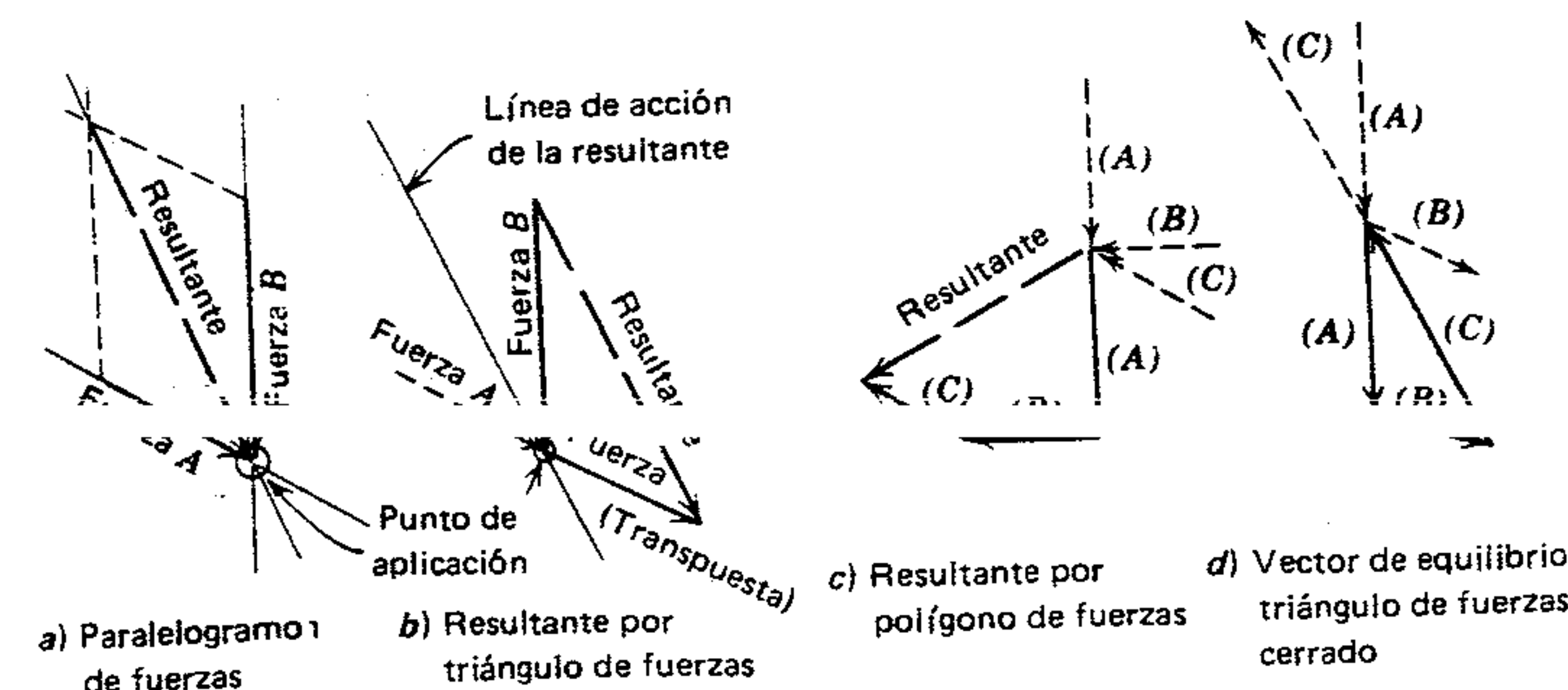


Figura 9.6 Análisis gráfico de vectores.



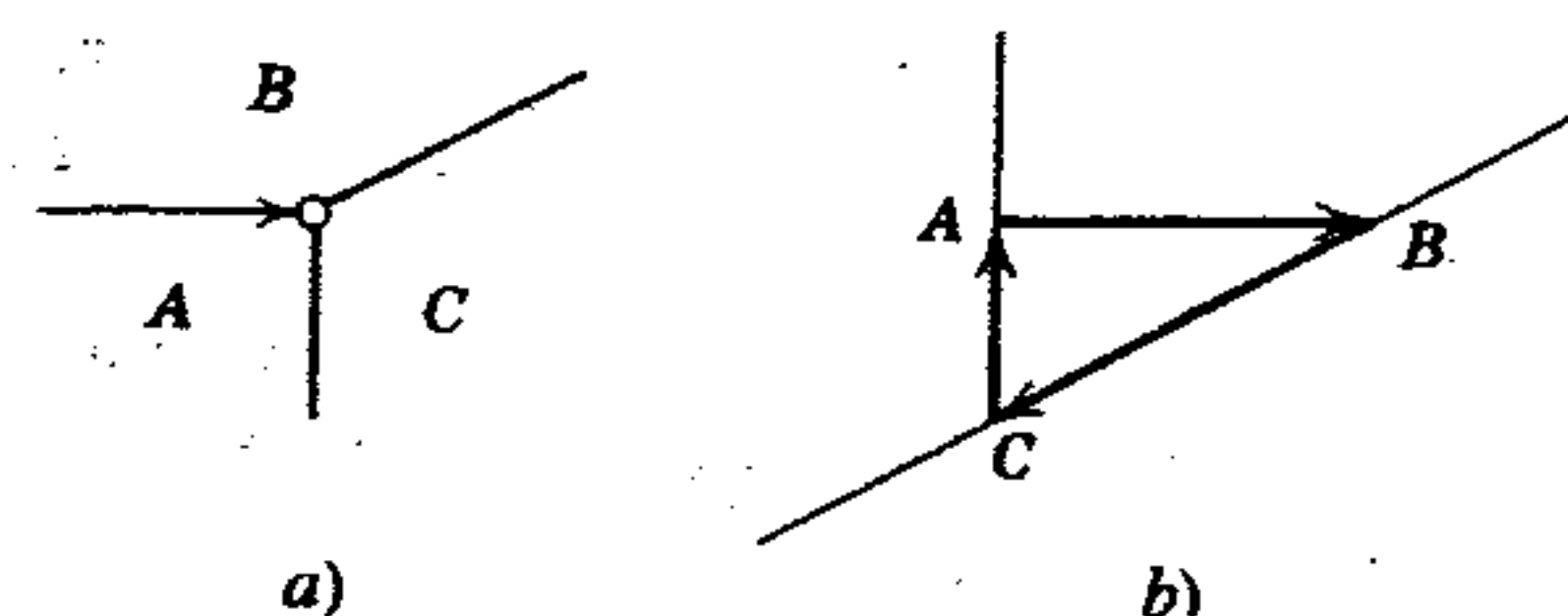


Figura 9.7 Solución de dos incógnitas.

1. Trazar el vector conocido  $A-B$  a una escala elegida; marcarlo como se ilustra.
2. En un extremo del vector conocido (punto  $B$  en este caso), construir una paralela a la línea de acción de una de las fuerzas desconocidas, por ejemplo, fuerza  $B-C$ .
3. En el otro extremo del vector conocido trazar una paralela a la línea de acción de la otra fuerza desconocida  $A-C$ .
4. La intersección de las dos líneas trazadas establece el triángulo cerrado, y las magnitudes de las fuerzas desconocidas se puede determinar midiendo a escala sus longitudes respectivas. Las direcciones de las fuerzas  $B-C$  y  $C-A$  se determinan juntando siempre una cola con una punta, de modo que el triángulo se cierre.

### 9.13 ANÁLISIS DE LAS FUERZAS DE UNA ARMADURA

Los siguientes son cuatro métodos para determinar las fuerzas en los miembros de una armadura de techo: método algebraico de secciones; método algebraico de juntas presentado en la Sección 8.2 y usado más adelante en este capítulo; análisis computarizado, tratado en el capítulo 12, y método gráfico de juntas sucesivas. Aquí se usará el método gráfico. Una descripción del método de secciones se encontrará en libros de texto sobre estática y resistencia de materiales.

Basándose en los supuestos tratados en la Sección 9.9, las líneas que se ven en un diagrama de armadura, que comúnmente representan la localización del centro de gravedad de miembros, tam-

bién se usan para representar las fuerzas actuantes en ellos. La línea de acción de todos los miembros de una armadura se conocen cuando se establecen las dimensiones y el tipo de armadura; por lo tanto, la línea de acción de cada fuerza de barra también es conocida. Si en una junta hay fuerzas externas presentes, sus magnitudes y direcciones se determinan como se vio en las Secciones 9.8 a 9.11. Las reacciones también son resultantes de esfuerzos; sin embargo, se pueden concebir como fuerzas externas y determinarse de la manera usual. Entonces, las fuerzas en las barras son las únicas incógnitas, y si en una junta concurren sólo dos incógnitas, éstas se pueden determinar conforme a los principios establecidos en la Sección 9.12.

En la figura 9.8a se representa una parte de una armadura cargada. Se puede ver que el apoyo tiene solamente dos incógnitas, designadas por  $B-1$  y  $1-X$ . Esta junta del apoyo está en equilibrio estático como todas las otras juntas de la armadura. Por lo tanto, todas las fuerzas en esa junta deben formar un polígono de fuerzas cerrado. En la figura 9.8b se muestra el polígono de fuerzas cerrado de todas las fuerzas de la junta del apoyo. Este polígono se construye como sigue:

Las fuerzas externas  $X-A$  y  $A-B$  se dibujan a escala, su resultante es  $X-B$ . Por el punto  $B$  se traza

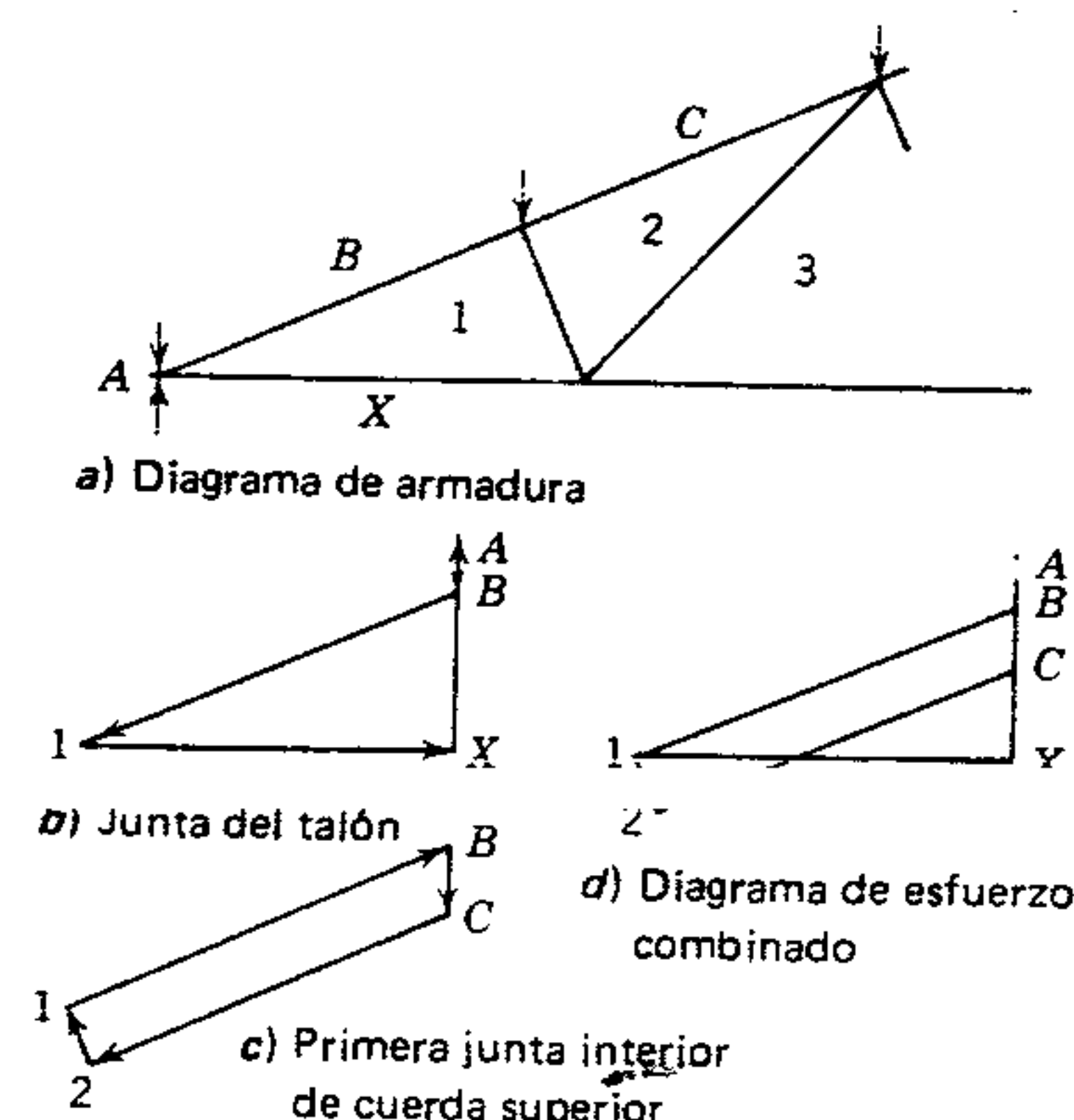


Figura 9.8 Método gráfico de juntas.

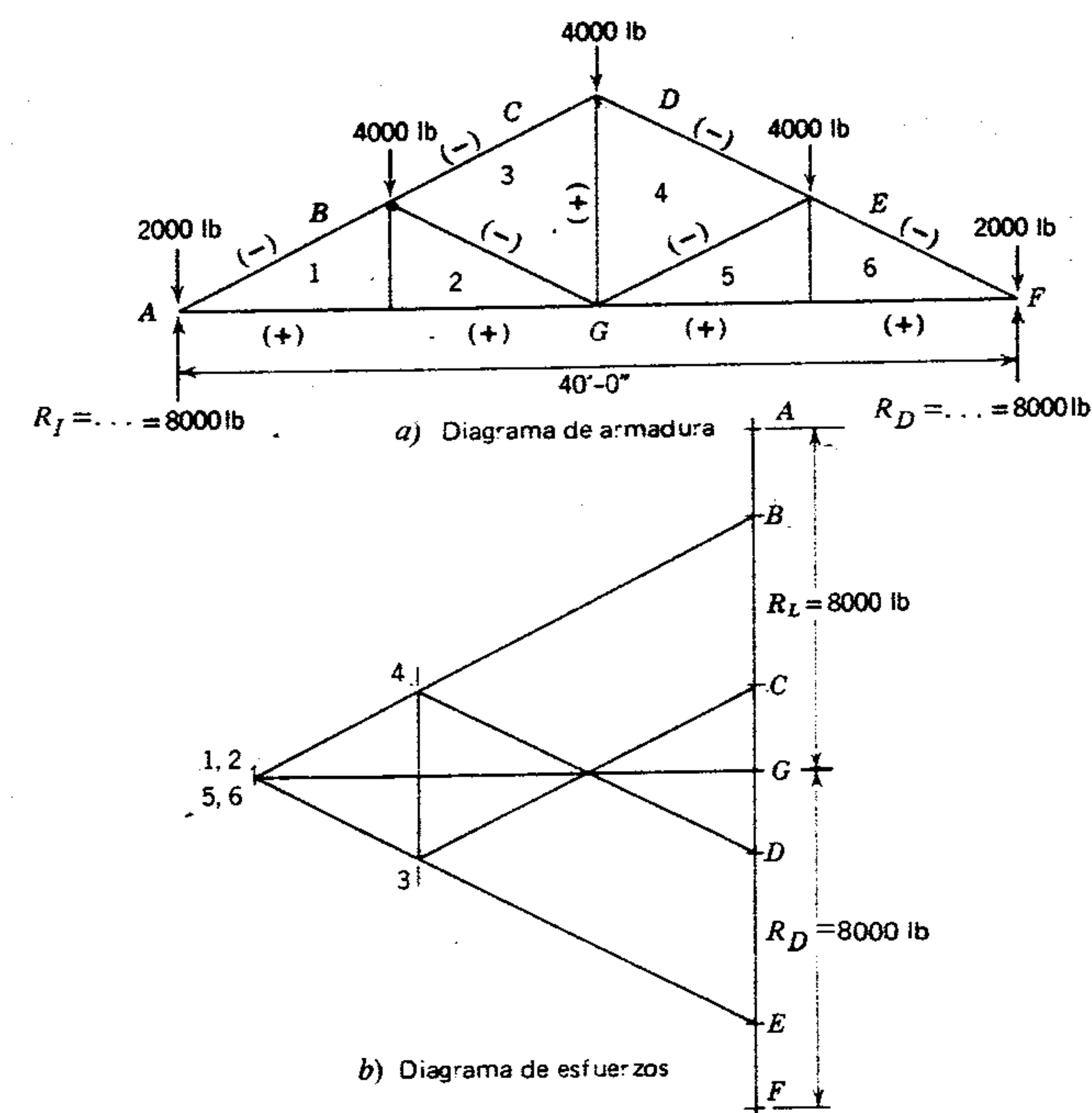


Figura 9.9 Solución gráfica.

una línea paralela a la línea de acción de  $B-1$ . Por el punto  $X$ , se traza una línea paralela a la línea de acción de  $1-X$ . La intersección de estas dos líneas establece la localización del punto 1, y el polígono se cierra. La magnitud de  $B-1$  y de  $1-X$  se obtiene midiendo a escala el diagrama, y sus direcciones son las que se ilustran.

Siguiendo a la derecha, la siguiente junta interior sobre la cuerda superior sí se puede resolver, ya que sólo hay dos incógnitas,  $C-2$  y  $2-1$  (la fuerza en la barra  $1-B$  se estableció ya antes). El diagrama de fuerzas para esta junta (figura 9.8c) se construye de la misma manera que el de la junta del

apoyo. Las fuerzas de barra  $C-2$  y  $2-1$  se toman a escala del polígono de fuerzas.

Este proceso se podría repetir en cada junta sucesiva en la armadura. Sin embargo, por observación se ve que la línea  $B-1$  en la figura 9.8b es idéntica a la línea  $B-1$  de la figura 9.8c, excepto en dirección. Por lo tanto, las dos se pueden combinar en un diagrama que se ilustra en la figura 9.9b. Una ulterior investigación mostrará que cada junta sucesiva tiene una línea (fuerza de barra) en común; por lo tanto, se puede trazar un diagrama de fuerzas combinado para toda la armadura, mientras no se indique la dirección.

El procedimiento de análisis de fuerzas para toda una armadura, empleando el diagrama combinado, se ilustra en la figura 9.9 y es el siguiente:



1. Dibujar un diagrama de la armadura a una escala conveniente, y mostrar las cargas y posiciones de las reacciones.
2. Calcular las reacciones.
3. Usando la notación de Bow, asignar letras y números a cada región. (En la figura 9.9a se ilustran los pasos 1, 2 y 3).
4. Trazar el polígono de fuerzas para las fuerzas externas a alguna escala conveniente, trazándolas en orden alrededor del diagrama de la armadura en el sentido de las manecillas del reloj. Para un sistema de cargas verticales, el polígono es una línea recta, como se ve en la figura 9.9b. En este caso,  $A-B = 2000$  lb;  $B-C = 4000$  lb;  $C-D = 4000$  lb;  $D-E = 4000$  lb, y  $E-F = 2000$  lb. Las reacciones  $F-G$  y  $G-A$ , cada una igual a 8000 lb, cierran el polígono.
5. Seleccionar una junta como la del talón izquierdo de la armadura, donde hay sólo dos incógnitas. En la armadura de la figura 9.9a, las dos incógnitas son las fuerzas en los miembros  $B-1$  y  $G-1$ ; pero ya se conoce su línea de acción. El polígono de fuerzas para esta junta se dibuja luego como sigue:

- A través de  $B$  sobre el diagrama de fuerzas, trazar una línea paralela a  $B-1$  sobre el diagrama de la armadura.
- A través de  $G$  (diagrama de fuerzas), trazar una línea paralela a  $G-1$  (diagrama de armadura).
- La intersección de estas dos líneas localiza al punto 1, y completa el polígono de fuerzas para esta junta.
- La magnitud de la fuerza en el miembro  $B-1$  se obtiene midiendo a escala la longitud de la línea  $B-1$  sobre el diagrama de fuerzas.

6. Seleccionar la siguiente junta a la derecha donde haya sólo dos fuerzas incógnitas y proceder del mismo modo que antes. Para la armadura de la figura 9.9a, la siguiente junta sería la formada por la intersección del miembro  $2-1$  y la cuerda inferior. Luego, proceder como sigue:

- A través de 1 (diagrama de fuerzas), trazar una línea paralela a 1-2 (diagrama de armadura).
- A través de  $G$  (diagrama de fuerzas), trazar una línea paralela a 2- $G$  (diagrama de armadura).

El punto 2 coincidirá con 1, puesto que  $G-1$  y  $2-G$  tienen la misma línea de acción, es decir, la fuerza en  $2-1$  es cero. Las fuerzas en los demás miembros se encuentran de modo similar y se registra sobre el diagrama de la armadura.

7. Una vez encontrada la magnitud de la fuerza en cada miembro, es necesario determinar cuáles miembros están en tensión y cuáles a compresión. Usualmente el signo menos (-) denota compresión, y un signo más (+), tensión. Para determinar el signo de la fuerza en un miembro se leen las letras y/o números (notación de Bow) en el sentido de las manecillas del reloj respecto a una de sus juntas en el diagrama de armadura. Para el miembro  $B-1$ , usar la junta de apoyo izquierda (figura 9.9a) y leer en el sentido de las manecillas del reloj de  $B$  a 1 es hacia abajo y a la izquierda, o *hacia* la junta en el diagrama de armadura. Esto indica que el miembro está a compresión.

Usando de nuevo la junta del apoyo para encontrar la naturaleza de la fuerza en el miembro  $1-G$ , leer en el sentido de las manecillas del reloj de 1 a  $G$  sobre el diagrama de la armadura. Sobre el diagrama de fuerzas, 1 a  $G$  es hacia la derecha, o *alejándose* de la junta en el diagrama de la armadura. Esto indica que el miembro está en tensión. El signo de la fuerza en cada uno de los demás miembros se encuentra de modo similar y se registra sobre el diagrama de armadura. Si este método se aplica con-

raleza propia de la fuerza.

Un estudio más a fondo mostrará que un porcentaje de incremento o decremento en todas las cargas de tablero verticales producirá un incremento o decremento proporcional en las fuerzas internas de las barras. Por lo tanto, sólo se necesita un

solo diagrama de fuerzas para las cargas verticales. Las fuerzas en las barras para otras cargas verticales se pueden determinar por simple proporción.

Las cargas de viento que actúan perpendicularmente en la cuerda superior requieren un diagrama de fuerzas separado. Las fuerzas resultantes en cada miembro se combinan luego como se explicó en la sección 9.8. El valor máximo obtenido de las tres combinaciones de cargas es la fuerza que se usa en el diseño.

#### 9.14 PROCEDIMIENTO PARA EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE TECHO

El procedimiento para el diseño de armaduras y largueros de techo es el siguiente:

1. Seleccionar el tipo de armadura de techo que se adecúe mejor al claro, a la función interior y al diseño, y la cubierta y recubrimiento que se usarán. Trazar a escala un esquema de la armadura.
2. Calcular el peso en lb/pie<sup>2</sup> de la cubierta y recubrimiento del techo. Multiplicar esta carga muerta unitaria por la longitud del tablero para obtener la carga muerta uniforme por pie soportada por cada larguero (la mitad de esta cantidad para largueros del apoyo, y para largueros de caballete si se usan dos). Dejar una tolerancia para la carga muerta (peso propio) del larguero.
3. Determinar la carga viva en lb/pie<sup>2</sup> por pie de proyección horizontal y convertirla a carga uniforme por pie actuando sobre los largueros como en el paso 2 anterior.
4. Determinar la carga de nieve balanceada en lb/pie<sup>2</sup> (y carga de lluvia, si la hay) por pie de proyección horizontal y convertirla a carga uniforme por pie actuando sobre el larguero como en el paso 2.
5. Determinar las cargas de viento en lb/pie<sup>4</sup> (tanto transversal como longitudinal) actuando perpendicularmente a la superficie del techo y calcular la carga uniforme por pie soportada por cada larguero como en el paso 2 anterior.

6. Determinar la combinación más desfavorable de cargas (Sección 9.4).
7. Diseñar los largueros para la combinación de cargas más desfavorable.
8. Estimar el peso de la armadura y, agregando a éste las cargas muertas determinadas en el paso 2 anterior, calcular las cargas muertas sobre puntos de tablero.
9. Determinar las cargas de puntos de tablero debidas a cargas de nieve tanto balanceadas como desbalanceadas.
10. Determinar las cargas de puntos de tablero debidas al viento para cada condición de carga, usando los datos del paso 5 anterior.
11. Dibujar el diagrama de fuerzas por carga muerta.
12. Dibujar el diagrama de fuerzas por carga de nieve desbalanceada.
13. Dibujar los diagramas de fuerza por carga de viento.
14. Preparar una tabla de análisis de fuerzas (las fuerzas debidas a carga viva y carga balanceada de nieve se encuentran por simples proporciones usando como referencia las fuerzas por carga muerta).
15. Determinar la fuerza crítica en cada miembro, basándose en las combinaciones de carga más desfavorables (Sección 9.4).
16. Preparar una tabla de diseño.
17. Diseñar los miembros a compresión.
18. Diseñar los miembros a tensión.
19. Diseñar juntas.
20. Diseñar los apoyos extremos y el anclaje.
21. Diseñar arriostramientos.
22. Preparar un plano de diseño.

En los siguientes ejemplos se ilustrará el diseño de un techo soportado por armaduras.

#### Ejemplo

(Nota: Ciertas condiciones de cargas estarán ya determinadas debido a la longitud poco usual del procedimiento de diseño comprendido y al hecho de que los cálculos de cargas han sido ya demostrados



ampliamente. Asimismo, debido a la necesidad de un número considerable de planteamientos aclaratorios, los diversos pasos del procedimiento se tratarán en artículos separados (9.15 a 9.30). El número de cada paso aparecerá entre paréntesis después del título del artículo; sin embargo, estos números de los pasos no corresponderán a los anteriores, debido a que las condiciones ya dadas de carga eliminan los pasos iniciales en el procedimiento de diseño. Luego se resumirá el formato seguido hasta aquí en este texto para los ejemplos).

Dado que se va a construir un edificio rectangular con muros laterales y de extremo de mampostería de ladrillo, se diseñará un sistema de techo soportado por armaduras.

Las columnas que recibirán a las armaduras estarán espaciadas a 16 pies de centro a centro a lo largo de los muros laterales y las armaduras tendrán un claro de 70 pies de centro a centro de las columnas de los muros laterales. Se usará una armadura Fink con una cuerda superior de 8 tableros sobre una elevación de 12 pies 6 pulg. La techumbre será de loseta con un peso de 15 lb/pie<sup>2</sup> incluyendo el material de asiento (aquí se seleccionó este material pesado principalmente para desarrollar fuerzas suficientemente grandes en los miembros y asegurar que se requieran miembros que no sean de tamaño mínimo, y mejorar así el ejemplo para propósitos ilustrativos).

La cubierta consistirá en losas de concreto precolado de peso ligero apoyadas sobre tes estructurales soldadas a los largueros de modo similar al ilustrado en la figura 9.27; su peso será de 20 lb/pie.<sup>2</sup> El diseño se ajustará a la Especificación AISC de 1978 para acero A36.

Aunque serían adecuadas las secciones de  $\frac{1}{4}$  pulg para los miembros de la armadura, se seleccionará una sección mínima de dos ángulos de  $2\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{5}{16}$  pulg para este ejemplo. Las placas en las juntas serán de  $\frac{3}{8}$  pulg de espesor. Todas las conexiones y juntas serán soldadas.

Debe señalarse que las secciones te se usan con frecuencia en cuerdas superiores e inferiores en las armaduras soldadas. Esto permite usar miembros de celosía de doble ángulo montados sobre las almas de las tes. Asimismo cuando los miembros de las cuerdas (tes) tienen gran peralte, con frecuencia

se usan como celosía miembros de sección te; en este caso el alma de los miembros te se recorta y el patín sobresaliente se ranura para que los miembros de la celosía encajen sobre el alma de la cuerda en te. Luego, se soldará el patín de la celosía al alma de la cuerda y, si es necesario, se pueden hacer soldaduras del extremo del patín de la celosía al patín de la cuerda.

Se supondrá que habrá fuerzas críticas en los largueros debido a una combinación de cargas de nieve y carga muerta y que esas fuerzas críticas en los miembros de la armadura serán determinables mediante una combinación de cargas muertas, de nieve y de viento transversal.

### 9.15 ESQUEMA DE LA ARMADURA (PASO 1)

En la figura 9.10a se ilustra el esquema a escala de una armadura, con cargas y notación de Bow que en realidad se agregarán después.

### 9.16 CARGA MUERTA DE DISEÑO (PASO 2)

Determinar la carga muerta total por pie cuadrado de superficie de techo.

Techumbre de loseta = 15 lb/pie<sup>2</sup>

Cubierta de techo = 20

Total = 35 lb/pie<sup>2</sup>

La longitud del tablero obtenida del dibujo a escala es de aproximadamente 9.3 pies. La carga uniforme que soporta cada larguero es  $9.3(35) = 326$  lb por pie. Suponer que cada larguero contribuye 14 lb por pie a la carga muerta. Entonces, la carga muerta total sobre el larguero es  $326 + 14 = 340$  lb por pie.

### 9.17 DISEÑO DE LA CARGA DE NIEVE (PASO 3)

La carga de nieve se tomará de 30 lb/pie<sup>2</sup> de proyección horizontal. La proyección horizontal

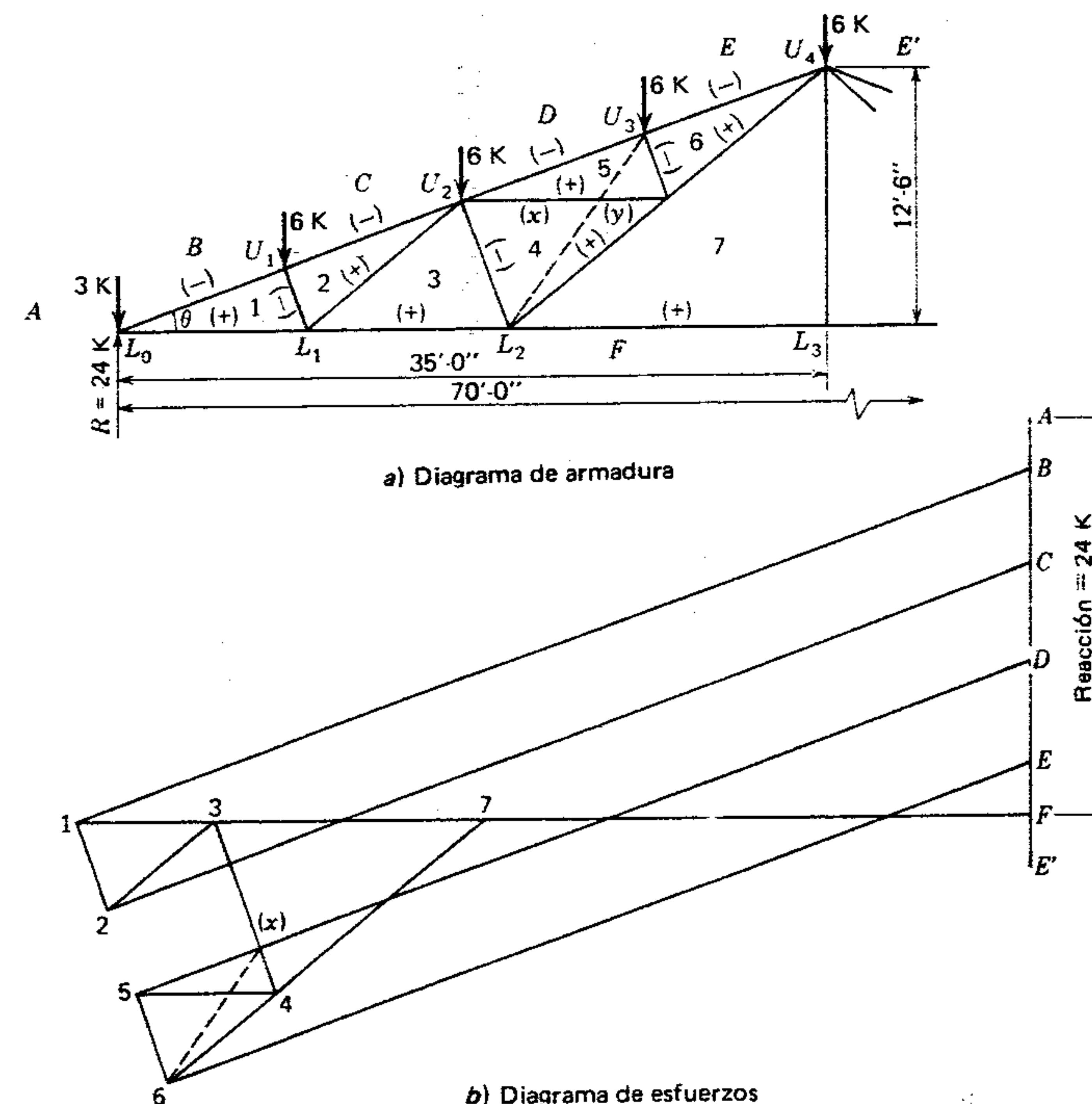


Figura 9.10 Análisis de cargas muertas.

soportada por cada larguero es  $\frac{35}{4} = 8.75$  pies. La carga de nieve soportada por cada larguero es entonces  $8.75(30) = 263$  lb por pie.

### 9.18 DISEÑO DE LARGUEROS (PASO 4)

Los largueros se pueden clasificar de dos diferentes maneras para propósitos de diseño; como miembros libres de flexionarse en cualquier dirección y como miembros fijos lateralmente. Es evidente que el larguero de sección de canal cargado como se ilustra en la figura 9.11 está sujeto a flexión asimétrica y, por lo tanto, es del primer tipo. El diseño

de miembros sujetos a flexión asimétrica se trata en detalle en la Sección 5.15. Cuando la cubierta de techo es de tal naturaleza que proporciona apoyo lateral en un sentido paralelo a la superficie del techo, la carga vertical sobre el larguero se puede resolver en componentes normal y paralelo. Luego se puede suponer que el componente paralelo es soportado por la cubierta, y el larguero se necesita diseñar solamente en función del componente normal. Cuando la cubierta de techo no es suficientemente rígida, se puede proporcionar apoyo lateral colocando tirantes en el centro o terceras partes del claro del larguero. Estos tirantes (usualmente varillas de  $\frac{5}{8}$  ó  $\frac{3}{4}$  pulg de diámetro) corren desde los largueros del apoyo hasta el caballete. Como la fuerza



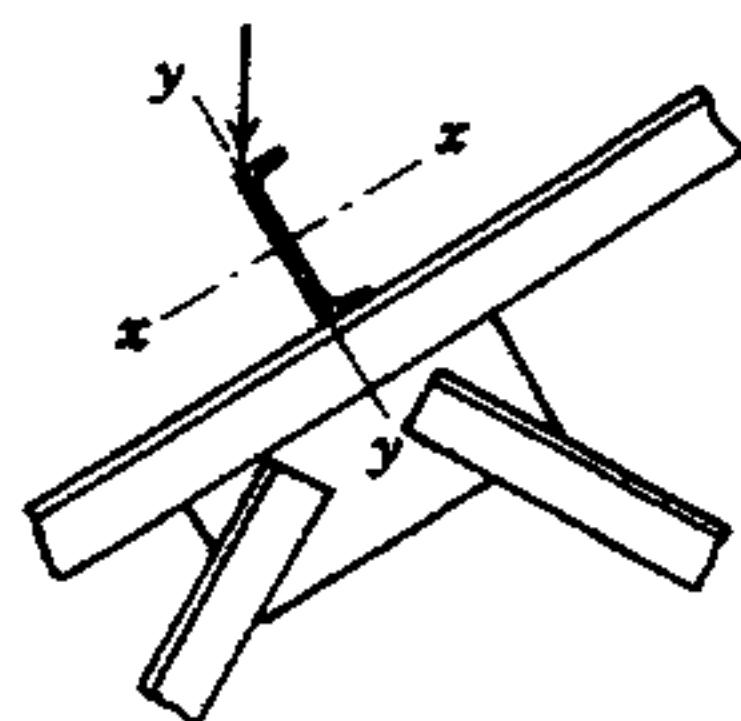


Figura 9.11 Orientación del larguero.

en la varilla es mayor en el caballete, con frecuencia se necesita aumentar el tamaño del larguero de caballete para absorber la carga concentrada debido al componente vertical de la fuerza en el tirante.

También se pueden usar los tirantes en cubiertas de techo rígidas para proporcionar apoyo lateral durante la erección. Raras veces se necesitan en techos con una pendiente menor de 3 en 12.

En el problema que se está tratando, se supondrá que las tes soldadas y la cubierta del techo proporcionan un apoyo lateral adecuado, es decir, ambos lados del sistema de cubierta de techo están sujetos al caballete. Por lo tanto, el larguero soporta una carga vertical total de  $340 + 263 = 603$  lb por pie (carga muerta más carga de nieve). Esta carga se descompone en componentes paralelo y perpendicular a la superficie del techo usando un método gráfico o matemático. Encontrar el ángulo de la armadura del techo,

$$\tan \theta = \frac{12.5}{35} = 0.357 \text{ o } \theta = 19.7^\circ$$

la componente paralela  $P$  es  $603(\text{seno } 19.7^\circ) = 203$  lb por pie; la fuerza  $N$ , normal a la superficie del techo, es  $603(\text{cos } 19.7^\circ) = 568$  lb por pie (figura 9.12).

Debido a que la componente  $P$  será resistida por las tes y la cubierta del techo, el larguero se puede diseñar como una viga simple que soporta una carga uniforme de 568 lb por pie sobre un claro de 16 pies. La carga uniforme total  $W = 16(568) = 9090$  lb = 9.1 kips. La carga uniforme requerida es

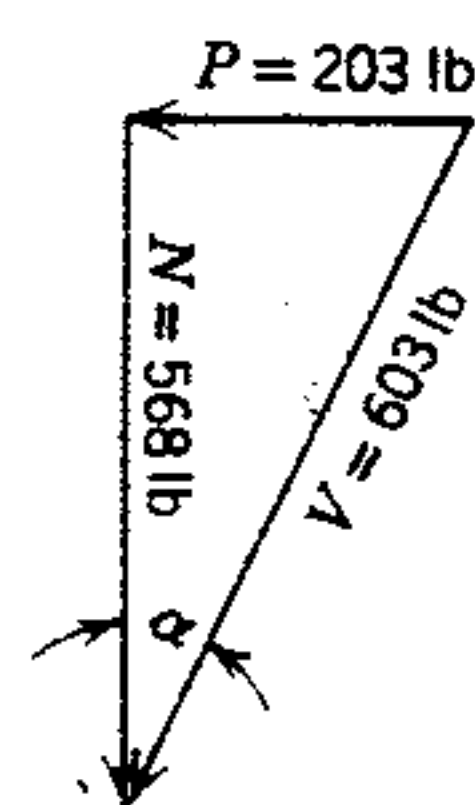


Figura 9.12 Carga sobre el larguero.

$$\begin{aligned} W_c &= WL \\ &= 9.1(16) \\ &= 145.6 \text{ kip-pie} \end{aligned}$$

En las tablas de Constantes de Carga Uniforme del AISC para formas C de acero A36, se encuentra que una C 9 X 13.4 es satisfactoria. (También lo sería una WF 8 X 13 de acero A36. Estas vigas tienen patines más anchos que las canales y se usan con frecuencia como largueros.

### 9.19 CARGAS DE PUNTOS DE TABLERO PARA CARGAS MUERTA Y DE NIEVE (PASO 5)

Una vez estimado el peso de la armadura de 4 lb/pie<sup>2</sup> de área soportada, el peso total de la armadura es

$$4(16)70 = 4480 \text{ lb}$$

Suponiendo que este peso estará igualmente distribuido en los 8 tableros, el peso por tablero es

$$\frac{4480}{8} = 560 \text{ lb}$$

Entonces, la carga muerta total en puntos de tableros interiores es

$$[16(340)] + 560 = 6000 \text{ lb; usar 6.0 kips}$$

La carga muerta total en puntos del tablero del apoyo es

$$\frac{1}{2}(6000) = 3000 \text{ lb; usar 3.0 kips}$$

La carga total de nieve en puntos interiores de tableros es

$$(16(263)) = 4210 \text{ lb; usar 4.2 kips}$$

La carga total de nieve en puntos del tablero del apoyo es

### 9.20 CARGAS DE VIENTO EN PUNTOS DE TABLERO (PASO 6)

Se ha determinado que el ángulo de pendiente del techo es de  $19.7^\circ$ , y se encontró que la fuerza externa más la presión interna determina la condición del viento, como sigue:

Fuerzas externas:	
Lado a barlovento =	12 lb/pie <sup>2</sup> (succión)
Fuerzas externas:	
Lado a sotavento =	9 lb/pie <sup>2</sup> (succión)
Fuerzas internas:	
Ambos lados =	7 lb/pie <sup>2</sup> (presión)
Fuerzas internas:	
Ambos lados =	6 lb/pie <sup>2</sup> (succión)

Área de tablero =  $16(9.3) = 149$  pie<sup>2</sup>; por lo tanto,

$$\text{Lado a barlovento: } \frac{(12 + 7)(149)}{1000} = 2.8 \text{ kips} \quad (\text{hacia afuera})$$

$$\text{Lado a sotavento: } \frac{(9 + 7)(149)}{1000} = 2.4 \text{ kips} \quad (\text{hacia afuera})$$

Esta condición de carga se ilustra en la figura 9.13a. Se supondrá que cada reacción desarrollará la mitad de la fuerza horizontal lateral total debida al viento.

### 9.21 ANÁLISIS POR CARGA MUERTA (PASO 7)

El diagrama de fuerzas se puede dibujar una vez registradas las cargas y las reacciones en el diagrama de la armadura (figura 9.10a). Como la armadura y las cargas son simétricas, sólo se necesitan di-

bujar los diagramas de la mitad de la armadura. La notación consistente en las letras A a E se pueden considerar repetidas sobre la mitad derecha de la armadura por la adición de primas ('). El diagrama de fuerzas se construye como se explicó en la sección 9.12 hasta llegar a la junta  $U_2$ . Aquí hay tres incógnitas, las fuerzas en los miembros D-5, 4-5 y 3-4.

Las incógnitas en esta junta se pueden reducir temporalmente a dos reemplazando los miembros 4-5 y 5-6 por el miembro x-y, representado por la línea punteada de la figura 9.10a. Sobre el diagrama de fuerzas (figura 9.10b) se traza una línea a través de D paralela a D-5 sobre el diagrama de la armadura, y otra, a través de 3 sobre el diagrama de fuerzas paralelas a 3-4 sobre el diagrama de la armadura, localizando así a x. A través de x, en el diagrama de fuerzas, se traza una línea punteada paralela a x-y en el diagrama de la armadura, y otra por E en el diagrama de fuerzas paralela a E-6 en el diagrama de la armadura (igual a E-y). En la intersección se localiza el punto 6, que también es el punto y. La línea E-6 representa la fuerza verdadera en el miembro E-6.<sup>5</sup>

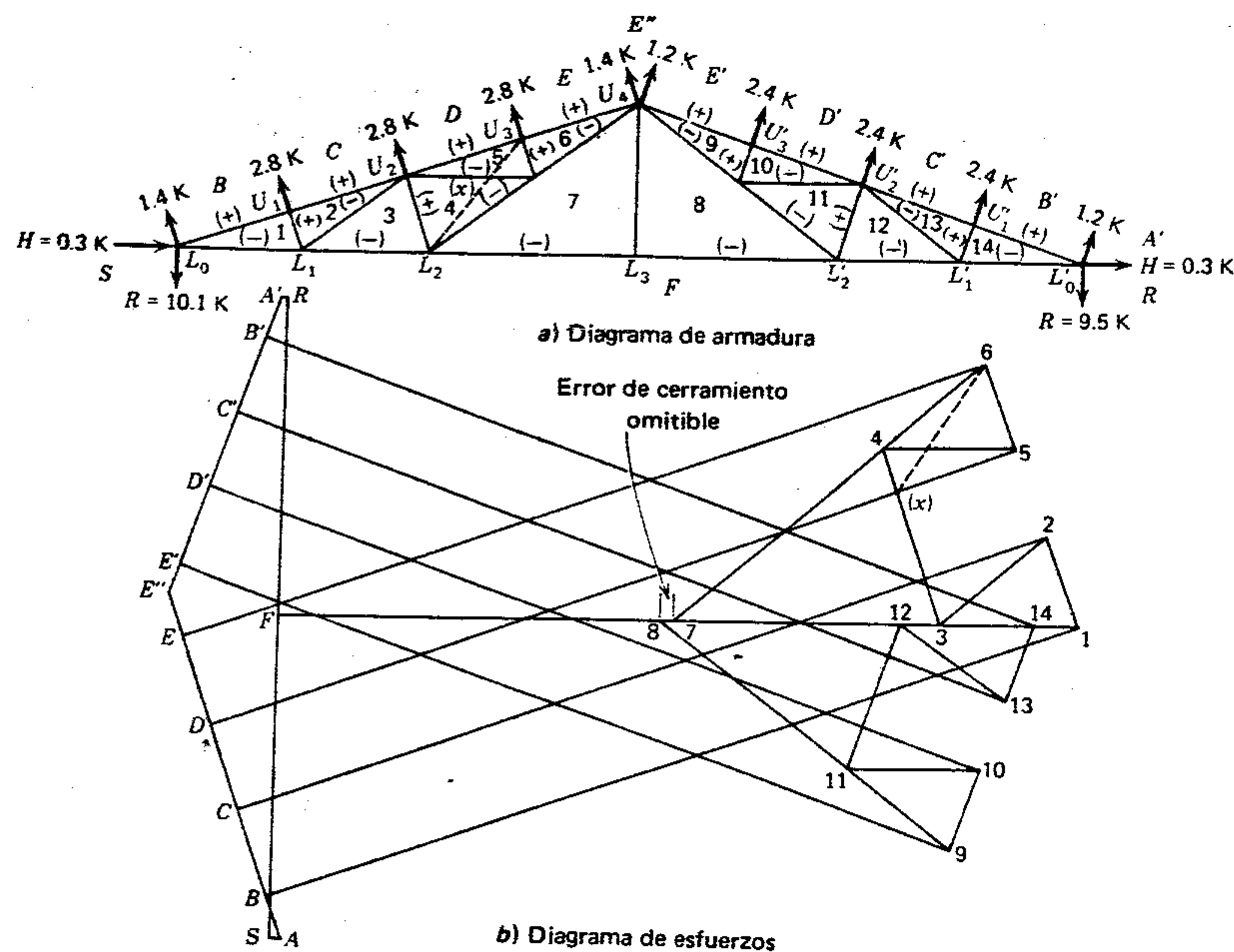
Ahora se elimina el miembro x-y y se reemplazan 4-5 y 5-6. Conociendo la posición del punto 6 en el diagrama de fuerzas, las fuerzas en los demás miembros se encuentran de la manera usual. Este método se denomina habitualmente "método del miembro en falsa posición".

Cuando las cargas del tablero sobre una armadura Fink son iguales y simétricas, como sucede en este ejemplo, se puede usar un sencillo método que no necesita el miembro sustituto, para construir el diagrama de fuerzas. En la figura 9.10b se observa que los puntos 1, 2, 5 y 6 están en una línea recta perpendicular a B-1. Cuando se ha determinado el punto 1, los puntos 2, 5 y 6 se localizan por la intersección de esta perpendicular con las líneas C-2, D-5 y E-6. Cuando las cargas del tablero no son iguales, no se puede usar este método, ya que los

línea recta

<sup>5</sup> Es evidente que a la fuerza en el miembro E-6 no la afecta ningún cambio en la forma de la armadura a la izquierda de la junta  $U_3$  mientras las posiciones de las cargas sigan siendo las mismas.





**Figura 9.13 Análisis de cargas de viento.**

El hecho de que las líneas 5-4, 3-4 y 6-7 se intersecten en un punto común servirá para comprobar la exactitud de la construcción de este diagrama de fuerzas. Las comprobaciones adicionales se harán evidentes mediante un estudio de la figura 9.10 y las fuerzas en las barras tabuladas en la tabla de fuerzas. Los signos de las fuerzas en los miembros se determinan como se explicó en la sección 9.12, y los valores se toman a escala del diagrama de fuerzas.

## 9.2.2 ANÁLISIS POR CARGA DE VIENTO (PASO 8)

El diagrama de la armadura está dibujado a escala (figura 9.13a). En éste se muestran las cargas de puntos de tablero debidas al viento proveniente

de la izquierda. Como las cargas no son simétricas, se ilustra toda la armadura y se tendrá que trazar el diagrama de fuerzas para las mitades izquierda y derecha de la armadura.

Las reacciones se determinan aplicando las leyes de la estática, junto con el supuesto dado de que la componente horizontal de las cargas está dividida igualmente en cada reacción.

El diagrama de fuerzas (figura 9.13*b*) se construye de modo similar al de carga muerta (Sección 9.13*a*). Asimismo, para reducir al mínimo los errores de dibujo, se aconseja empezar en una junta de apoyo, continuar hacia el centro e incluir el miembro medio 7-8, luego empezar por el otro apoyo y terminar en el centro. El error del cerramiento debe ser mínimo e indicarse sobre el diagrama como se ilustra en la figura 9.13*b*.

Debe señalarse que debido a los supuestos de que la componente horizontal de las cargas está dividida en partes iguales en cada reacción, el viento proveniente de la derecha causará idénticas fuerzas que el viento de la izquierda, si la armadura se volteara invirtiendo los extremos. Esto no sería cierto si los componentes de la reacción horizontal no fueran iguales, por ejemplo, si se usara un rodillo en una reacción.

### 9.23 TABLA PARA EL ANÁLISIS DE FUERZAS (PASO 9)

Se prepara una tabla de análisis de fuerzas (tabla 9.1) y en ella se registra la fuerza en cada miembro debido a cada condición de carga. Por las razones establecidas en las secciones 9.21 y 9.22, sólo se necesita identificar la mitad de los miembros. Usualmente, los miembros están agrupados; cuerda superior, cuerda inferior y celosía.

Las fuerzas debidas a la carga muerta se registran medidos a escala en el diagrama de fuerzas. Las fuerzas debidas a la carga de nieve son directamente proporcionales, es decir, la fuerza por carga

de nieve en cada miembro se obtiene multiplicando la fuerza por carga muerta por la relación.

$$\frac{\text{Carga de nieve en puntos de tablero}}{\text{Carga muerta en puntos de tablero}} = \frac{4.2}{6.0} = 0.70$$

Las fuerzas debidas a carga de viento de la izquierda se registran medidas a escala directamente del diagrama de fuerzas para el miembro listado. Las fuerzas debidas a carga de viento de la derecha se registran a escala del diagrama de fuerzas para los miembros contrapuestos en la otra mitad de la armadura. Es decir, la fuerza en el miembro  $B-1$  resultante del viento de la izquierda es el mismo que la del miembro  $B'-14$  resultante del viento de la derecha.

Las demás columnas de la tabla se determinan de las condiciones de carga probable, como se señala en los encabezados de columna (véase la Sección 9.4). Como las últimas cuatro columnas de la tabla pertenecen a cargas que incluyen parte de carga de viento, la carga total (para propósitos de diseño) se multiplica por  $\frac{3}{4}$ , y el resultado será el mismo que si se multiplicara el esfuerzo permisible por  $\frac{4}{3}$  (véase la Sección 9.8).

**Tabla 9.1** Tabla de análisis de fuerzas (kips).

[illegible]



Un miembro se debe diseñar para resistir con seguridad la tensión y/o compresión máximas a que esté posiblemente sujeto. En este ejemplo sucede que la fuerza máxima para todos los miembros (fuerza de diseño) se debe a la carga muerta más la carga de nieve. Esto no es raro para este tipo de armadura con las proporciones que se ilustran. Por supuesto, otras armaduras, o incluso esta misma con diferentes proporciones y/o cargas, bien puede requerir diferentes combinaciones de cargas, lo cual, a su vez, da como resultado diferentes distribuciones de fuerzas. Incluso algunos miembros

de la armadura pueden estar sujetos a inversión de esfuerzos (Sección 9.8).

#### 9.24 TABLA DE DISEÑO (PASO 10)

En este punto, sería conveniente preparar una tabla en que se pueda registrar la información de diseño: La forma de la tabla 9.2 es sólo una de muchas variedades que se podrían elegir. Hasta este punto en la solución del presente problema, se ha obtenido suficiente información para llenar las

Tabla 9.2 Tabla de diseño.

Miembro	Fuerza de diseño (kips)	Longitud (pies & pulg)	r mín (pulg)	Sección requerida	Sección adoptada	Peso (lb)
B-1	-106.0	9-3½	0.56	2 L 6 × 4 × ¾	2 L 6 × 4 × ¾	229
C-2	-102.5	9-3½	0.56	bien	bien	229
D-5	-98.8	9-3½	0.56	2 L 4 × 3½ × ½	bien	229
E-6	-95.2	9-3½	0.56	bien	bien	229
F-1	+98.3	9-10	0.49	2 L 4 × 3½ × 5/16	2 L 4 × 3½ × 5/16	151
F-3	+85.3	19-8	0.98	2 L 4 × 3 × 5/16	bien	151
		9-10	0.49			
F-7	+56.4	15-4	0.77	2 L 3½ × 3 × 5/16	2 L 3½ × 3 × 5/16	202
		30-8	1.53			
1-2	-9.4	3-4	0.20	2 L 2½ × 2 × 5/16	2 L 2½ × 2 × 5/16	30
2-3	+14.5	9-10	0.49	bien	bien	88
3-4	-19.2	6-7½	0.40	bien	bien	60
4-5	+14.5	9-10	0.49	bien	bien	88
5-6	-9.7	3-4	0.20	bien	bien	30
6-7	+43.2	19-8	0.98	2 L 2½ × 2 × 5/16	2 L 2½ × 2 × 5/16	88
4-7	+28.9	9-10	0.49	bien	bien	88
7-8	0.0	12-6	0.50	L 3 × 3 × 5/16	L 3 × 3 × 5/16	77

Peso total = 2(1892) + 77 = 3861 lb

#### 9.25 SELECCIÓN DE MIEMBROS A COMPRESIÓN (PASO 11)

Como se dijo en la sección 9.14, la cuerda superior (desde el apoyo hasta el caballete) de esta armadura estará compuesta de un miembro de doble ángulo. (El diseño de puntales de doble ángulo se explicó en la Sección 6.11). Con fines didácticos se tratará primero el miembro B-1 de la armadura. La mayor carga que debe soportar cualquier miembro de la cuerda superior es de 106 kips. Por lo tanto, se debe elegir un miembro que soporte 106 kips en una longitud de 9.3 pies. Se seleccionarán dos ángulos de lados desiguales con los lados largos espalda con espalda (⌋⌋) para igualar los radios de giro respecto a ambos ejes, tanto como sea posible (figura 9.14).

primeras tres columnas. A medida que se diseñan los miembros, la sección requerida se anota en la columna cinco. Cuando se han diseñado todos los miembros, se eliminan las ligeras variaciones en las secciones para simplificar la armadura. En armaduras de este tipo y claro, es práctica común usar una sección para toda la cuerda superior; el exceso de material se compensa con el ahorro en la fabricación.

Las longitudes registradas en la tercera columna usualmente se refieren a la longitud de un miembro entre juntas. Para miembros a compresión, ésta es la longitud de diseño entre los puntos en que puede ocurrir el pandeo y, por lo tanto, podría determinar el esfuerzo permisible. También se debe considerar el movimiento de juntas perpendicular al plano de la armadura. Estos movimientos dependen del arriostramiento entre armaduras. Por ejemplo, los largueros evitan que las juntas en la cuerda superior se muevan perpendicularmente al plano de la armadura. La junta en que se unen el miembro 4-7 y el miembro 6-7 no está restringida, y usualmente se emplea un miembro continuo entre L<sub>2</sub> y U<sub>4</sub> (figura 9.13a). Por lo tanto, es necesario investigar las relaciones de esbeltez para ambas longitudes al satisfacer el requisito establecido en la Sección 1.8.4 de la Especificación AISC 1978, o siempre que estos miembros estén a compresión.

En la Sección 1.8.4 de la Especificación AISC se estipula una relación máxima de esbeltez para miembros a compresión y se sugieren relaciones máximas para miembros a tensión, es decir,

$$\text{Miembros a compresión, } \text{Máx } \frac{LK}{r} = 200$$

$$\text{Miembros principales a tensión, } \text{Máx. } \frac{L}{r} = 240$$

Arriostramiento y miembros secundarios a

La L a usar para miembros de cuerda inferior depende del arriostramiento de la cuerda inferior. En este problema se supondrá que el arriostramiento perpendicular al plano de la armadura estará sujeto a las juntas L<sub>2</sub> y L'<sub>2</sub>.

En el Manual AISC se dan tablas de carga permisible para miembros de doble ángulo para acero A36; por lo tanto, buscando en la tabla ángulos de patines desiguales con los lados largos espalda con espalda, se ve que la combinación de menor peso está compuesta de ángulos de 6 × 4 × ¾ pulg de 24.6 lb por pie. Las cargas permisibles para el eje y-y son 117 kips para 8 pies y 108 kips para 10 pies. Como el miembro B-1 debe soportar solamente una carga de 106 kips en 9.3 pies, esta sección es adecuada. Los demás miembros en la cuerda superior se podrían diseñar de la misma manera; sin embargo, soportarían todos un menor esfuerzo. Por ejemplo, se nota que una sección de peso ligeramente menor se podría usar para miembros D-5 y E-6, pero es más lógico hacer de la cuerda superior un miembro continuo. Por lo tanto, la sección de doble ángulo 6 × 4 × ¾ pulg se adopta para toda la cuerda superior. Los demás miembros a compresión de la armadura se diseñan de modo similar, recordando que la sección mínima se ha establecido en 2½ × 2 × 5/16 pulg.

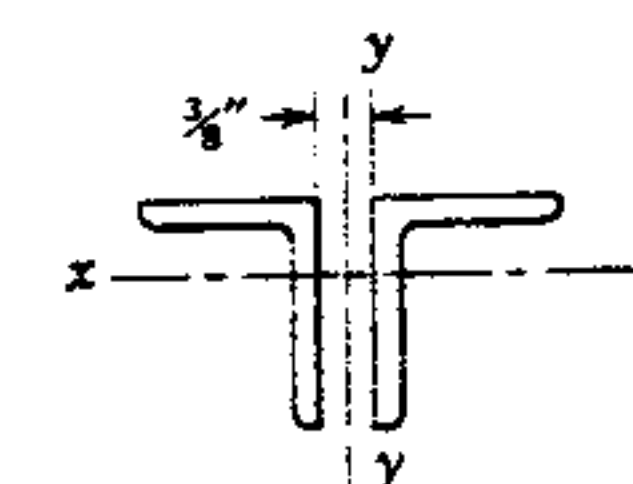


Figura 9.14 Cuerda superior.



## 9.26 DISEÑO DE MIEMBROS A TENSION (PASO 12)

La resistencia de un miembro a tensión depende del área de su mínima sección transversal. Con miembros a tensión de doble ángulo atornillado, que no tienen importancia directa en este ejemplo, el área mínima se obtiene cuando se toma una sección transversal a través de los agujeros para tornillos (figura 9.15). Esto se denomina área neta y en el caso de los sujetadores se trató detalladamente en la Sección 7.12.

El procedimiento de diseño es el siguiente:

1. Encontrar el área requerida dividiendo la fuerza total a soportar entre el esfuerzo de tensión unitario permisible. Esto se puede expresar mediante la fórmula  $A = P/F_t$ , donde  $A$  está en pulgadas cuadradas,  $P$  en kips y  $F_t$  es el esfuerzo de tensión axial permisible en kips por pulgada cuadrada.
2. Seleccionar dos ángulos que tengan un área bruta de sección transversal un poco mayor que la encontrada en el paso (1).
3. Determinar el área neta mediante el método descrito en la Sección 7.12. El área neta necesitaría ser igual o ligeramente mayor que la requerida encontrada en el paso (1). Si las dos no concordaran razonablemente se tendría que seleccionar otra sección de prueba.

Por supuesto, el anterior procedimiento de área neta no es necesario para miembros soldados: sin embargo, si la armadura va a ser atornillada o soldada como es el caso en este ejemplo, la sección

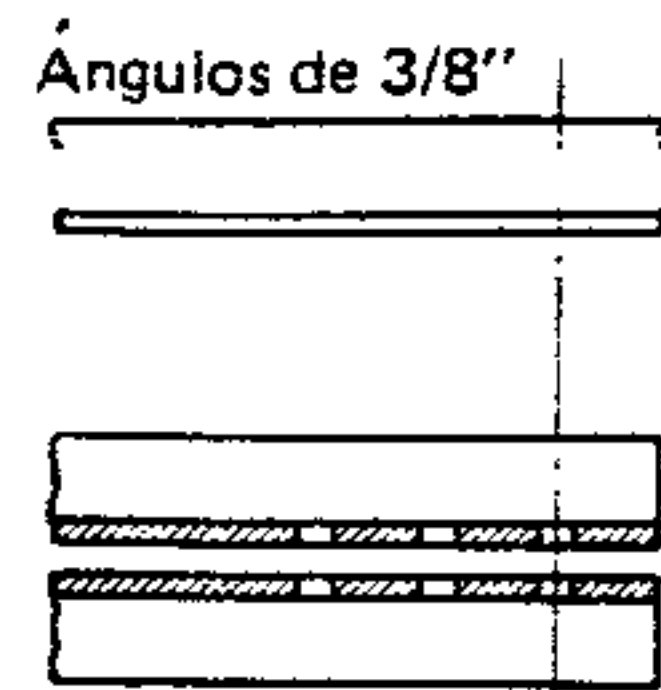


Figura 9.15 Sección neta.

seleccionada debe tener de preferencia una relación de esbeltez que no exceda de 240.

El miembro de la cuerda inferior  $F-1$  se usará para ilustrar el diseño (o selección) de los miembros a tensión que se van a soldar. Se encontró que la fuerza total en este miembro fue de 98.3 kips.

1. El área requerida para acero A36 es

$$A = \frac{P}{F_t} = \frac{98.3}{22} = 4.47 \text{ pulg}^2$$

2. En las tablas de carga permisible del AISC para ángulos de lados desiguales, se ve que dos ángulos de  $4 \times 3\frac{1}{2} \times \frac{5}{16}$  pulg tienen un área de 4.49 pulg<sup>2</sup>.

El miembro  $F-1$  tiene una longitud de 9 pies 10 pulg; por lo tanto, necesitaría tener un radio mínimo de giro como miembro principal de

$$r = \frac{L}{240} = \frac{118}{240} = 0.49 \text{ pulg}$$

El miembro  $F-3$  tiene la misma longitud y, por tanto, necesitaría el mismo radio de giro mínimo. Para simplificar, sin embargo, usualmente se emplea un miembro continuo tanto para  $F-1$  como para  $F-3$ . Pero, si la junta  $L_1$  no está arriostrada lateralmente y está libre de moverse en un sentido perpendicular al plano de la armadura (o si el arriostramiento se daña), entonces todo el miembro debe tener un radio mínimo de giro (perpendicular al plano de la armadura), es decir,

$$r = \frac{L}{240} = \frac{236}{240} = 0.98 \text{ pulg}$$

ba de dos ángulos  $4 \times 3\frac{1}{2} \times \frac{5}{16}$  pulg se colocaría con los lados cortos espalda con espalda ( $\perp\perp$ ),  $r_y = 1.86$  pulg para una placa de junta de  $\frac{3}{8}$  pulg.

Es práctica común arriostrar lateralmente las otras juntas: como se planteó antes, se arriostrarán las juntas  $L_2$  y  $L'_2$ . Por lo tanto, los demás miembros de la cuerda inferior ( $F-7$  y  $F-8$ ) también de-

ben proporcionar un mayor  $r$  perpendicular, en vez de paralelo, a la armadura. Y es por esta razón que los miembros de la cuerda inferior se componen a menudo de ángulos de lados desiguales con los lados cortos espalda con espalda.

Los demás miembros a tensión de la armadura se diseñan (o seleccionan) de una manera similar. Se usa un ángulo de  $3 \times 3 \times \frac{5}{16}$  pulg para el miembro 7-8 de 12 pies 6 pulg de longitud. Esta sección se elige porque es la de menor peso en ángulo de  $\frac{5}{16}$  pulg de espesor, que proporciona el radio de giro deseado de 0.50 pulg para un miembro secundario, es decir,

$$r = \frac{L}{300} = \frac{150}{300} = 0.50 \text{ pulg}$$

En la tabla "Dimensiones y Propiedades" del AISC, nótese que el radio de giro más pequeño de este ángulo es 0.589 pulg (eje Z-Z).

$$P = 22(1.78) = 39.2 > 6 \text{ kips}$$

(La capacidad mínima permisible según el AISC es 6 kips.)

Las tablas de cargas permisibles para diversos tamaños de ángulos y los arreglos disponibles facilitan en gran medida el proceso de diseño. En ocasiones estas tablas incluyen la estipulación que indica que los ángulos se deben conectar a las placas de junta por ambos lados, para desarrollar su resistencia total. Sin embargo, usualmente esto no es necesario y, cuando la capacidad del ángulo para transmitir la carga está en duda, generalmente será suficiente seleccionar una sección ligeramente mayor.

Cuando se han diseñado todos los miembros, se llena la quinta columna de la tabla 9.2 y se calcula el peso de la armadura. El peso de la armadura, sin incluir soldaduras, placas de junta, etc., será de aproximadamente 3861 lb. El peso supuesto fue de cerca de 4480 lb. Por lo tanto, suponiendo 770 lb para el peso de soldaduras, placas, etc., o sea un 20 por ciento, habrá una discrepancia entre el peso real y el supuesto de sólo 151 lb, lo cual es muy aproximado.

## 9.27 DISEÑO DE JUNTAS (PASO 13)

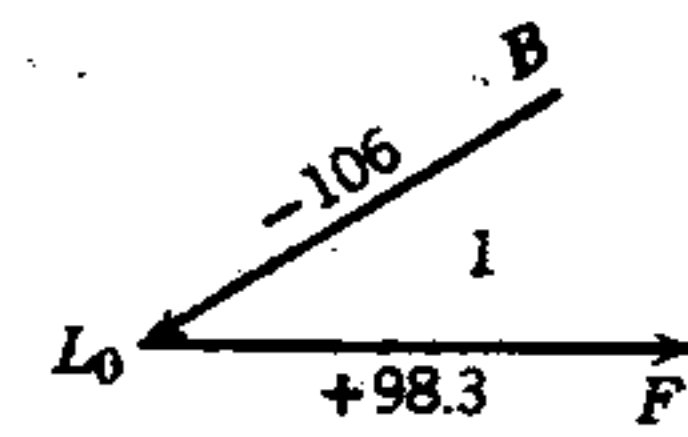
Las líneas de acción de todos los miembros de la armadura que llegan a una junta deben encontrarse en un punto común (Sección 9.10). Si esto no se puede lograr, habrá excentricidad. Con miembros de ángulo, no se puede evitar que ocurra esta excentricidad porque el eje del centro de gravedad de estos miembros no está en el plano de alguno de los lados del ángulo.

En armaduras atornilladas, esta excentricidad se acentúa aún más por el hecho de que con frecuencia no se pueden instalar tornillos en un plano que pase por el centro de gravedad del miembro; si se hiciera quedarían demasiado cerca del lado sobresaliente. Por lo tanto, los tornillos se colocan usualmente a lo largo de las líneas de gramil estándar (Manual AISC, parte 4) del lado en contacto con la placa de junta, y se agregan conectores adicionales para compensar la excentricidad resultante.

Por supuesto, el mismo problema del eje del centro de gravedad existe en los miembros soldados. Sin embargo, al soldar, generalmente no se presenta el problema del espacio de trabajo y por lo común los miembros se pueden alinear con mayor exactitud. Entonces, se podrían hacer soldaduras de tapón o de ranura mientras se pudiera lograr el diámetro o el ancho del agujero. Usando soldaduras de filete, no en agujeros o en ranuras, sino en los bordes de los lados del ángulo conectado ni siquiera existe este problema. Sin embargo, como se señaló en el capítulo 7, se debe considerar el balanceo de soldaduras debido a la falta de simetría de la sección. En la especificación AISC (Sección 1.17) no se exige realmente este balanceo, y ciertamente es difícil de justificar con miembros pequeños y con cargas ligeras. No obstante, para propósitos de este ejemplo, las soldaduras se balancearán para mostrar mejor esta técnica.

Sin importar el tipo de conectores que se usen, en este ejemplo se usan tornillos, en el diseño de juntas de armadura se deben considerar dos condiciones generales: primera, si los miembros se extienden simplemente de una junta a otra; segunda, si los miembros son continuos a través de la junta.



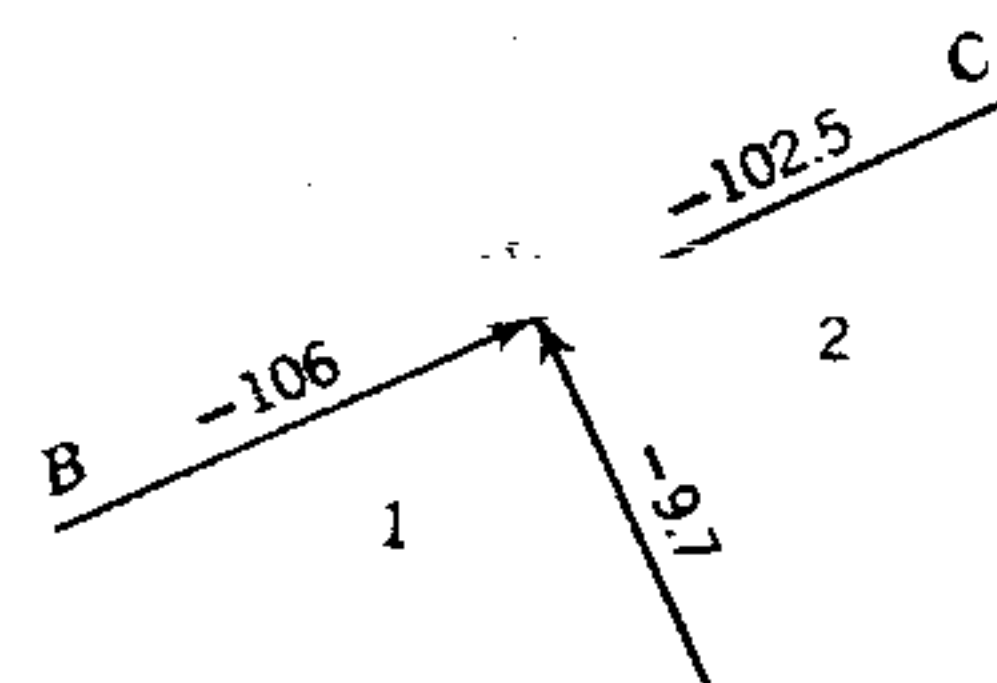

Figura 9.16 Junta  $L_0$ .

El primer caso se ilustra mediante la junta del apoyo  $L_0$ . La fuerza en el miembro B-1 de la cuerda superior, y la fuerza en el miembro F-1 de la cuerda inferior se ilustran en la figura 9.16. B-1 está compuesto de dos ángulos  $6 \times 4 \times \frac{3}{8}$  pulg y F-1 está compuesto por dos ángulos  $4 \times 3 \frac{1}{2} \times \frac{5}{16}$  pulg. Como se dijo antes, todas las placas de junta son de  $\frac{3}{8}$  pulg de espesor. En este caso, las soldaduras en cada miembro deben transferir toda la carga de ese miembro a la placa de la junta.

El segundo caso se ilustra mediante el diseño de la junta  $U_1$ . Las fuerzas en los miembros que se encuentran en esta junta se ilustran en la figura 9.17. El miembro 1-2 está compuesto de dos ángulos  $2 \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{5}{16}$  pulg. En este caso, las soldaduras en el miembro 1-2 deben transferir toda la carga a la placa de la junta; pero las soldaduras en el miembro continuo de la cuerda superior necesitan transferir solamente a la placa de la junta la diferencia entre la fuerza en B-1 y en C-2, o sea  $106 - 102.5 = 3.5$  kips.

Volviendo a la explicación general de las juntas, se aplicarán soldaduras de filete hechas en taller a lo largo de los bordes de los lados de los ángulos en una longitud suficiente para desarrollar el esfuerzo de diseño, se deben usar los recomendados por la Especificación AISC de 1978.

El tamaño mínimo de soldadura de filete (Especificación AISC, Sección 1.17.2) para partes hasta


Figura 9.17 Junta  $U_1$ .

de  $\frac{1}{2}$  pulg de espesor es  $\frac{3}{16}$  pulg. El tamaño máximo de soldadura de filete a lo largo del lado de un ángulo de  $\frac{1}{4}$  pulg o más de espesor (Especificación AISC, Sección 1.17.3) no puede exceder (excepto en circunstancias prescritas) de  $\frac{1}{16}$  pulg menos que el espesor del lado del ángulo. Para ángulos de  $\frac{5}{16}$  pulg, el tamaño máximo de soldadura de filete sería entonces

$$\frac{5}{16} - \frac{1}{16} = \frac{4}{16} \text{ pulg}$$

El espesor de los miembros varía de  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{5}{16}$  pulg; sin embargo, el arriostramiento tiene sólo  $\frac{1}{4}$  de espesor. Por lo tanto, se hará una reducción de  $\frac{1}{16}$  pulg y se usará en todas partes la soldadura de filete de  $\frac{3}{16}$  pulg. La longitud efectiva mínima de las soldaduras (Sección 1.17.4 de la Especificación AISC) no será menor que la distancia perpendicular entre ellas, que en este caso es la longitud del lado en contacto con la placa de la junta. Además, la soldadura mínima debe ser cuando menos 4 veces el tamaño nominal de la soldadura.

Las placas de juntas se retraen  $\frac{3}{8}$  pulg respecto a los patines sobresalientes de las cuerdas superior e inferior (véanse detalles en la figura 9.18). Esto se hace para dejar superficie de soldadura entre las espaldas de los ángulos y las placas de junta, permitiendo así una superficie ininterrumpida y lisa en las cuerdas superior e inferior. La longitud mínima de soldaduras intermitentes a lo largo de esta superficie es de  $1 \frac{1}{2}$  pulg. (Especificación AISC 1978, Sección 1.17.5).

El cálculo de longitudes de soldaduras para la junta  $L_0$  es el siguiente.

La resistencia de una soldadura de filete de  $\frac{3}{16}$  pulg con electrodo E60 es  $0.80(3) = 2.4$  kips por pulg (Sección 7.23).

Cuerda superior soldada a la placa de la junta:

$$\frac{106}{2(2.4)} = 22 \text{ pulg}$$

Como se dijo al principio de esta sección, las soldaduras no necesitan estar balanceadas, pero aquí sí lo estarán para propósitos de ilustración. Con base en las propiedades de las tablas de sec-

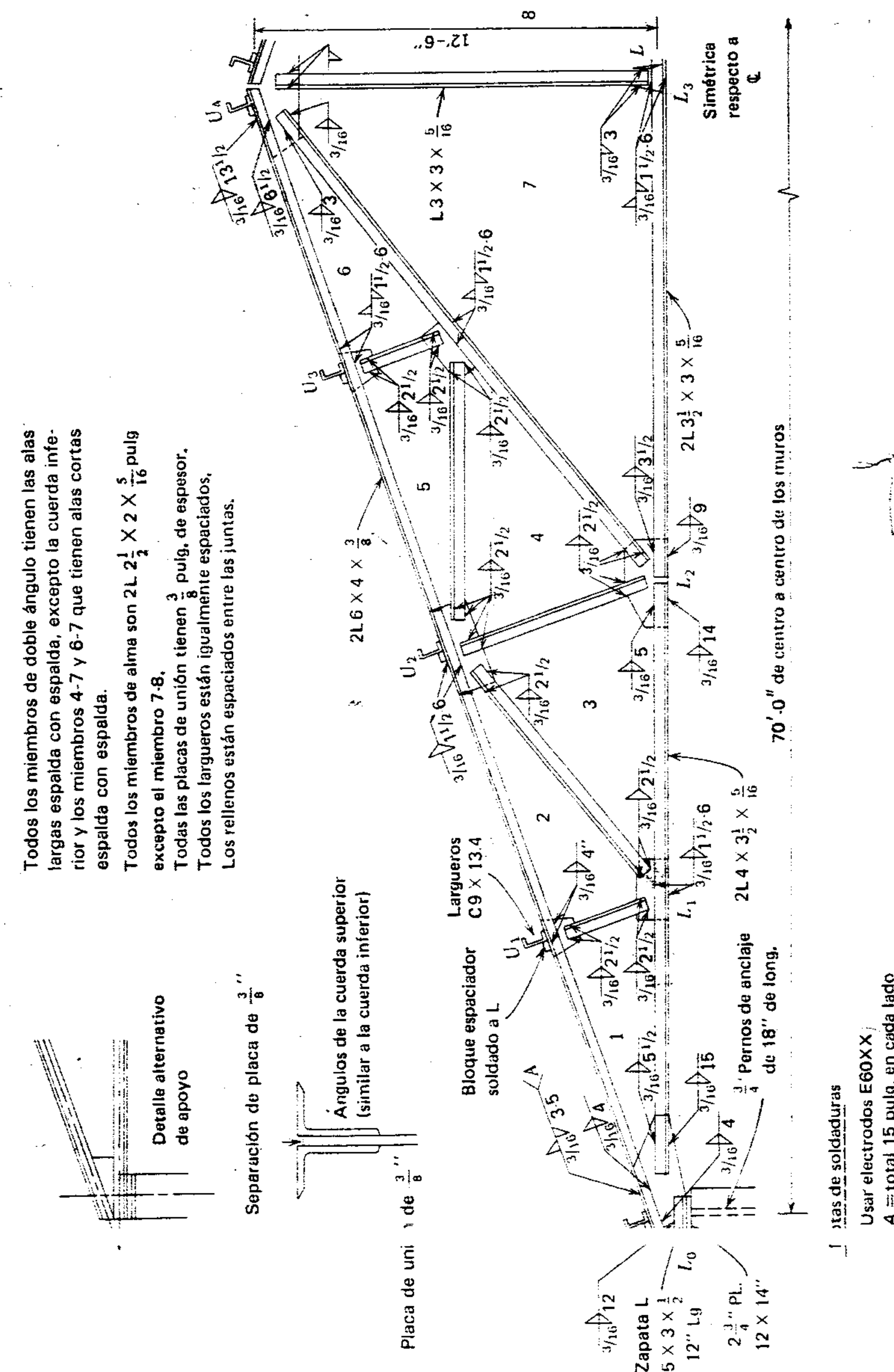


Figura 9.18 Cálculo del diseño.



ciones, determinar la distancia desde el centro de gravedad del ángulo hasta los bordes que recibirán las soldaduras. Las distancias son 3.37 y 1.63 pulg, respectivamente. Para balancear, las soldaduras deben ser inversamente proporcionales a estas distancias.

$$\frac{1.63}{3.37} = \frac{\text{longitud de soldadura a lo largo del borde superior}}{\text{longitud de soldadura a lo largo del borde inferior}} = \frac{\text{usar } 7\frac{1}{2} \text{ pulg.}}{\text{usar } 15 \text{ pulg.}}$$

Soldadura de la cuerda inferior a la placa de la junta:

$$\text{Longitud total necesaria} = \frac{98.3}{2(2.4)} = 20.5 \text{ pulg}$$

Balanceo de soldaduras,

$$\frac{0.93}{2.57} = \frac{\text{longitud de soldadura del borde inferior}}{\text{longitud de soldadura del borde superior}} = \frac{\text{usar } 5\frac{1}{2} \text{ pulg.}}{\text{usar } 15 \text{ pulg.}}$$

El cálculo de longitudes de soldadura para los miembros de la cuerda en la junta  $U_1$  es el siguiente.

Como se señaló anteriormente, la diferencia entre las fuerzas de barra (miembros B-1 y C-2) es de 3.5 kips. Por lo tanto,

Soldadura de la cuerda superior a la placa:

$$\text{Longitud total necesaria} = \frac{3.5}{2(2.4)} = 0.73 \text{ pulg.}$$

Entonces, aquí el criterio determinante de la longitud mínima de la soldadura es la distancia perpendicular entre soldaduras, o un mínimo de 4 pulg. También se usará en otras juntas el mínimo de  $1\frac{1}{2}$  pulg para soldaduras intermitentes.

El diseño de otras juntas se efectúa de manera similar.

## 9.28 SOPORTE EXTREMO Y ANCLAJE (PASO 14)

En la sección anterior se determinaron las longitudes de soldaduras necesarias en las cuerdas superior e inferior en la junta  $L_0$ . La longitud sobre el ángulo de asiento (figura 9.18) se hace suficientemente prolongada para transmitir la reacción del extremo. En este caso, la reacción del extremo debida a cargas muerta y de nieve es  $24 + 16.8 = 40.8$  kips, y la longitud requerida es

$$\frac{40.8}{2(2.4)} = 8.50; \text{ usar } 8\frac{1}{2} \text{ pulg.}$$

Se usará toda la longitud de 12 pulg del ángulo de asiento.

Cuando las armaduras de techo se apoyan sobre muros de mampostería o pilares, usualmente se conecta una placa base a la cara inferior de los ángulos de asiento y otra placa de apoyo descansa sobre la mampostería. Estas placas se hacen un poco más anchas que los ángulos de asiento, para dejar lugar a los agujeros para los tornillos de anclaje, y comúnmente el espesor mínimo de cada placa es de  $\frac{1}{2}$  pulg. Se diseñan de la misma manera que las placas de apoyo para vigas (Sección 5.16), cada placa resistiendo la mitad del momento flexionante desarrollado en una sección vertical a través del borde del filete del ángulo de asiento. El área de la placa de apoyo debe ser suficiente para distribuir la reacción del extremo sobre la mampostería.

Si la presión de apoyo permisible ( $F_p$ ) sobre la mampostería es de 250 lb/pulg<sup>2</sup> (Especificación AISC, Sección 1.5.5), el área necesaria de la placa en este ejemplo es

$$A = \frac{R}{F_p} = \frac{40,800}{250} = 163 \text{ pulg}^2$$

Se elige una placa de  $12 \times 14$  pulg. La presión de apoyo real en la cara inferior de la placa es

$$\frac{40,800}{12(14)} = 243 \text{ lb/pulg}^2$$

La sección de momento crítico a través del borde del filete del ángulo ocurre a 1 pulg de la línea central de la placa de la junta (dejando  $\frac{1}{4}$  pulg para el radio del filete). El momento flexionante para una franja de 1 pulg de ancho es

$$243(6)\frac{6}{2} = 4374 \text{ pulg-lb}$$

Debido a que se considera que cada placa resiste la mitad de este momento, el módulo de sección requerido para una placa es

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{2187}{27,000} = 0.081 \text{ pulg}^3$$

El espesor requerido de cada placa (Sección 5.16) es

$$t = \sqrt{6S} = \sqrt{6(0.081)} = 0.70 \text{ pulg.}$$

Dos placas de  $12 \times 14$  pulg y espesor de  $\frac{3}{4}$  pulg son suficientes.

Generalmente se usan dos tornillos de anclaje redondos de  $\frac{3}{4}$  pulg de aproximadamente 18 pulg de largo para sujetar la armadura a la mampostería. Los agujeros ovalados en la placa base permiten el movimiento debido a la expansión y la contracción.

En la figura 9.18 se ilustra también un detalle del apoyo de extremo alternativo, en el cual los

ángulos de la cuerda inferior actúan como ángulos de asiento. En la figura se notará que la cuerda inferior se ha bajado un poco y que las líneas de acción de las cuerdas inferior y superior y la reacción del extremo no coinciden en un punto común. Por supuesto, esto produce un momento en la conexión, el cual se puede compensar en armaduras ligeras haciendo más grande la placa de la junta y más largas las soldaduras. Asimismo, la soldadura debe ser suficiente en la cuerda inferior para transmitir la reacción del extremo. Es mejor evitar este tipo de detalle en los extremos de armaduras pesadas, pero cuando se tiene que usar, la junta se debe diseñar especialmente para resistir los esfuerzos debidos a la excentricidad.

## 9.29 DISEÑO DEL ARRIOSTRAMIENTO (PASO 15)

Por lo común las armaduras de techo que se apoyan en muros de mampostería tienen arriostramiento diagonal, el cual consiste en varillas redondas de  $\frac{3}{4}$  pulg colocadas en el plano de la cuerda superior en vanos alternados (figura 9.19a). Además, con frecuencia la cuerda inferior se arriostra con una o dos líneas de puntales continuos, dependiendo del claro (figura 9.19b). Estos puntales pueden ser a base de ángulos, canales o vigas ligeras, y se pueden seleccionar con base en un máximo  $L/r$  de 200 (Sección 9.24). En este problema, las armaduras están espaciadas a 16 pies y necesitan puntales con un mínimo radio de giro

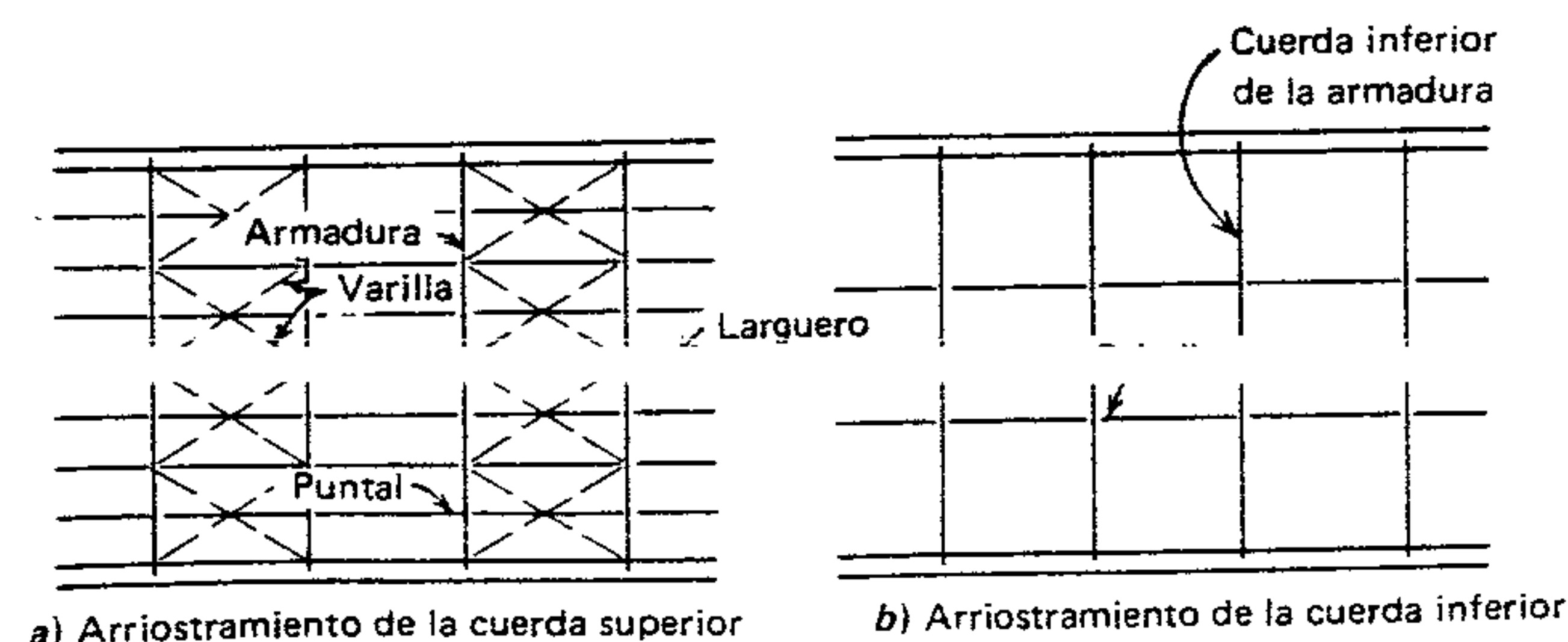


Figura 9.19 Arriostramiento de armadura.



$$r = \frac{L}{200} = \frac{16(12)}{200} = 0.96 \text{ pulg.}$$

En una tabla de propiedades de puntales de doble ángulo, serían suficientes dos ángulos de  $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$  pulg con los lados largos verticales espalda con espalda y separados  $\frac{3}{8}$  pulg. Debido a la naturaleza indefinida de las fuerzas que debe resistir el arriostramiento, no se puede hacer un análisis de esfuerzos exacto. El diseñador debe confiar en su propio juicio y experiencia (véase también el capítulo 8).

### 9.30 DIBUJO DEL DISEÑO (PASO 16)

El tamaño de los miembros, el tipo y las longitudes de la soldadura en cada junta, el espesor de las placas de las juntas y todos los detalles determinados mediante los cálculos se registran en el dibujo o plano de diseño que se ilustra en la figura 9.18. Debe notarse que debido al tamaño de las placas de las juntas necesarias para recibir adecuadamente los miembros, a menudo es conveniente espaciar las soldaduras, a un cuando se use más soldadura que la especificada por los cálculos, es decir, usar soldaduras intermitentes. Asimismo, se debe considerar el uso de miembros de un solo ángulo y la aplicación de soldaduras en los extremos de los ángulos para reducir los tamaños de las placas en las juntas.

Los planos de taller del fabricante se hacen con base en los dibujos de diseño y dan detalles completos de longitudes y espaciamiento exactos de soldaduras, tamaño de las placas de las juntas, longitud de miembros, etc.

### 9.31 ARMADURAS CON CARGAS

Sucede con frecuencia que el claro de la cubierta de techo es tal que se deben colocar largueros entre puntos de tablero de la cuerda superior. Asimismo, con frecuencia se necesita que la cuerda inferior

soporte cargas entre puntos de tablero. Entonces la cuerda debe actuar como viga además de soportar una carga directa a compresión o tensión, es decir, está sujeta tanto a flexión como a esfuerzo directo.

El diagrama de fuerzas para la fuerza axial en los miembros se traza de la misma manera que se explicó en la Sección 9.12, excepto que las cargas del tablero deben incluir las cargas transmitidas a la armadura por los largueros intermedios. Por ejemplo, si la carga real sobre la cuerda superior de una armadura es como se ilustra en la figura 9.20, las cargas de tablero en  $U_1$  para el diagrama de fuerzas es la suma de 1000 lb debida a la conexión de largueros en la junta, 500 lb del larguero intermedio de la izquierda y 500 lb del larguero intermedio a la derecha, o sea un total de 2000 lb. Cuando las cargas del tablero se han determinado de esta manera, el diagrama de fuerzas se traza como se explicó antes.

Sin embargo, en el diseño de miembros sujetos a flexión y esfuerzo directo, se debe suponer una sección de prueba y luego comprobar si es adecuada mediante uno de los siguientes métodos (véase también la Sección 6.17).

#### 1. Flexión y tensión directa.

Los miembros deben satisfacer los requisitos de la fórmula

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

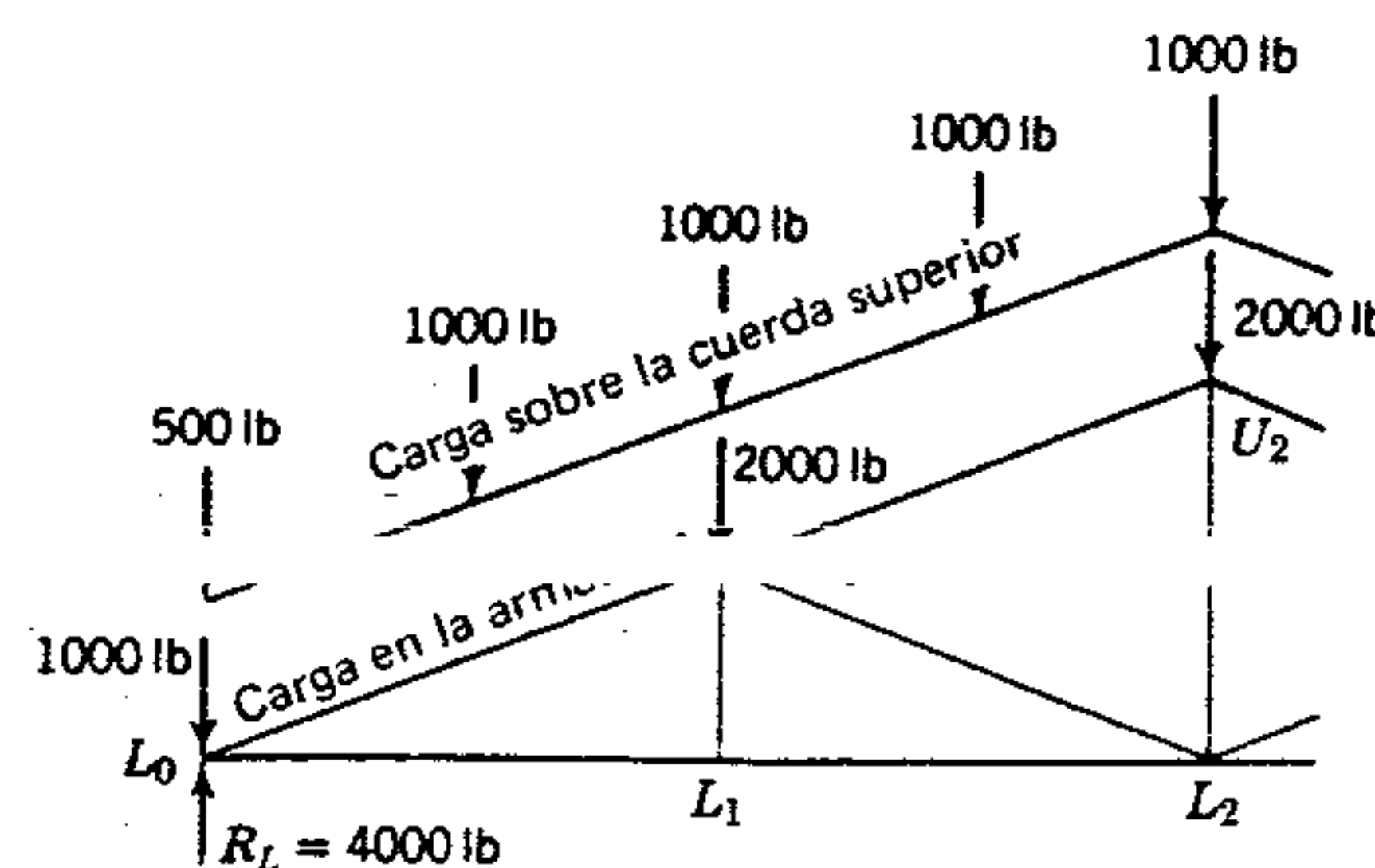


Figura 9.20 Flexión en la cuerda superior.

donde:

$$f_a = \frac{P}{A} \text{ (esfuerzo de tensión real)}$$

$$f_b = \frac{Mc}{I} \text{ (esfuerzo flexionante de tensión real)}$$

$$F_b = \text{esfuerzo flexionante de tensión máximo permisible.}$$

Además, los miembros deben satisfacer ciertas condiciones por flexión solamente, entre puntos de soporte lateral.

- Los miembros a tensión y compresión directa deben satisfacer los siguientes requisitos:

- Cuando  $f_a/F_a \leq 0.15$ ,

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

- Cuando  $f_a/F_a > 0.15$ ,

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_e}\right) F_b} \leq 1.0$$

donde:

$$f_a = \frac{P}{A} \text{ (esfuerzo de compresión axial real).}$$

$$f_b = \frac{Mc}{I} \text{ (esfuerzo flexionante de compresión real).}$$

$$F_a = \text{esfuerzo axial permisible basado en } KL/r.$$

$$F_b = \text{esfuerzo flexionante de compresión permisible.}$$

$$F'_e = \frac{12\pi^2 E}{23(KL_b/r_b)^2}$$

( $L_b$  = longitud no arriostrada en el plano de flexión;  $r_b$  = radio de giro correspondiente;  $K = 1.0$ .)

$C_m = 1.0$ , o un valor menor determinado por la tabla C1.6.1 en el Manual del AISC.

Además, en los puntos arriostrados en el plano de flexión, el miembro debe satisfacer la fórmula de interacción básica.

El diseño de estos miembros se tratará en las Secciones 9.33 y 9.34.

### 9.32 MOMENTOS FLEXIONANTES PARA MIEMBROS CONTINUOS

Este tema se trata detalladamente en el capítulo 10. No obstante, es necesario saber lo que sucede en los miembros que son continuos sobre los apoyos, antes de explicar el diseño de miembros de cuerda continuos que soportan cargas entre puntos de tablero. Los conceptos implícitos en la continuidad y la flexión bajo restricción se ilustran en la figura 9.21. En la figura 9.21a se representa una sola viga apoyada sobre tres soportes y sujeta a cargas iguales en los centros de los dos claros. Si se imagina que la viga está cortada en el centro de los apoyos como se ilustra en la figura 9.21b, el resultado serán dos vigas simples. Cada una de estas vigas simples se deflexionará como se ve. Sin embargo, cuando la viga se hace continua sobre los apoyos, la curva de deflexión tiene una forma similar a la indicada por la línea punteada en la primera figura.

Es evidente que no hay momento flexionante desarrollado sobre el apoyo del centro (figura 9.21b), mientras que debe haber un momento en el apoyo en la figura 9.21a. Un estudio de esta última figura revela que hay tensión en la parte inferior del miembro en ambos centros de los claros y, además, que hay tensión en la parte superior de

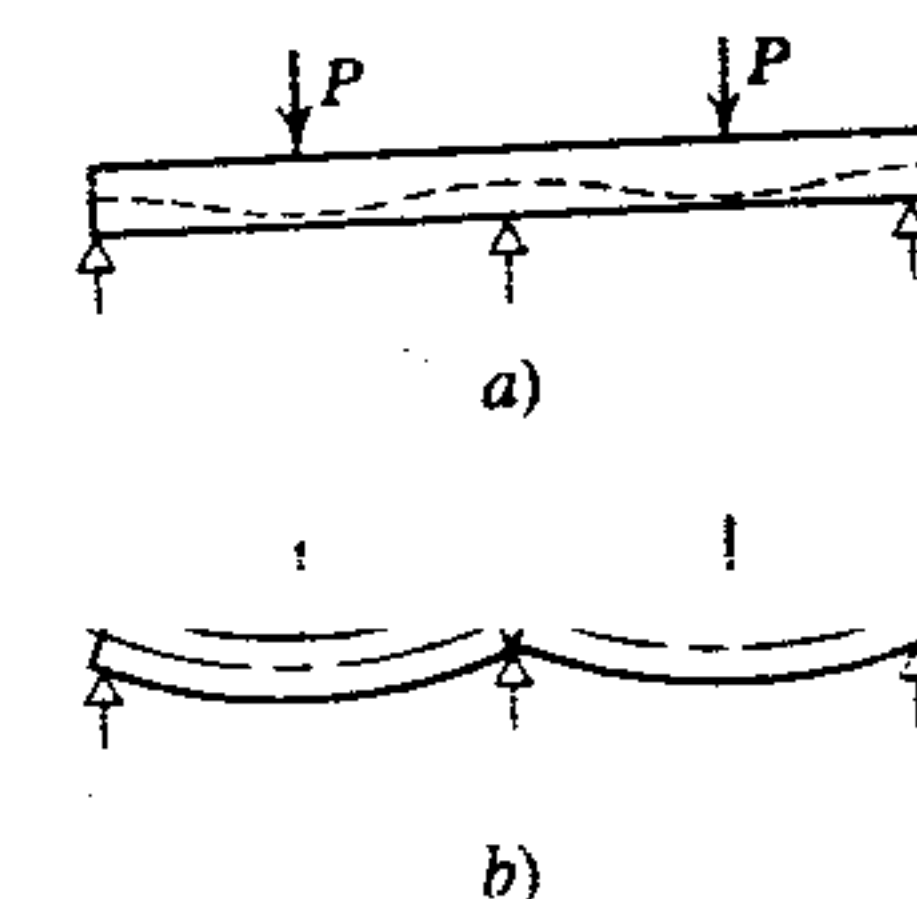


Figura 9.21 Continuidad.



los miembros en el soporte central. Es decir, el miembro en *a*) tiene un momento flexionante positivo en el centro de cada claro y un momento negativo en el apoyo central. En el capítulo 10 se verá que el momento flexionante positivo en el centro del claro para un miembro continuo como el de *a*) es menor que el desarrollo en los claros simples en *b*).

El valor de los momentos flexionantes en vigas continuas no se puede encontrar mediante las ecuaciones usuales de equilibrio. Se requieren ecuaciones que comprendan la elasticidad del material; por lo tanto, la viga continua se describe como "estáticamente indeterminada". Se pueden desarrollar fórmulas de momentos flexionantes para diversos tipos de cargas y condiciones de apoyo en vigas continuas, y éstas se reproducen en muchos manuales. Por ejemplo, consúltese "Diagramas y Fórmulas de Vigas" en la parte 2 del Manual AISC y el Apéndice B. El diseñador debe entender estas derivaciones y aplicar su criterio para usarlas, teniendo presente que las condiciones reales en que se construye la estructura pueden no ser iguales a las condiciones teóricas en que se basan las fórmulas.

### 9.33 FLEXIÓN Y TENSIÓN DIRECTA COMBINADAS

En el siguiente ejemplo se ilustra el diseño de miembros para resistir esfuerzos combinados de flexión y tensión.

#### Ejemplo

Diseñar la cuerda inferior de una armadura de techo similar a la ilustrada en la figura 9.22, soportando

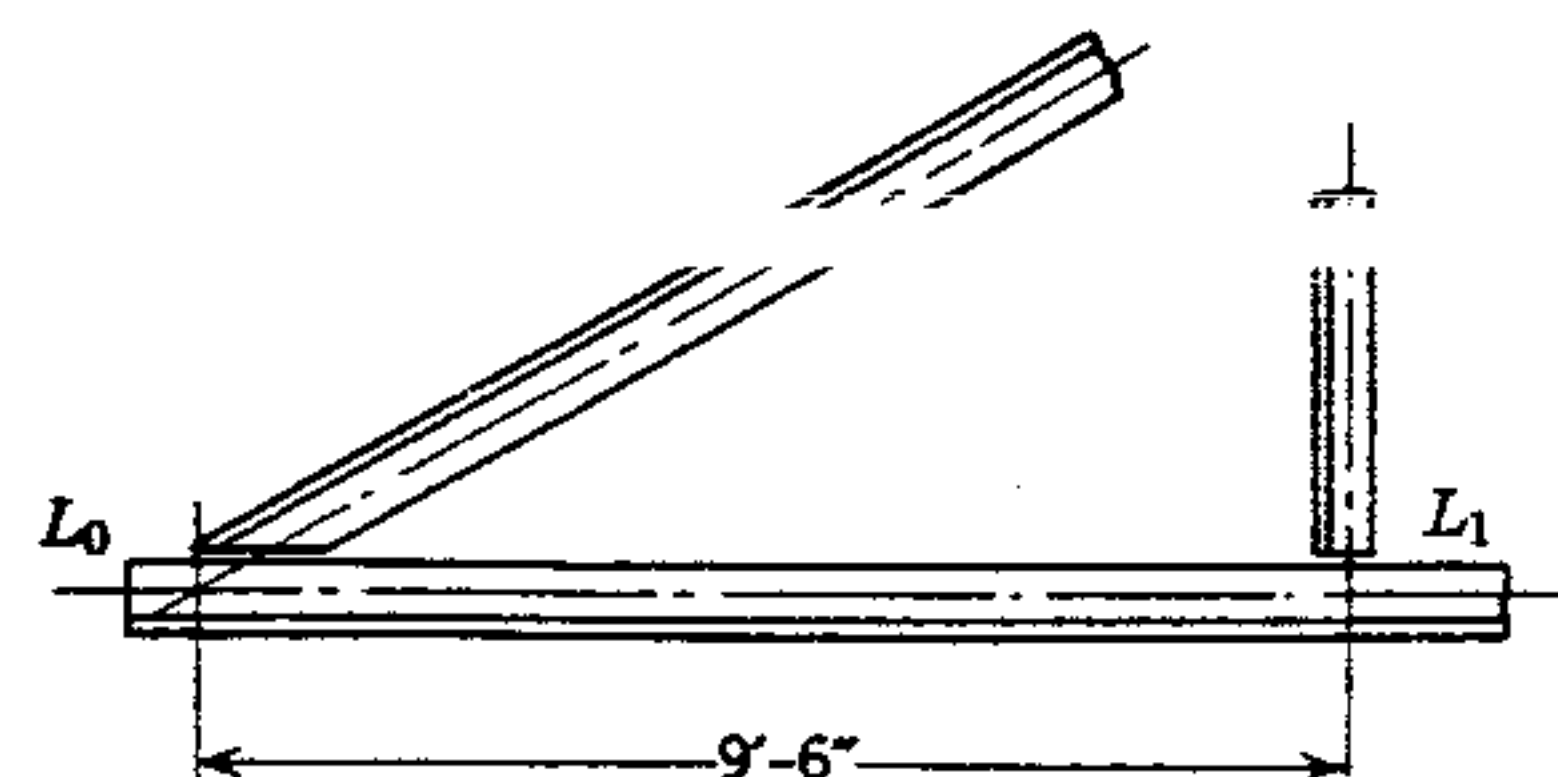


Figura 9.22 Combinación y tensión de flexión.

una carga directa de tensión de 46,000 lb y una carga uniforme en ambos claros, incluyendo el peso propio del miembro, de 600 lb/pie. La distancia entre puntos de tablero es de 9 pies 6 pulg. El miembro estará compuesto por dos ángulos colocados a  $\frac{3}{8}$  pulg espalda con espalda y continuos sobre el primer punto de tablero interior. (En diagramas de viga tabulados, el momento positivo entre apoyos es  $0.07wL^2$  y sobre el apoyo interior, el momento negativo es  $0.125wL^2$ .) Usar acero A36. La distribución se ilustra diagramáticamente en la figura 9.22.

#### Solución

1. Suponer una sección de prueba de dos ángulos de  $6 \times 3\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$  pulg colocados con los lados largos verticales (figura 9.23). En el Manual AISC se encontraron las siguientes propiedades:

$$A = 6.84 \text{ pulg}^2$$

$$I_x = 25.7 \text{ pulg}^4$$

$$c_1 = 2.04 \text{ pulg.}$$

$$c_2 = 3.96 \text{ pulg.}$$

2. La fuerza directa axial (*P*) es 46,000 lb, y el esfuerzo unitario real debido a la tensión axial es

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{46,000}{6.84} = 6730 \text{ lb/pulg}^2$$

3. El valor del momento flexionante positivo es

$$0.07wL^2 = 0.07(600)9.5^2(12) = 45,500 \text{ pulg-libra}$$

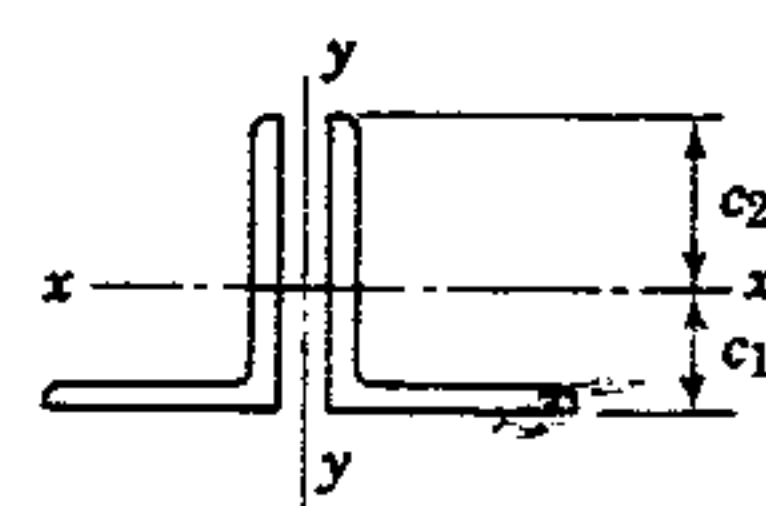


Figura 9.23 Tensión y flexión combinada.

4. El valor del momento flexionante negativo es

$$0.125wL^2 = 0.125(600)9.5^2(12) = 81,200 \text{ pulg-libra}$$

5. El esfuerzo flexionante de tensión máximo entre apoyos es

$$f_b = \frac{Mc_1}{I} = \frac{45,500(2.04)}{25.7} = 3610 \text{ lb/pulg}^2$$

El esfuerzo flexionante de tensión máximo sobre el apoyo interior  $L_1$  es

$$f_b = \frac{Mc_2}{I} = \frac{81,200(3.96)}{25.7} = 12,500 \text{ lb/pulg}^2$$

*Nota:* Debido al esfuerzo axial concurrente, no se permite redistribución de momentos.

6. El esfuerzo flexionante de tensión permisible máximo se toma como  $0.6F_y = 22,000 \text{ lb/pulg}^2$ , porque se supone que los apoyos longitudinales que transmiten la carga a la cuerda inferior proporcionan apoyo lateral.
7. El miembro debe satisfacer la fórmula

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

$$\frac{6730}{22,000} + \frac{12,500}{22,000} = 0.306 + 0.568 = 0.874 < 1.0$$

Si se van a usar tornillos para conectar este miembro en puntos del tablero, se necesitaría revisar más estrechamente la idoneidad de la sección neta.

### 9.34 COMPRESIÓN Y FLEXIÓN COMBINADAS

En los siguientes ejemplos se ilustra el diseño de miembros de cuerda superior para resistir flexión y compresión directa combinadas.

#### Ejemplo

Diseñar un miembro de cuerda superior compuesto por dos ángulos con los lados largos espalda con espalda separados  $\frac{3}{8}$  pulg, soportando una carga directa de compresión de 65,000 lb, y una carga concentrada de 3500 lb (*P*) en cada tablero. El miembro es continuo sobre  $U_1$ . De diagramas de viga tabulados, el momento positivo entre apoyos es  $0.156PL$  y sobre el apoyo interior el momento negativo es  $0.187 PL$ . Los largueros se considerarán que proporcionan apoyo lateral al miembro de la cuerda superior en los puntos en que se sujetan a la cuerda. La distribución y dimensiones se ilustran en la figura 9.24. Usar acero A36. Omitir el peso de los ángulos.

#### Solución

1. Suponer una sección de prueba de dos ángulos,  $7 \times 4 \times \frac{1}{2}$  pulg (figura 9.25). Las siguientes propiedades se encuentran en el Manual AISC:

$$A = 10.5 \text{ pulg}^2$$

$$I_x = 53.3 \text{ pulg}^4$$

$$c_1 = 2.42 \text{ pulg}$$

$$c_2 = 4.58 \text{ pulg}$$

$$r_x = 2.25 \text{ pulg}$$

$$r_y = 1.57 \text{ pulg}$$

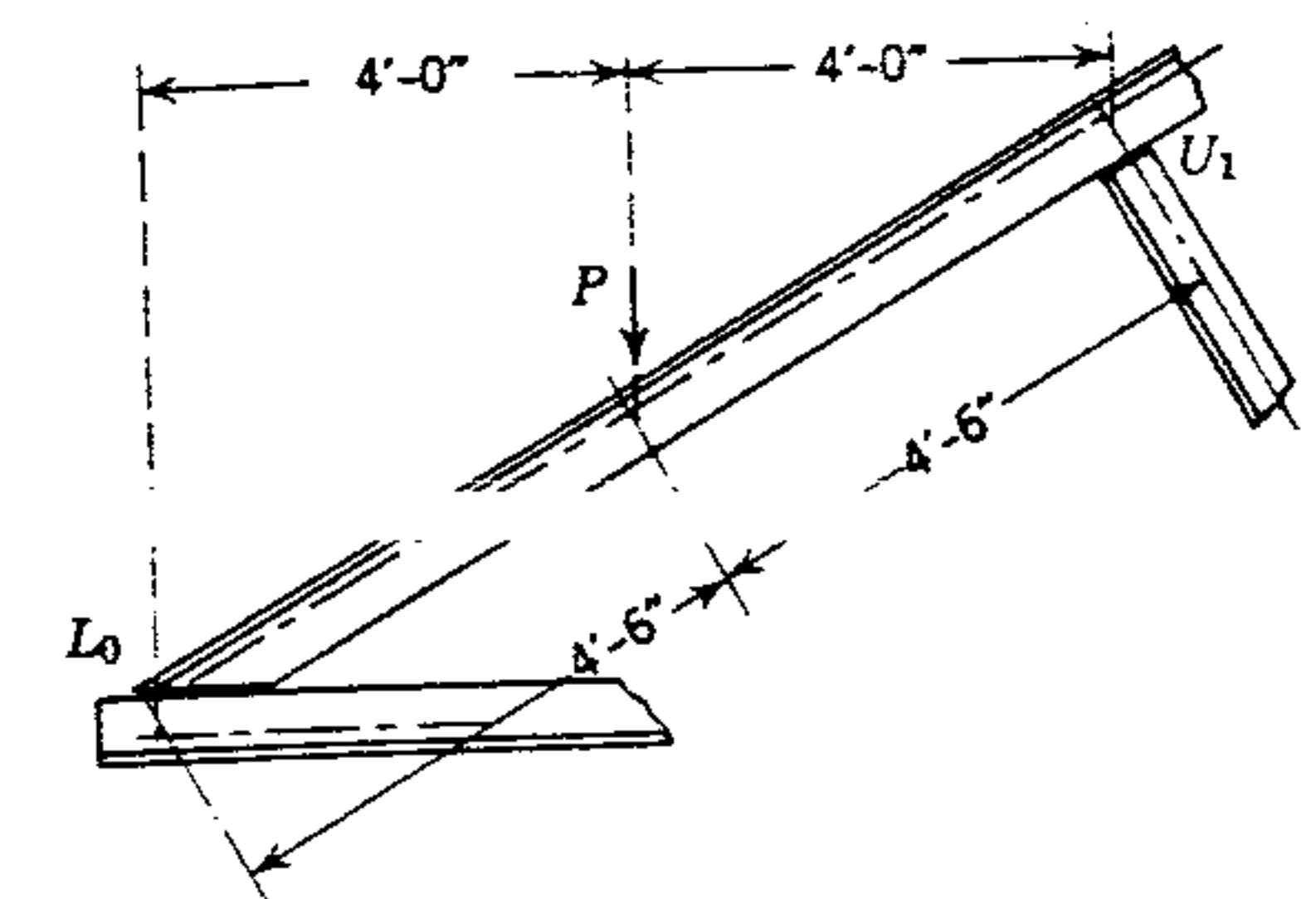


Figura 9.24 Compresión y flexión combinada.



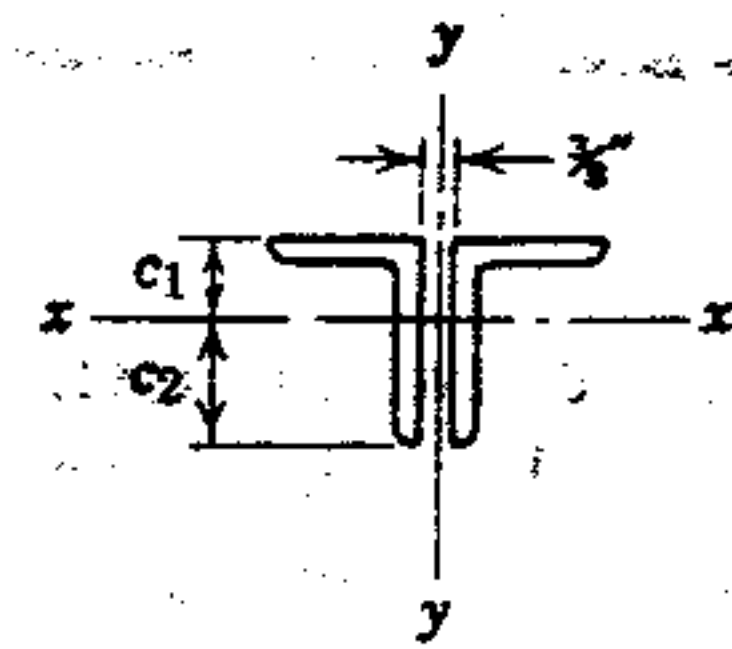


Figura 9.25 Compresión y flexión.

2. La fuerza axial directa ( $P$ ) es de 65,000 lb y el esfuerzo unitario real es

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{65}{10.5} = 6.19 \text{ k/pulg}^2$$

3. El valor del momento flexionante positivo es

$$0.156PL = 0.156(3500)(8)(12) \\ = 52,400 \text{ pulg-lb}$$

y

$$f_b = \frac{Mc_1}{I} = \frac{52.4(2.42)}{53.3} = 238 \text{ k/pulg}^2$$

(compresión)

4. El valor del momento flexionante negativo es

$$0.187PL = 0.187(3500)(8)(12) \\ = 62,800 \text{ pulg-lb}$$

y

$$f_b = \frac{Mc_2}{I} = \frac{62.8(4.58)}{53.3} = 5.40 \text{ k/pulg}^2$$

(tensión)

5. Determinar el valor de  $F_a$ .

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{1.0(4.5)12}{1.57} = 34.4$$

$$\frac{KL}{r_x} = \frac{1.0(9)12}{2.25} = 48.0$$

- En el Manual AISC, Apéndice A tabla 3.36,  $F_a = 18.35 \text{ k/pulg}^2$
6. Determinar si se aplica la fórmula 1.6-2 o la 1.6-1a del AISC 1978.

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{6.19}{18.53} = 0.33 > 0.15$$

Usar la fórmula 1.6-1a.

7. El esfuerzo flexionante de compresión permisible (Sección 5.13) está regido por el apoyo lateral. Los puntos en que el esfuerzo y el momento flexionantes son máximos (mitad del claro y apoyo interior) tienen un larguero que da apoyo lateral a estos puntos. Por lo tanto,  $F_b = 22 \text{ k/pulg}^2$

$$8. \quad \frac{K L_b}{r_b} = \frac{1.0(9)12}{2.25} = 48.0$$

De la tabla 9 del AISC,  $F'_e = 64.81 \text{ k/pulg}^2$  Entonces,

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_e}\right) F_b} \leq 1.0$$

$$\frac{6.19}{18.53} + \frac{1.0(2.38)}{\left(1 - \frac{6.19}{64.81}\right) 22} = 0.334 + 0.120$$

$$= 0.454 < 1.0$$

9. Revisando los extremos donde los momentos son negativos, para asegurarse de que  $f_b < F_b$ ,

$$\frac{f_a}{0.6 F_y} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0$$

$$\frac{6.19}{22.00} + \frac{5.40}{22.00} = 0.28 + 0.245$$

$$= 0.525 < 1.0$$

Es obvio que se debe buscar una sección de peso más ligero; probar primero dos ángulos de  $6 \times 4 \times \frac{1}{2} \text{ pulg.}$

### 9.35 ARMADURAS DE CUERDAS PARALELAS

Las armaduras con cuerdas paralelas se usan con frecuencia para la construcción de techos planos (y para soportar pisos con grandes claros). Una de las principales ventajas de las armaduras con cuerdas paralelas sobre las trabes armadas es el espacio despejado relativamente grande para tubos, conductos, ductos de ventilación y similares. El peralte de estas armaduras se establece a menudo por consideraciones arquitectónicas; sin embargo, si no hay otros factores determinantes, se encontrará que un peralte de  $\frac{1}{8}$  a  $\frac{1}{12}$  del claro es una relación inicial razonable para lograr un diseño económico.

En la figura 9.26a se ilustra una armadura Warren con cuerdas paralelas. La distancia entre juntas en las cuerdas superior e inferior se puede reducir mediante la adición de miembros de celosía verticales, como se ve en (b) de la misma figura. Las armaduras de techo de este mismo tipo general también se pueden construir con la cuerda superior ligeramente inclinada, como se ve en la figura 9.2i) y j). Son aplicables particularmente cuando se requiere un techo con pendiente para asegurar un drenaje adecuado. Los largueros se pueden conectar directamente a la armadura, sin necesidad de calzarlos para establecer la pendiente. Aquí, de nuevo, resulta económico usualmente un peralte en el centro de  $\frac{1}{8}$  a  $\frac{1}{12}$  de la longitud del claro. El peralte en el muro de apoyo puede variar para adecuarse a las condiciones.

### 9.36 CONSTRUCCIÓN DE CUBIERTAS DE TECHO

Las losas precoladas de yeso o de concreto ligero son sólo dos de la gran variedad de sistema de cubierta de techo disponibles. Algunas de éstas pue-

den cubrir claros de hasta 7 pies y, por lo tanto, se apoyan directamente en los largueros. Otras, que cubren distancias menores, se deben apoyar en sublargueros, generalmente barras espaciadas a 30 pulg de centro a centro y soldadas o engrapadas a los largueros principales (figura 9.27). Para los materiales de techado que lo requieran, se puede aplicar un recubrimiento de 2 pulg de "concreto clavable" sobre las losas para proporcionar una superficie que acepte clavos. Las losas se deben conectar con seguridad a sus miembros soportantes. En la literatura de los fabricantes se pueden encontrar detalles completos para el diseño, como espesores disponibles de losas, claros permisibles, peso de construcción, etc.

Con frecuencia también se usan placas de acero nervado cubiertas con un material aislante y una membrana. Las placas se pueden engrapar o soldar a los largueros. Asimismo, por supuesto, hay muchos otros productos y conceptos que se deben explorar antes de decidir sobre el tipo más adecuado de construcción.

### PROBLEMAS

1. Calcular las cargas de nieve sobre puntos de tablero para la armadura de abanico ilustrada en la figura 9.2c. El claro de la armadura es de 38 pies, y tiene una elevación vertical de 10 pies. Las armaduras están espaciadas 14 pies de centro a centro. La carga de nieve es de 30 lb/pie<sup>2</sup> de proyección horizontal. (Las respuestas se dan en el Apéndice G).
2. Encontrar las fuerzas en los miembros de la armadura ilustrada en la figura 9.2g, si el claro es de 38 pies, la elevación de 12 pies y las cargas de tablero sobre la cuerda superior son de 8000 lb cada una, aplicadas verticalmente.
3. Encontrar las fuerzas en los miembros de la armadura de abanico ilustrada en la figura 9.2c, si

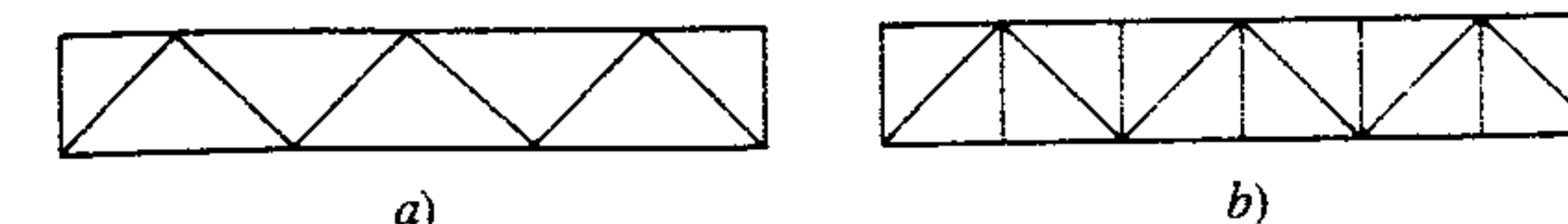


Figura 9.26 Armadura Warren con cuerdas paralelas.



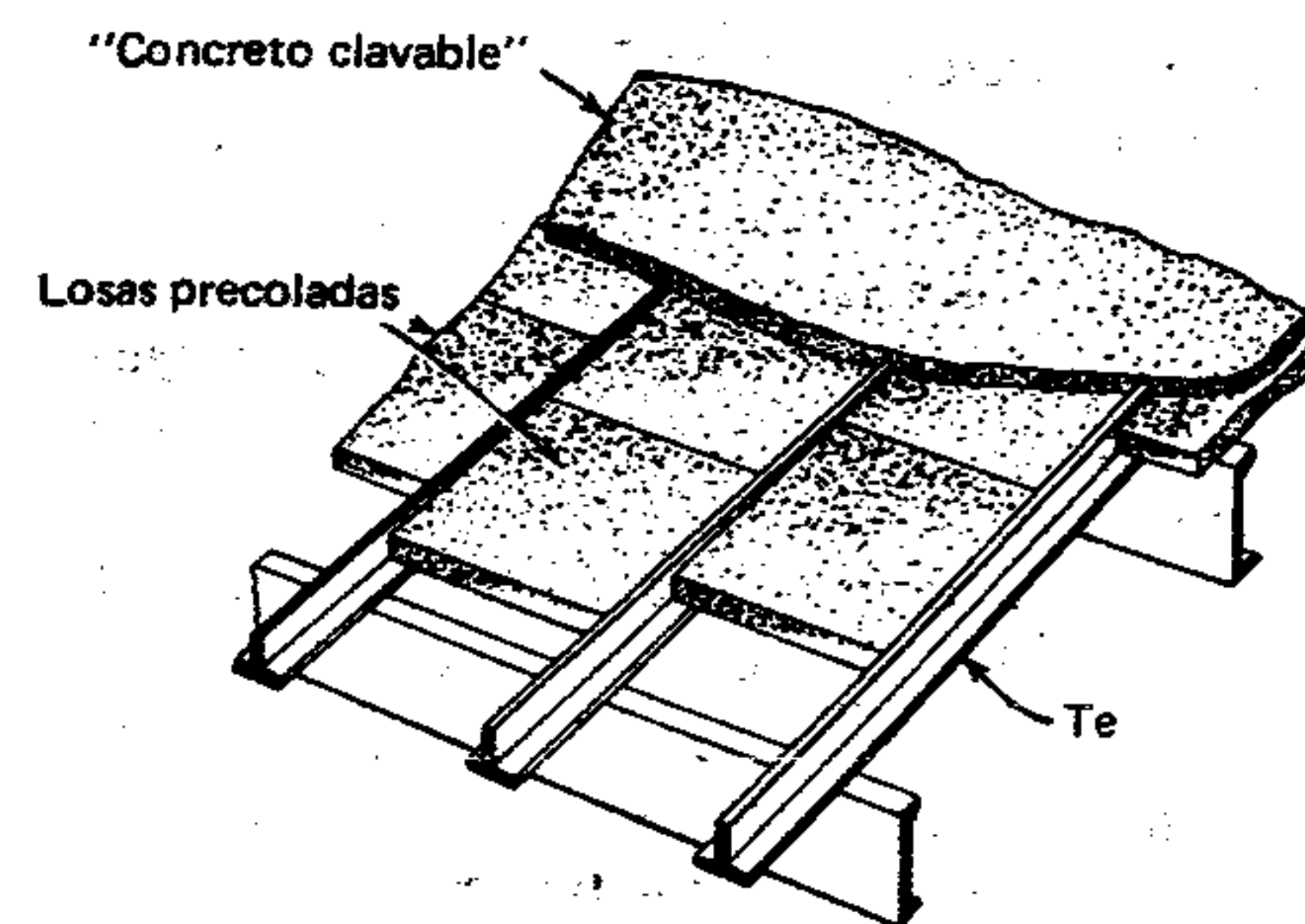


Figura 9.27 Losas precoladas apoyadas sobre sublargueros en te.

el claro es de 40 pies, la elevación de 8 pies y las cargas de tablero sobre la cuerda superior son de 4000 lb cada una, aplicadas verticalmente. (Las respuestas se dan en el Apéndice G).

4. Encontrar las fuerzas en los miembros de la armadura Pratt ilustrada en la figura 9.27, si el claro es de 64 pies, la altura de 8 pies y las cargas de tablero sobre la cuerda superior de 6000 lb cada una, aplicadas verticalmente. Las cuerdas superior e inferior son paralelas.
5. Diseñar una armadura de techo Warren de 8 tableros de tipo ilustrado en la figura 9.2i, usando verticales en cada punto del tablero. La armadura se va a apoyar sobre pilares de mampostería con el claro entre centro y centro de apoyos de 70 pies. El peralte de la armadura a mitad del claro será de 10 pies, y el peralte en cada extremo, de 8 pies. Las armaduras están espaciadas a 22 pies. Las cargas de tablero de la cuerda superior interior debidas a la construcción (incluyendo el peso de la armadura) son de 4000 lb cada una, y las cargas de tablero de la cuerda inferior interior debidas al plafón suspendido son de 2500 lb cada una. La carga de nieve es de 30 lb/pie<sup>2</sup> de proyección horizontal. Hay un punto de tablero. Hacer un plano de diseño de la armadura. Usar acero A36. Hacer el diseño para una combinación de carga viva y carga muerta (sin carga de viento).
6. Usando el problema de ejemplo dado en la Sección 9.31 (figura 9.20) diseñar el miembro de cuerda superior sujeto a compresión y flexión

usando dos canales. Basar el diseño en la Especificación AISC 1978, usando acero A242. Suponer que todos los largueros proporcionan apoyo lateral en los puntos. El claro de la armadura es de 64 pies, su peralte de 10 pies y se usan placas de junta de  $\frac{3}{8}$  pulg. (Las respuestas se dan en el Apéndice G).

### 9.37 CONSTRUCCIÓN DE MARCOS ARRIOSTRADOS DE UN SOLO PISO; CONSIDERACIONES GENERALES

El estudio de las armaduras de techo en las secciones anteriores se limitó a aquellas apoyadas sobre muros de carga o muros con pilares integrados. Como se señaló al principio de este capítulo, estos muros y/o pilares son inherentemente estables contra fuerzas de descuadre. La estabilidad de la estructura total se logra mediante arriostramiento longitudinal entre armaduras, así como de la cubierta de techo; también mediante los tableros en los extremos y mediante la sujeción de las armaduras a los muros o pilares.

En muchas estructuras, como edificios de fábricas, las armaduras se apoyan sobre columnas exteriores. En este caso la superficie del muro exterior consiste en delgados muros de cortina fijos a las columnas, o muros apoyados directamente sobre cimientos, pero no necesariamente impartiendo un grado confiable de resistencia al descuadre de la estructura total.

En estas condiciones, a cada marco, consistente en una armadura y columnas soportantes, le falta estabilidad lateral. Usualmente la estabilidad necesaria del marco se logra por medio de arriostramiento de rodilla, como se ilustra en la figura 9.28a, o haciendo que las columnas soportantes de los extremos actúen como montantes de extremo cuando las armaduras son del tipo ilustrado en la figura 9.28. En cualquier caso, el marco resultante es estáticamente indeterminado para cargas laterales.

Cuando varios marcos se espacian longitudinalmente para formar un edificio, toda la estructura del edificio resultante se debe hacer estable contra

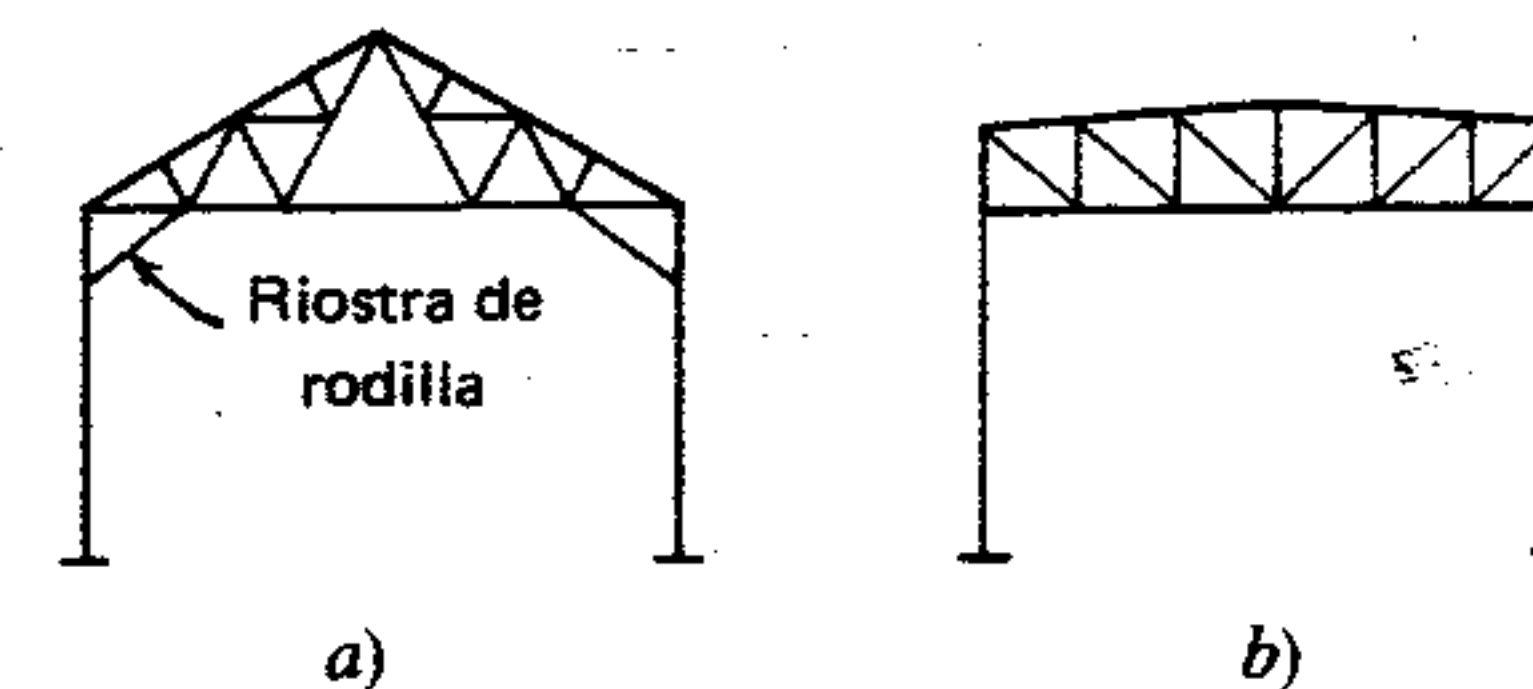


Figura 9.28 Marco transversal.

el descuadre. La falla por descuadre puede ocurrir a lo largo de cualquier eje; sin embargo, generalmente es suficiente considerar sólo dos (figura 9.29), es decir, el longitudinal y el lateral. La estructura del edificio es inestable tanto durante como después del montaje; por lo tanto, el arriostramiento encuadra al edificio durante la erección y proporciona la estabilidad necesaria después de terminado el edificio.

En las secciones siguientes se tratará el análisis de los elementos de marco arriostrado, así como sistemas de arriostramiento. Estas estructuras son en realidad altamente indeterminadas; no obstante, los métodos aproximados de análisis basados en principios estáticamente determinados y afianzados en la experiencia y el criterio, por lo común sustituyen al análisis matemático preciso. (Véase también la Sección 8.2).

### 9.38 MARCOS ARRIOSTRADOS—TIPOS

En las figuras 9.30 y 9.31 se ilustran dos marcos arriostrados típicos y se identifican los miembros y componentes principales.

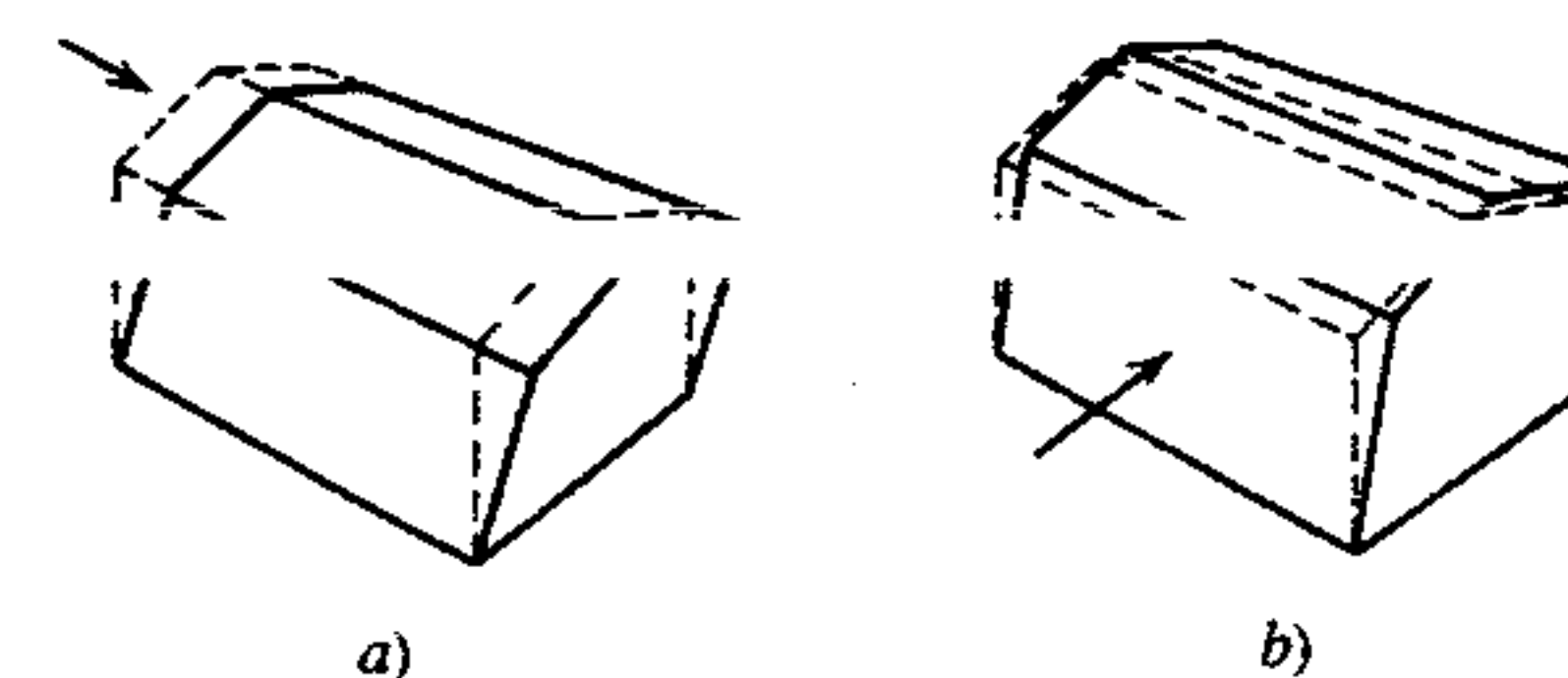


Figura 9.29 Descuadre.

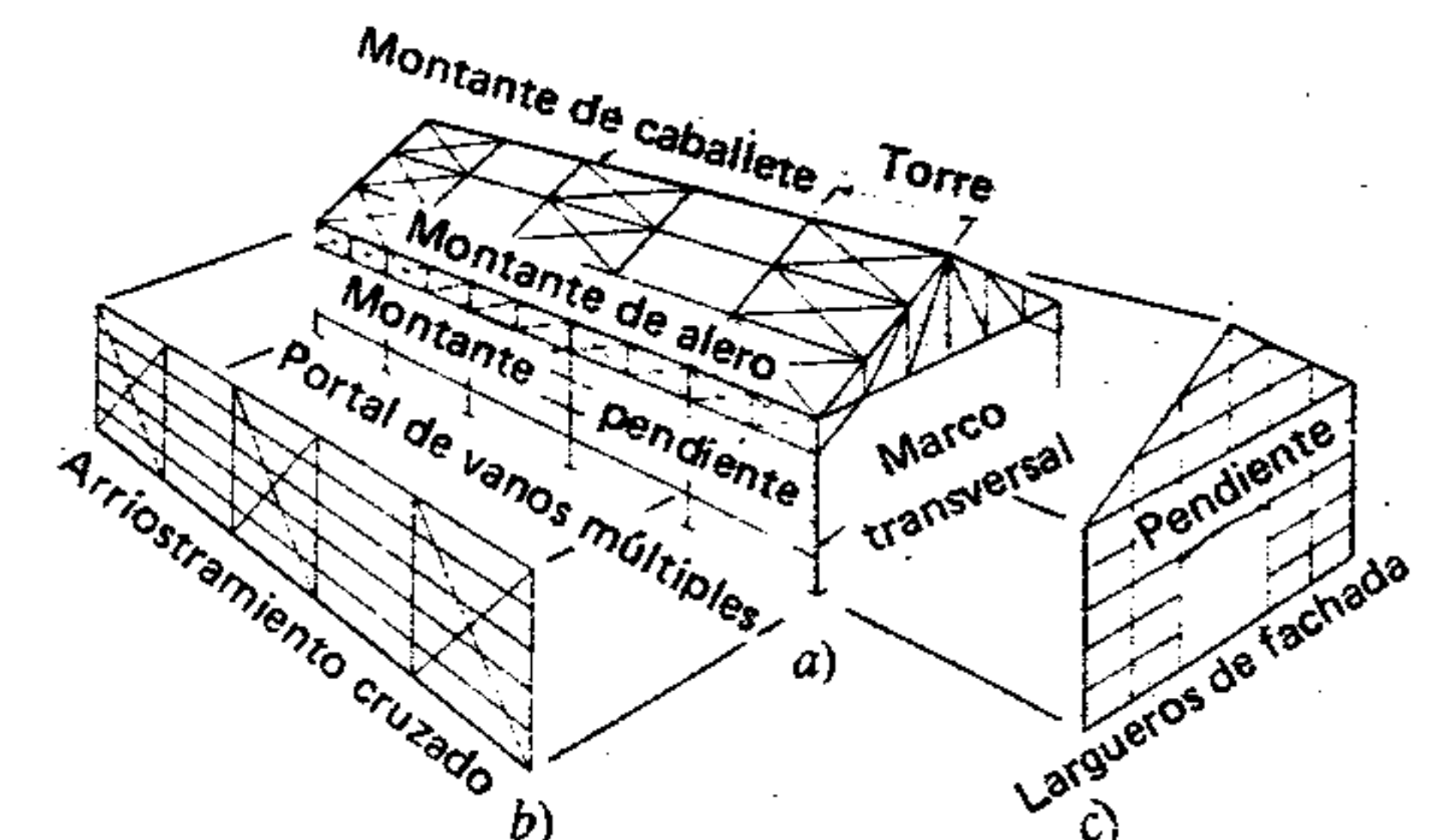


Figura 9.30 Marco arriostrado, tipo 1.

Aunque ésta es una sobresimplificación, se puede ver que los marcos transversales de la figura 9.30a proporcionan arriostramiento lateral; que los portales del muro lateral (o el arriostramiento cruzado del muro lateral de la figura 9.30b), los puntales y los largueros de fachada proporcionan el arriostramiento longitudinal; y que el arriostramiento transversal en cruz entre las cuerdas superior e inferior proporcionan arriostramiento diagonal. En realidad, debido a que los diversos miembros y componentes se aúnan en una sola estructura, cada uno ayuda al otro a resistir las cargas impuestas.

Las fuerzas en los miembros variarán con la naturaleza y dirección de las cargas, así como con la yuxtaposición de los miembros y componentes.

Los marcos transversales de la figura 9.28 son estables contra el desplazamiento lateral, pero no lo son cuando se sujetan a fuerzas normales o diagonales al plano de su claro. Sin embargo, se puede producir una subestructura estable introduciendo arriostramiento entre dos marcos en el plano de los muros laterales, cuerdas superior e inferior, y me-

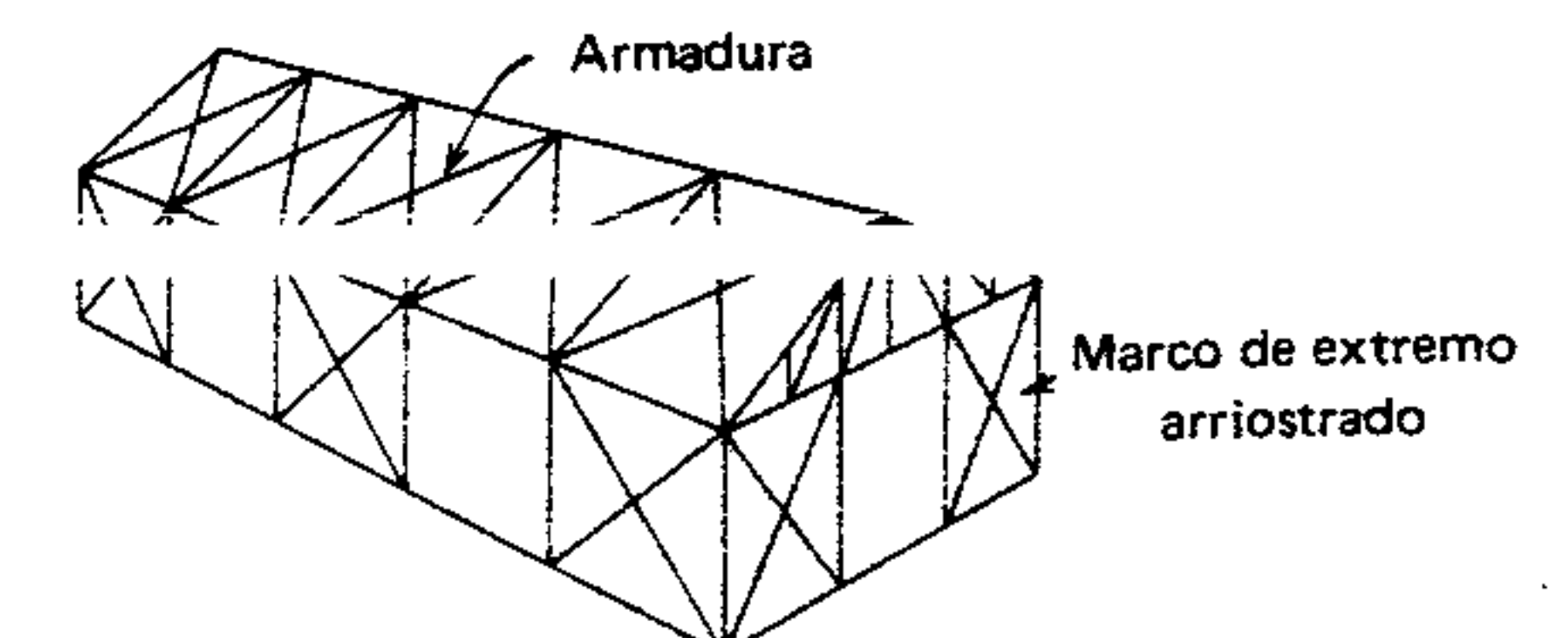


Figura 9.31 Marco arriostrado, tipo 2.



diante el uso de puntales longitudinales entre marcos en puntos de conexión del arriostramiento cruzado. Este elemento estable se conoce como vano o torre arriostrada (figura 9.30a). Cada marco del edificio debe tener cuando menos dos elementos de éstos, y se acostumbra arriostrar así cada cuarto o quinto vano en estructuras largas y vanos alternados en estructuras cortas. A veces se puede justificar el arriostramiento en cada vano.

Los puntales van de un extremo al otro del edificio para evitar vibraciones, y son de una sección transversal constante. Siempre se utilizan puntales de caballete y alero y, como se dijo antes, se deben localizar siempre donde el arriostramiento transversal se conecta con columnas o cuerdas. Con frecuencia los largueros sustituyen a los puntales en la cuerda superior, y los largueros de fachada, que se usan para recibir el recubrimiento exterior, también se puede diseñar para servir como puntales.

El muro extremo de una estructura con varios arriostrados se puede estructurar simplemente para recibir el recubrimiento exterior (figura 9.30c).

El portal de vanos múltiples de la figura 9.30a es útil cuando se desea una cantidad más que normal de área libre para la colocación de ventanaje y entradas. Sin embargo, el arriostramiento transversal completo es más eficiente y, por tanto, preferible, es decir, la estructuración es más simple y los momentos en las columnas son menores. Algunos diseñadores prefieren el uso de puntales de fachada en muros laterales a lo largo de la línea de la conexión del arriostramiento de codo a la columna, o la conexión de la cuerda inferior a la columna (figura 9.32b). La colocación de arriostramiento transversal en tableros interiores, en vez de los exteriores, como se ilustra en la figura 9.32a, a menudo es más conveniente en estructuras largas porque los movimientos por temperatura acumulados tienden a distorsionar las columnas exteriores cuando el arriostramiento se coloca solamente en los vanos de los

También se acostumbra proporcionar arriostramiento cruzado vertical entre cuerdas de armadura para ayudar a la erección de ésta, así como para impartir estabilidad adicional. Este arriostramiento se puede poner en vanos alternados, de modo que las armaduras se puedan erigir en pares, o en to-

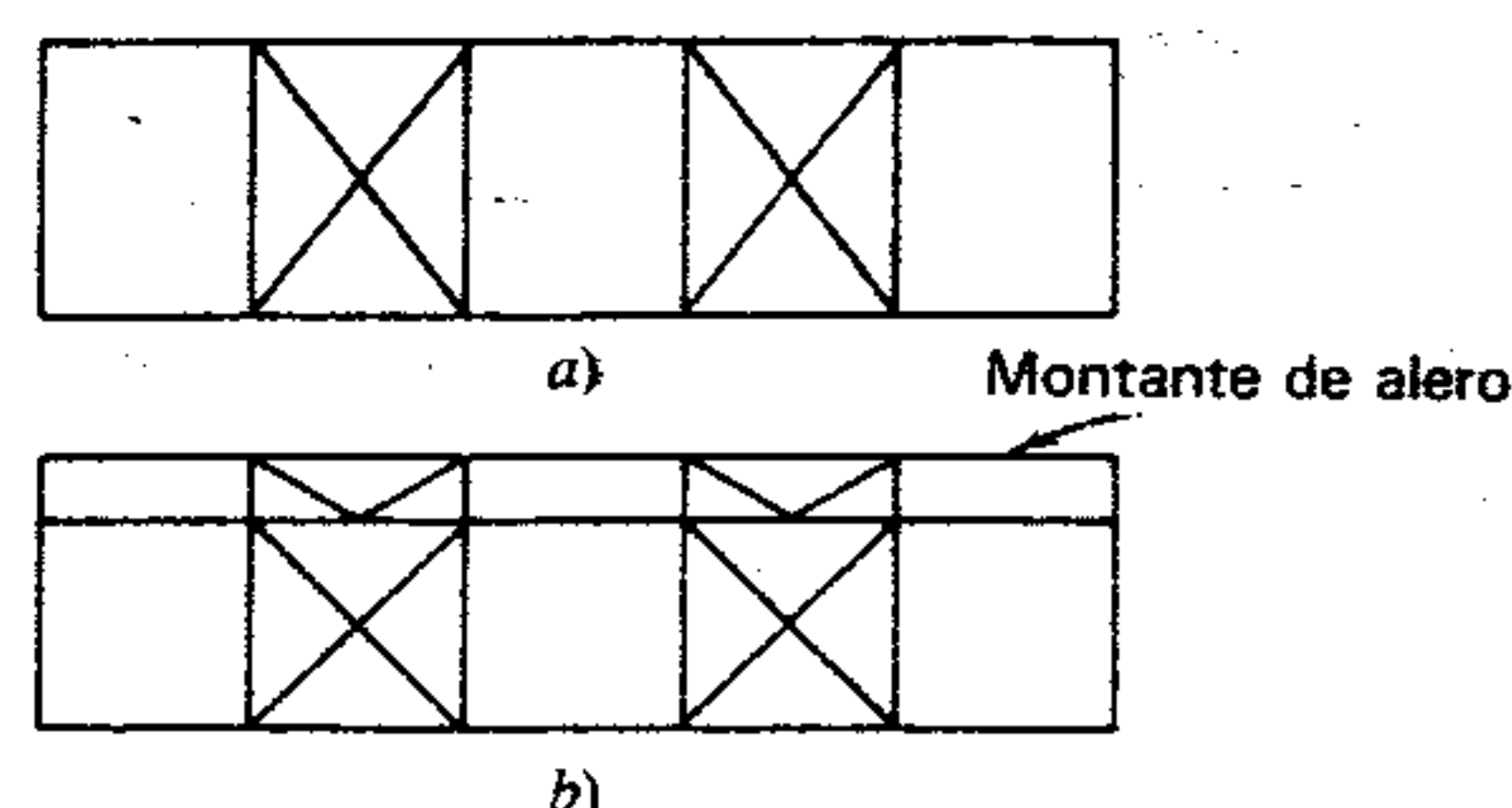


Figura 9.32 Arriostramiento cruzado de muro lateral.

dos los vanos. Por lo general se coloca un juego de arriostramiento longitudinal en la línea central del edificio, y si la estructura es ancha, en dos e incluso tres planos longitudinales verticales.

Todo el arriostramiento cruzado se debe poner en tensión inicial de modo que no haya movimiento de los marcos bajo carga antes de que los miembros del arriostramiento acepten esfuerzos. Para lograrlo, generalmente los miembros de arriostramiento se cortan 0.02 pulg más cortos por cada 10 pies de longitud, y luego forzados en posición para conectarlos. Las diagonales orientadas en la misma dirección se supone que actúan simultáneamente y sólo en tensión; cuando se aplican fuerzas en el sentido opuesto, las diagonales opuestas actuarán.

En la figura 9.31 se ilustra un segundo tipo de marco arriostrado. En vez de marcos transversales, las armaduras se apoyan sobre columnas, y se usan muros de extremos (en este caso marcos de extremos arriostrados) para impartir estabilidad lateral a toda la estructura. Se deben usar cuando menos dos tableros de arriostramiento cruzado en el marco del extremo, y por lo general es necesario permitir la colocación de puertas.

Debido a que no hay torres de arriostramiento, y las armaduras interiores junto con sus columnas de apoyo, no son por sí mismas lateralmente estables, se necesita arriostramiento en una posición horizontal o casi horizontal para transmitir las cargas laterales a los muros de los extremos. Esto se hace generalmente mediante arriostramiento cruzado entre cuerdas inferiores en cada vano, y/o entre cuerdas superiores, para formar una o más

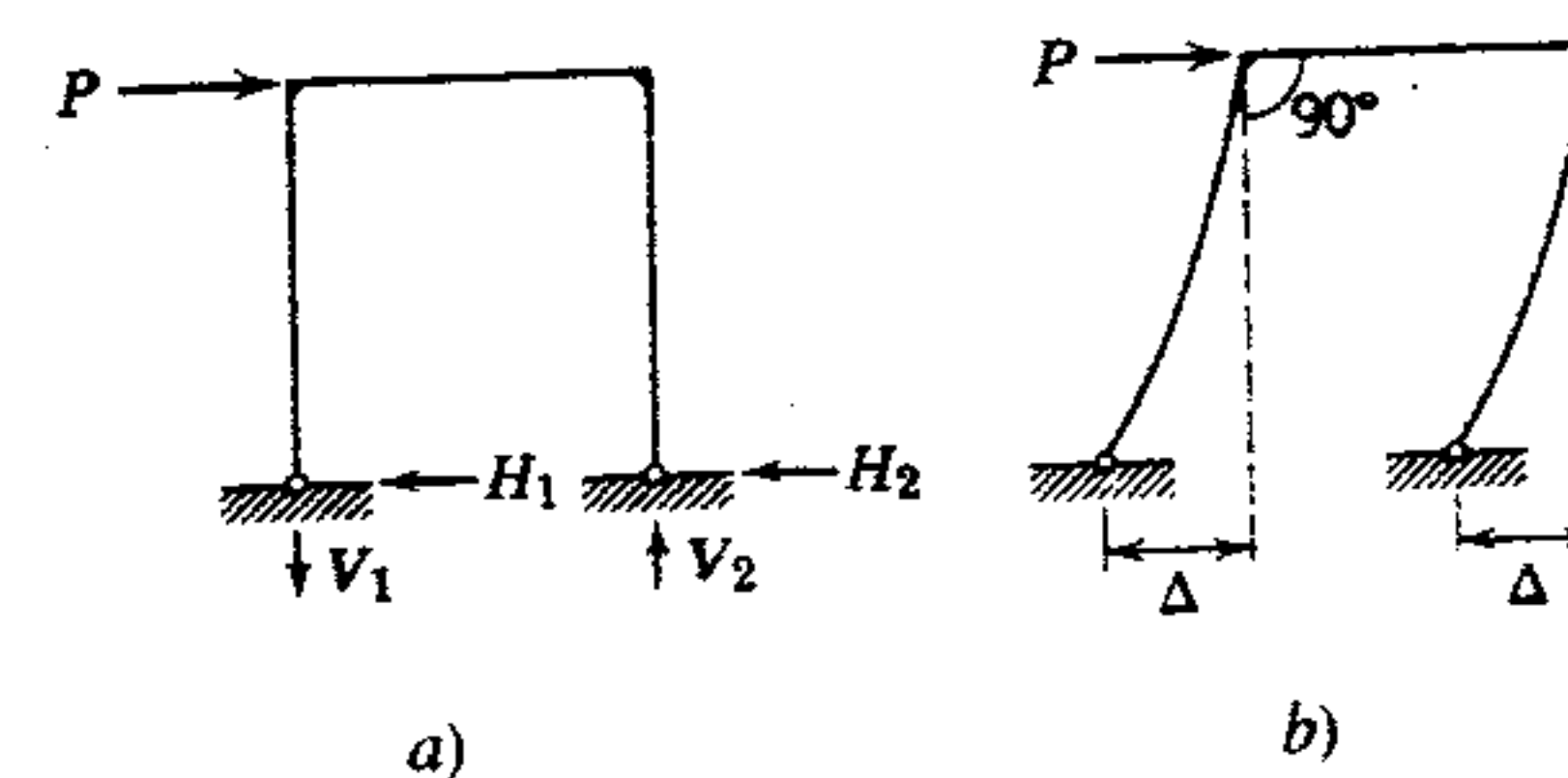


Figura 9.33 Supuestos de base articulada.

armaduras longitudinales de un extremo a otro del edificio. En otras palabras, estas armaduras horizontales longitudinales y/o inclinadas tendrán sus reacciones horizontales en los muros de los extremos o en marcos arriostrados en los extremos.

Para resistir fuerzas longitudinales se presenta un arriostramiento cruzado en vanos alternados en el plano de los muros laterales. El uso de puntales, largueros de fachada y arriostramiento vertical y longitudinal es tal como se describió previamente. La estructura arriostrada completa es así capaz de resistir también fuerzas diagonales.

El grado al cual una estructura esté arriostrada y el patrón específico empleado, incluyendo la consideración de una posible acción de diafragma de la cubierta, comúnmente corresponden a una elección individual. Dependen de la evaluación del diseñador de las fuerzas que se resistirán y la manera en que siente que pueden ser más efectivamente transmitidas a los cimientos (véase también la Sección 8.2). Y, por supuesto, el diseñador necesitará considerar la función del edificio y las características arquitectónicas deseadas. En términos generales, el arriostramiento es relativamente

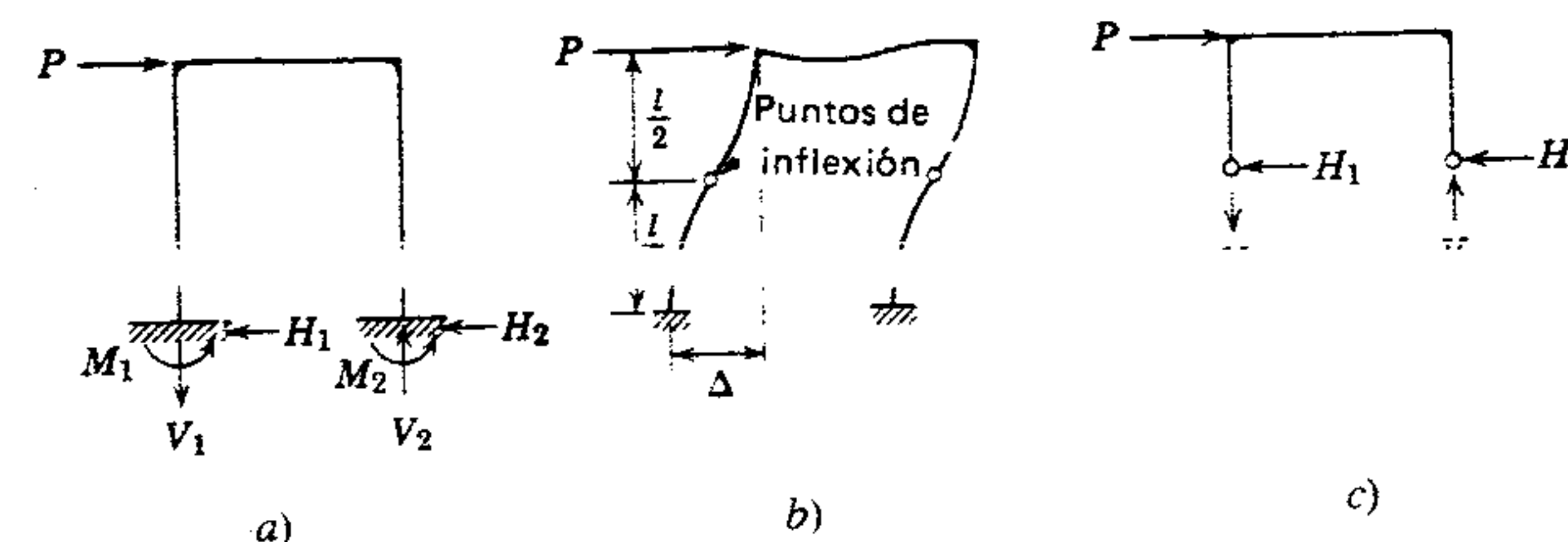


Figura 9.34 Supuestas de base fija.

poco costoso en relación con la estructura en su conjunto; por lo tanto, no se debe intentar hacer economías en esta área de diseño si no se tiene mucha experiencia.

### 9.39 MARCO ARRIOSTRADO, ANÁLISIS DE COMPONENTES

Dos de los componentes más básicos de los edificios a base de marcos arriostrados son el marco transversal y el portal, siendo este último muy útil también en el análisis de edificios de muchos pisos (véase el capítulo 13). Se presentará primero un método aproximado de análisis para un solo portal, luego un portal múltiple y un marco transversal.

Hay supuestos aplicables tanto a los marcos como a los portales, respecto a restricciones de columnas. Un portal simple de dos columnas, cada una articulada en su base, y una trabe entre las columnas (figura 9.33a), tiene cuatro componentes de reacción y por tanto es indeterminado en primer grado. Se necesita un supuesto para eliminar una incógnita. Si se supone que la trabe no se acortará significativamente bajo esfuerzo directo, entonces las dos columnas se deflexionarán horizontalmente una cantidad igual  $\Delta$  (figura 9.33b), y la fuerza aplicada  $P$  situada como se muestra se debe dividir en partes iguales para producir deflexiones iguales, es decir,  $H_1 = H_2 = P/2$ . Falta determinar los valores de  $V_1$  y  $V_2$  con base en las leyes de la Estática.

Un portal simple de dos columnas con bases fijas y una trabe entre columnas (figura 9.34a) tiene seis componentes de reacción y por tanto es indeterminado en tercer grado. Si se supone que los



empotramientos son iguales en las partes inferior y superior de las columnas, hay un punto de inflexión a la mitad de la altura de cada columna, y la parte de arriba de los puntos de inflexión se puede tratar como un cuerpo libre con las mismas características que el portal de la figura 9.33. Para hacer un análisis con base en leyes de la Estática, es necesario suponer tanto una localización para los puntos de inflexión como que el esfuerzo cortante horizontal está dividido igualmente entre las dos columnas ( $H_1 = H_2$ ). Entonces, es sumamente importante que el grado de empotramiento de las columnas en los dos extremos se evalúe correctamente. Si ambos extremos están totalmente fijos, el máximo momento de la columna será sólo la mitad del de una columna articulada solamente en la base. Si hay una diferencia entre los grados de empotramiento, los puntos de inflexión estarán más cerca del extremo menos restringido.

## 9.40 PORTALES

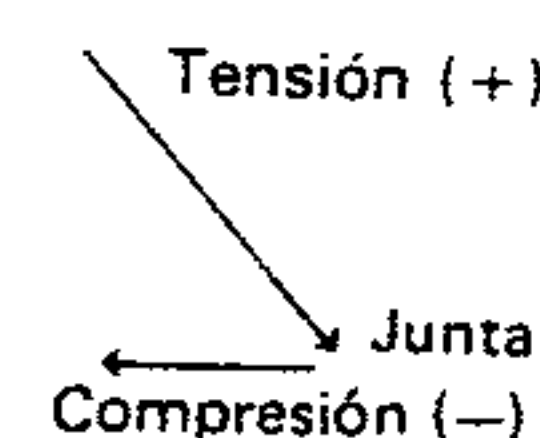
Ahora se presentarán dos ejemplos ilustrativos para mostrar los cálculos de esfuerzo esenciales para las dos condiciones descritas antes; es decir, bases articuladas y empotradas.

### Ejemplo 1

Se va a construir un portal como el de la figura 9.35a. Las bases de las columnas van a estar articuladas. Determinar las fuerzas y momentos en todos los miembros, causado por la fuerza horizontal de 2000 lb.

### Solución

*Nota:* Se adoptarán los siguientes signos para indicar el signo de las fuerzas en los miembros:



1. Suponiendo que la fuerza cortante total está dividida igualmente entre las columnas,

$$H_1 = H_2 = 1 \text{ kip}$$

2. Tomando momentos respecto a la base de la columna de la izquierda para determinar  $V_2$ ,

$$\Sigma M = 0; \quad V_2 = \frac{2(24)}{16} = 3 \text{ kips} \uparrow$$

Luego, sumando las resultantes de la fuerza vertical,

$$\Sigma V = 0; \quad 3 - V_1 = 0$$

$$V_1 = 3 \text{ kips} \downarrow$$

3. Aislando la columna izquierda y los miembros que llegan perpendicularmente a ella (figura 9.35b), calcular las fuerzas en los miembros. Hay tres incógnitas,  $\overline{B-2}$ ,  $\overline{1-2}$  y  $\overline{C-1}$ , y dos puntos de momento igual a cero (parte superior y base de la columna); por lo tanto, tomando momentos respecto a la parte superior, se eliminarán dos incógnitas en el primer cálculo.

$$\Sigma M = 0; \quad -1(24) + \overline{C-1}_H(8) = 0$$

$$8\overline{C-1}_H = 24$$

$$\overline{C-1}_H = 3 \text{ kips} \rightarrow$$

Todos los ángulos son de  $45^\circ$ ; por lo tanto,

$$\overline{C-1} = \frac{3}{0.707} = 4.24 \text{ kips} \nearrow (\text{Tensión})$$

Tomando la suma de los componentes horizontales (desde la base hacia arriba),

$$\Sigma V = 0; \quad -3 + 3 \pm \overline{1-2}_V = 0$$

Tomando la suma de los componentes verticales (desde la base hacia arriba),

$$\Sigma H = 0; \quad -1 + 3 + 2 - \overline{B-2} = 0$$

$$\overline{B-2} = 4 \text{ kips} \leftarrow (\text{Compresión})$$

Para comprobar la exactitud de los cálculos hasta aquí, tomar momentos respecto a la base de la columna.

$$\Sigma M = 0; \quad +3(16) + 2(24) - 4(24) = 0 \\ +96 - 96 = 0$$

4. Usando la fuerza horizontal y los componentes de las fuerzas, el diagrama de esfuerzo cortante (figura 9.35c) se puede trazar para la columna de la izquierda, y de las áreas de esfuerzo cortante, los diagramas de momento (figura 9.35d).

$$V_{\max} = -2 \text{ kips}$$

$$M_{\max} = 16 \text{ pies/kips}$$

5. Las fuerzas en los demás miembros se encontrarán usando el "método de juntas". Las juntas  $\overline{1-2-3-C}$  (figura 9.35e) se giran hasta la posición que se ve en la figura 9.35f, y los componentes horizontales se suman algebraicamente.

$$\Sigma H = 0; \quad -4.2 + \overline{2-3} = 0$$

$$\overline{2-3} = 4.24 \text{ kips} \rightarrow (\text{Tensión})$$

La fuerza en  $\overline{C-3}$  es 0. En seguida se analiza la junta  $\overline{2-B-4-3}$  (figura 9.35g).  $\Sigma V = 0$ ; por lo tanto, se ve que la fuerza en  $\overline{3-4}$  es de 4.24 kips de compresión (figura 9.35h). Luego

$$\Sigma H = 0; \quad +4 - 3 - 3 + \overline{B-4} = 0$$

$$\overline{B-4} = 2 \text{ kips} \rightarrow (\text{Tensión})$$

Para las juntas  $\overline{3-4-5-C}$  giradas como se ilustra en la figura 9.35j, se ve de  $\Sigma V = 0$ , que la fuerza en  $\overline{4-5}$  es de 4.24 kips de compresión.

6. Falta analizar la columna de la derecha (figuras 9.35k y l).

$$\Sigma V = 0; \quad +3 - 3 = 0$$

$$\Sigma H = 0; \quad -2 + 3 - 1 = 0$$

En la figura 9.35m) y n) se ilustran los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.

### Ejemplo 2

El portal del ejemplo 1 se va a construir como se ilustra en la figura 9.36a. Las bases de las columnas están fijas. Determinar las fuerzas y momentos en todos los miembros, causado por la fuerza horizontal de 2000 lb.

### Solución

*Nota:* Se usarán los mismos signos convencionales que en el ejemplo 1. Debe observarse que una columna que soporta un gran esfuerzo directo, como sería el caso si las columnas del portal fueran también columnas del marco transversal y por tanto cargaran una parte de la carga del techo, bien podría estar fija contra la rotación sin un anclaje especial. En tanto que el momento no invierta la presión bajo la placa de apoyo y la placa esté restringida contra movimiento lateral, se puede suponer que la columna está fija. Sin embargo, se debe hacer un análisis para la posible inversión de esfuerzo, y si se encuentra una inversión de esfuerzo, se necesitarían pernos especiales de anclaje, adecuados para tomar la carga y bajo tensión inicial para evitar cualquier movimiento, para resistir la fuerza de levantamiento (figura 6.28).

1. Se supondrá que el punto de inflexión ocurre a la mitad de la altura de la columna, y que la fuerza cortante total está dividida igualmente entre las columnas (figura 9.36b), o sea

$$H_1 = H_2 = 1 \text{ kip}$$

2. Aislando la parte del portal por arriba del punto de inflexión, y tomando momentos respecto al punto de inflexión de la columna de la izquierda para determinar  $V_2$ ,

$$\Sigma M = 0; \quad V_2 = \frac{2(16)}{16} = 2 \text{ kips} \uparrow$$



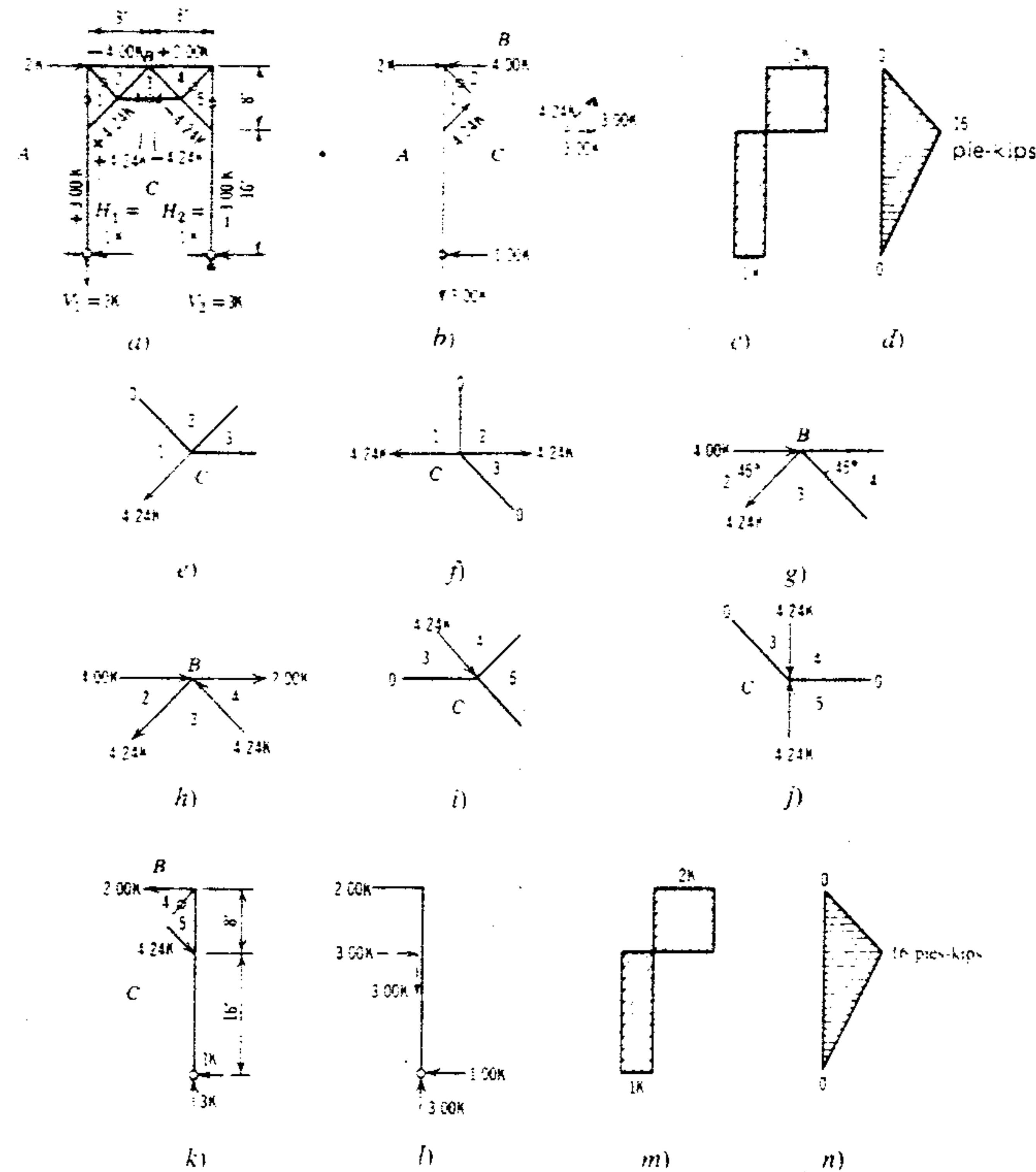


Figura 9.35 Análisis de fuerzas y momentos.

Entonces, la suma vertical es

$$\Sigma V = 0: 2 - V_1 = 0$$

$$V_1 = 2 \text{ kips} \downarrow$$

3. Aislando la columna de la izquierda y los miembros que llegan a ella, calcular las fuer-

$$\Sigma M = 0: -1(16) + C - 1_H(8) = 0$$

$$8C - 1_H = 16$$

$$C - 1_H = 2 \text{ kips} \rightarrow$$

zas en los miembros (figura 9.36c). Tomar momentos respecto al extremo superior de la columna.

Todos los ángulos son de  $45^\circ$ ; por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Tomando la suma de las fuerzas verticales (desde la base hacia arriba),

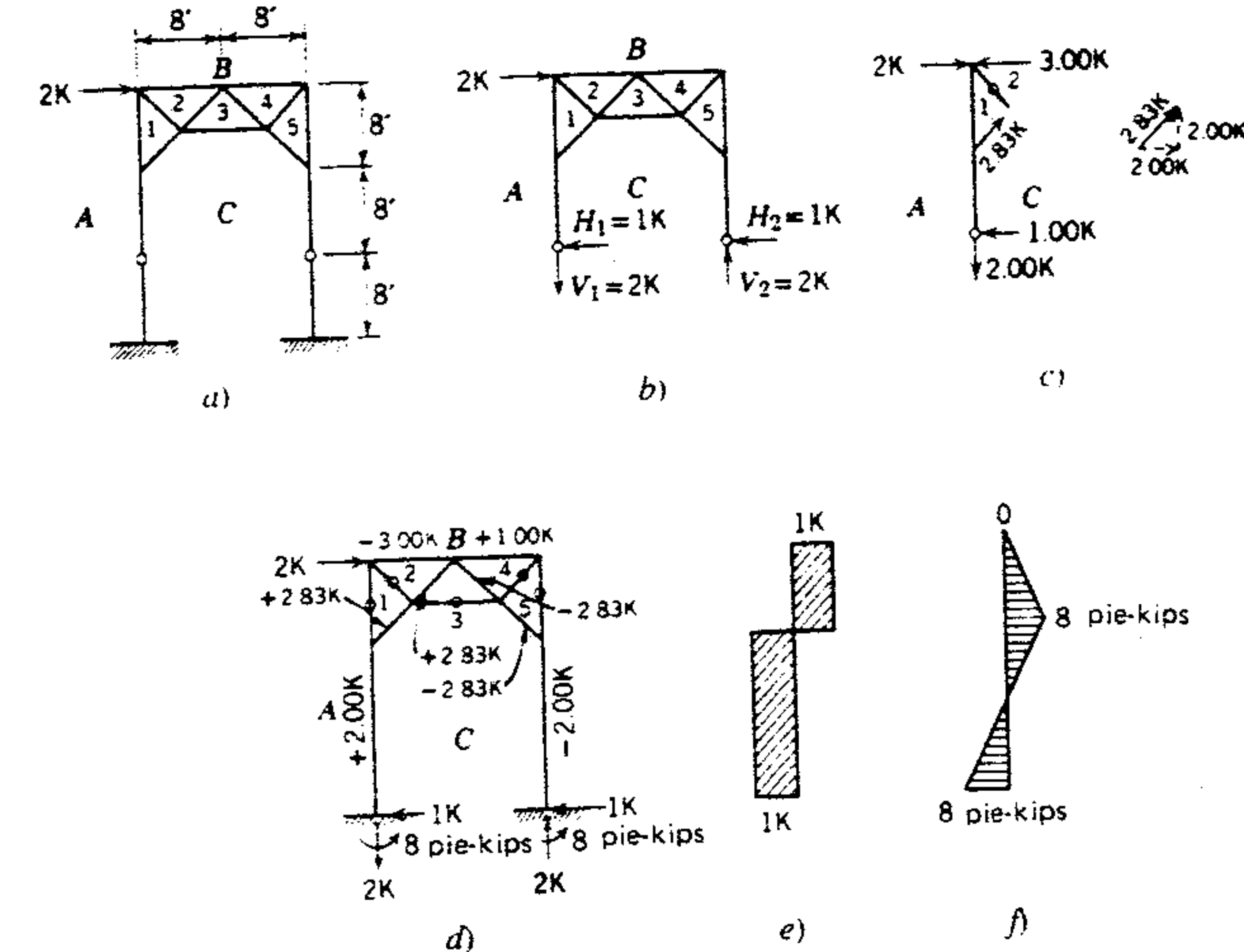


Figura 9.36 Análisis de fuerzas y momentos.

$$\Sigma V = 0: -2 + 2 \pm 1 - 2 = 0$$

$$\overline{1-2} = 0$$

Tomando la suma de los componentes horizontales (desde la base hacia arriba),

$$\Sigma H = 0: -1 + 2 + 2 - \overline{B-2} = 0$$

$$\overline{B-2} = 3 \text{ kips} \leftarrow (\text{Compresión})$$

Para comprobar la exactitud del cálculo hecho hasta aquí, tomar momentos respecto a la base de la columna.

$$\Sigma M = 0: +2(8) + 2(16) - 3(16) = 0$$

$$+48 - 48 = 0$$

4. Usando los componentes horizontales, el diagrama de fuerza cortante (figura 9.36e) puede construir para la columna de la izquierda, y de las áreas de fuerzas cortante, el diagrama de momento (figura 9.36f).

5. Las fuerzas en los demás miembros y en la columna de la derecha se encuentran de la misma manera que en el ejemplo 1.
6. El momento en la base se puede comprobar tomando momentos en la base. Para la columna de la izquierda,

$$\Sigma M = 2(16) + 2(24) - 3(24) = 8 \text{ pies-kips}$$

lo cual concuerda con el valor obtenido mediante el trazo del diagrama de momento a partir de las áreas de fuerza cortante.

#### 9.41 PORTALES MÚLTIPLES

Un portal múltiple del tipo ilustrado en la figura 9.37 tiene componentes de reacción verticales y horizontales y un momento en cada base de columna. Por tanto la estructura es altamente indeterminada, y se deben hacer varios supuestos si la estructura estará sujeta a un método determinado de análisis.



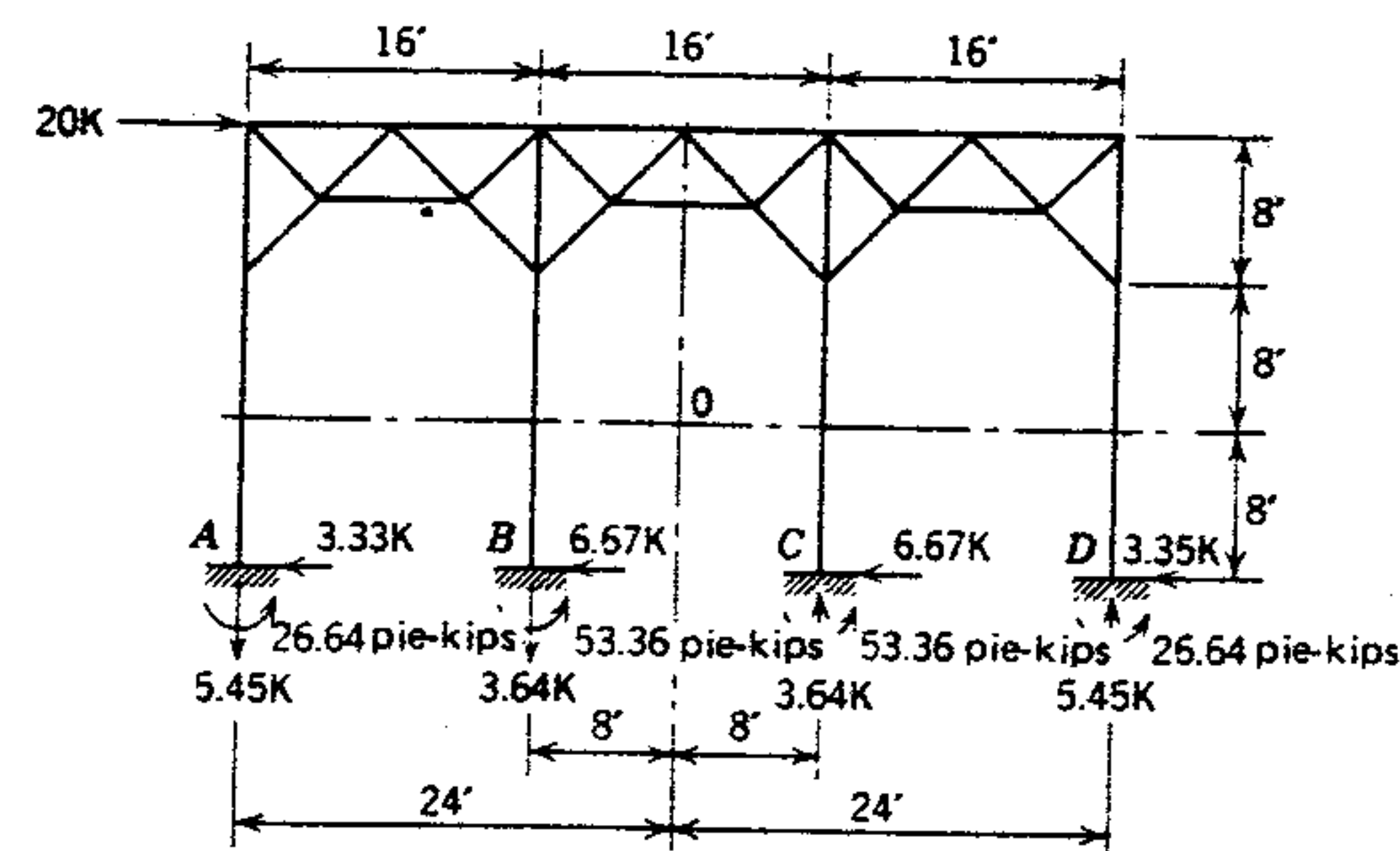


Figura 9.39 Reacciones y momentos.

pecto a los puntos de inflexión respectivos de componentes de reacción horizontal en la base (igual que para una viga en voladizo).

$$MA = MD = 3.33(8) = 26.64 \text{ pie-kips}$$

$$MB = 6.67(8) = 53.36 \text{ pie-kips}$$

Se pueden trazar diagramas de momento del mismo modo que para el portal solo.

Los momentos en el arriostramiento de codo y en la base de la columna son iguales para cada columna.

5. Determinar las fuerzas en los miembros de la armadura, empezando con la columna de la izquierda. (Usar la notación de Bow, asignar nuevas letras y nuevos números al sistema de portal, figura 9.40a).

Tomando momentos respecto al extremo superior de la columna (figura 9.40b),

$$\Sigma M = 0: 3.33(16) - \overline{E-1}_H(8) = 0$$

$$8\overline{E-1}_H = 53.28$$

$$\overline{E-1}_H = 6.66 \text{ kips} \rightarrow$$

Los ángulos son de 45°; por lo tanto,

$$\overline{E-1} = \frac{6.66}{0.707} = 9.42 \text{ kips} \nearrow (\text{Tensión})$$

Tomando la suma de las fuerzas verticales (desde la base hacia arriba),

$$\Sigma V = 0; -5.45 + 6.66 - \overline{1-2}_V = 0$$

$$\overline{1-2}_V = 1.21 \text{ kips} \downarrow$$

Entonces,

$$\overline{1-2} = \frac{1.21}{0.707} = 1.71 \text{ kips} \searrow (\text{Tensión})$$

y

$$\Sigma H = 0;$$

$$-3.33 + 6.66 + 1.21 + 20.00 - \overline{B-2} = 0$$

$$\overline{B-2} = 24.50 \text{ kips} \leftarrow (\text{Compresión})$$

Pasando a la junta  $\overline{E-1-2-3}$  (figura 9.40c),

$$\Sigma V = 0;$$

$$+ \overline{1-2}_V - \overline{E-1}_V \pm \overline{2-3}_V = 0$$

$$+ 1.21 - 6.66 + \overline{2-3}_V = 0$$

$$\overline{2-3}_V = 5.45 \text{ kips} \uparrow$$

$$\overline{2-3} = \frac{5.45}{0.707} = 7.71 \text{ kips} \nearrow (\text{Tensión})$$

$$\Sigma H = 0;$$

$$- \overline{E-1}_H - \overline{1-2}_H + \overline{2-3}_H \pm \overline{3-E} = 0$$

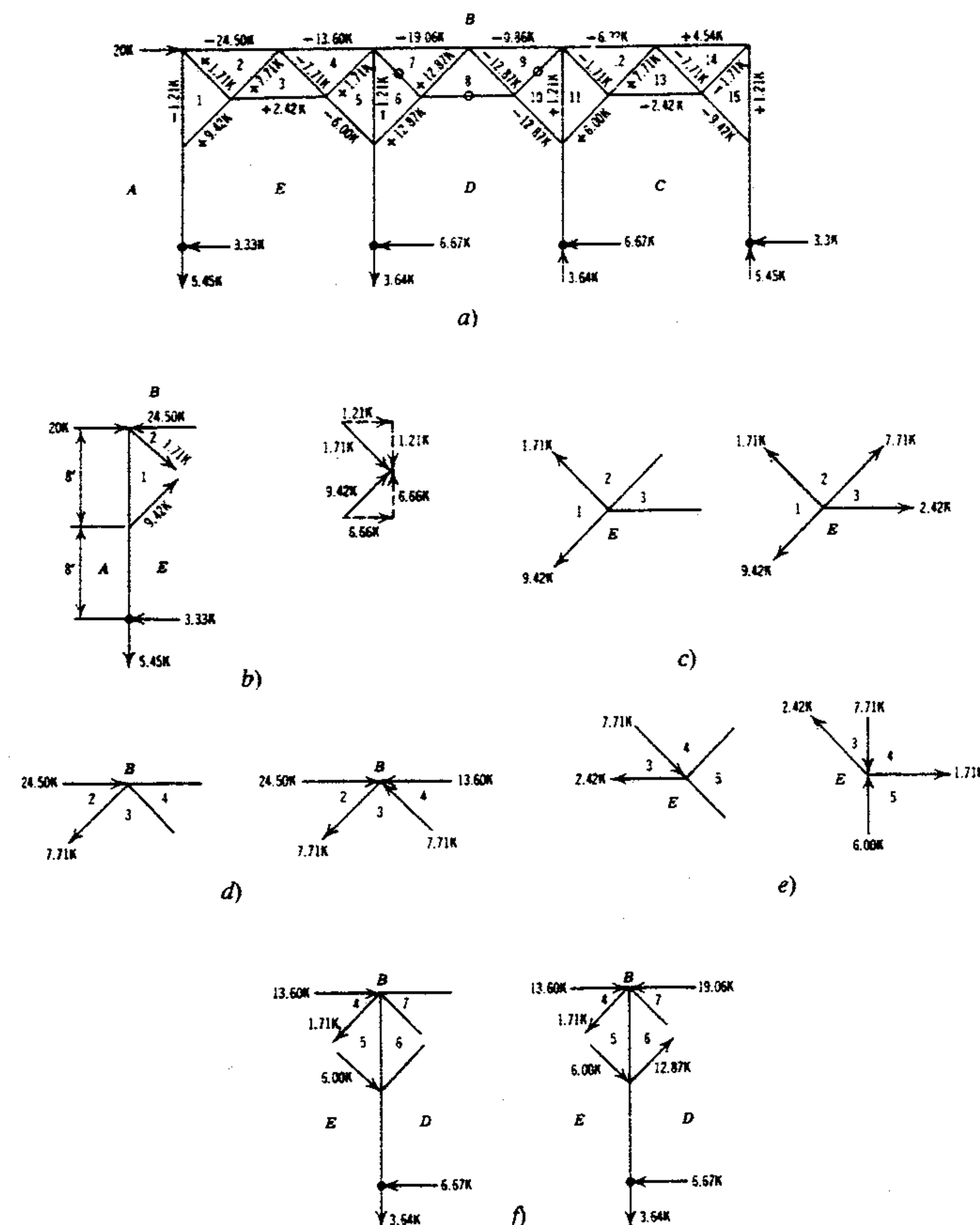


Figura 9.40 Fuerzas en los miembros.

$$-6.66 - 1.21 + 5.45 + \overline{3-E} = 0$$

$$\overline{3-E} = 2.42 \text{ kips} \rightarrow (\text{Tensión})$$

La junta  $\overline{B-2-3}$  (figura 9.40d),

$$\Sigma V = 0;$$

$$- \overline{3-2}_V + \overline{4-3}_V = 0$$

$$-5.45 + \overline{4-3}_V = 0$$

$$\overline{4-3}_V = 5.45 \text{ kips} \uparrow$$

$$\overline{4-3} = \frac{5.45}{0.707}$$

$$= 7.71 \text{ kips} \nwarrow (\text{Compresión})$$

$$\Sigma H = 0;$$

$$+ \overline{2-B} - \overline{4-3}_H - \overline{3-2}_H \pm \overline{B-4} = 0$$



$$+24.50 - 5.45 - 5.45 - \overline{B-4} = 0$$

$$\overline{B-4} = 13.60 \text{ kips} \leftarrow (\text{Compresión})$$

La junta  $\overline{E-3-4-5}$  (figura 9.40e);

$$\Sigma V = 0;$$

$$+ \overline{E-3}_V - \overline{3-4} \pm \overline{5-E} = 0$$

$$+1.71 - 7.71 + \overline{5-E} = 0$$

$$\overline{5-E} = 6.00 \text{ kips} \uparrow (\text{Compresión})$$

$$\Sigma H = 0;$$

$$- \overline{E-3}_H \pm \overline{4-5} = 0$$

$$-1.71 + \overline{4-5} = 0$$

$$\overline{4-5} = 1.71 \text{ kips} \rightarrow (\text{Tensión})$$

Columna  $\overline{D-E}$  (figura 9.40f);

Tomando momentos respecto al extremo superior de la columna,

$$\Sigma M = 0;$$

$$+ 6.67(16) - 4.24(8) \pm 8 \overline{6-D}_H = 0$$

$$+ 106.72 - 33.92 + 8 \overline{6-D}_H = 0$$

$$8 \overline{6-D}_H = 72.80$$

$$\overline{6-D}_H = 9.10 \text{ kips} \rightarrow$$

$$\overline{6-D} = \frac{9.10}{0.707}$$

$$\overline{6-D} = 12.87 \text{ kips} \nearrow (\text{Tensión})$$

$$\Sigma V = 0;$$

$$-3.64 - \overline{E-5}_V + \overline{6-D}_V - \overline{5-4}_V \pm \overline{7-6}_V = 0$$

$$-3.64 - 4.24 + 9.10 - 1.21 \pm \overline{7-6}_V = 0$$

$$\overline{7-6}_V = 0$$

$$\overline{7-6} = 0$$

$$\Sigma H = 0;$$

$$-6.67 + \overline{E-5}_H + \overline{6-D}_H - \overline{5-4}_H$$

$$+ 4 \overline{B} \pm \overline{B-7} = 0$$

$$-6.67 + 4.24 + 9.10 - 1.21$$

$$+ 13.60 - \overline{B-7} = 0$$

$$\overline{B-7} = 19.06 \text{ kips} \leftarrow (\text{Compresión})$$

Las demás fuerzas en los miembros de la figura 9.40a se determinan de la misma manera.

Los diversos miembros de la armadura del sistema de portal se diseñan de una manera similar a la de los miembros de armaduras tratados en secciones anteriores.

### PROBLEMA

Determinar las fuerzas, momentos y reacciones en todos los miembros de los portales ilustrados en la figura 9.41. Construir diagramas de fuerza cortante y momento para las columnas de barlovento y sotavento para cada uno de los portales. (En el Apéndice G se dan las respuestas parciales).

### 9.42 MARCO TRANSVERSAL

En la figura 9.42a se ilustra un marco transversal. Como se dijo en la Sección 9.37, es esencialmente una armadura, soportada sobre columnas y arriostrada para darle estabilidad lateral mediante arriostramientos de codo entre la cuerda inferior y la columna.

Al marco transversal se aplica la explicación general de la Sección 9.38 respecto a la acción de los marcos y los portales, incluyendo el establecimiento de puntos de inflexión en las columnas soportantes, así como el método general de análisis desarrollado en la Sección 9.39 para portales solos.

Las cargas laterales dependen en gran medida de la manera de apoyar el material de recubrimiento del muro exterior. En la figura 9.42a, el recubrimiento del muro exterior está soportado sobre largueros longitudinales de fachada que a su vez transmiten las cargas muertas de ese material, así como las de viento, a la columna. Supongase que esta columna está fija en la base y es continua en la parte inferior del arriostramiento de codo hasta el alero. Entonces, el punto de inflexión se localizaría a la mitad de la altura de la columna. Para

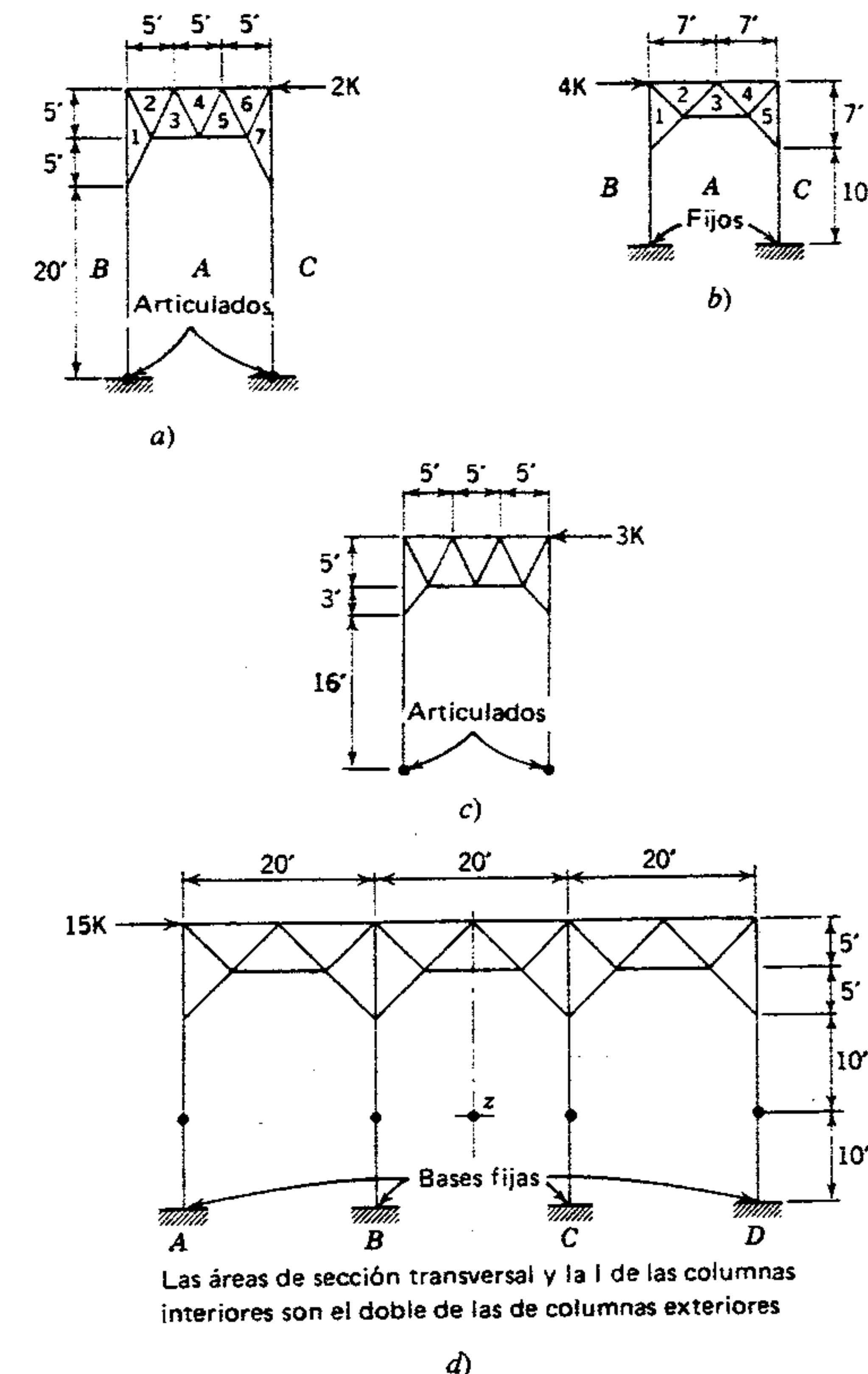


Figura 9.41 Problemas.

simplificar el análisis, conviene suponer que las cargas transmitidas a la columna por los largueros, que se sitúan entre la base y el arriostramiento, están actuando en los puntos de conexión de los miembros del marco (figura 9.42c).<sup>6</sup> Por lo tanto,

<sup>6</sup> En la Sección 8.6 debe observarse que si se usa el procedimiento de cargas de nieve del ANSI, las cargas de la figura 9.42b podrían variar dependiendo de la altura hasta el alero.

la carga del larguero en 3 se mueve a 2, y la carga en 4 se mueve a 5 (tampoco es raro aplicar la mitad de la carga lateral total a la parte superior de la columna en 1, y la mitad a la base).

También debe recordarse que son los marcos transversales los que soportan las cargas del techo, no los portales longitudinales entre los marcos (figura 9.30). Por ahora sólo se considerará la carga lateral o de viento. Sin embargo, antes de diseñar la columna, también es necesario considerar



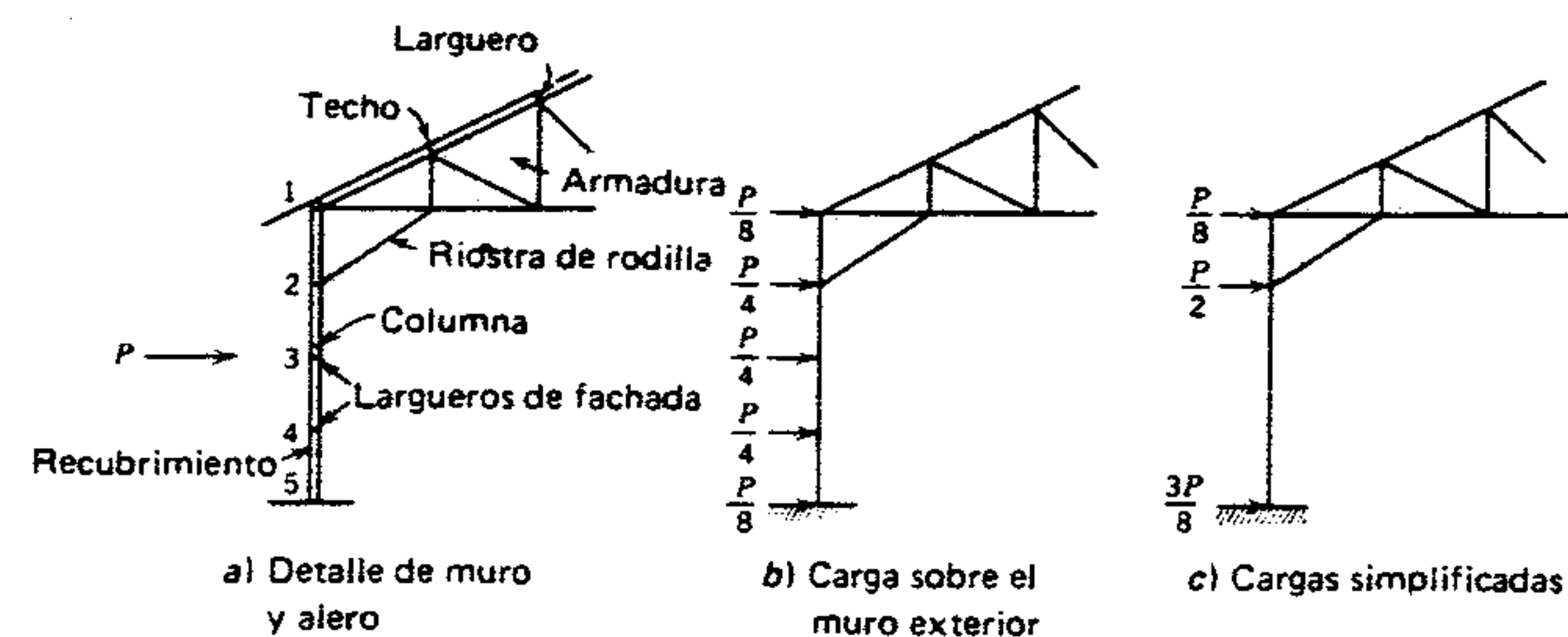


Figura 9.42 Marco transversal.

las muy significativas cargas de gravedad transmitidas por la armadura a la columna.

Regresando a la carga de viento, se recordará del capítulo 8 y de secciones anteriores de éste, que, a falta de un recubrimiento positivo, se acostumbra suponer que el viento puede provenir de cualquier dirección. Por lo tanto, se acostumbra diseñar ambas columnas para la combinación más crítica de fuerza externa y presión o succión interna.

### Ejemplo

Dadas las cargas de viento de la figura 9.43, determinar las fuerzas y momentos debidos al viento en las columnas del marco transversal y en los miembros que se conectan a las columnas. Las columnas están fijadas a sus bases y totalmente restringidas por el arriostramiento de codo.

### Solución

1. Aislar la porción del marco arriba de los puntos de inflexión. Las cargas de muros entre la base de la columna y el arriostramiento de codo se dividirán temporalmente en partes iguales entre el arriostramiento y la base, como se ilustra.

Para propósitos de análisis, la resultante de la carga de techo es transmitida a la cuer-

da inferior de la armadura y allí se descompone en sus componentes horizontal y vertical.

La fuerza cortante horizontal se divide igualmente entre las columnas.

$$\Sigma H = 0.80 + 4.80 + 1.44 = 7.04$$

$$\frac{\Sigma H}{2} = \frac{7.04}{2} = 3.52 \text{ kips}$$

$$RA_H = RB_H = 3.52 \text{ kips}$$

Tomar momentos respecto a A para encontrar  $RB_V$ .

$$\begin{aligned} \Sigma M &= 4.8(10) + 0.8(14) \\ &\quad + 1.44(14) + 2.88(15) \\ &= 122.56 \end{aligned}$$

$$RB_V = \frac{122.56}{48} = 2.55 \text{ kips} \uparrow$$

Luego,

$$\Sigma V = 0; -2.88 + 2.55 + RA_V = 0$$

$$RA_V = 0.33 \text{ kips} \uparrow$$

2. Aislar la columna de la izquierda (figura 9.44a) y determinar la fuerza en los miembros. (Se usará la notación de Bow). Tomando momentos respecto a la parte superior de la columna,

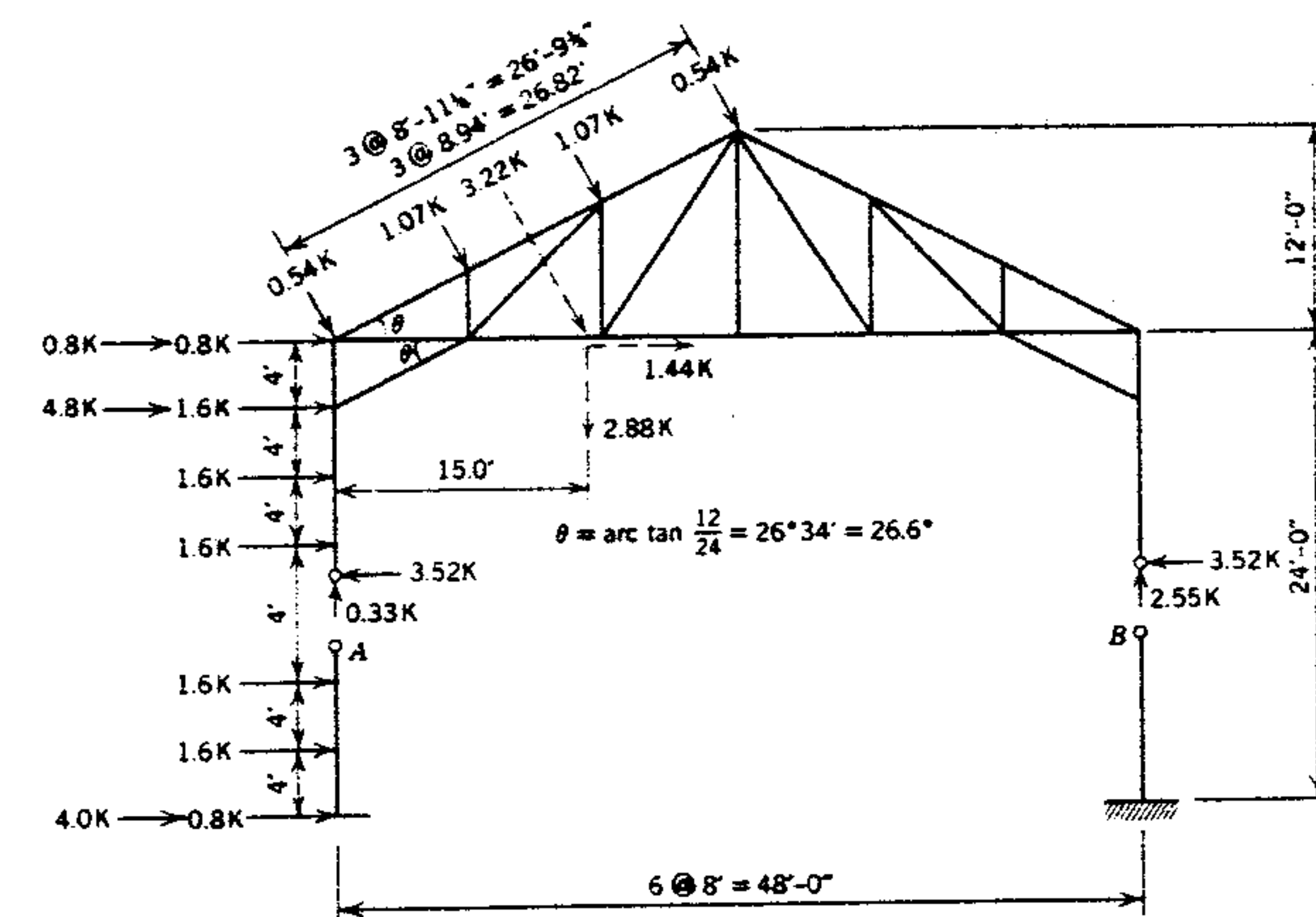


Figura 9.43 Marco transversal.

$$\Sigma M = 0;$$

$$-4.8(4) + 3.52(14) \pm \overline{0-D}_H(4) = 0$$

$$-19.20 + 49.28 - \overline{0-D}_H(4) = 0$$

$$\overline{0-D}_H = 7.52 \text{ kips} \rightarrow$$

$$\overline{0-D} = \frac{7.52}{0.894} = 8.41 \text{ kips} \nearrow (\text{Tensión})$$

y

$$0-D_V = 0.447(8.41) = 3.76 \text{ kips} \uparrow$$

Tomando la suma de las componentes verticales,

$$\Sigma V = 0;$$

$$+0.33 + 3.76 - [0.894(0.54)] \pm \overline{C-1}_V = 0$$

$$3.61 - \overline{C-1}_V = 0$$

$$\overline{C-1}_V = 3.61 \text{ kips} \downarrow$$

$$\overline{C-1} = \frac{3.61}{0.447} = 8.07 \text{ kips} \downarrow (\text{Compresión})$$

y

$$\overline{C-1}_H = 0.894(8.07) = 7.22 \text{ kips} \leftarrow$$

Determinar la fuerza en 1-0 mediante la suma de los componentes horizontales.

$$\Sigma H = 0;$$

$$-3.52 + 4.8 + 7.52 + 0.8 - 7.22 + [0.447(0.54)] \pm \overline{1-0} = 0$$

$$2.62 - \overline{1-0} = 0$$

$$\overline{1-0} = 2.62 \text{ kips} \leftarrow (\text{Compresión})$$

3. Regresar las cargas de los largueros a sus posiciones originales sobre toda la columna de la izquierda (figura 9.44b), y construir los diagramas de fuerza cortante y momento (figura 9.44c y d). En parte superior de la columna,

$$\begin{aligned} \Sigma H &= +0.8 + 0.24 - 7.22 - 2.62 \\ &= -8.80 \text{ kips} \end{aligned}$$

En el codo arriostrado

$$\Sigma H = +1.6 + 7.52 = 9.12 \text{ kips}$$

$$9.12 - 8.8 = 0.32 \text{ kips}$$



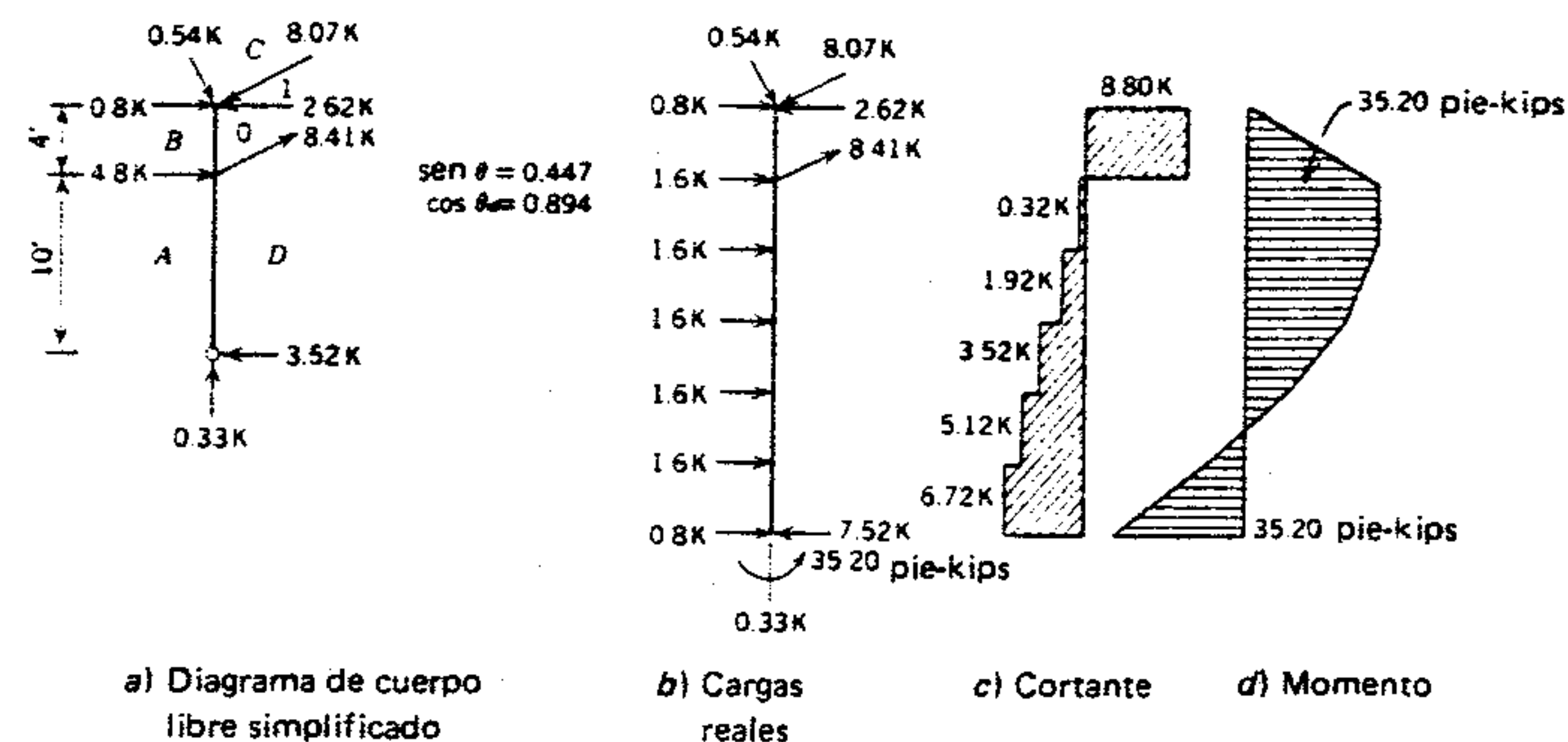


Figura 9.44 Columna izquierda.

El diagrama de momento se puede construir a partir de las áreas de fuerza cortante. Este momento se puede comprobar tomando la suma de momentos respecto a la base de la columna (figura 9.44b).

$$\begin{aligned}\Sigma M &= +1.6(4) + 1.6(8) + 1.6(12) \\ &+ 1.6(16) + 1.6(20) + 7.52(20) \\ &+ 0.8(24) - 2.62(24) - 7.22(24) \\ &+ 0.24(24) \\ &= 271.36 - 236.16 \\ &= 35.20 \text{ pie-kips}\end{aligned}$$

Una vez determinadas las fuerzas en los miembros que se conectan en la columna de la izquierda, las demás fuerzas de miembros, así como las fuerzas y momentos en la columna de la derecha, se pueden encontrar gráfica y/o algebraicamente. Las fuerzas de miembros conocidos, además de las otras cargas del techo, se tratan como cargas externas de la armadura. Por supuesto, también se necesita investigar las cargas vivas y muertas debidas a la gravedad como fue el caso con las armaduras que se examinaron en las secciones anteriores.

*Nota:* Si las bases de columnas no se fijan totalmente contra la rotación, el punto de in-

flexión estaría más cerca de la base (Sección 9.39). No es infrecuente que las conexiones de bases de columnas sean tales que sólo se

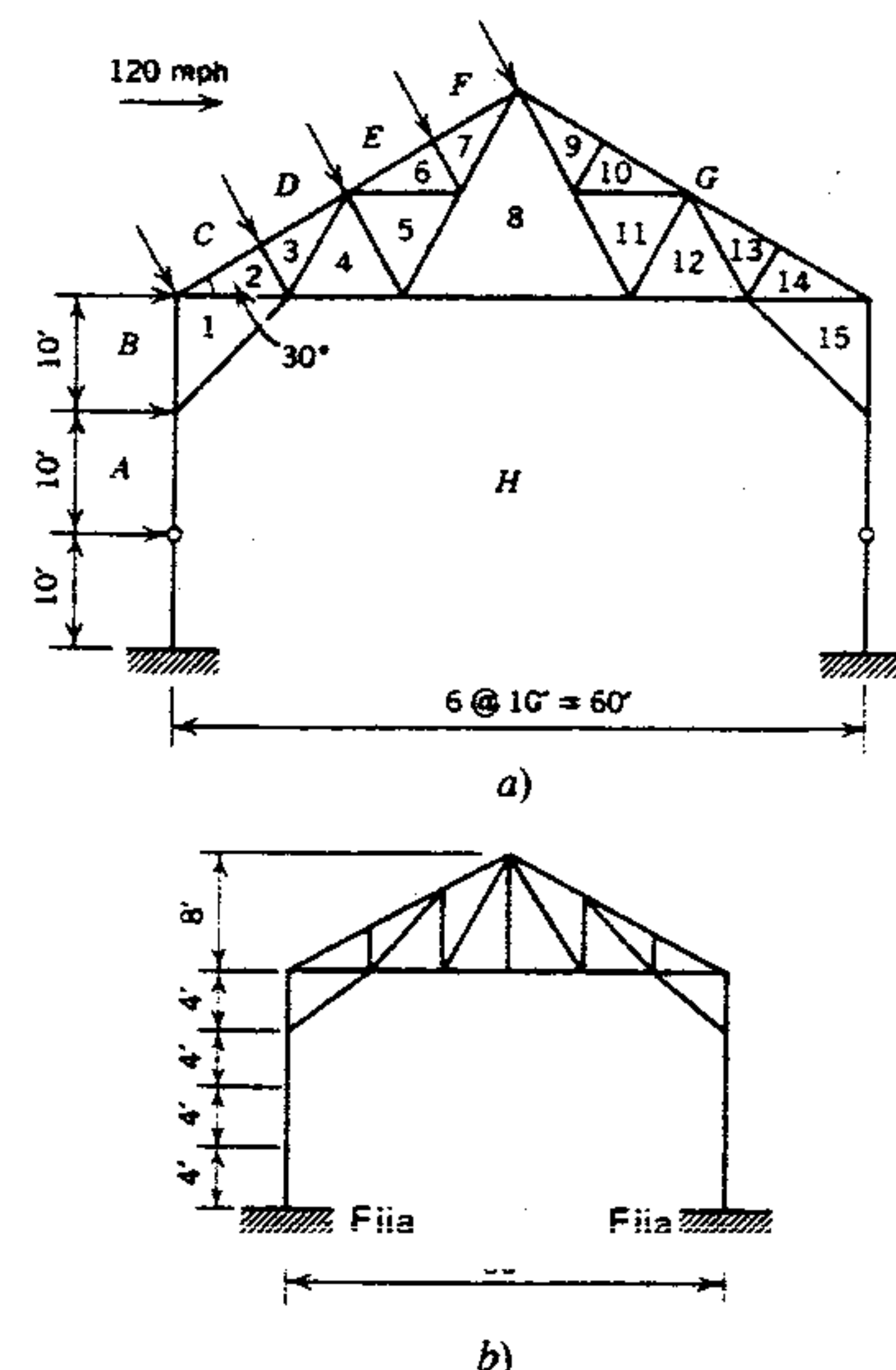


Figura 9.45 Problemas.

puede suponer una fijación parcial. En estos casos, un punto de inflexión, a  $\frac{1}{3}$  de la distancia entre la base y el codo de arriostramiento, medida desde la base sería un supuesto razonable.

Asimismo, el sistema de cubierta del techo y el arriostramiento entre marcos se trataría como se vio en las anteriores secciones sobre armaduras.

### PROBLEMAS

1. Completar el cálculo de las fuerzas en los miembros para el marco del ejemplo anterior (figura 9.43).
2. Determinar las fuerzas en todo los miembros del marco transversal del ejemplo anterior (figura 9.43), si se supone que el punto de inflexión ocurre a 16 pies arriba de la base. Todas las otras estipulaciones siguen siendo las mismas.
3. Determinar las fuerzas debido al viento en todos los miembros del marco transversal de la figura 9.45a. Las bases de columnas están fijas, y los marcos están espaciados a 20 pies. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento para ambas columnas e indicar la fuerza cortante y momentos máximos. Usar ANSI A58.1-1982, suponiendo una velocidad básica de viento de 70 mph. Categoría de exposición C, factor de importancia  $I = 1.0$ , y aberturas de más del 20 por ciento.
4. Determinar las fuerzas debido al viento en todos los miembros del marco transversal de la figura 9.45b; dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento para el diseño en cada caso. Los marcos están espaciados a 16 pies. La estructura está localizada en un área con una velocidad básica de viento de 90 mph, categoría de exposición C, factor de importancia  $I = 1.0$  y aberturas mínimas. Usar ANSI A58.1.

### 9.43 MÉTODO DEL PORTAL: CONSTRUCCIÓN DE VARIOS PISOS Y VANOS MÚLTIPLES

Los principios desarrollados en las Secciones 9.40 y 9.41 para un método aproximado de análisis de

portales simples y múltiples y marcos para cargas laterales de viento se pueden extender para marcos de portal de varios pisos y varios vanos para resistir cargas de viento.

Los siguientes son los supuestos en que se basa el método de análisis del portal para marcos con cargas de viento.

1. Cada portal de un marco múltiple actúa como un portal independiente.
2. El punto de inflexión de cada columna está a la mitad de la altura del piso.
3. El punto de inflexión de cada viga está a la mitad de su longitud.
4. El cortante horizontal en cualquier plano se divide igualmente entre el número de naves; cada columna exterior tomando la mitad de la fuerza cortante de una columna interior.
5. Los pisos permanecen planos y a nivel.
6. Se pueden omitir los cambios en la longitud de vigas y columnas.
7. El marco resiste toda la carga del viento.

En la figura 9.46 supóngase que el marco ilustrado no es sino una serie de marcos este-oeste espaciados a 20 pies en un edificio cuya dimensión mayor está en el sentido norte-sur. Este marco, y todos los otros en el sentido este-oeste, debe resistir una carga de viento de 30 lb/pie<sup>2</sup> aplicada a toda la superficie vertical. Suponer una altura de piso de 12 pies y la existencia de un muro de parapeto que se extiende 3 pies por encima del nivel del techo; entonces, la carga de tablero a nivel del techo es

$$30(6 + 3)(10 + 10) = 5400 \text{ lb}$$

y la carga del tablero del segundo piso es

$$30(12)(10 + 10) = 7200 \text{ lb}$$

La carga de viento en la base será transmitida directamente a los cimientos.

Usando los supuestos establecidos anteriormente:

La fuerza cortante en las columnas de cualquier piso se divide igualmente entre el número de columnas exteriores toman la mitad del cortante de las columnas interiores (supuesto 4).

Entonces,



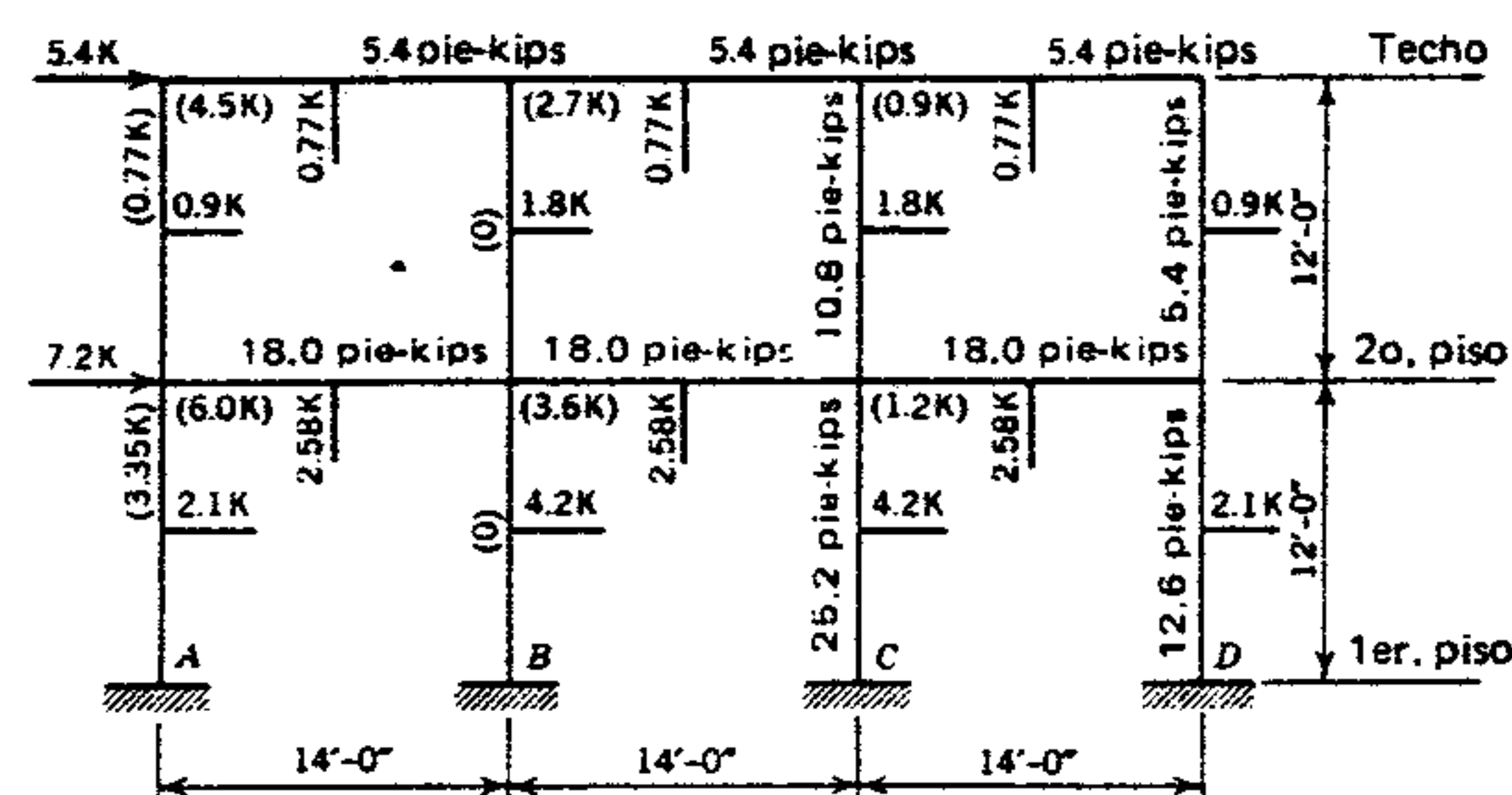


Figura 9.46 Método de análisis del portal.

Cortante en las columnas del segundo piso:  
= 5400 lb = 5.4 kips

Cortante en cada nave  
= 5400/3 = 1800 lb = 1.8 kips

Cortante en columnas exteriores  
= 1800/2 = 900 lb = 0.9 kips

Cortante en columnas interiores  
= 1800 lb = 1.8 kips

Cortante en columnas del primer piso:  
= 5400 + 7200 = 12,600 lb  
= 12.6 kips

Cortante en cada nave  
= 12600/3 = 4200 lb = 4.2 kips

Cortante en columnas exteriores  
= 4200/2 = 2100 lb = 2.1 kips

Cortante en columnas interiores  
= 4200 lb = 4.2 kips

Estos valores se registran en la figura 9.46 a la mitad de la altura de las columnas respectivas.

La fuerza normal de compresión en vigas de entrepiso que transmiten la carga del tablero como fuerza cortante a la columna a la izquierda de cada viga (figura 9.46) se encuentra deduciendo de la carga de tablero la porción de la carga que se toma como cortante por la columna a la izquierda de cada viga.

Fuerza normal en viga de techo de la nave AB:

Fuerza normal:

= carga de tablero, fuerza cortante en la columna A

= 5400 - 900 = 4500 lb  
= 4.5 kips

Fuerza normal en viga de techo de la nave BC:

Fuerza normal:

= carga del tablero, fuerzas cortantes en las columnas A y B

= 5400 - (900 + 1800) = 2700 lb  
= 2.7 kips

Fuerza normal en viga de techo de la nave CD:

Fuerza normal:

= carga del tablero, fuerzas cortantes en las columnas A, B y C

= 5400 - (900 + 1800 + 1800) = 900 lb  
= 0.9 kips

Estos valores y similares para el segundo piso se presentan en la figura 9.46 entre paréntesis inmediatamente abajo de las vigas respectivas.

Los momentos flexionantes en columnas son iguales en las partes inferior y superior de cada columna y son iguales a la fuerza cortante de la columna multiplicada por la mitad de la altura de un piso. El momento flexionante en cada columna interior es el doble del de una columna interior porque los cortantes tienen un valor doble; por lo tanto:

Momento flexionante en columnas del segundo piso, A y D:

$$M = 900(6) = 5400 \text{ pie-lb} = 5.4 \text{ pie/kips}$$

Momento flexionante en las columnas B y C del segundo piso:

$$M = 1800(6) = 10,800 \text{ pie-lb} = 10.8 \text{ pie/kips}$$

Estos valores se registran paralelamente a las columnas. En la figura 9.46 se presentan sólo los de las columnas C y D. Los momentos flexionantes para las columnas del primer piso se determinan de la misma manera.

Los momentos flexionantes de vigas en los extremos de vigas de piso son iguales a la suma de los momentos en las columnas exteriores inmediatamente arriba y abajo del piso en consideración. Los momentos en vigas del mismo piso son iguales e independientes del ancho de la nave.

Momento flexionante en vigas de techo:

$$M = 5400 + 0 = 5400 \text{ pie-lb} = 5.4 \text{ pie/kips}$$

Momento flexionante en vigas del segundo piso:

$$M = 5400 + 12,600 = 18,000 \text{ pie-lb} \\ = 18.0 \text{ pie-kips}$$

Estos valores se presentan directamente arriba

Las fuerzas cortantes en vigas se calculan a partir de los momentos de extremos de vigas, es decir, dividiendo el momento de extremo entre la mitad

del claro de la viga. Como los momentos en las vigas en cualquier piso son iguales, los cortantes de las vigas también son iguales cuando las naves son del mismo ancho.

Fuerza cortante en vigas de techo

$$= 5400/7 = 770 \text{ lb} = 0.77 \text{ kips}$$

Fuerza cortante en vigas del segundo piso

$$= 18,000/7 = 2580 \text{ lb} = 2.58 \text{ kips}$$

Estos valores se registran perpendicularmente a y bajo las vigas respectivas en el punto de inflexión supuesto, es decir, a mitad del claro (figura 9.46).

Las fuerzas normales en columnas se calculan directamente de los cortantes en vigas. Como los cortantes en vigas son iguales para cualquier piso cuando las naves son iguales en ancho, no hay fuerza normal en las columnas interiores de este marco. Con el viento proveniente de la izquierda (figura 9.46), la fuerza normal en la columna A es de tensión y en la columna D de compresión. Los valores son los siguientes:

Columnas A y D en el segundo piso:

$$P = 770 \text{ lb} = 0.77 \text{ kips}$$

Columnas A y D en el primer piso:

$$P = 770 + 2580 = 3350 \text{ lb} = 3.35 \text{ kips}$$

Estos valores se presentan entre paréntesis, paralelamente y a la izquierda de las columnas A y B, y aunque no se muestran, son los mismos que los de las columnas D y C, respectivamente.

El método de análisis aproximado del portal se usará en el capítulo 13 como un auxiliar para el diseño de un marco simplificado, aunque más grande, de un edificio.

#### 9.44 CONSTRUCCIÓN DE TECHOS DE CLARO GRANDE

Cuando un techo debe cubrir un claro de 150 pies o más, lo cual está más allá de las posibilidades de



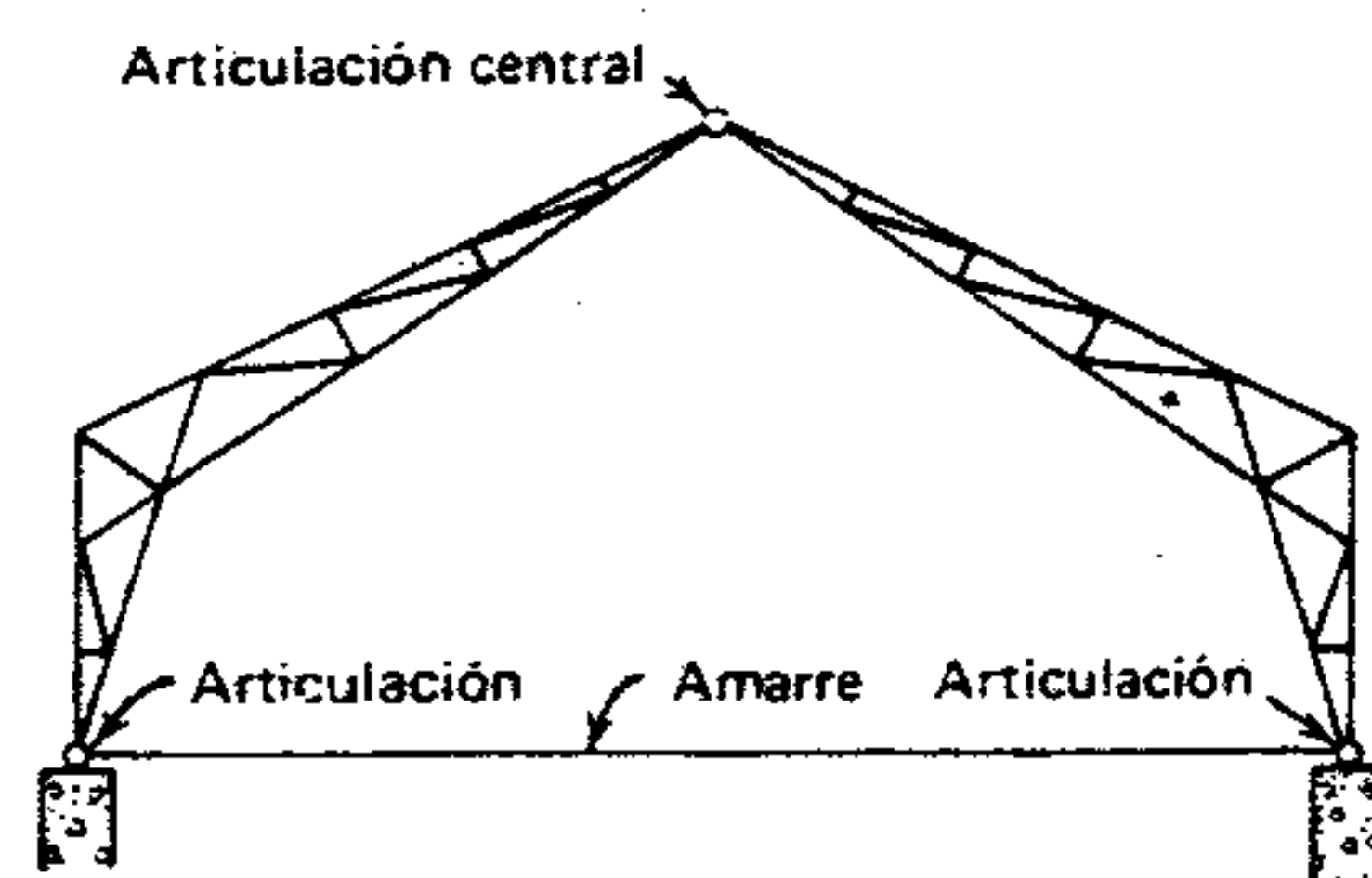


Figura 9.47 Armadura con tres articulaciones.

la construcción con marcos arriostrados presenta hasta aquí, se debe usar un sistema de vanos múltiples con columnas interiores, o bien, usualmente se necesita alguna forma de construcción de arco o marco rígido.

En los Estados Unidos, los arcos de acero estructural son probablemente los de uso más generalizado. Sin embargo, en Europa, los arcos de concreto reforzado y de claro grande están logrando cada vez mayor aceptación, y los cascarones delgados y los marcos espaciales es muy probable que se usen cada vez en mayor medida también. No obstante, la armadura de acero con tres articulaciones (figura 9.47) se usa aún para techos de edificios como salas de exhibición, cuarteles y gimnasios, que pueden ser o no construcciones de un solo piso. La

forma general de la armadura se establece generalmente con base en aspectos arquitectónicos del proyecto. Los miembros de la cuerda y la celosía se pueden construir de canales o placas y ángulos, similares a los de las armaduras ordinarias de techo, pero con frecuencia las vigas S y las secciones W son más satisfactorias.

Como en la fabricación de este tipo de armaduras se requiere una gran cantidad de trabajo de taller, y como la armadura misma será usualmente muy pesada, la distancia entre armaduras debe ser relativamente grande. Para claros de 100 pies o más se acostumbra un espaciamiento de 22 a 40 pies. El espaciamiento mayor será más económico para claros más grandes. Este espaciamiento necesita el uso de armaduras arriostradas para usarse como largueros, pero las armaduras-larguero también pueden ser parte del sistema de arriostramiento entre arcos.

Recientemente, se han ido adoptando arcos acostillados de acero y marcos rígidos de secciones de patín ancho para la construcción de grandes claros. Los marcos de este tipo son esencialmente arcos de dos articulaciones con el empuje hacia afuera en la base de las columnas absorbido por tirantes bajo el piso. Como se dijo al principio de este capítulo, el tratamiento detallado del diseño de marcos rígidos se hará en el capítulo 10.

## 10

Ing. Angel B. B. B. B.

## Vigas continuas y marcos



## 10.1 INTRODUCCIÓN

Todos los miembros estructurales de un edificio se pueden clasificar como sigue:

1. Vigas (transmisoras de carga transversal).
2. Columnas o puntales (transmisores de carga de compresión axial).
3. Tirantes (transmisores de carga de tensión axial).
4. Aquellos que transmiten flexión y cargas axiales combinadas.

Su propósito primario es formar marcos en el espacio, y para lograrlo, se pueden ensamblar y conectar de diversas formas. La forma más sencilla de cerrar el espacio es una viga apoyada sobre un muro; o bien, si el claro es grande, una armadura compuesta de puntales y tirantes que puede reemplazar a la viga (figura 10.1). Y si los muros que soportan vigas o armaduras no son convenientes, se pueden reemplazar por columnas. Sin embargo, si las conexiones entre columnas y vigas, o columnas y armaduras, son flexibles (construcción tipo 2, sección 7.3), se tendrá un ensamble inestable y, bajo una condición de carga no balanceada, se colapsaría (figura 10.2). Un colapso de esta naturaleza se puede prevenir y hacer estable la estructura mediante arriostramiento, es decir, usando miembros de acero o muros de mampostería (capítulo 9).

Otra manera de obtener esta estabilidad necesaria es usar conexiones rígidas entre columna y viga o entre columna y armadura. Estas conexiones deben ser suficientemente rígidas para evitar la rotación de un miembro con respecto al otro, y cuando lo son, se obtiene un elemento estructural que también es esencialmente rígido. Generalmente, este elemento se denomina *marco rígido* (figura 10.3). Los marcos rígidos se pueden diseñar de diversas formas, dependiendo de las necesidades arquitectónicas y estructurales. Por ejemplo, el marco de tres pisos y tres ejes de columnas de la figura 10.4. Estos elementos, sin embargo, no se pueden analizar por medio de las leyes de la está-





Figura 10.1 Viga y armadura estables.

tica solamente; por lo tanto, son estáticamente indeterminados.

En capítulos anteriores se eligió la viga como la base para comprender las estructuras en equilibrio estático y como una herramienta disponible para el análisis. Así, se usará de nuevo la viga para hacer una introducción al estudio de estructuras estáticamente indeterminadas.

Se ha mostrado que para sistemas de fuerzas coplanares y paralelas, como una viga simplemente apoyada soportando cargas verticales (figura 10.5a), que dos de las ecuaciones de estáticas,  $\Sigma V = 0$  y  $\Sigma M = 0$ , son suficientes para resolver dos fuerzas incógnitas; en las vigas, usualmente éstas son las reacciones. A falta de ecuaciones adicionales, cualesquier tipo de fuerzas incógnitas adicionales son redundantes y hacen que una viga sea estáticamente indeterminada, y el grado de indeterminación se mide por el número de componentes de reacción redundantes, es decir,  $V$ ,  $H$  y  $M$ .

Cualquier apoyo restringido tiene tanto un momento como una fuerza. Por tanto, una viga en voladizo tiene dos incógnitas: el momento en el muro y la reacción vertical en el muro. No obstante, el voladizo simple es estáticamente determinado porque estas dos incógnitas se pueden encontrar usando las dos ecuaciones:  $\Sigma V = 0$  y  $\Sigma M = 0$ .

Los miembros pueden ser continuos sobre y a través de los apoyos. En la figura 10.5 se ilustra

una viga continua apoyada en tres apoyos. La viga es continua sobre el apoyo del medio. Por ejemplo, si tiene el apoyo del medio restringido (como se ve en la figura 10.4, donde las vigas son columnas apoyadas), la viga sería continua a través de este apoyo.

En la figura 10.5b se ilustra una viga con tres reacciones desconocidas; esta viga es estáticamente indeterminada en primer grado. En la figura 10.5c se ilustra una viga con cuatro incógnitas, tres reacciones verticales y el momento en el extremo fijo. Esta viga es estáticamente indeterminada en segundo grado.

Igual que antes, el análisis de vigas requiere que las reacciones sean determinadas y que se construyan los diagramas de fuerza cortante y momento flexionantes. Sin embargo, estos diagramas sólo se pueden dibujar cuando se conocen las reacciones externas. Por lo tanto, el análisis de vigas indeterminadas empieza con el cálculo de reacciones redundantes, y prosigue con una solución estática de las demás reacciones.

La magnitud de las reacciones redundantes se puede encontrar por diversos métodos; no obstante, las deflexiones debidas a las cargas son las "herramientas del análisis" comunes a todos los métodos.

En este capítulo se tratará principalmente un método de análisis conocido como "Distribución

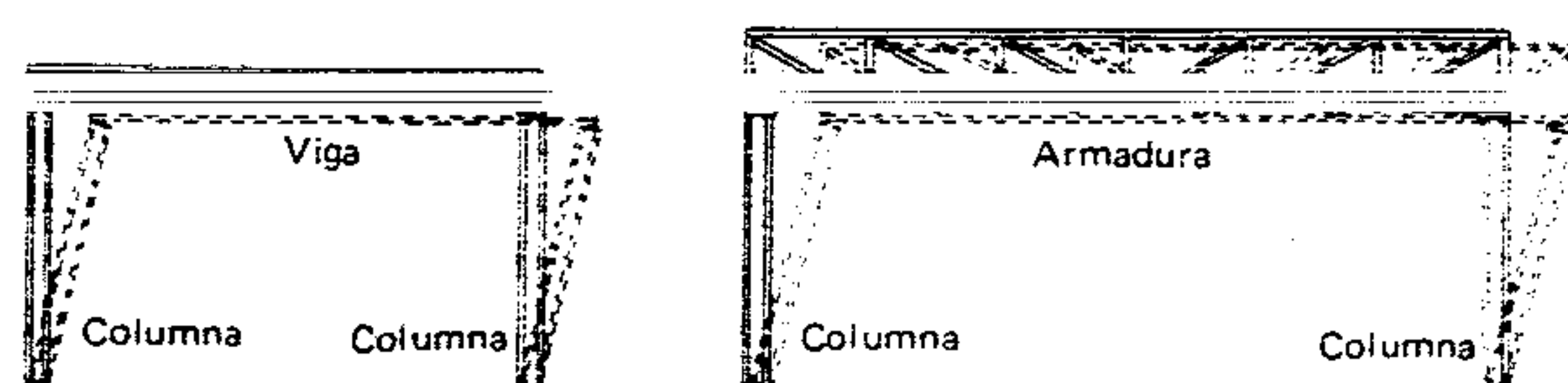


Figura 10.2 Marcos inestables.

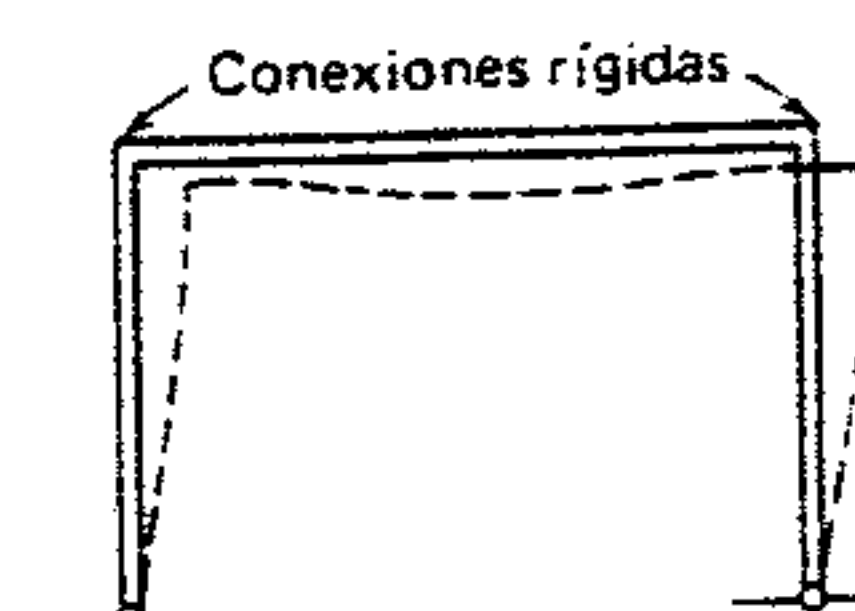


Figura 10.3 Marco rígido.

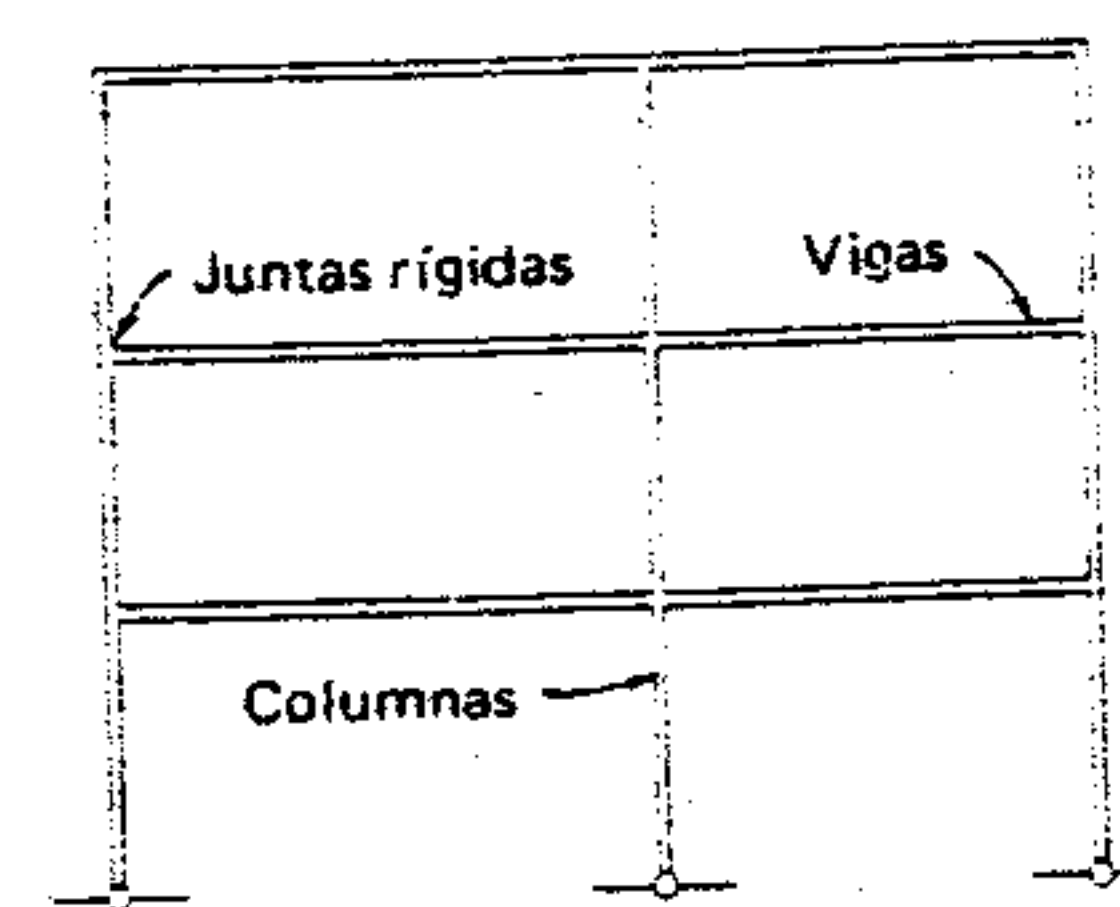


Figura 10.4 Marco estable.

de momentos". Aunque en algunos casos se puede llegar a una solución más fácil por otros métodos, en este texto no se trata en detalle más que un solo método, pero se presentarán los conceptos básicos de otros.

## 10.2 MÉTODO DE LA DEFORMACIÓN COMPATIBLE O CONSISTENTE

El único propósito de esta sección será mostrar por qué las deflexiones constituyen herramientas analíticas efectivas. El método de la deformación compatible es básico para el análisis indeterminado. En esencia implica la eliminación de redundantes para crear una estructura determinada, calcular las deflexiones debidas a las cargas en los puntos de fuerzas redundantes y luego calcular las magnitudes de las fuerzas redundantes necesarias para evitar estas deflexiones. En otras palabras, a la estructura determinada producida por la eliminación de redundantes se le permite deflexionarse. Y como no puede haber deflexión en una reacción,

la magnitud de la fuerza necesaria para reducir a cero esa deflexión también debe ser la magnitud de la reacción redundante originalmente eliminada. Este procedimiento se demuestra en el siguiente ejemplo ilustrativo.

### Ejemplo

Una viga W 10 × 22 tiene 40 pies de largo y se apoya en tres apoyos separados a 20 pies. Esta viga continua soporta tres cargas concentradas de 2 kips cada una, como se ve en la figura 20.6a. Despreciar el peso propio de la viga. Encontrar la magnitud de las reacciones, fuerzas cortantes y momentos.

### Solución

1. Hacer la viga estáticamente determinada mediante la eliminación de redundantes. Se ve que la viga es estáticamente indeterminada en primer grado, es decir, sólo hay una redundante. Cualquiera de los tres apoyos se puede considerar redundante. En este caso, se considerará redundante el apoyo del medio y se eliminará temporalmente (figura 10.6b).
2. Calcular la deflexión en el punto en que se eliminó el apoyo. Ahora la viga está simplemente apoyada, con cargas concentradas en los cuartos del claro. En la figura 4.15, la deflexión a mitad del claro es

$$\Delta = \frac{19}{384} \left( \frac{PL^3}{EI} \right)$$

$$\Delta = \frac{19(2)(1000)(40)^3 12^3}{384(29,000)(100)} = 3.20 \text{ pulg.}$$

3. Calcular la magnitud de una sola fuerza en este punto, que produzca la misma deflexión (figura 10.6c). Esta sería una viga simplemente apoyada con una sola carga concentrada



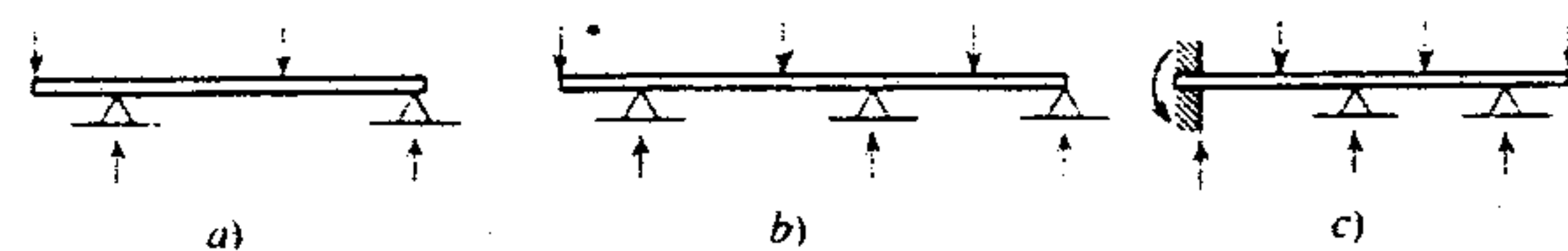


Figura 10.5 Continuidad.

en el centro del claro. De la figura 4.15, la deflexión en el centro del claro es

$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI} = 3.20 \text{ pulg.}$$

Despejando  $P$ ,

$$\frac{48EI(3.20)}{L^3} = \frac{48(29,000,000)(118)(3.20)}{40^3(12)^3}$$

$$P = 4753 \text{ lb} \approx 4.75 \text{ kips}$$

Esta fuerza de 4.75 kips actuando hacia arriba en el apoyo del centro evitaría la deflexión en este punto inicialmente calculado. Por lo tan-

to, 4.75 kips es la magnitud de la redundante, o reacción, en el apoyo del centro.

4. Determinar la magnitud de las demás reacciones desconocidas. Esto se puede hacer aplicando las ecuaciones de equilibrio estático,  $\Sigma M = 0$  y  $\Sigma V = 0$ . Tomando momentos respecto al apoyo izquierdo (figura 10.6d),

$$2(10) + 2(20) + 2(30) - 4.75(20) - 40R_R = 0$$

$$R_R = 0.625 \text{ kips}$$

Por simetría, o  $\Sigma V = 0$ ,

$$R_L = 0.625 \text{ kips}$$

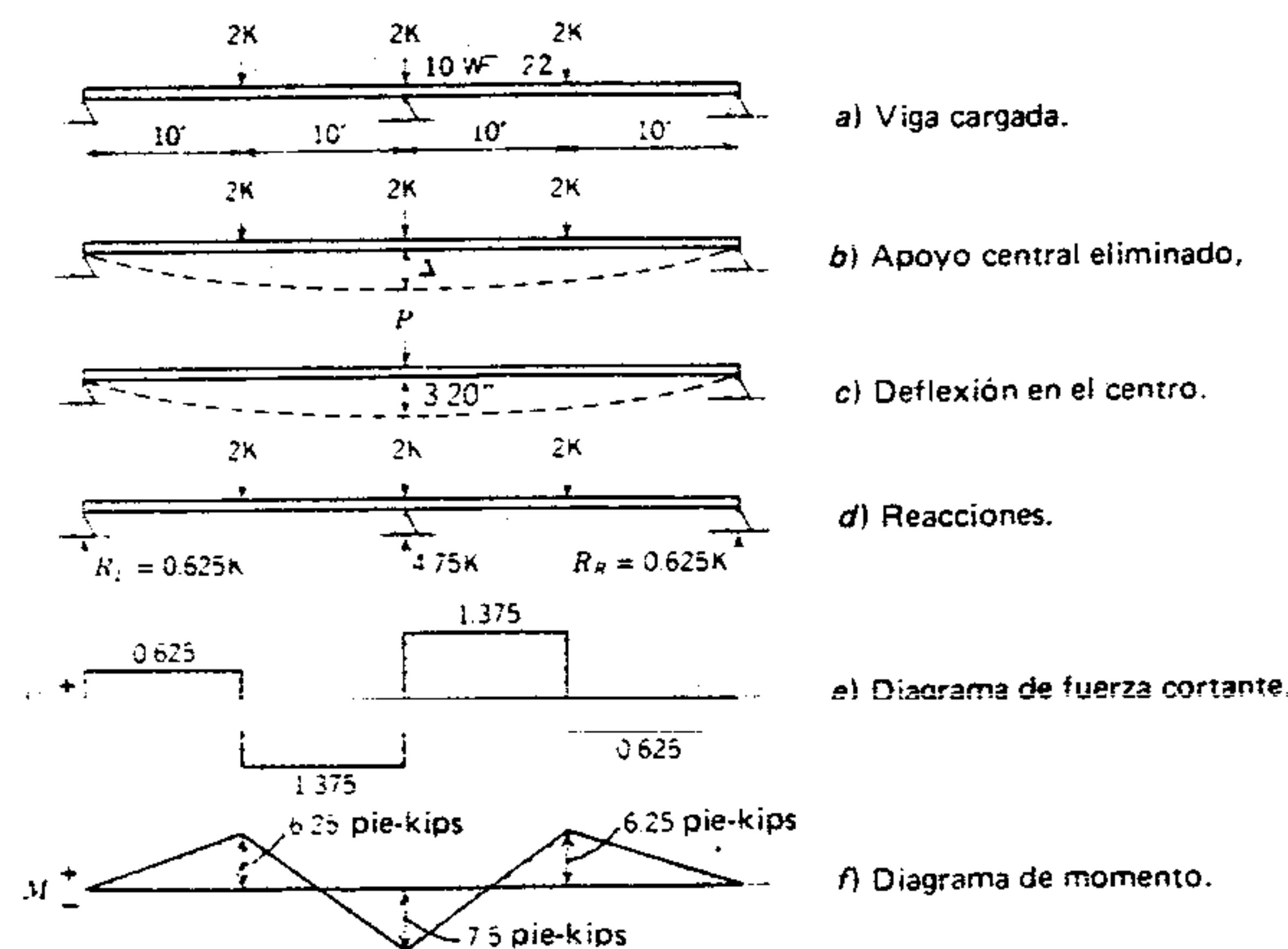


Figura 10.6 Método de la deformación compatible o consistente.

5. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante (figura 10.6e y f).

La viga que se acaba de analizar se eligió por su simplicidad. El mismo método de análisis se puede aplicar a cualquier estructura indeterminada, pero se va haciendo más complicado a medida que se eleva el grado de indeterminación y/o las condiciones de asimetría en las cargas.

Debe observarse que para determinar las deflexiones de las vigas, se deben conocer el momento de inercia y, por lo tanto, la sección de la viga. Esto significa que se debe dar o suponer el tamaño. La necesidad de hacer aproximaciones sucesivas, es decir, suponer primero el tamaño de los componentes, analizar la estructura, modificar el tamaño si se requiere, analizar de nuevo la estructura, etc., es inherente al análisis y diseño de estructuras indeterminadas. Por fortuna, usualmente el tamaño que se supone primero resulta bastante cercano que no es necesario hacer un refinamiento para propósitos de diseño. En este capítulo se tratará con mayor detalle este tema.

### 10.3 MOMENTOS DE EXTREMO FIJO O DE EMPOTRAMIENTO

La viga ilustrada en la figura 10.7a está simplemente apoyada en sus soportes. No hay restricción en

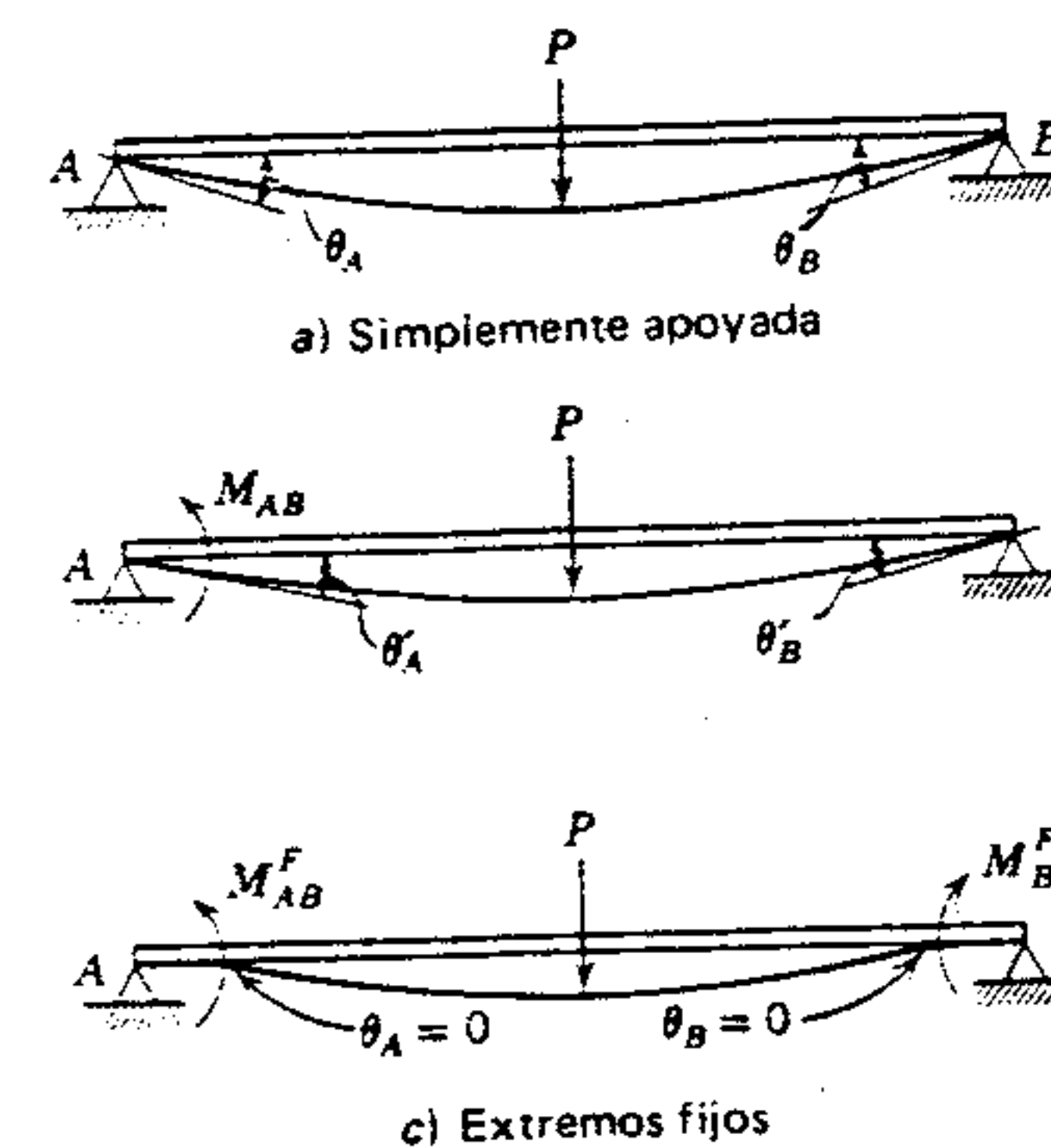


Figura 10.7 Extremo restringido.

los apoyos. Cuando se aplica la carga  $P$ , la viga se deflexiona y los extremos de ésta giran ( $\theta_A$  y  $\theta_B$ ).

Supóngase que el extremo  $A$  está parcialmente restringido de modo que el ángulo  $\theta'_A$  es menor que  $\theta_A$  (figura 10.7b). Esta restricción parcial (o fijación) está representada por el momento  $M_{AB}$ , como se ilustra. Puede haber varios grados de restricción, por diversas razones, ya sea en un extremo o en ambos. Sin embargo, la condición producida en ambos extremos totalmente restringidos es tal que lo más importante es que no hay rotación en los apoyos (figura 10.7c).

Se dice que una viga como ésta tiene los extremos fijos, y los momentos de restricción  $M_{AB}^F$  y  $M_{BA}^F$  se denominan momentos de extremo fijo o de empotramiento. Debe observarse que los momentos de extremo fijo son independientes de cualesquiera vigas o miembros adyacentes.

En la figura 10.8 se muestra la magnitud de los momentos de extremo fijo para seis diferentes condiciones de carga (véase también el Apéndice B). Los momentos para las combinaciones de cargas que se ilustran se pueden obtener simplemente sumándolas todas. Por ejemplo, supóngase una viga con una carga uniformemente distribuida de intensidad  $w$ , más dos cargas concentradas iguales en las terceras partes de su longitud. De la figura 10.8,

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = \frac{wL^2}{12} + \frac{2}{9}PL$$

Los momentos de extremos fijos de la figura 10.8, o aquellos de cualquier condición de carga, se pueden calcular aplicando los principios de área-momento (sección 4.2).

Por ejemplo, la viga de la figura 10.9 tiene una carga concentrada  $P$  actuando en la mitad de su claro. También se ilustran los diagramas de momento y deflexión. Como la carga está situada simétricamente, los momentos de extremo fijo

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F$$

Nótese también que los momentos de extremo fijo son negativos, mientras que el momento en el centro del claro es positivo.



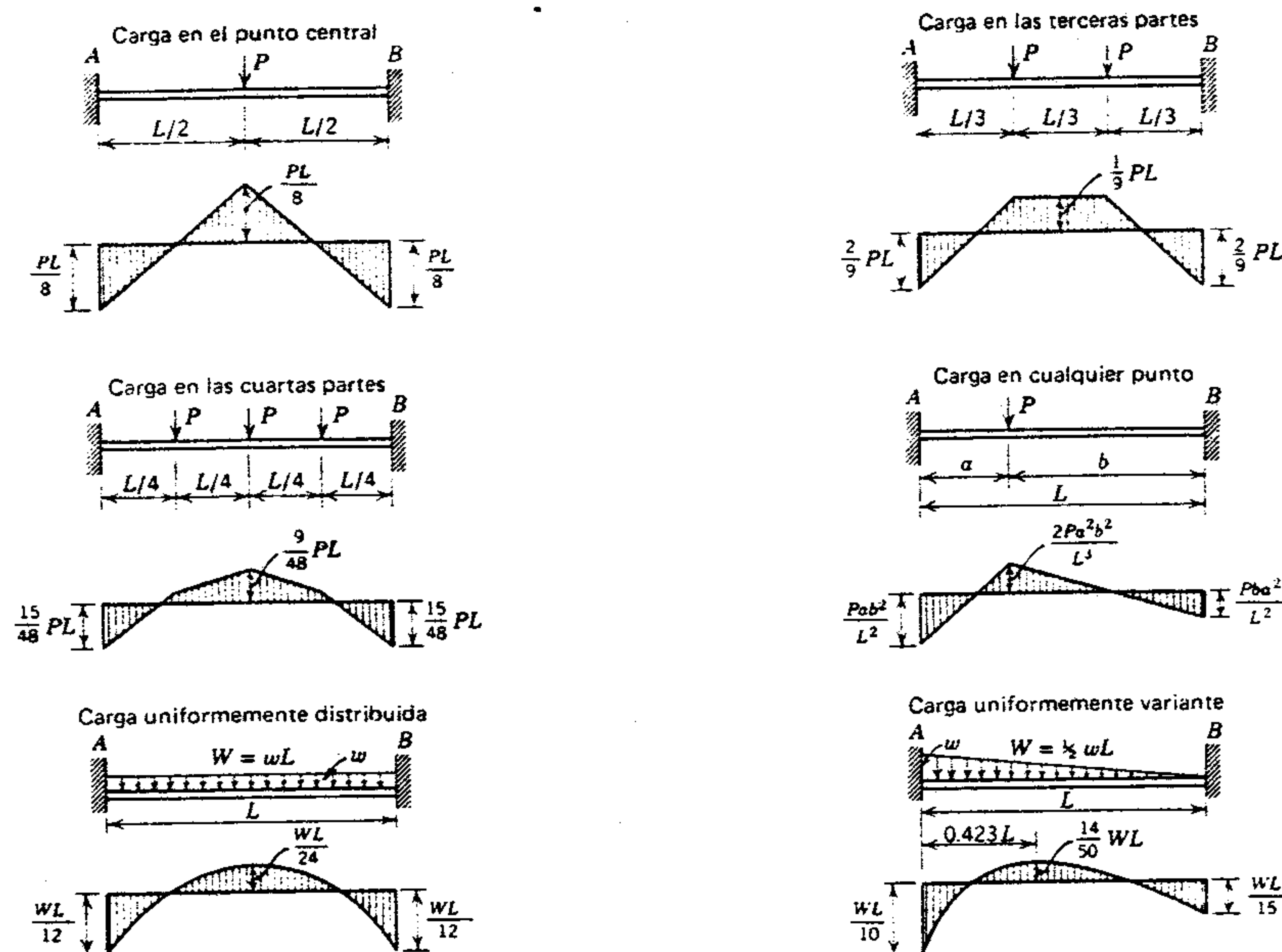


Figura 10.8

El diagrama de momento flexionante para esta viga también se puede dibujar en partes, como se ve en la figura 10.9b. Si no hubiera restricción en los extremos, el diagrama de momento sería el de una viga simplemente apoyada. Los momentos de restricción en los extremos se pueden concebir como si actuaran independientemente y por tanto disminuyendo hasta cero en los extremos opuestos. Los puntos  $A$  y  $B$  coinciden; por lo tanto, el ángulo subtendido entre ellas es igual a cero. Del primero de los principios de área-momento, éste ángulo es igual al área del diagrama de  $M/EI$  entre los dos puntos de tangencia.

Del diagrama de momento dibujado en partes (figura 10.9b).

$$+ \left[ \frac{PL}{4} \left( \frac{L}{2} \right) \right] - \left[ M_{AB}^F \left( \frac{L}{2} \right) \right] - \left[ M_{BA}^F \left( \frac{L}{2} \right) \right] = 0$$

$$\text{Como } M_{AB}^F = M_{BA}^F$$

$$+ \frac{PL^2}{8} - [M_{AB}^F(L)] = 0$$

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = \frac{PL}{8}$$

El momento positivo en el centro del claro se puede calcular ahora a partir de las condiciones de equilibrio estático. También es igual a  $PL/8$  en este ejemplo.

Otro ejemplo es la viga cargada asimétricamente de la figura 10.10a. La viga es estáticamente indeterminada en segundo grado. Eligiendo  $M_{AB}^F$  y  $M_{BA}^F$  como redundantes, la viga de extremo fijo se puede dividir en tres vigas simples separadas como se ve en las figuras 10.10b, d) y f); la primera es una viga simple que soporta la carga  $P$  y se flexiona como lo indica la línea punteada; la segunda es una viga simple, con el momento  $M_{AB}^F$  aplicado, deflexionándose hacia arriba como se indica por la línea punteada; y la tercera es una viga simple con el momento  $M_{BA}^F$  aplicado. En cada diagrama de viga simple, se muestran líneas tangentes a la curva elástica en los puntos  $A$  y  $B$ , señalando los ángulos  $\theta$  de rotación de extremo. El diagrama de momento flexionante para cada viga simple separada aparece directamente abajo del diagrama de la viga, es decir, figura 10.10c, e), y g).

El problema inicial (figura 10.10a) tiene extremos totalmente restringidos; por lo tanto, por definición, la pendiente en los extremos fijos debe ser igual a cero. Aplicando esta observación a las tres condiciones de vigas simples separadas,

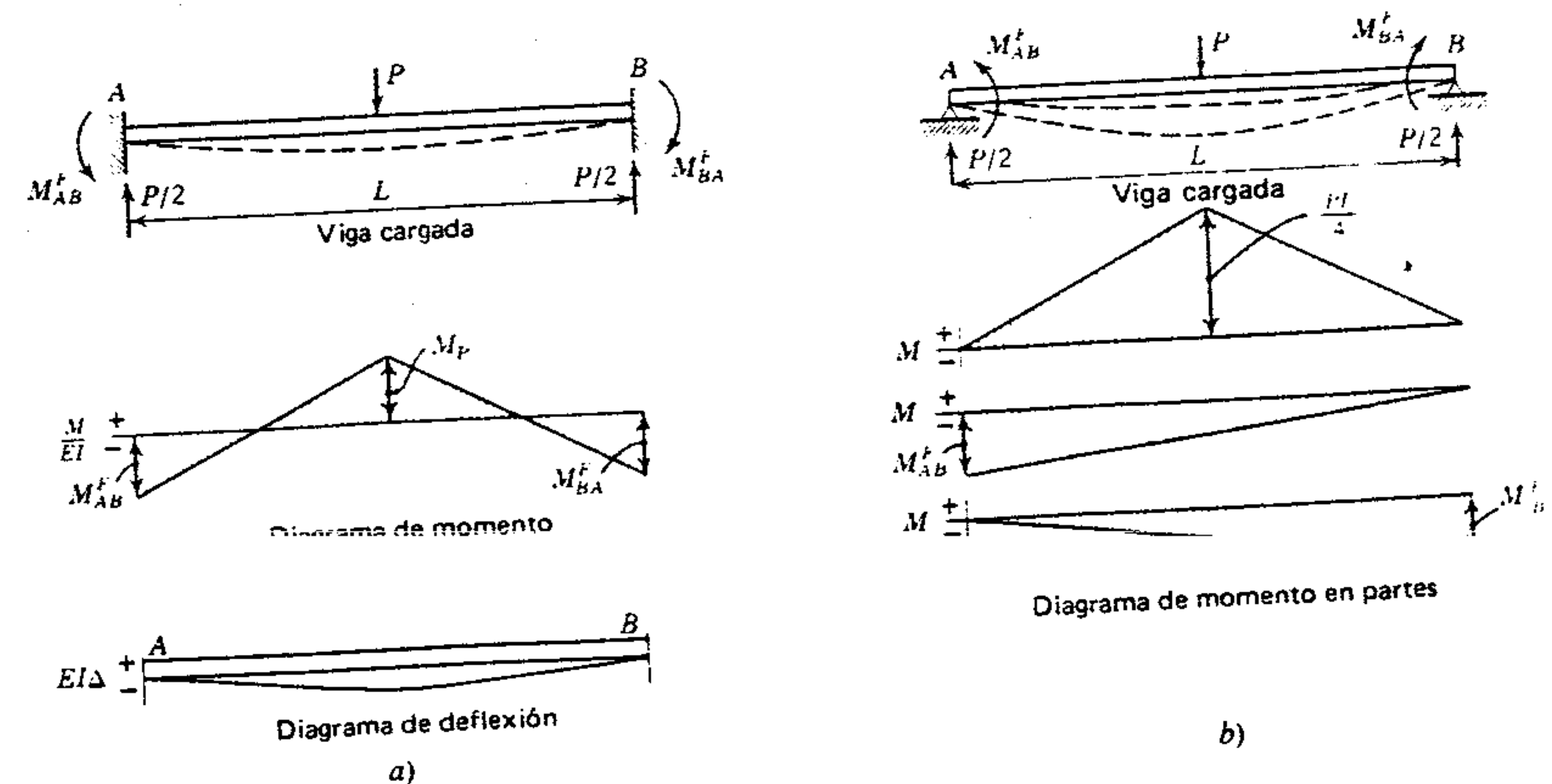


Figura 10.9 Momento de extremo fijo.

$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2}$$

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2}$$

Aplicando trigonometría y el segundo principio de área-momento (figuras 10.10b y c),

$$\begin{aligned} \tan \theta_A &= \frac{BB'}{L} \\ &= \left[ \frac{Pab}{L} \left( \frac{b}{2} \right) \frac{2b}{3} \right] + \left[ \left( \frac{Pab}{L} \right) \frac{a}{2} \left( b + \frac{a}{3} \right) \right] \\ &= \frac{2Pab^3 + 3Pa^2b^2 + Pa^3b}{6L^2} \\ &= \frac{Pab}{6L} (a + 2b) \\ \tan \theta_B &= \frac{AA'}{L} \\ &= \left[ \frac{Pab}{L} \left( \frac{a}{2} \right) \frac{2a}{3} \right] + \left[ \left( \frac{Pab}{L} \right) \frac{b}{2} \left( a + \frac{b}{3} \right) \right] \\ &= \frac{2Pa^3b + 3Pa^2b^2 + Pab^3}{6L^2} \\ &= \frac{Pab}{6L} (2a + b) \end{aligned}$$



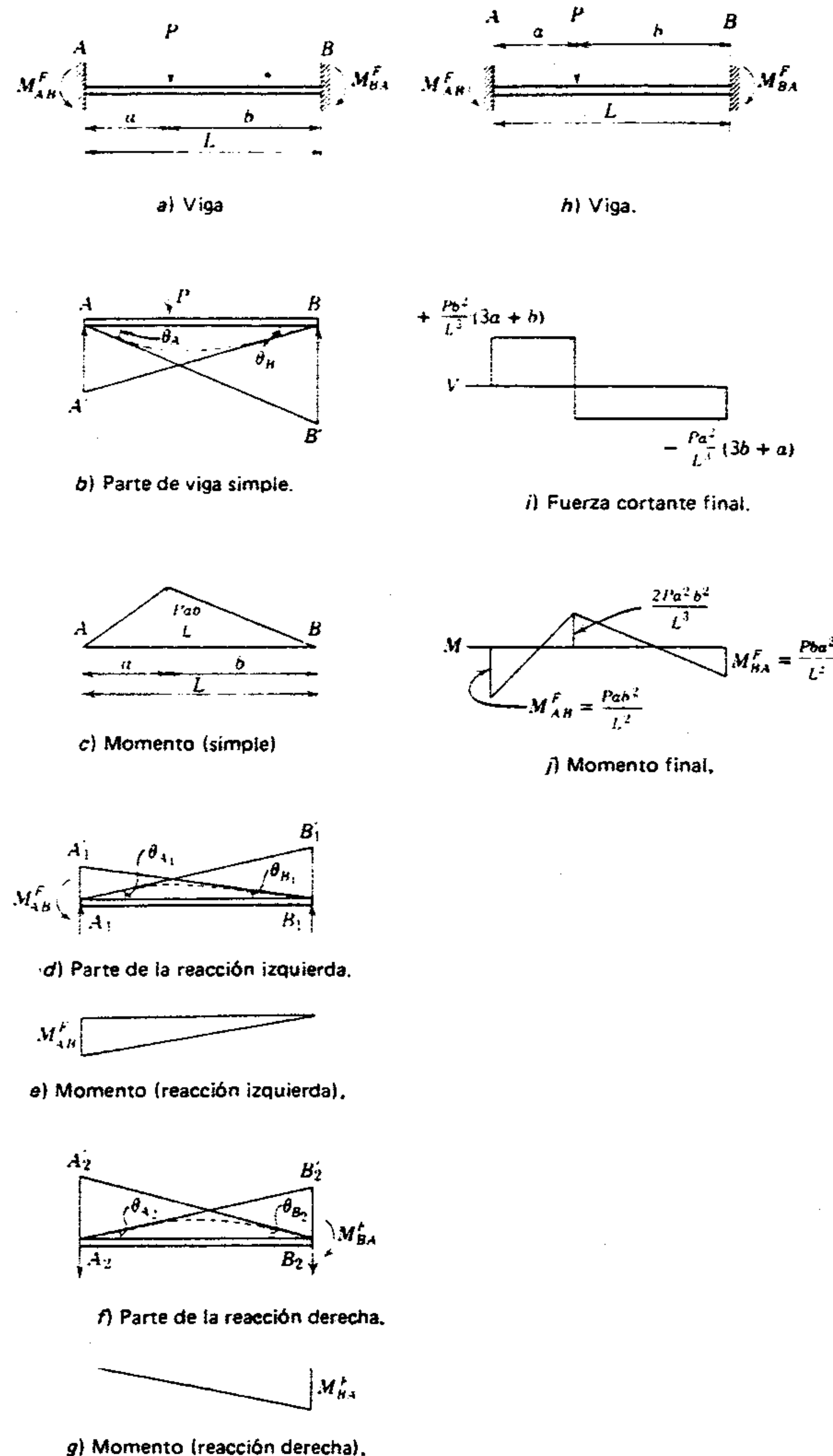


Figura 10.10 Momento de extremo fijo obtenido por partes.

## PROBLEMAS

- Una sección W 12 X 26 es continua en dos claros de 12 pies y soporta una carga uniformemente distribuida de 3 kips por pie. Determinar la magnitud de las reacciones usando el método de la deformación consistente. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)
- Una sección W 10 X 26 tiene un claro de 18 pies. Tiene un extremo fijo y el otro simplemente apoyado. Hay una carga concentrada de 10 kips en el centro del claro. Determinar la magnitud de las reacciones usando el método de la deformación consistente. (Se sugiere tomar como redundante la reacción en el extremo simplemente apoyado.)
- Calcular los momentos de extremo fijo para una viga de 26 pies, la cual soporta una carga uniformemente distribuida de 2 kips por pie y una carga concentrada de 12 kips actuando en el centro del claro. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)
- Calcular los momentos de extremo fijo para una viga de 24 pies, la cual soporta una carga uniformemente distribuida de 3 kips por pie, una carga concentrada de 10 kips actuando a 8 pies de un extremo, y una carga concentrada de 20 kips actuando a 8 pies del otro extremo.

## 10.4 CONVENCIÓN ACERCA DE SIGNOS

En capítulos anteriores se supuso que el momento positivo hacía que una viga se flexionara en forma cóncava hacia arriba, y el momento negativo la hacía cóncava hacia abajo. Esta convención era particularmente adecuada para el análisis y diseño de vigas estáticamente determinadas. Sin embargo, causará confusión cuando se analicen vigas y marcos continuos; por lo tanto, aquí se presentará una nueva convención de signos.

Para que un momento sea identificable, se debe saber si tiende a producir rotación horaria o anti-horaria, y si actúa sobre una viga o sobre una junta. En la figura 10.11 se muestra un momento  $M_A$  actuando sobre el apoyo; y, para equilibrarlo, el momento  $M_B$  representa el efecto del apoyo actuando sobre el extremo de la viga. La convención de signos se puede expresar como

De modo similar, de las figuras 10.10d) y e).

$$\tan \theta_{A_1} = \frac{B_1 B'_1}{L} = \frac{M_{AB}^F \left( \frac{L}{2} \right) \frac{2L}{3}}{L} = \frac{M_{AB}^F L}{3}$$

$$\tan \theta_{B_1} = \frac{A_1 A'_1}{L} = \frac{M_{BA}^F \left( \frac{L}{2} \right) \frac{2L}{3}}{L} = \frac{M_{BA}^F L}{6}$$

De las figuras 10.10f) y g),

$$\tan \theta_{A_2} = \frac{B_2 B'_2}{L} = \frac{M_{BA}^F \left( \frac{L}{2} \right) \frac{2L}{3}}{L} = \frac{M_{BA}^F L}{6}$$

$$\tan \theta_{B_2} = \frac{A_2 A'_2}{L} = \frac{M_{AB}^F \left( \frac{L}{2} \right) \frac{2L}{3}}{L} = \frac{M_{AB}^F L}{3}$$

Sustituyendo en las ecuaciones originales, y usando la regla de que para ángulos muy pequeños,  $\theta = \tan \theta$ ,  $\tan \theta_{A_1} + \tan \theta_{A_2} = \tan \theta_A$ , entonces

$$\frac{M_{AB}^F L}{3} + \frac{M_{BA}^F L}{6} = \frac{Pab}{6L} (a + 2b)$$

$$\text{y } \tan \theta_{B_1} + \tan \theta_{B_2} = \tan \theta_B,$$

$$\frac{M_{AB}^F L}{6} + \frac{M_{BA}^F L}{3} = \frac{Pab}{6L} (2a + b)$$

de donde

$$M_{AB}^F = \frac{Pab^2}{L^2} \quad \text{y} \quad M_{BA}^F = \frac{Pba^2}{L^2}$$

Ahora se puede dibujar el diagrama de viga de la figura 10.10h, y calcular las reacciones verticales de A y B. Los diagramas de fuerza cortante y momento se ilustran en las figuras 10.10i) y j).

Un excelente ejercicio sería calcular los momentos de extremo fijo para otras condiciones de carga y verificarlos mediante comparación con los dados en la figura 10.8 y el Apéndice B.



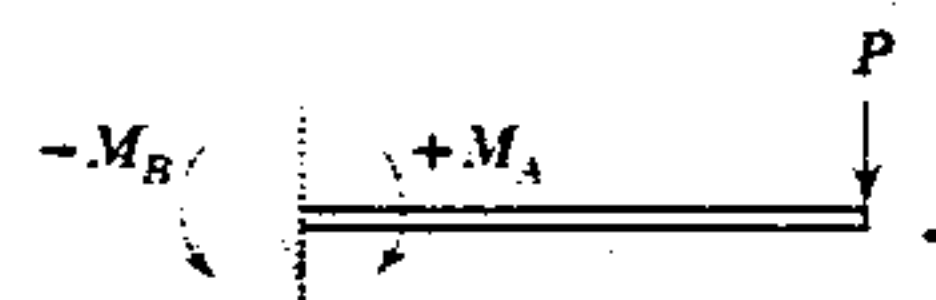


Figura 10.11 Signos convencionales.

sigue: Un momento actuando en una junta es positivo si tiende a hacer que la junta gire en el sentido horario. Entonces, en la figura 10.11,  $M_A$  es positivo y  $M_B$  es negativo. Para cargas hacia abajo sobre un miembro horizontal, el momento de extremo fijo siempre es positivo a la derecha de una junta y negativo a la izquierda.

### 10.5 DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS —PROCEDIMIENTO MATEMÁTICO

El método de distribución de momentos para analizar estructuras indeterminadas se centra en la determinación directa de momentos flexionantes en una junta o apoyo. Una vez conocidos los momentos, la magnitud de las reacciones se puede determinar por estática.

El método de distribución de momentos fue desarrollado por Hardy Cross, y bastantes inge-

nieros y arquitectos consideran que es uno de los desarrollos más significativos de la teoría estructural en lo que va del siglo XX. Aunque la base conceptual del método de distribución de momentos es realmente sencilla, la mecánica de su aplicación puede parecer complicada al principio. Por lo tanto, se bosquejará el procedimiento matemático paso por paso antes de aplicar el método a ejemplos reales. En secciones subsecuentes se explicará la teoría implícita. Este es el orden de estudio recomendado por Hardy Cross cuando dice: "... aprender el proceso elemental de distribución de momentos... aceptando temporalmente sus teoremas como ciertos. Practicar la distribución de momentos limitada a miembros prismáticos<sup>1</sup> y aplicarla...".

Como se describe en esta sección, la distribución de momentos es aplicable solamente si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Todos los miembros son inicialmente rectos.
2. Todos los miembros tienen sección transversal uniforme en toda su longitud (de apoyo a apoyo).
3. No hay desplazamiento de los apoyos (o juntas).

<sup>1</sup> Una viga de sección transversal constante.

Factor de rigidez	0.063		0.056			
Factor de distribución	0.0	1.0	0.53	0.47	1.0	0.0
Momentos de empotramiento	0.0	-16.0	-16.0	-24.0	-24.0	0.0
Balaceo	0.0	-16.0	-4.2	-3.8	-24.0	0.0
Total	0.0	0.0	-20.2	-20.2	0.0	0.0
Transporte		-2.1	-8.0	+12.0		-1.9
Balaceo		+2.1	-2.1	-1.9		+1.9
Transporte		-1.1	+1.1	-1.0		-1.0
Balaceo		+1.1	-1.1	-1.0		-1.0
Total	0.0	0.0	-30.3	-30.3	0.0	0.0

Figura 10.12 Distribución de momentos.

El procedimiento se puede concebir como una serie de aproximaciones sucesivas. Primera, se supone que todos los claros tienen extremos fijos; por lo tanto, no hay rotación en los apoyos o las juntas. Se calculan los momentos de extremo fijo. Luego se sueltan las juntas una por una y se dejan girar hasta balancear los momentos de la izquierda y de la derecha. Cuando una junta se deja girar, cualquier momento desbalanceado se distribuirá en miembros adyacentes conforme a sus rigideces relativas, esta rigidez se mide en términos de  $I/L$  para cada miembro. Cualquier momento inducido en un extremo de un miembro produce un efecto en el extremo fijo opuesto de ese miembro. Este efecto es de la mitad del valor del momento distribuido. Por tanto, cuando esta mitad del valor se "transporta" al extremo opuesto, tiende a crear una falta de equilibrio en ese extremo, lo cual exige que el proceso se repita una y otra vez hasta que los momentos transportados sean insignificantes.

Para eliminar tanto como sea posible la posibilidad de error, se debe adoptar una manera ordenada de presentar el trabajo. Se recomienda la tabulación presentada en la figura 10.12.

#### Ejemplo 1

Una viga de sección transversal constante será continua sobre tres apoyos y estará cargada como se ve en la figura 10.12. Usando el método de distribución de momentos, determinar la magnitud de los momentos flexionantes en A, B y C.

#### Solución

1. Preparar las líneas base para la tabulación. Hay dos claros y tres juntas (apoyos, en este problema). Estas líneas se trazan gruesas como se ve en la figura 10.12.
2. Calcular los factores de rigidez relativa para cada miembro. Esto se ha definido como  $I/L$ , y el símbolo  $K'$  se usa aquí para denotar su valor.<sup>2</sup> Como se va a usar una viga de sección

<sup>2</sup> El símbolo  $K'$  que se usa aquí no se debe confundir con el símbolo  $K$  usado para denotar el factor de longitud efectiva para columnas (sección 6.4).

constante, el valor de  $I$  permanecerá constante.

$$K'_{AB} = \frac{I}{L} = \frac{I}{16} \approx 0.063I$$

$$K'_{BC} = \frac{I}{L} = \frac{I}{18} \approx 0.056I$$

Poner estos valores sobre la línea base como se ve en la figura 10.12.

3. Determinar los factores de distribución (DF) para cada apoyo. El factor de distribución para cualquier miembro dado es igual a su  $K'$  dividido entre  $\Sigma K'$  de todos los miembros que llegan a la junta.

Considerando el punto B,

$$\Sigma K' = 0.063I + 0.056I = 0.119I$$

$$DF_{BA} = \frac{K'_{AB}}{\Sigma K'} = \frac{0.063I}{0.119I} \approx 0.53$$

$$DF_{CB} = \frac{K'_{BC}}{\Sigma K'} = \frac{0.056I}{0.119I} \approx 0.47$$

Nótese que la suma de los factores de distribución en un apoyo debe ser igual a la unidad ( $0.53 + 0.47 = 1.00$ ).

Considerando el punto A,

$$\Sigma K' = 0 + 0.063I$$

$$DF_{AB} = \frac{K'_{AB}}{\Sigma K'} = \frac{0.063I}{0.063I} = 1.0$$

Para el punto C,

$$DF_{CB} = \frac{K'_{CB}}{\Sigma K'} = \frac{0.056I}{0.056I} = 1.0$$

Poner estos factores de distribución directamente arriba de la línea base como se ve en la figura 10.12.

4. Suponiendo que todas las juntas están totalmente fijas, calcular los momentos de extremo fijo. De la figura 10.8



$$M_{AB}^F = -\frac{PL}{8} = -\frac{8(16)}{8} = -16 \text{ pie kips.}$$

$$M_{BA}^F = -\frac{PL}{8} = -16 \text{ pie kips.}$$

$$M_{BC}^F = +\frac{3}{8}PL = \frac{3}{8}(6)(18) = +24 \text{ pie kips.}$$

$$M_{CB}^F = -24 \text{ pie kips.}$$

Poner estos valores en la tabulación sobre la línea designada como Momentos de Extremo Fijo.

5. Balancear los momentos en cada junta. La junta  $B$  está sujeta a un momento positivo de 24.0 y un momento negativo de 16.0. Por lo tanto, está fuera de equilibrio,  $24.0 - 16.0 = +8.0$  pie/kips. Cuando se libera la fijación supuesta, la junta rotará en el sentido de las manecillas del reloj y el momento desbalanceado de  $+8.0$  pie/kips será proporcionado a los miembros  $AB$  y  $BC$  de acuerdo con sus factores de distribución.

$$\text{El miembro } BA \text{ recibe } 0.53(+8.0) = +4.2 \text{ pie/kips}$$

$$\text{El miembro } BC \text{ recibe } 0.47(+8.0) = +3.8 \text{ pie/kips}$$

Sin embargo, como este es un momento aplicado, el momento inducido que establece el equilibrio será opuesto en signo. Poner  $-4.2$  y  $-3.8$  sobre la línea designada como Balanceo de la tabulación. Súmense los momentos de cada lado del apoyo

$$M_{BA} = -16.0 - 4.2 = -20.2 \text{ pie/kips.}$$

$$M_{BC} = +24 - 3.8 = +20.2 \text{ pie/kips.}$$

Ahora esta junta está en equilibrio.

Seguir a otra junta y repetir el proceso anterior. En  $A$ , la junta está desbalanceada en una cantidad de  $+16.0$ , de modo que el momento

Todo este momento de balanceo va a la derecha de la junta, la cual tiene un factor de distribución de 1.0. La suma de los momen-

tos respecto a  $A$  es 0.0. Repetir este paso para la junta  $C$ .

6. Transportar la mitad de los momentos distribuidos al extremo opuesto. Al balancear la junta  $B$ , se aplicó un momento de  $-3.8$  a la derecha de la junta. Esto afecta el momento sobre el extremo lejano, así que se transporta  $\frac{1}{2}(-3.8) = -1.9$  a la izquierda de la junta  $C$  (ilustrado como una flecha). Esto se hace en cada junta cuando se produce un momento inducido en el paso de balanceo.
7. Balancear cada junta de nuevo como en el paso (5). Los momentos transportados perturbaban el balanceo de cada junta una vez más. Por ejemplo,

$$M_{BA} = -20.2 - 8.0 = -28.2$$

$$M_{BC} = +20.2 + 12.0 = +32.2 \text{ (momento desbalanceado)} \\ = +4.0$$

Ahora se debe multiplicar un momento de  $-4.0$  por los factores de distribución 0.53 y 0.47, y agregarlo a la junta. De nuevo, se calcula el total y se observa si está balanceado.

Los pasos de transporte, balanceo y total se repiten una y otra vez hasta que el momento transportado sea despreciable. Cada total representa un ciclo completo. El total que sigue al paso de balanceo final representa el momento en cada miembro en esa junta. Como se vio en este ejemplo, los momentos en  $A$  y  $C$  son iguales a cero, y en  $B$ , de 30.3 pie/kips.

### Ejemplo 2

Hacer un análisis completo de la viga continua ilustrada en la figura 10.13. La viga tiene un momento de inercia constante.

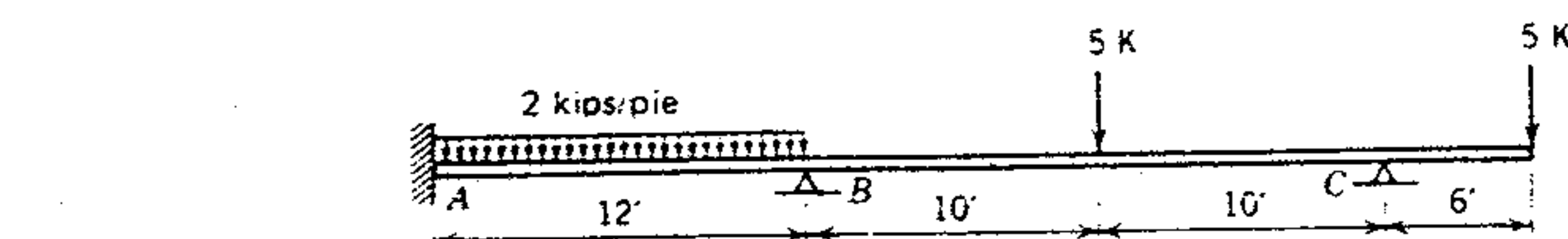
Véase el ejemplo 1 para una explicación detallada de los pasos (1) al (6).

1. Calcular los factores de rigidez. Estos son la relación  $I/L$  para cada miembro con dos apoyos. La parte en voladizo de la viga (extremo derecho) tiene una rigidez de cero ya que los claros adyacentes no afectan su momento. El factor de rigidez de un extremo totalmente

fijo se puede considerar infinito, ya que no permite que haya rotación.

2. Calcular los factores de distribución en cada junta.

3. Determinar los momentos de extremo fijo de la figura 10.8.



Factor de rigidez	$K' = \infty$	$K' = 0.084$	$K' = 0.050$	$K' = 0$
Factor de distribución	1.0	0.0	0.63	0.37
Momentos de empotramiento	0.0	+24.0	-24.0	-12.5
Balanceo	-24.0	0.0	+7.3	+4.2
Total	-24.0	+24.0	-16.7	+16.7
Transporte	-3.7	0.0	0.0	-9.8
Balanceo	-3.7	0.0	+5.5	+3.3
Total	-27.7	+27.7	-11.2	+11.2
Transporte	-2.8	0.0	0.0	-1.1
Balanceo	-2.8	0.0	+0.7	+0.4
Total	-30.5	+30.5	-10.5	+10.5
Transporte	-0.3	0.0	0.0	-0.8
Balanceo	-0.3	0.0	-0.5	-0.3
Total	-30.8	+30.8	-10.0	+10.0

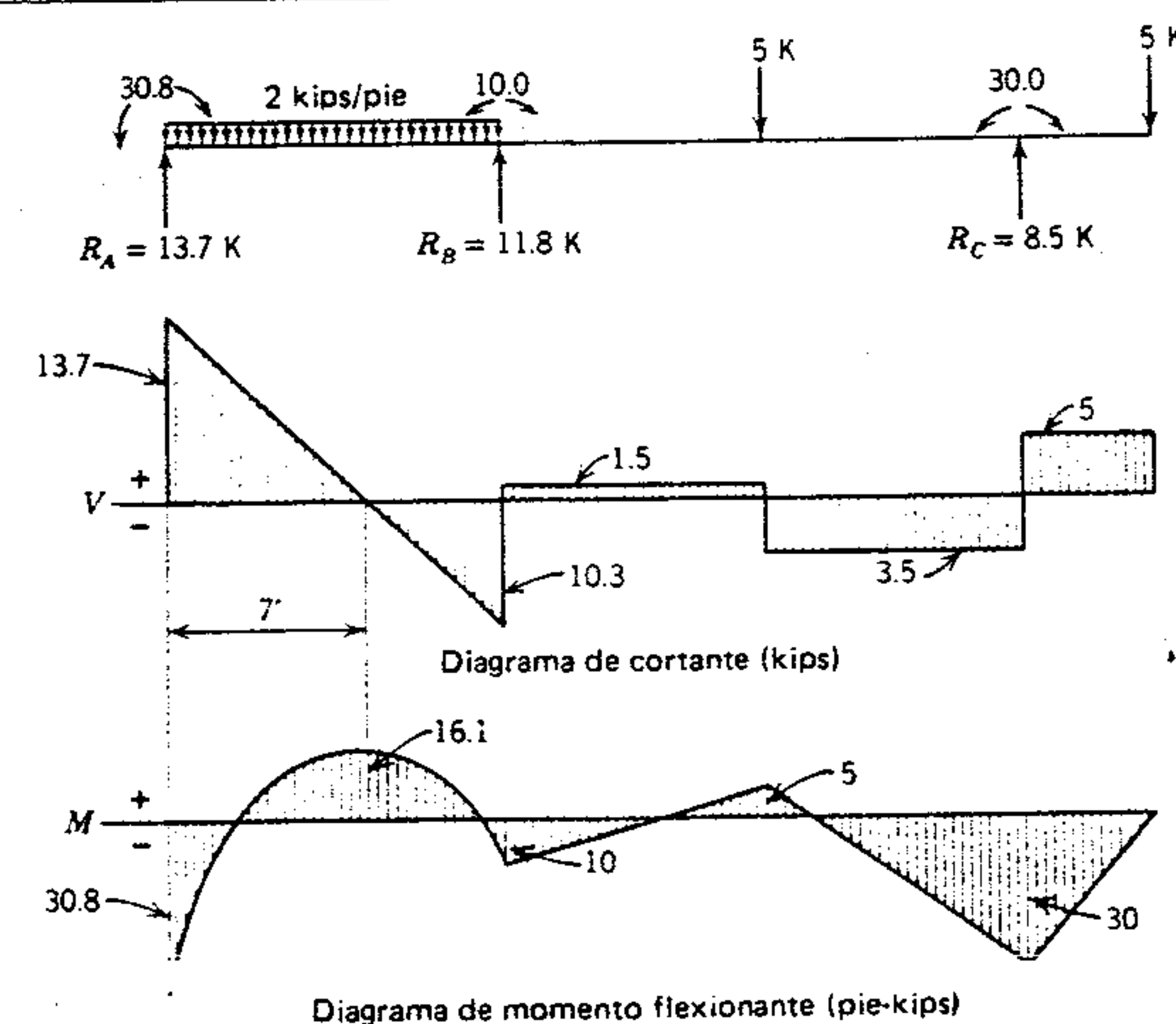


Figura 10.13 Distribución de momentos.



4. Balancear los momentos en cada junta.
5. Obtener el total de momentos después del balanceo.
6. Transportar la mitad de los momentos inducidos a cada extremo opuesto, y repetir los pasos (4), (5) y (6) hasta que los momentos transportados sean despreciables. Los momentos finales se muestran como el último total en la tabulación (figura 10.13).
7. Determinar las reacciones. Esto se puede hacer mediante la aplicación de las leyes de estática. Aquí se describe uno de los procedimientos posibles.

Cortar la viga en el punto  $B$ . Considerando solamente la porción de la viga que queda a la derecha, el momento que actúa sobre la sección cortada es  $-10.0$  pie/kips. Tomando momentos de todas las fuerzas a la derecha de la sección cortada (usando el punto  $B$  como centro de momentos) e igualando a cero

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0 \\ 5(10) + 5(26) - 20(R_C) - 10.0 &= 0 \\ R_C &= 8.5 \text{ kips}\end{aligned}$$

Siguiendo con la sección cortada en el punto  $B$ , pero tratando la parte de la izquierda como cuerpo libre, el momento actuando sobre la sección cortada es  $+10.0$  pie/kips.

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0 \\ -2(12)6 + 10.0 + 12(R_A) - 30.8 &= 0 \\ R_A &= 13.7 \text{ kips}\end{aligned}$$

El momento en  $A$  es  $-30.8$  pie/kips. Usando  $A$  como centro de momento para toda la viga,

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 \\ 2(12)6 + 5(22) + 5(38) - 8.5(32) \\ &\quad - 12(R_B) - 30.8 = 0 \\ R_B &= 11.8 \text{ kips}\end{aligned}$$

Comprobando las reacciones calculadas,

$$\begin{aligned}\Sigma V &= 0 \\ 2(12) + 5 + 5 &= 8.5 + 13.7 + 11.8 \\ 34 &= 34\end{aligned}$$

8. Construir los diagramas de fuerza cortante y momentos (figura 10.13).

### PROBLEMAS

1. Una viga de sección transversal constante está cargada como se ve en la figura 10.14. Encontrar los momentos flexionantes en  $A$  y  $B$ , usando el método de distribución de momentos. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)

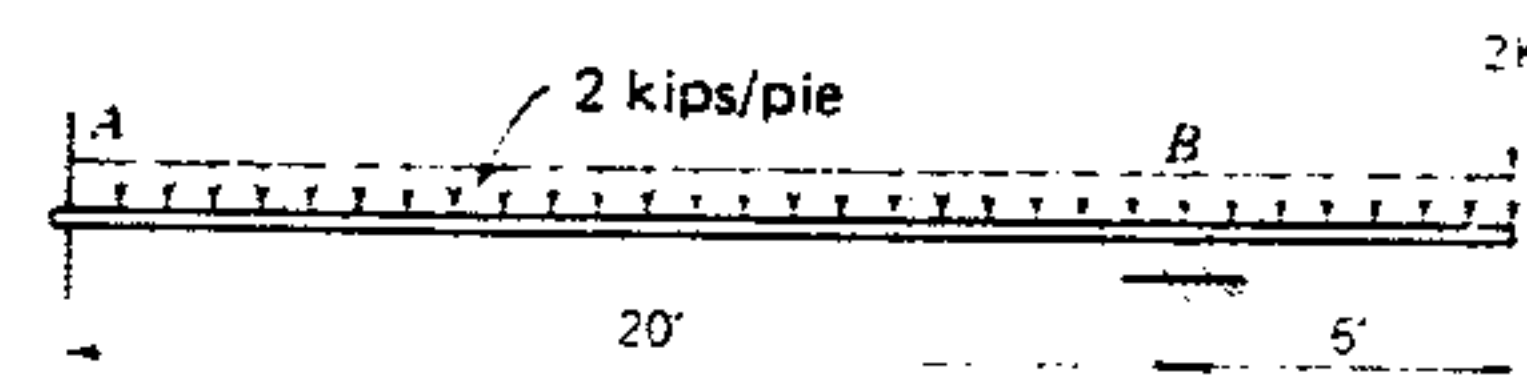


Figura 10.14

2. Una viga de sección transversal constante es continua sobre dos claros y está cargada como se ve en la figura 10.15. Encontrar los momentos flexionantes en  $A$ ,  $B$  y  $C$ , usando el método de distribución de momentos.

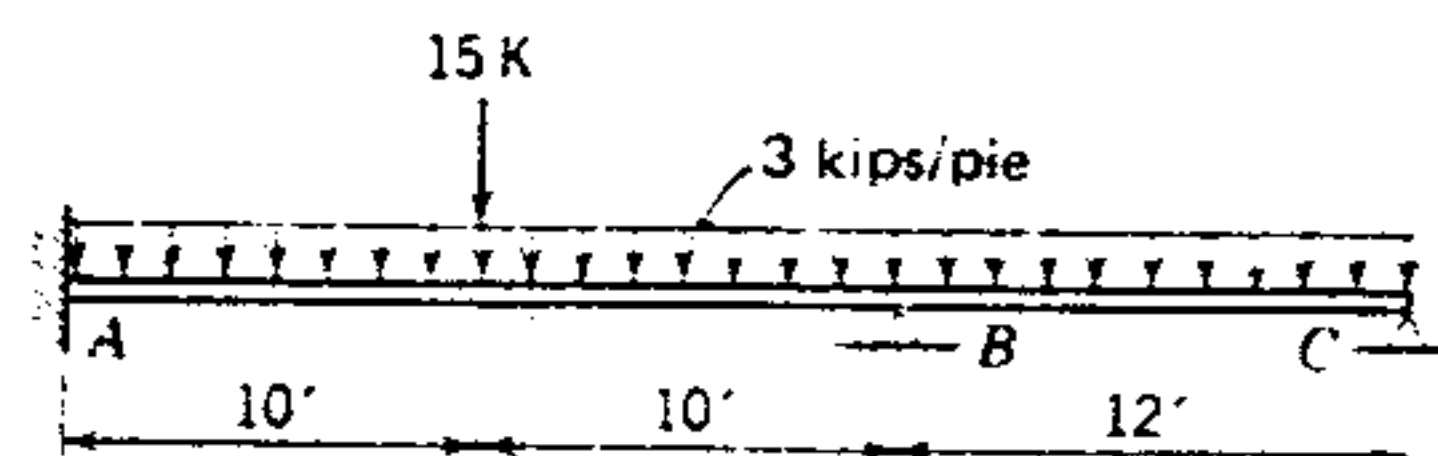


Figura 10.15

3. Una viga de sección transversal constante es continua sobre dos claros y soporta una carga de 4 kips por pie uniformemente distribuida en toda

su longitud. Un claro es de 18 pies y el otro de 12 pies. Sólo se usan apoyos simples. Calcular las reacciones.

4. Hacer un análisis completo de la viga ilustrada en la figura 10.16. El momento de inercia de  $B$  a  $D$  es el doble del de  $A$  a  $B$ . (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)

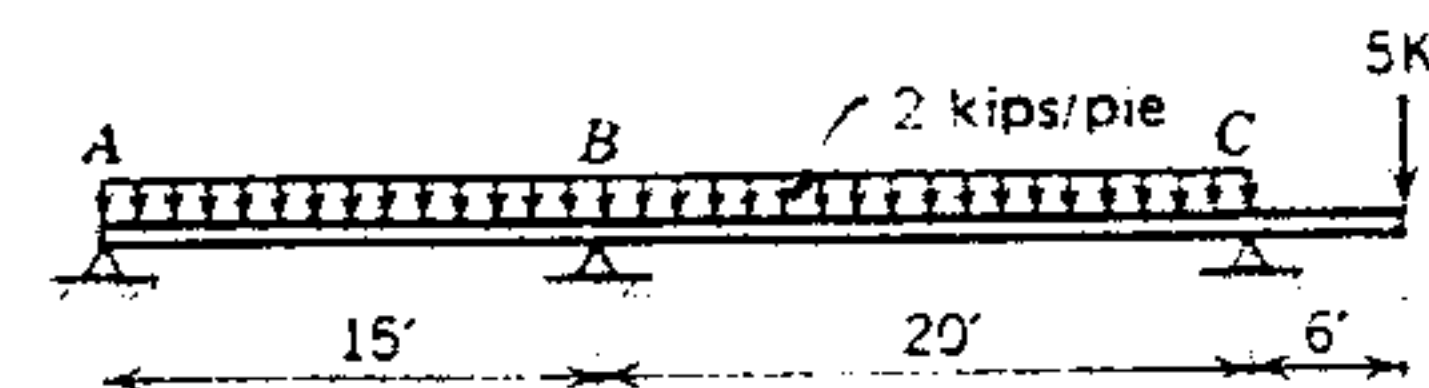


Figura 10.16

### 10.6 FACTORES DE RIGIDEZ Y TRANSPORTE

Si se aplica un momento  $M_{BA}$  en  $B$  como se ve en la figura 10.17a, el extremo girará un ángulo  $\theta_B$ , y se inducirá un momento  $M_{AB}$  en el extremo fijo  $A$ . Nótese que el momento inducido tiene el mismo signo que el momento aplicado. La relación entre los momentos aplicado e inducido depende de las propiedades físicas de la viga.

El ángulo  $\theta_B$  que gira el extremo de la viga varía con la magnitud del momento aplicado y la rigidez de la viga, y la relación entre el momento aplicado y el ángulo es el factor de rigidez para la viga.

En las figuras 10.17b) y c) se ilustran los correspondientes diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga con una sección transversal constante (prismática). En el método empleado aquí para determinar los factores de rigidez y transporte se hará uso de los principios de área-momento detallados en la sección 4.2 del capítulo 4. Como se mostró en la figura 10.17d), el diagrama de momentos se puede simplificar. El diagrama de deflexión se muestra en la figura 10.17e), e ilustra de una manera exagerada la forma de la curva elástica.

La tangente a la curva elástica en  $A$  pasa a través de  $B$ . Así, el primer momento del área del diagrama de momento flexionante respecto a  $B$  es igual a cero (segunda regla, sección 4.2). Expresando esto en forma de ecuación,

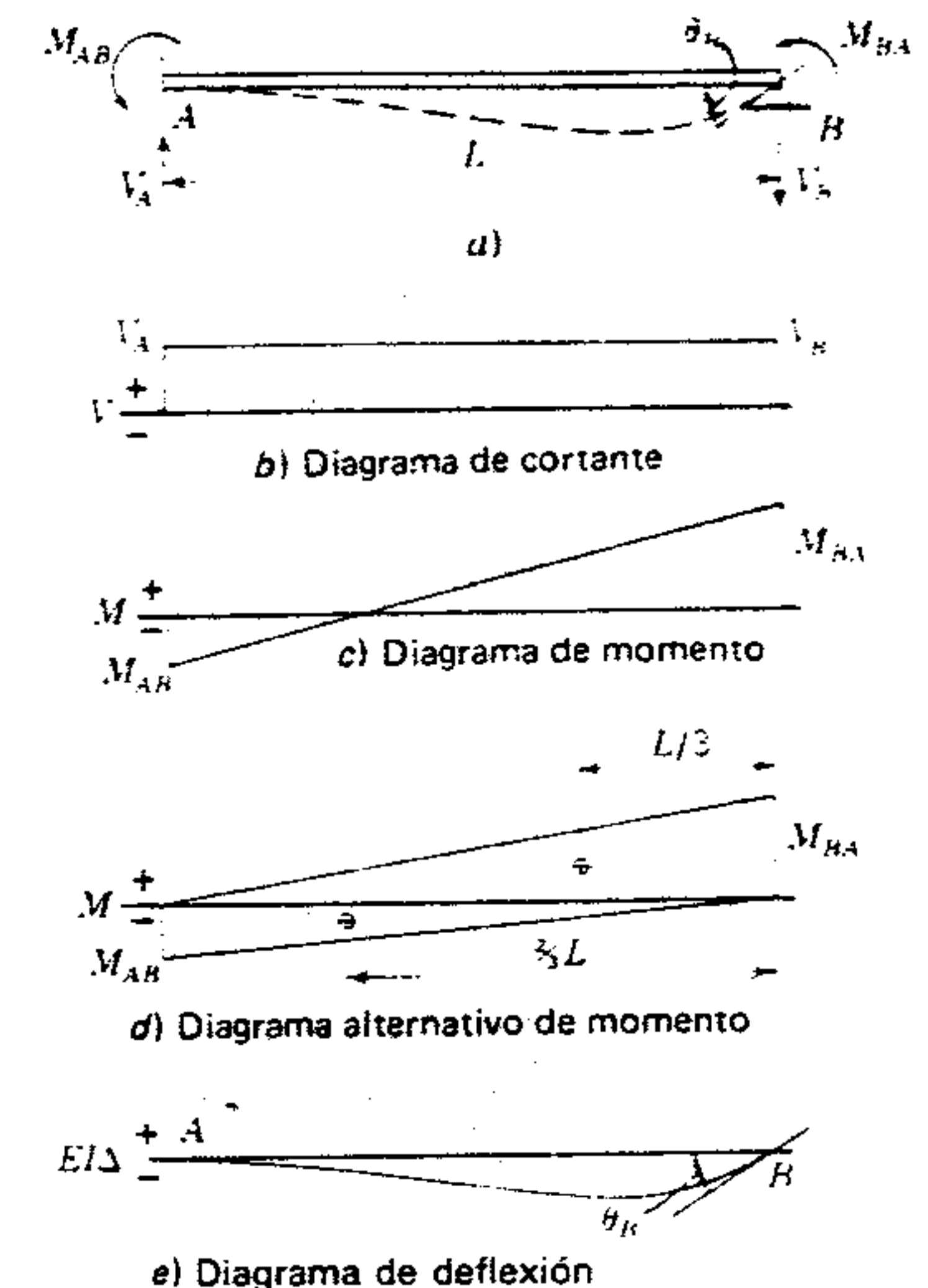


Figura 10.17 Rigidez y transporte.

$$\begin{aligned}EI\Delta &= \left[ +M_{B,A} \left( \frac{L}{2} \right) \right] \frac{L}{3} \\ &\quad + \left[ -M_{A,B} \left( \frac{L}{2} \right) \right] \left( \frac{2L}{3} \right) = 0 \\ \frac{M_{B,A} L^2}{6} - \frac{M_{A,B} L^2}{3} &= 0 \\ \frac{M_{A,B}}{M_{B,A}} &= \frac{1}{2} \quad \text{factor de transporte}\end{aligned}$$

La extensión de la tangente en  $A$  y la tangente a la curva elástica en  $B$ , forman el ángulo  $\theta_B$ . Aplicando la primera regla (sección 4.2), este ángulo es igual al área del diagrama del momento flexionante entre  $A$  y  $B$ , o sea

$$EI\theta_B = +M_{B,A} \left( \frac{L}{2} \right) - M_{A,B} \left( \frac{L}{2} \right)$$



Sin embargo, como  $M_{AB} = \frac{1}{2} M_{BA}$ ,

$$EI\theta_B = +M_{BA}\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{M_{BA}}{2}\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\theta_B = \frac{M_{BA}L}{4EI}$$

El factor de rigidez se definió como la relación entre el momento aplicado y el ángulo correspondiente, es decir,

$$\frac{M_{BA}}{\theta_B} = \frac{4EI}{L}$$

La expresión  $4EI/L$  se puede ver como el factor de rigidez absoluta. Para la mayoría de los problemas sólo se necesitan los factores de rigidez relativa, los cuales varían con la relación  $I/L$ , es decir,

$$K'_{abs} = \frac{4EI}{L}$$

$$K'_{rel} = \frac{I}{L}$$

## 10.7 DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS - TEORÍA

Una vez practicados y aprendidos los mecanismos de distribución de momentos, se pueden explicar

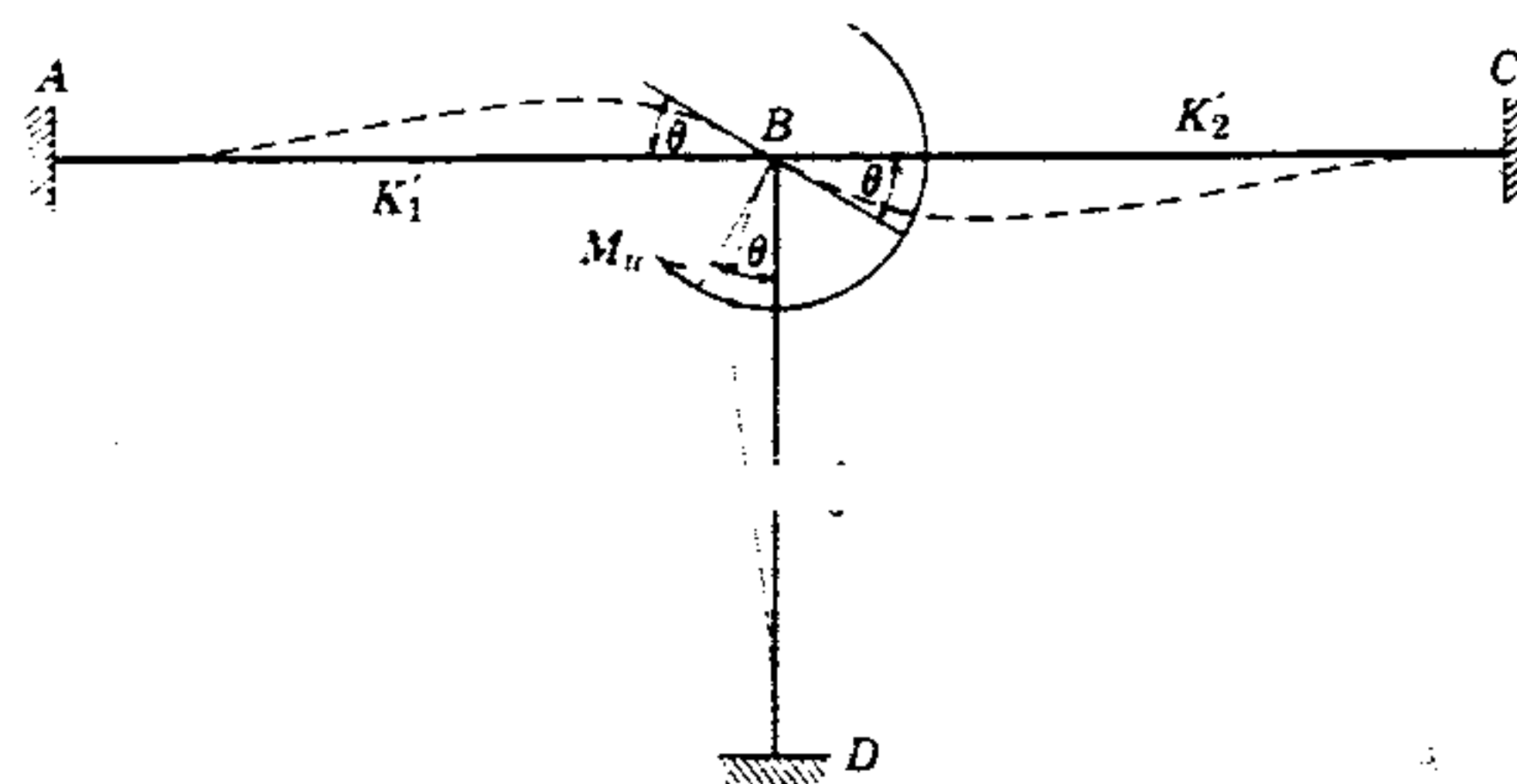


Figura 10.18 Teoría de la distribución de momentos.

fácilmente las bases teóricas para empotrar y liberar juntas.

En la figura 10.18 se ilustran tres miembros que se encuentran en un punto en común B, donde están rígidamente conectados entre sí. El extremo opuesto de cada miembro está totalmente restringido. Aplíquese un momento desbalanceado  $M_u$  a la junta B. Este momento tiende a distorsionar los miembros como lo indican las líneas punteadas. Para establecer equilibrio, cada miembro contribuye con su parte a resistir este momento desbalanceado. La junta B gira y, como todos los miembros que concurren a este punto son continuos, cada miembro girará el mismo ángulo. En la sección 10.6 se mostró que la relación entre el momento y el ángulo de rotación para esta condición<sup>3</sup> es

$$M = \frac{4EI}{L} \theta$$

Como  $4EI$  y  $\theta$  son los mismos para todos los miembros, la parte del momento desbalanceado que resiste cada miembro está en proporción con su relación  $I/L$ , y es de signo opuesto al momento desbalanceado. Como se dijo anteriormente, la relación

<sup>3</sup> "Esta condición" se refiere a un ángulo de rotación de un extremo de una viga, estando totalmente fijo el extremo lejano.

$I/L$  se denomina factor de rigidez y se designa por el símbolo  $K'$ .

Por lo tanto,

Momento inducido en BA

$$= -M_u \left( \frac{K'_1}{K'_1 + K'_2 + K'_3} \right)$$

Momento inducido en BC

$$= -M_u \left( \frac{K'_2}{K'_1 + K'_2 + K'_3} \right)$$

Momento inducido en BD

$$= -M_u \left( \frac{K'_3}{K'_1 + K'_2 + K'_3} \right)$$

Y la suma de momentos inducidos

$$= -M_u = -M_u \left( \frac{K'_1 + K'_2 + K'_3}{K'_1 + K'_2 + K'_3} \right)$$

Así se establece la condición de equilibrio  $\Sigma M = 0$ . El término  $K'/\Sigma K'$  se denomina factor de distribución. Obsérvese que la suma de los factores de distribución para todos los miembros continuos en una junta debe ser igual a uno.

Reconsidérese el mismo marco de la figura 10.19. Se elimina el momento desbalanceado y una carga se coloca sobre el miembro BC. Si se supone que la junta en B está fija antes de aplicar la carga, todas las juntas están fijas y cualesquier carga producirá momentos de extremo fijo. Este no es el momento final, debido a que la junta se fijó artificialmente. Se debe agregar una corrección a cada momento de extremo fijo, para eliminar la restricción artificial.

Supóngase que la carga y el claro del miembro BC son tales que producen momentos de extremo fijo de  $M_{BC}^F = +100$ , y  $M_{CB}^F = -100$ . Todos los otros momentos de extremo fijo son iguales a ce-

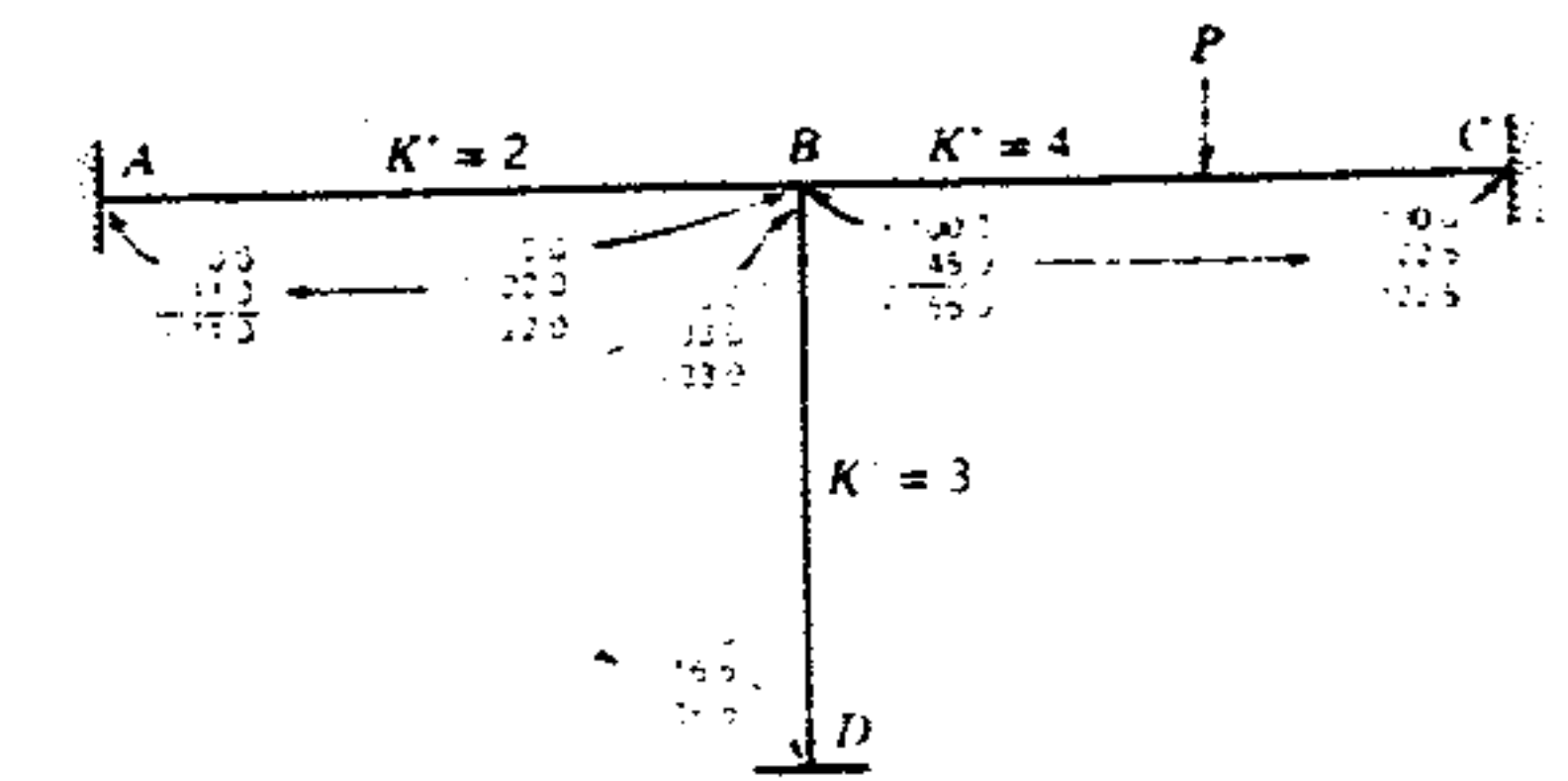


Figura 10.19 Distribución de momentos.

ro. Ahora la junta B está sometida a un momento desbalanceado de  $+100$  y, cuando se elimina la restricción artificial, rotará en el sentido de las manecillas del reloj. Esta rotación induce momentos balanceados en cada uno de los miembros, como sigue:

$$M_{BA} = -100 \left( \frac{K'_1}{\Sigma K'} \right)$$

$$= -100 \left( \frac{2}{2 + 4 + 3} \right) = -22$$

$$M_{BD} = -100 \left( \frac{3}{2 + 4 + 3} \right) = -33$$

$$M_{BC} = -100 \left( \frac{4}{2 + 4 + 3} \right)$$

$$= -44.4; \text{ usar } -45$$

Los momentos totales inducidos en B son  $-100$ .

Estos momentos inducidos son los valores de corrección que se van a agregar a los momentos de extremo fijo originales. Por lo tanto, los momentos finales en B son

$$M_{BC} = +100 - 45 = +55$$

$$M_{BA} = 0 - 22 = -22$$

$$M_{BD} = 0 - 33 = -33$$

La suma de todos los momentos en B es igual a cero, y la junta está balanceada.

En la sección 10.6 se mostró que si un momento es inducido en un extremo de una viga que está fija



por su otro extremo, la mitad del momento inducido (del mismo signo) se "transporta" al extremo fijo. Este es el caso de cada momento inducido en  $B$  resultante del balanceo de esa junta. Por lo tanto,

$$M_{AB} = \frac{1}{2}(-22) = -11.0$$

$$M_{DB} = \frac{1}{2}(-33) = -16.5$$

$$M_{CB} = -100 + \frac{1}{2}(-45) = -122.5$$

son los momentos finales de los extremos totalmente fijos (figura 10.19). Si los anteriores extremos de vigas no estuvieran totalmente fijos, sería necesario aplicar un paso más de balanceo.

Supóngase que la junta  $A$  no está fija, sino sujeta continuamente a otro miembro,  $AE$ , como se ilustra en la figura 10.20. Cuando se fija artificialmente, recibe un momento de  $-11$  del balanceo de la junta  $B$ . La junta  $A$  se debe liberar entonces y balancearla como sigue:

$$M_{AE} = +11\left(\frac{1}{1+2}\right) = +3.7$$

$$M_{AB} = -11 + 11\left(\frac{2}{1+2}\right) = -11 + 7.3 = -3.7$$

Asimismo, la mitad del momento inducido de  $+3.7$  en  $AE$  se debe transportar sobre el extremo fijo  $E$ , y la mitad del momento inducido de  $+7.3$  en  $AB$  se debe trasladar de vuelta a  $B$ . De nuevo, se ha

supuesto que la junta  $B$  está fija mientras se balancean los momentos en  $A$ . Aunque no se muestra, el ciclo se debe repetir de nuevo en  $B$ , con  $+3.7$  como el momento desbalanceado.

El siguiente es el método general para la distribución de momentos.

1. Suponer que todos los extremos están fijos y calcular los momentos de extremo fijo.
2. Seleccionar una junta, liberar la restricción y balancear todos los momentos.
3. Fijar temporalmente de nuevo esa junta.
4. Seleccionar otra junta y repetir el mismo procedimiento (esto se debe hacer en todas las juntas y se denomina un ciclo).
5. Transportar la mitad de los momentos inducidos al extremo opuesto de la viga y repetir el ciclo.

Cuando ya no hay más momentos de transporte, o su valor es insignificante, el proceso se ha completado y se han determinado todos los momentos finales.

El tratamiento de vigas con extremos inicialmente articulados o totalmente fijos es, a menudo, motivo de confusión. La siguiente explicación será útil en este aspecto.

Considérese la viga ilustrada en la figura 10.21a. La viga está simplemente apoyada (articulada) en  $A$  y está totalmente fija en  $B$ . Paso 1: se supone que ambos extremos están fijos y se calculan los momentos de extremo fijo (figura 10.21b). Paso 2: la junta  $A$  se libera y, como es articulada, no

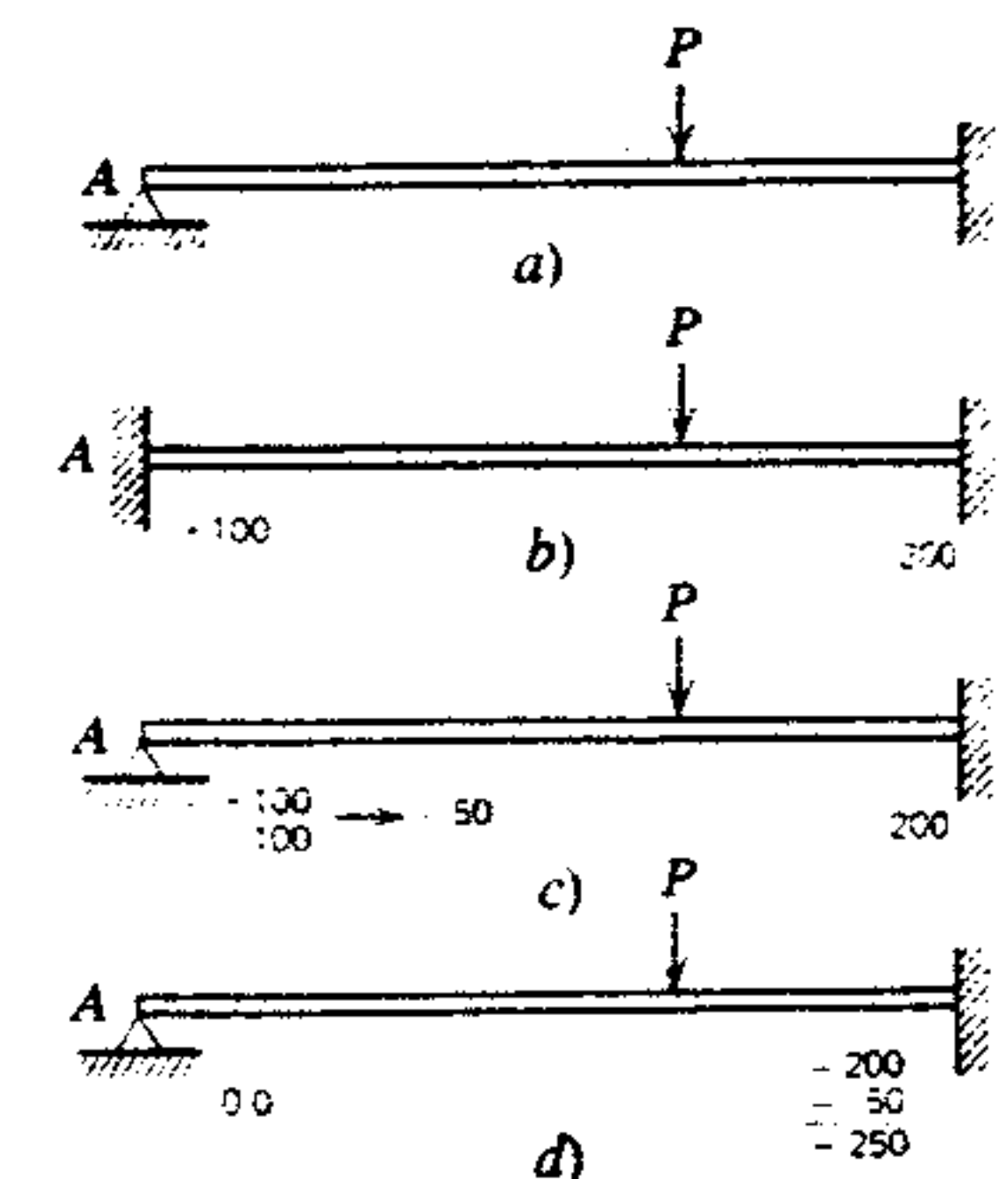


Figura 10.21 Distribución de momentos (extremos fijo y articulado).

puede resistir momentos. Por lo tanto, todo el momento desbalanceado de  $+100$  debe ser contrarrestado por un momento inducido de  $-100$ , de modo que el momento final en  $A$  será igual a cero (figura 10.21c). La mitad de este momento inducido se transporta a  $B$ . La junta  $B$  nunca se desbalancea porque estaba fija originalmente. Se hará el transporte de todos los momentos a ésta y nunca regresará ninguno (figura 10.21d).

## 10.8 TRATAMIENTO SIMPLIFICADO DEL EXTREMO ARTICULADO

El método de distribución de momentos se puede simplificar cuando uno o más de los extremos de una viga o marco continuo está articulado. Este tratamiento simplificado se aplica solamente a la parte de la estructura entre el extremo articulado y el primer apoyo interior. En la sección 10.6 el factor de rigidez se definió como la relación entre un momento aplicado en una junta y el ángulo de rotación correspondiente del miembro en esa junta. Se mostró además que esta relación era

$$\frac{M_{BA}}{\theta_B} = \frac{4EI}{L}$$

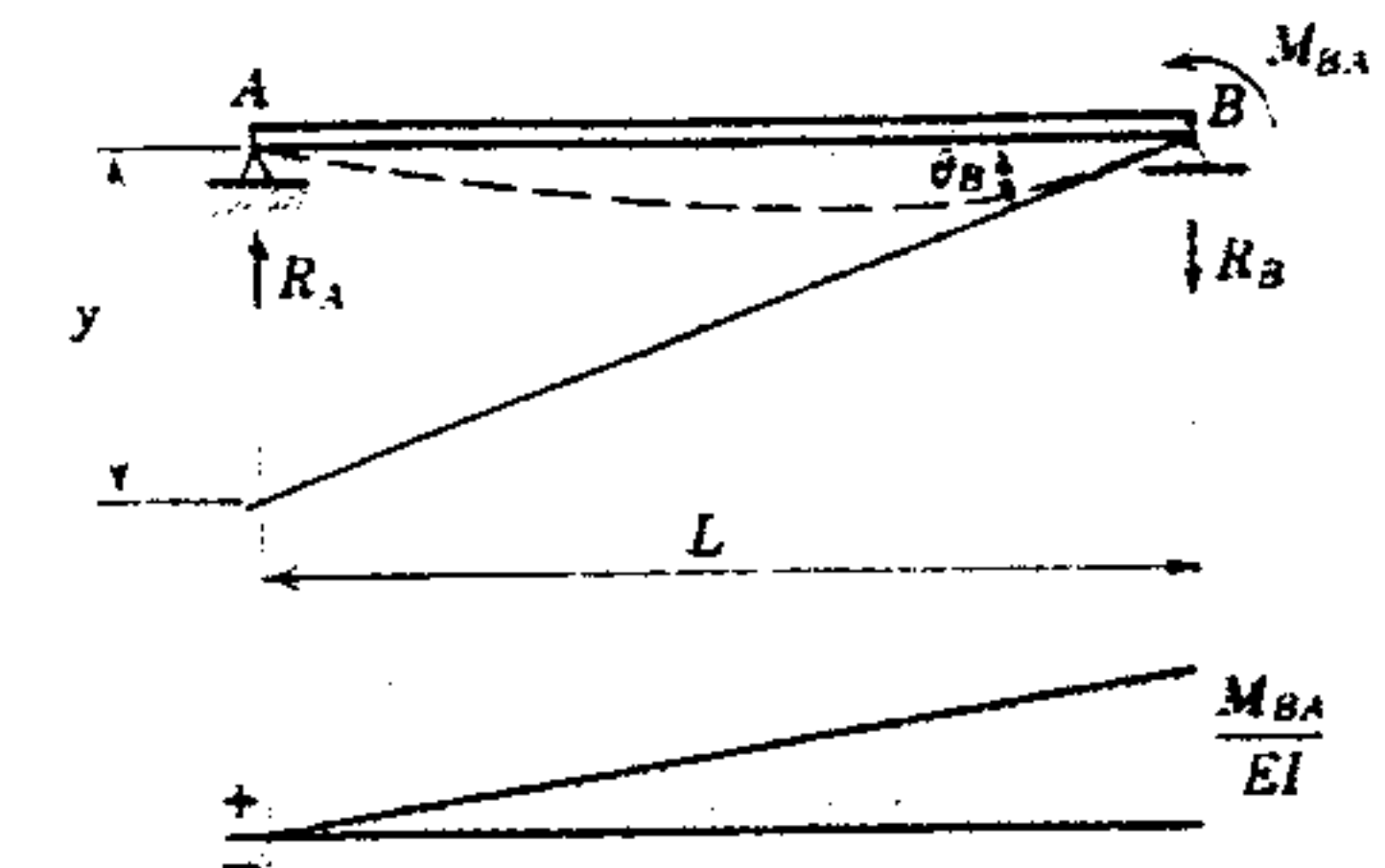


Figura 10.22 Factor de rigidez (extremos articulados).

cuando el extremo lejano del miembro en consideración estaba totalmente fijo.

Ahora, considérese la viga ilustrada en la figura 10.22. Se aplica un momento  $M_{BA}$  en un extremo, estando el extremo lejano articulado. La línea punteada representa la deflexión de la viga y el momento  $M_{BA}$  produce el ángulo  $\theta_B$ . Se traza en  $B$  una tangente a la curva elástica. Aplicando la segunda regla de área-momento, la longitud  $y$  es igual al primer momento del diagrama de  $M/EI$  respecto a  $A$ , o

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{M_{BA}}{EI} \right) L \left( \frac{2}{3} L \right) = \frac{M_{BA} L^2}{3EI}$$

La tangente de  $\theta_B = y/L$ , y para pequeños ángulos  $\theta_B$ , se puede considerar igual a  $y/L$ . Por lo tanto

$$\theta_B = \frac{y}{L} = \frac{M_{BA} L^2}{3EI L}$$

$$\frac{M_{BA}}{\theta_B} = \frac{3EI}{L}$$

Comparando los factores de rigidez de una viga con un extremo articulado y otro fijo, se ve que el primero es  $\frac{3}{4}$  del segundo, es decir,

$$\frac{3EI}{L} \div \frac{4EI}{L} = \frac{3}{4}$$

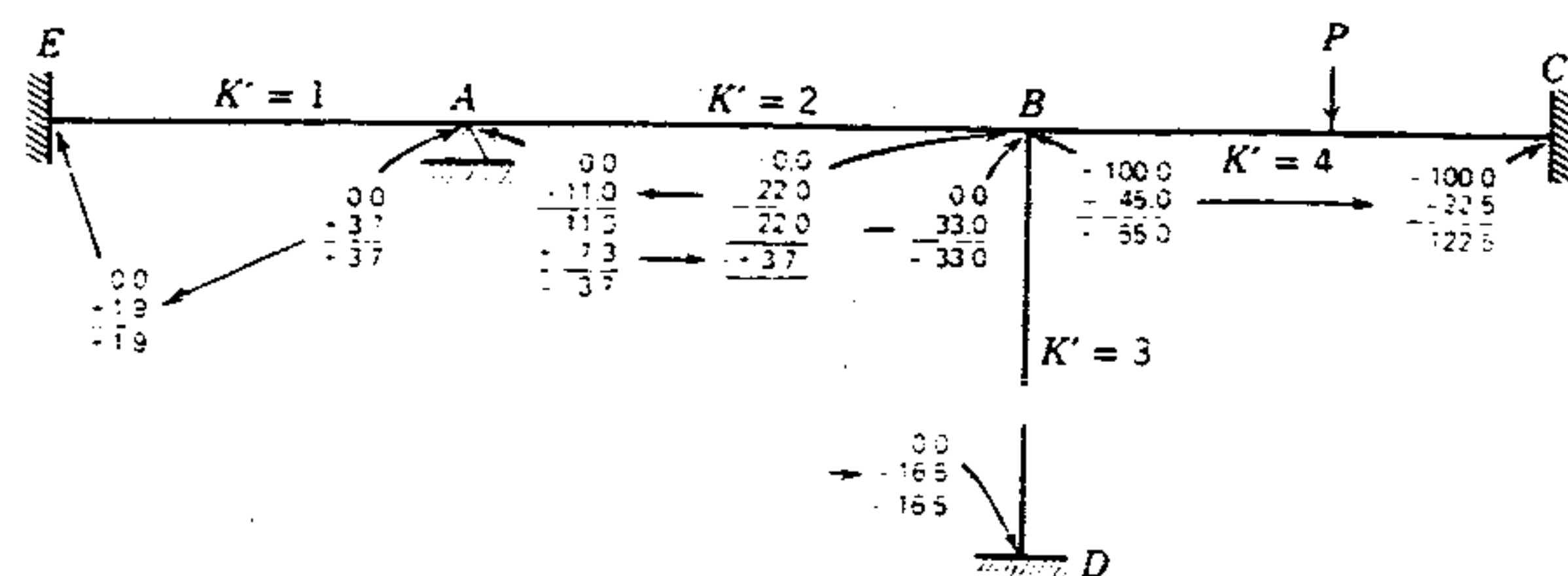


Figura 10.20 Distribución de momentos.



Para usar este factor de  $\frac{3}{4}$  apropiadamente en el procedimiento de distribución de momentos, la viga se debe considerar inicialmente articulada en un extremo y calcular sobre esa base el momento del extremo fijo en el lado opuesto. Este tipo de viga se denomina con frecuencia "voladizo apuntalado". En la figura 10.21 se ilustra este voladizo apuntalado y, de la distribución de momentos ilustrada, es evidente que el momento del extremo fijo real de 250 es igual al momento producido cuando ambos extremos están fijos más la mitad del momento de extremo fijo del extremo opuesto, es decir,

$$200 + \frac{100}{2} = 250$$

El procedimiento de distribución de momentos que incorpora el tratamiento simplificado de extremos articulados es el siguiente.

1. Calcular los factores de rigidez relativa, es decir,  $I/L$  para todos los miembros no articulados. Los miembros con un extremo articulado tienen un factor de rigidez relativa de  $\frac{3}{4}(I/L)$ .
2. Determinar el factor de distribución para cada junta, con base en los factores de rigidez relativa calculados en el paso 1).
3. Calcular todos los momentos de extremo fijo, incluyendo el ajuste necesario para aquellos miembros que actúan como voladizos apuntalados. Los momentos en los extremos articulados son iguales a cero.

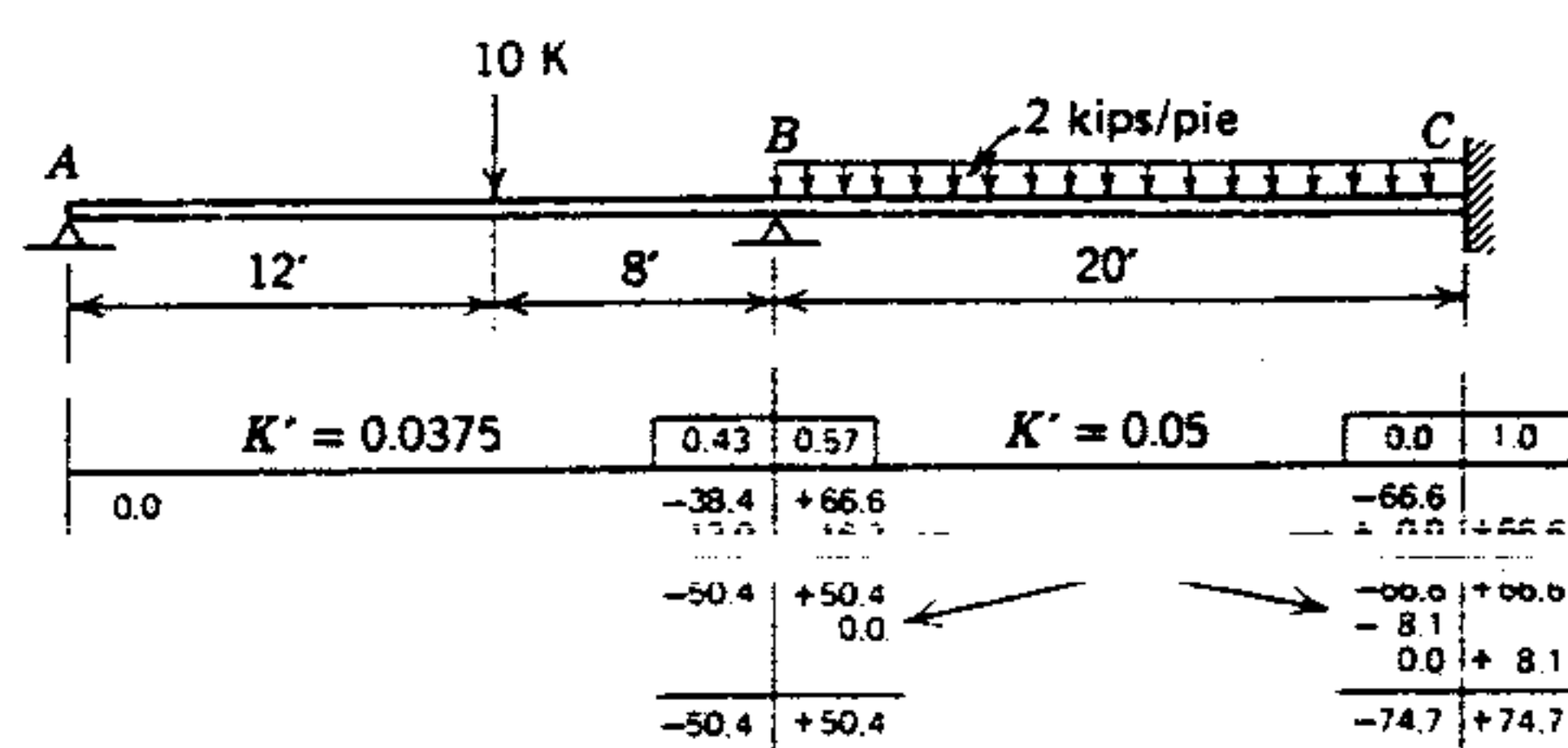


Figura 10.23 Tratamiento simplificado de extremos articulados.

4. Liberar cada junta donde sea aplicable y balancear los momentos.
5. Transportar  $\frac{1}{2}$  de los momentos inducidos para todas las vigas excepto las que tienen extremos articulados.
6. Repetir los pasos 4) y 5); usualmente son suficientes tres ciclos cuando se siguieron los pasos como se describió aquí.

### Ejemplo

Encontrar los momentos en A, B y C para la viga continua ilustrada en la figura 10.23. El momento de inercia permanece constante.

### Solución

1. Calcular los factores de rigidez relativa.

$$K'_{AB} = \frac{3}{4} \left( \frac{I}{20} \right) \approx 0.038I$$

$$K'_{BC} = \frac{I}{20} = 0.050I$$

2. Determinar los factores de distribución.

$$DF_{BA} = \frac{0.038I}{0.088I} \approx 0.43$$

$$DF_{BC} = \frac{0.050I}{0.088I} \approx 0.57$$

3. Calcular los momentos de extremo fijo.

$$M^F_{BC} = -M^F_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2(20)^2}{12} = 66.67 \text{ pie-kips}$$

$$M^F_{BA} = -\frac{Pab^2}{L^2} + \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{Pba^2}{L^2} \right) \right] = -\frac{10(8)12^2}{20^2} + \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{10(12)8^2}{20^2} \right) \right] = -28.8 - 9.6 = -38.4 \text{ pie-kips}$$

4. Registrar los valores encontrados en los pasos 1) a 3) en sus lugares apropiados en la tabulación de la figura 10.23. Liberar la restricción artificial en los apoyos y balancear los momentos.
5. Transladar los momentos inducidos. No hay traslado a A, porque A está articulada y no se ha aplicado restricción artificial.
6. La repetición del paso 4) completa el procedimiento de distribución de momentos porque no hay momentos inducidos resultantes que se deban "transportar".

Los momentos finales se indican en la figura.

## 10.9 MOVIMIENTO DE APOYOS

Las juntas o los apoyos se pueden mover las unas respecto a los otros. Esta translación se podría deber a una diversidad de condiciones, por ejemplo, asentamiento diferencial del terreno, cambios en las longitudes de los miembros, deflexiones de los marcos, etc. Esta translación no afecta los esfuerzos en vigas determinadas simplemente apoyadas. Sin embargo, los momentos flexionantes y los es-

fuerzos cortantes se producen cuando hay asentamiento en vigas continuas (figura 10.24).

Los extremos de la viga ilustrada en la figura 10.25a están totalmente fijos y no pueden girar. Sin embargo, considérese que el apoyo B se mueve a una distancia  $\Delta$  como lo indica la línea punteada. Por esta translación se inducirán momentos y reacciones en el extremo fijo, como se ve en la figura 10.25b. Es evidente que  $M^F_{AB} = M^F_{BA}$ ,  $R_L = R_R$ , y  $M^F_{AB} + M^F_{BA} = R_L(L) = R_R(L)$ .

En la figura 10.25c se ilustra el diagrama de momento flexionante. Aplicando la segunda regla de área-momento, se ve que la distancia  $\Delta$  es igual al primer momento del área del diagrama de  $M/EI$  respecto a B, o

$$EI\Delta = \frac{+M^F_{BA}}{2} \left( \frac{L}{2} \right) \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right) \right] - \frac{M^F_{AB}}{2} \left( \frac{L}{2} \right) \left[ \frac{L}{2} + \frac{2}{3} \left( \frac{L}{2} \right) \right] = \frac{1}{24} (M^F_{BA} L^2) - \frac{5}{24} (M^F_{AB} L^2) = -\frac{1}{6} (M^F_{AB} L^2)$$

$$M^F_{AB} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta$$

Ahora, considérese la viga en voladizo apuntalada de la figura 10.26a. El apoyo B está inicialmente articulado; por lo tanto, el momento en la viga en este punto siempre es igual a cero. El apoyo A está

4 Al dibujar este diagrama de momento flexionante se usó la primera convención de signos en este texto, es decir, la concavidad hacia abajo es negativa.

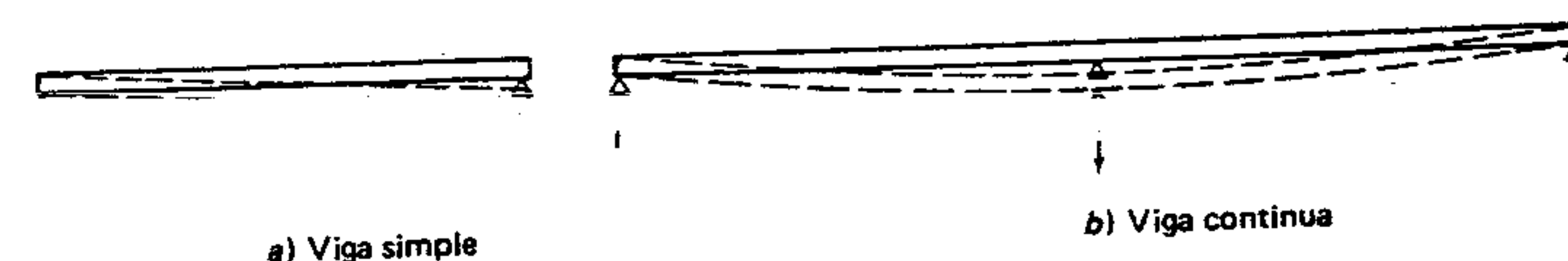


Figura 10.24 Movimiento de apoyos.



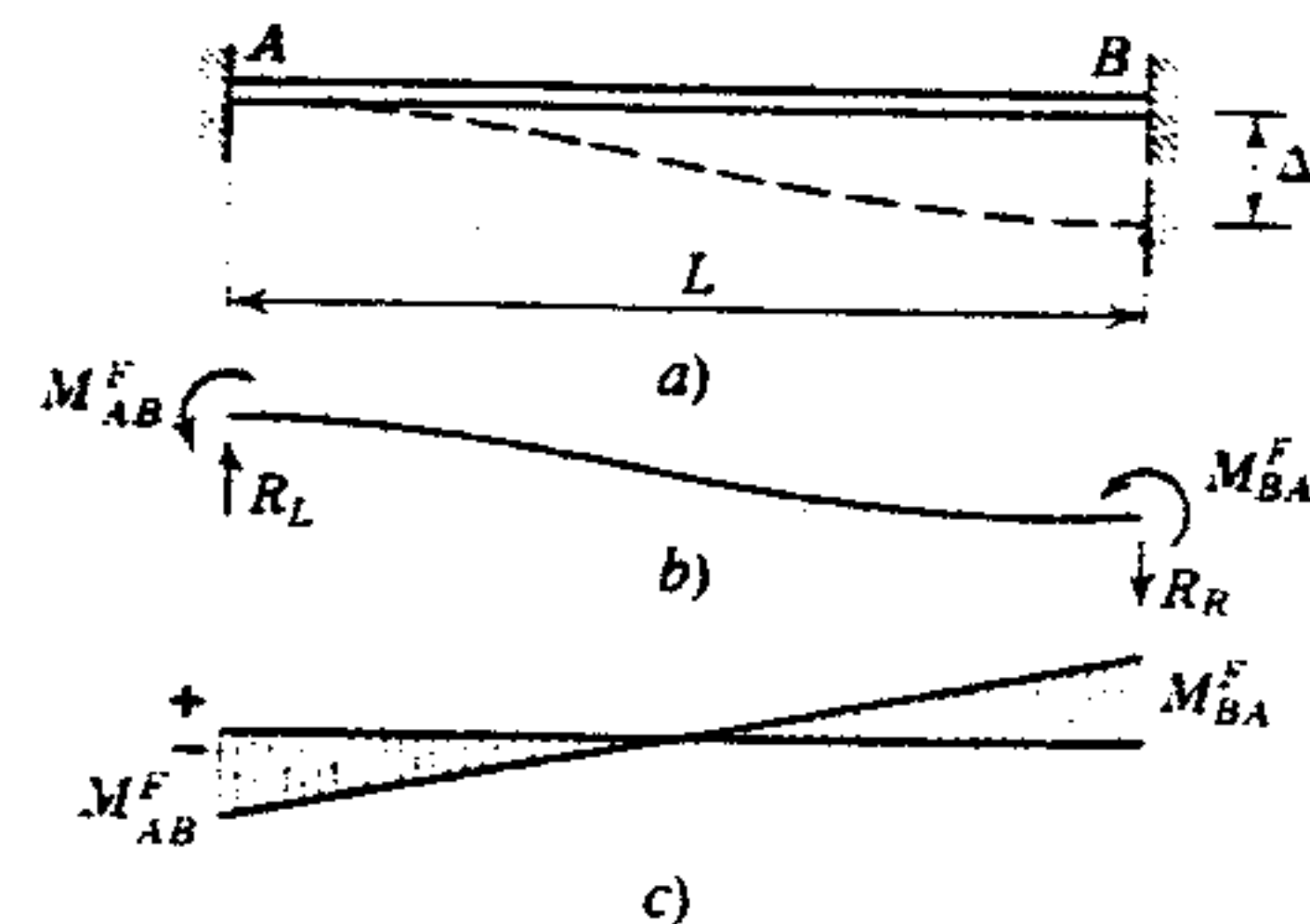


Figura 10.25 Movimiento con ambos extremos fijos.

totalmente fijo y no puede girar. El apoyo  $B$  se asienta una cantidad  $\Delta$ . Esta translación causará las reacciones y momentos que se muestran en la figura 10.26b. En la figura es evidente que  $R_L = R_R$ , y que  $M_{AB}^F = R_R(L)$ . El diagrama de momentos correspondiente se muestra en la figura 10.26c. Aplicando la segunda regla de área-momento se ve que la distancia  $\Delta$  es igual al primer momento del área del diagrama  $M/EI$  respecto a  $B$ , o

$$EI\Delta = -M_{AB}^F \left(\frac{L}{2}\right) \frac{3}{2}L = -\frac{M_{AB}^F L^2}{3}$$

y

$$M_{AB}^F = -\frac{3EI\Delta}{L^2}$$

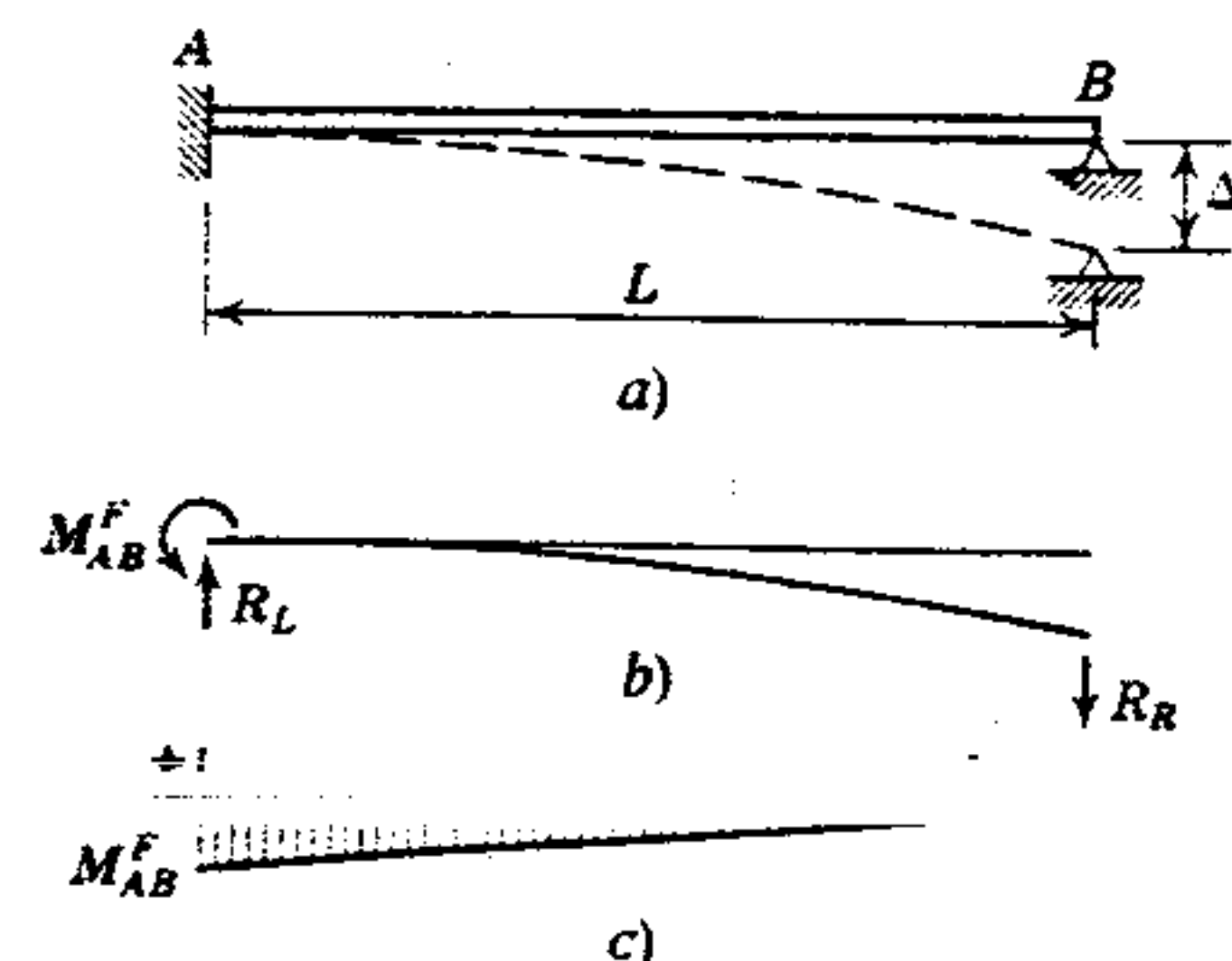
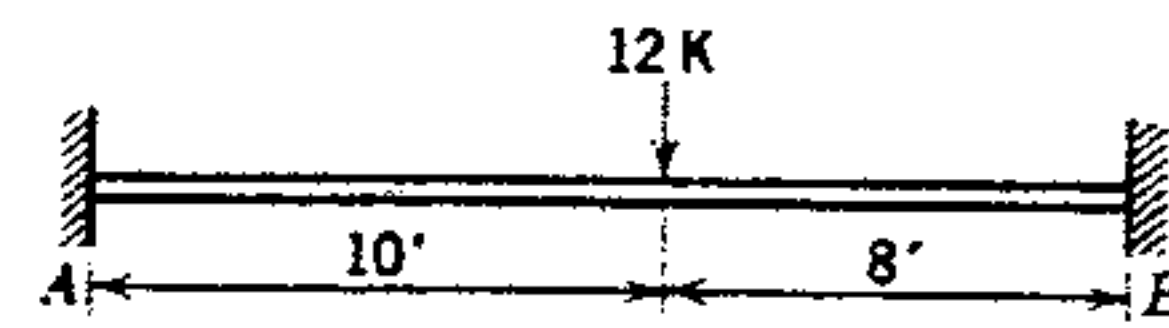


Figura 10.26 Movimiento de apoyos (un extremo articulado).

Figura 10.27



De las dos fórmulas que se acaban de derivar se puede determinar la magnitud de los momentos de extremo fijo para cualquier translación conocida de las juntas. Para determinar los momentos finales de extremo fijo, estos momentos de extremo fijo se pueden agregar algebraicamente a los causados por las cargas. Los miembros sin extremos fijos pero continuos con otros miembros, requieren un procedimiento adicional de distribución de momentos para producir los momentos finales de extremos.

## Ejemplo 1

Calcular los momentos de extremo fijo para la viga de la figura 10.27. El apoyo  $B$  se mueve verticalmente hacia abajo  $\frac{1}{2}$  pulgada. El momento de inercia de la viga es 400 pulg<sup>4</sup>. Despreciar la carga muerta de la viga.

## Solución

Elegir la fórmula apropiada de la figura 10.8 y de las derivadas en la sección 10.9, y encontrar los momentos de extremo fijo. (Se debe tener cuidado con las unidades y los signos, sección 10.4.)

$$\begin{aligned} M_{AB}^F &= +\frac{Pab^2}{L^2} + \frac{6EI\Delta}{L^2} \\ &= +\frac{12(10)8^2}{18^2} + \frac{6(29,000)400(0.5)}{18^2(12)^3} \\ &= +23.7 + 62.2 = 85.9 \text{ pie-kips} \\ M_{BA}^F &= -\frac{Pa^2b}{L^2} + \frac{6EI\Delta}{L^2} \\ &= -\frac{12(8)10^2}{18^2} + \frac{6(29,000)400(0.5)}{18^2(12)^3} \\ &= -29.6 + 62.2 = +32.6 \text{ pie-kips} \end{aligned}$$

## Ejemplo 2

La viga continua ilustrada en la figura 10.23 es una W 14 X 43. Encontrar los momentos finales en  $A$ ,  $B$  y  $C$ , si también se produce un asentamiento vertical de 1 pulgada en  $B$ .

(Se ilustrarán dos soluciones para este problema.)

## Solución a

1. Determinar momentos en  $A$ ,  $B$  y  $C$  debidos solamente a las cargas (no al asentamiento). Esto se hizo en el problema de ejemplo en la sección 10.8 y se ilustró en la figura 10.23.
2. Elegir las fórmulas adecuadas y calcular los momentos de extremo fijo causados por el asentamiento.

$$\begin{aligned} M_{AB}^F &= 0 \\ M_{BA}^F &= +\frac{3EI\Delta}{L^2} = \frac{3(29,000)428(1.0)}{20^2(12)^3} \\ &= +53.9 \approx +54 \text{ pie-kips} \\ M_{BC}^F &= M_{CB}^F = -\frac{6EI\Delta}{L^2} \\ &= -\frac{6(29,000)428(1.0)}{20^2(12)^3} \\ &= -107.7 \approx -108.0 \text{ pie-kips} \end{aligned}$$

3. Mediante el método de distribución de momentos, determinar los momentos en  $A$ ,  $B$  y

$C$  causados por el asentamiento solo. Este paso se ilustra en la figura 10.28.

4. Sumar (algebraicamente) los momentos resultantes de las cargas (paso 1), y los momentos resultantes del asentamiento (paso 3).

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 0 \\ M_{BA} &= -50.4 + 77.2 = +26.8 \text{ pie-kips} \\ M_{CB} &= -74.7 - 92.6 = -167.3 \text{ pie-kips} \end{aligned}$$

## Solución b

1. Elegir las fórmulas adecuadas y calcular los momentos de extremo fijo causados por las cargas y el asentamiento.

$$\begin{aligned} M_{AB}^F &= 0 \\ M_{BA}^F &= -\frac{P}{L^2} \left( a^2b + \frac{b^2a}{2} \right) + \frac{3EI\Delta}{L^2} \\ &= -38.4 + 54.0 = +15.6 \text{ pie-kips} \\ M_{BC}^F &= +\frac{wL^2}{12} - \frac{6EI\Delta}{L^2} \\ &= +66.6 - 108.0 = -41.4 \text{ pie-kips} \\ M_{CB}^F &= -\frac{wL^2}{12} - \frac{6EI\Delta}{L^2} \\ &= -66.6 - 108.0 = -174.6 \text{ pie-kips} \end{aligned}$$

2. Mediante el método de distribución de momentos, determinar los momentos finales re-

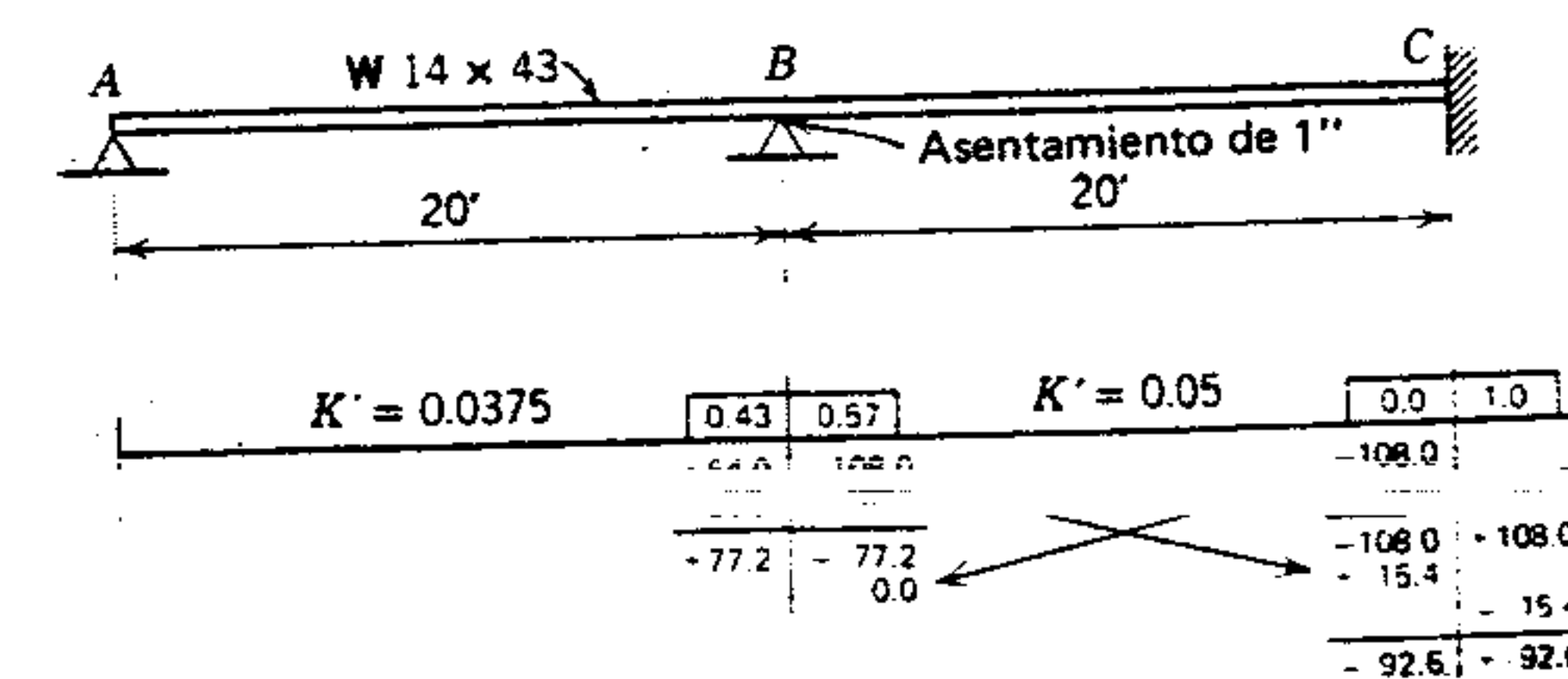


Figura 10.28



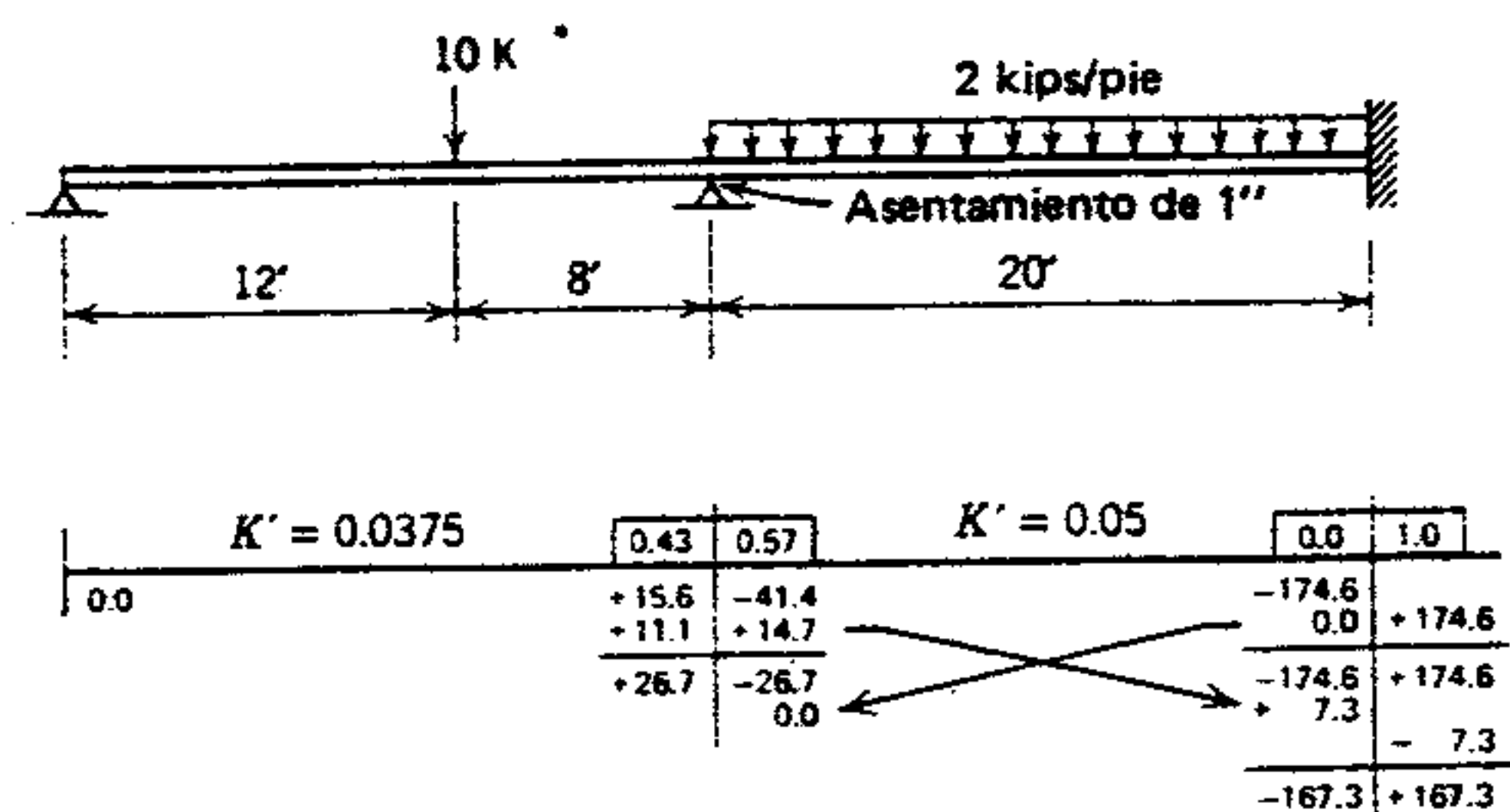


Figura 10.29

sultantes del efecto combinado de cargas y asentamiento. Este paso se ilustra en la figura 10.29.

### PROBLEMAS

1. Repetir el proceso de distribución de momentos para los problemas 2, 3 y 4 de la sección 10.5, usando el tratamiento simplificado de extremos articulados. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)
2. La viga continua ilustrada en la figura 10.30 es una W 12 X 45, con las cargas que se indican. Calcular los momentos finales en A, B y C, si el apoyo en A se asienta 1 pulgada verticalmente.

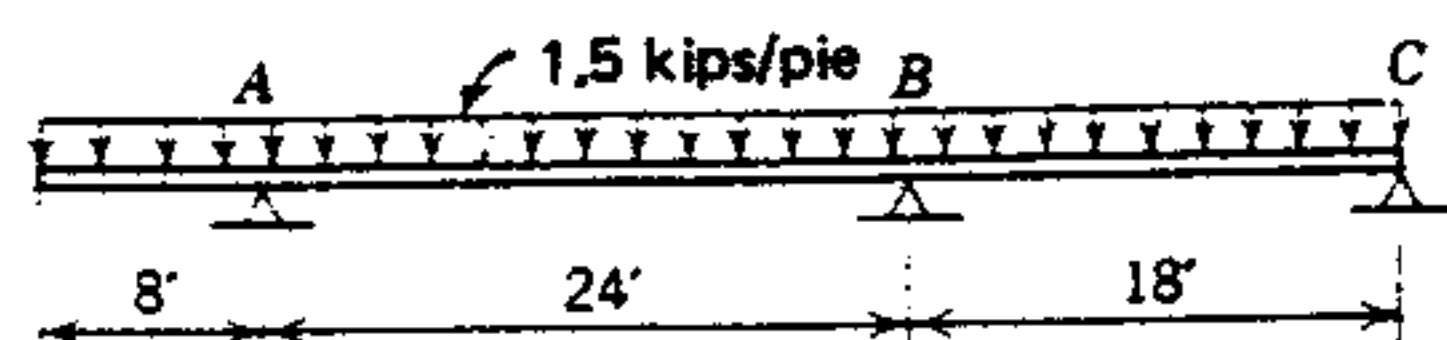


Figura 10.30

3. La viga continua ilustrada en la figura 10.31 es una W 16 X 36, con las cargas que se indican. Calcular los momentos finales en los apoyos si ambos exteriores se asientan  $\frac{1}{2}$  pulgada y ambos apoyos interiores se asientan  $1\frac{1}{2}$  pulgada. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)

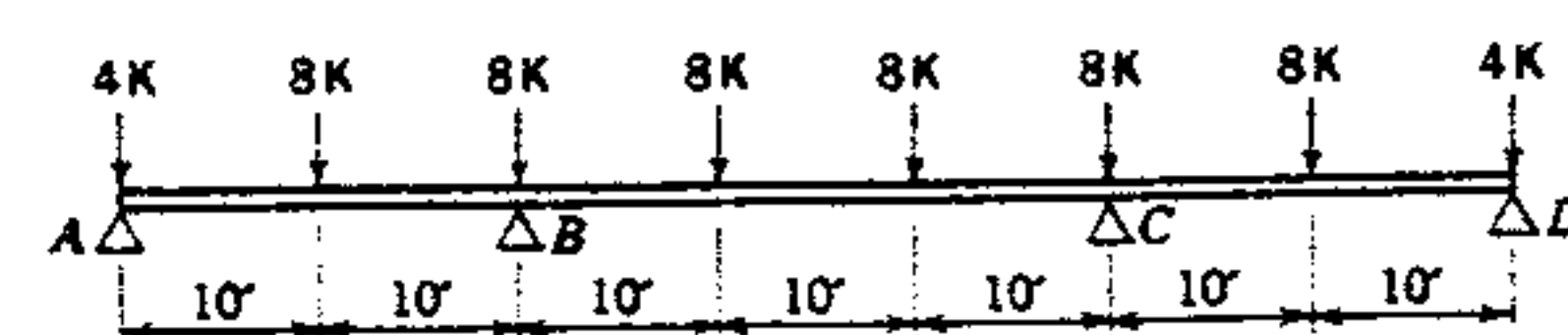


Figura 10.31

4. La viga apuntalada en voladizo ilustrada en la figura 10.32 es una W 12 X 35, con las cargas que se indican. El apoyo en B se mueve verticalmente hacia arriba  $\frac{3}{4}$  pulgada. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

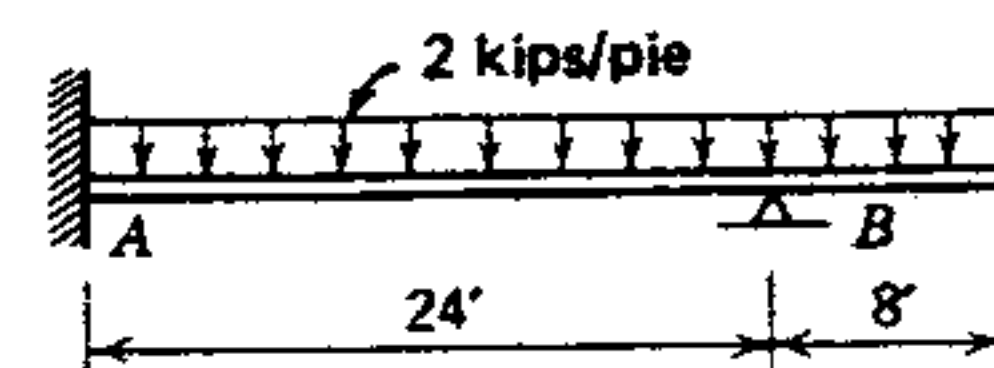


Figura 10.32

### 10.10 MARCOS DE EDIFICIOS

funciones de los marcos. También se explicó la forma en que actúan estructuralmente y cómo se logra la estabilidad para evitar el colapso. Con frecuencia, los marcos son sólo ensambles de miembros horizontales y verticales; los verticales actuando principalmente como columnas y los horizontales como vigas o trabes. Sin embargo, estos miembros

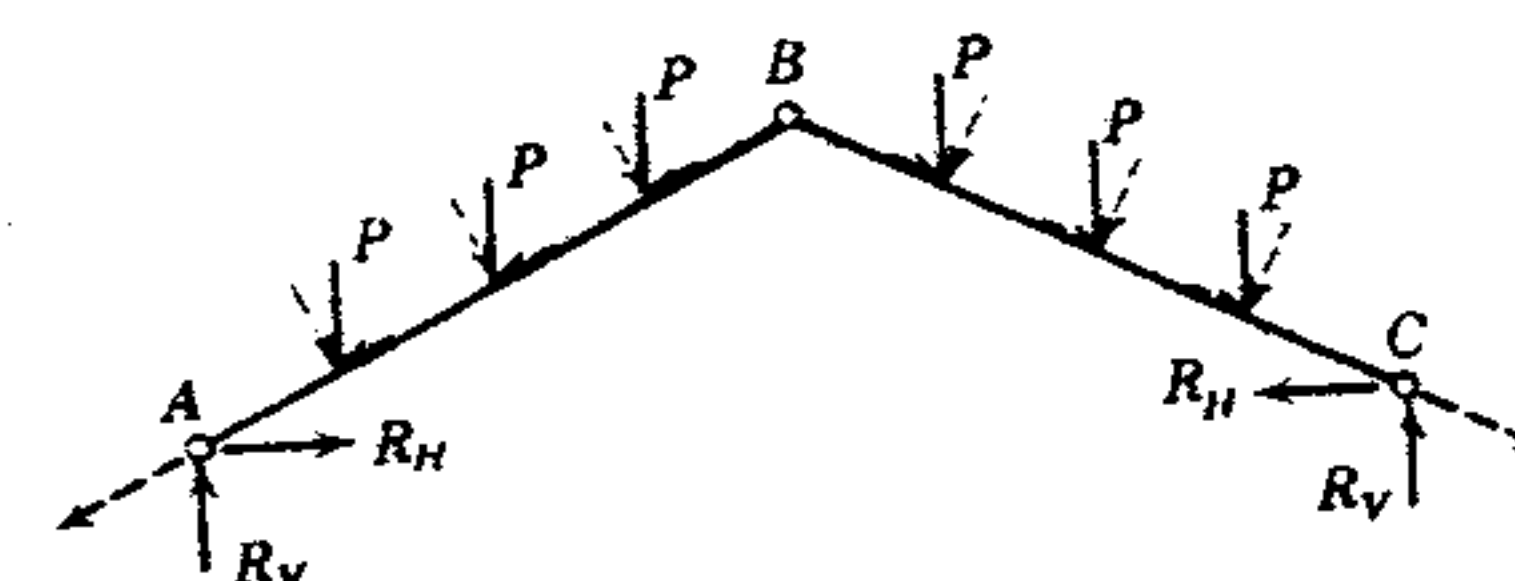


Figura 10.33 Coceo.

no siempre necesitan ser verticales u horizontales.

Por ejemplo, con frecuencia los techos de los edificios son inclinados, así como los miembros soportantes del marco del edificio. Se debe prestar especial atención al coceo (empuje lateral) cuando en la estructura se tienen miembros inclinados. La existencia de coceo es clara en la figura 10.33.<sup>5</sup> Los miembros inclinados AB y BC son partes de un marco. Las conexiones de extremos son de tipo flexible; por lo tanto, los extremos aparecen articulados. Las fuerzas verticales P se mantienen en equilibrio por las reacciones verticales R\_V. Sin embargo, los puntos A y C tienden a moverse hacia afuera, debido a las componentes acumulativas tangenciales de las cargas P. Este empuje lo resisten las reacciones horizontales R\_H, en A y C. Es imperativo que las juntas en A y C puedan desarrollar la resistencia necesaria para tomar este empuje lateral, si no, el marco se tiene que modificar o fijar algunas juntas contra la rotación relativa.

Las formas y proporciones de los marcos son casi ilimitadas. Sin embargo, si los marcos se van a usar para crear un espacio y una envolvente, se debe tener presente su forma última durante las primeras etapas de planeación arquitectónica. En las figuras 10.34 y 10.35 se ilustran varias formas básicas. Los marcos de un solo piso, que obtienen



Figura 10.34 Marcos de un solo piso.

<sup>5</sup> Para simplificar las figuras, los miembros de todos los marcos se ilustran con una sola línea gruesa, en vez de la doble línea más real que se usó para las vigas.

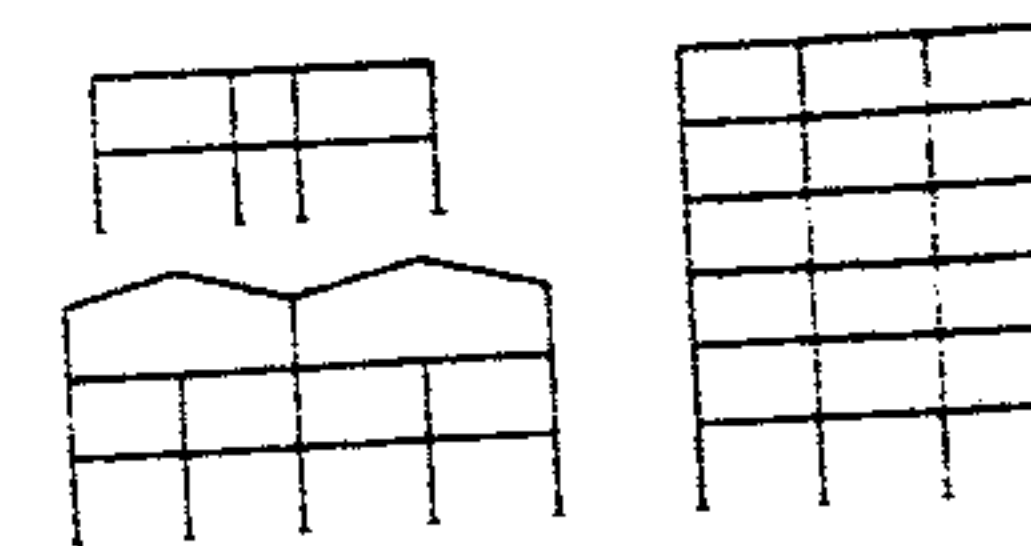


Figura 10.35 Marcos de muchos pisos.

su estabilidad por una o más conexiones rígidas, usualmente se analizan por uno de los denominados procedimientos matemáticos exactos que se plantearán en este capítulo. Los marcos de muchos pisos, o marcos de edificios de "gran altura", que logran su estabilidad total o parcialmente mediante conexiones rígidas, usualmente se analizan primero mediante procedimientos matemáticos aproximados (sección 9.43) y luego (siguiendo un diseño preliminar) mediante un análisis más detallado por computadora.

El espaciamiento de marcos, denominado a veces "espaciamiento de vanos", depende de un gran número de factores, como son el tamaño del edificio, ocupación, construcción de piso, muro y techo, etc. Cuando no hay un factor particularmente importante que determine el espaciamiento de marcos, se dan las siguientes sugerencias basadas en el mayor potencial de economía de material. En términos generales, entre mayor sea el claro, mayor será el espaciamiento.

Espaciamiento de marcos	Claros de marcos
16 pies	de 30 a 40 pies
18 pies	de 40 a 60 pies
20 pies	de 60 a 100 pies
de $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{6}$ del claro	Más de 100 pies

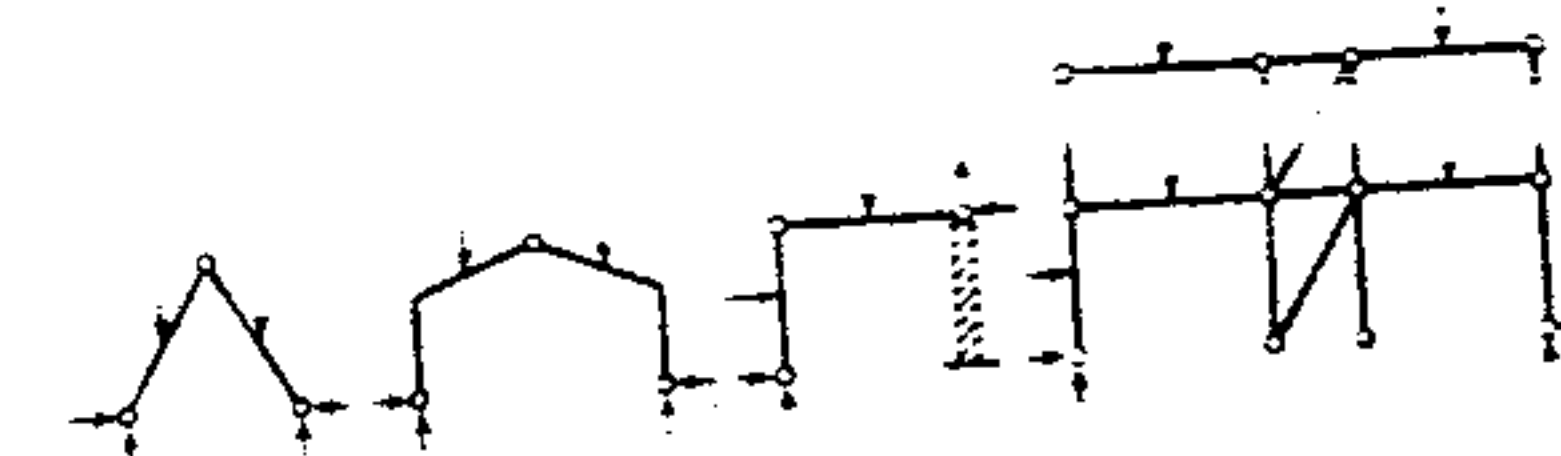


Figura 10.36 Marcos estáticamente determinados.



Generalmente los marcos de edificios se pueden clasificar como marcos de tres articulaciones o como marcos rígidos. En la figura 10.36 se ilustran diversas formas de arcos de tres articulaciones; éstos son estáticamente determinados. Es decir, las reacciones se pueden calcular mediante ecuaciones basadas en las leyes de la estática. La presencia de una articulación "extra" (aparte de las de los apoyos) proporciona la condición-ecuación adicional necesaria para la solución por estática solamente. Al final de esta sección se presentan dos ejemplos para ilustrar el análisis de este tipo de marco.

Los marcos rígidos son indeterminados, y el resto de este capítulo se dedicará a su análisis. El grado de indeterminación externa se establece por el número de componentes de reacción que exceden a las necesarias para lograr estabilidad. En la figura 10.37 se ilustran seis variaciones del marco rígido, todas indeterminadas. En las figuras 10.37a) y b) se podría eliminar una componente horizontal de las reacciones y la estructura permanecería estable; por tanto, ambos marcos son indeterminados en primer grado. Los marcos de las figuras 10.37c) y f) tienen tres componentes de reacción redundantes. El marco de la figura 10.37e es indeterminado en quinto grado, y el ilustrado en d) es indeterminado en primer grado.

El diseño de marcos de edificios requiere seguir tres pasos distintos, siendo el primero determinar reacciones. En el caso del arco de tres articulacio-

nes esto se hace fácilmente, como se ilustrará en los dos ejemplos siguientes. No obstante, si el marco es indeterminado, la determinación de las reacciones es considerablemente más compleja; esto se tratará en las demás secciones de este capítulo.

El segundo paso consiste en calcular las fuerzas cortantes y momentos flexionantes máximos. La mejor manera de lograrlo es mediante el trazo de los diagramas de cortante y momento flexionante. En los diagramas, la posición de los valores máximos será evidente, y el trabajo se puede verificar y comprobar fácilmente. En este segundo paso se incluye la determinación del valor de la carga (axial) directa que cada miembro debe resistir. Este valor es igual a las componentes de reacción o a la diferencia entre cortantes entre miembros.

El tercer paso consiste en el diseño o proporcionamiento de un miembro para que tenga el tamaño y la forma suficientes que le permitan resistir con seguridad los esfuerzos debidos al cortante, el momento flexionante y la carga directa. Luego se diseñan y detallan las conexiones de extremos de acuerdo con los supuestos usados en el análisis.

### Ejemplo 1

Determinar el valor máximo de cortante, momento flexionante y carga axial en los dos miembros que forman el marco de la figura 10.38a.

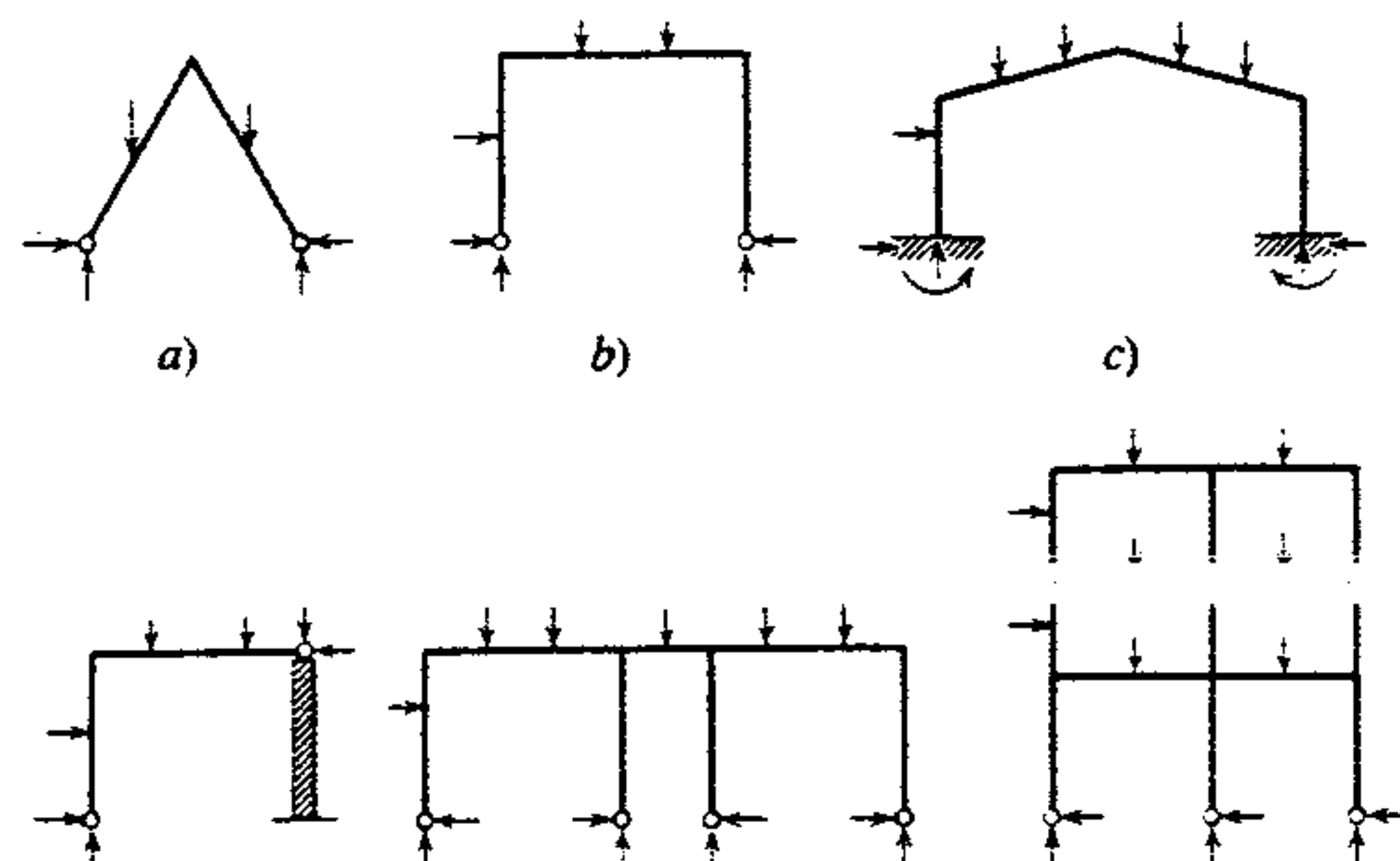


Figura 10.37 Marcos estáticamente indeterminados.

### Solución

Por observación, este marco es un arco de tres articulaciones y, por lo tanto, es estáticamente determinado.

1. Determinar las reacciones. Éstas se pueden calcular tomando momentos respecto a A, B o C de una parte o de todo el marco. En A, B y C los momentos son cero porque los extremos están articulados.

$$\Sigma M_B = 0 \quad (\text{sólo BA})$$

$$H_A(14) - 4(12) = 0$$

$$H_A = 3.4 \text{ kips}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad (\text{sólo BC})$$

$$1.8(32)16 - V_C(32) = 0$$

$$V_C = 28.8 \text{ kips}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad (\text{marco entero})$$

$$12(10) + 6(14) + 1.8(32)16 - 28.8(32) - H_C(14) = 0$$

$$H_C = 14.6 \text{ kips}$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad (\text{marco entero})$$

$$-1.8(32)16 - 12(4) + 3.4(14) + V_A(32) = 0$$

$$V_A = 28.8 \text{ kips}$$

$$\text{Comprobación: } \Sigma V = 0; \quad 1.8(32) = 28.8 + 28.8$$

$$\Sigma H = 0; \quad 12 + 6 = 3.4 + 14.6$$

2. Trazar el diagrama de fuerza cortante. Este se ilustra en la figura 10.38b. Es necesario adoptar un sistema de referencia para las partes superiores e inferiores de los miembros que sean consistentes con los signos convencionales previamente adoptados para la fuerza cortante y el momento flexionante. Para hacerlo, se sugiere identificar la parte interior con la parte inferior de una viga. Esta

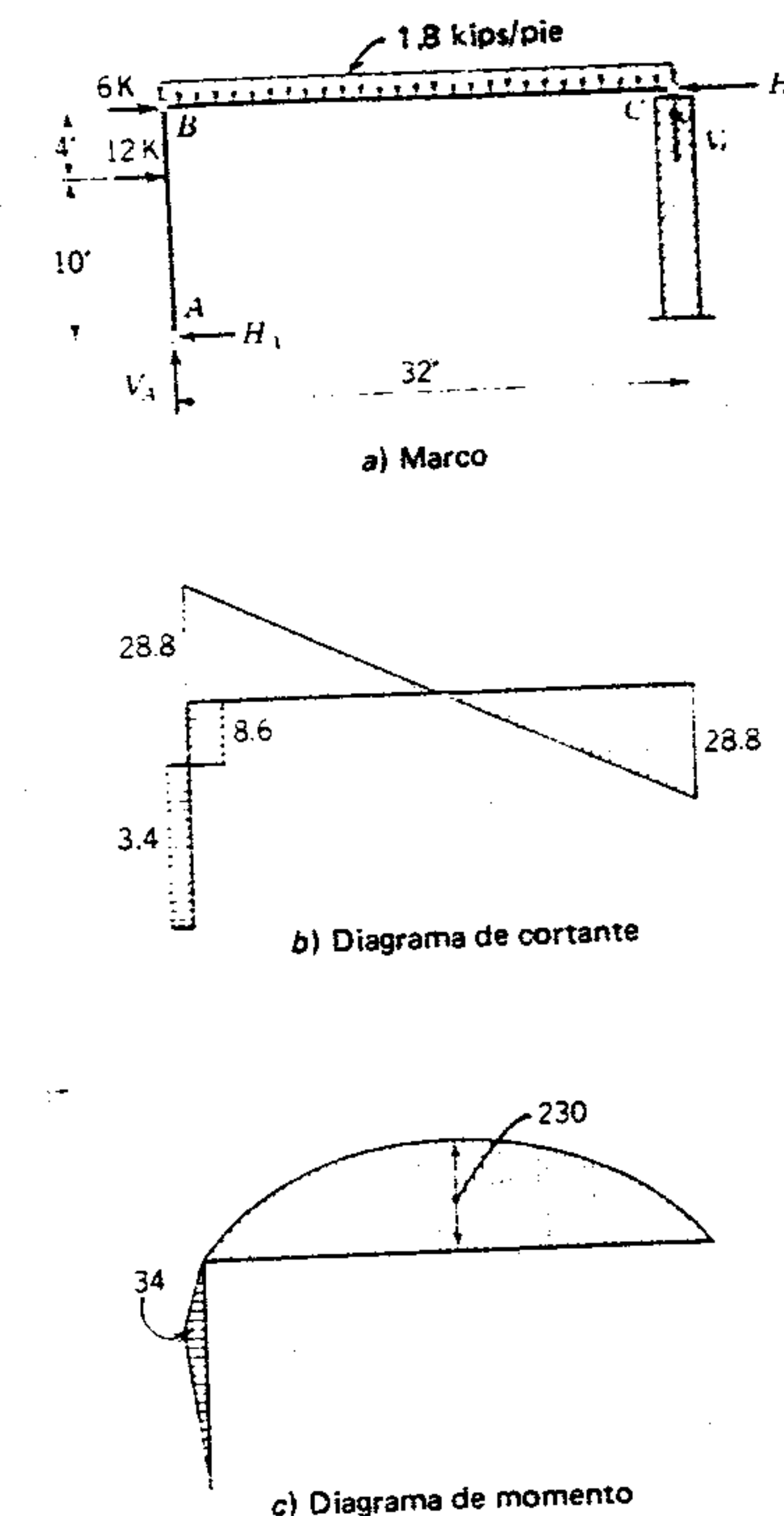


Figura 10.38 Marco de tres articulaciones.

convención se usa para diagramas tanto de cortante como de momento flexionante.

3. Trazar los diagramas de momento flexionante y calcular los valores máximos (figura 10.38c).

En resumen: El miembro AB se debe diseñar tanto para un momento flexionante de 34 pie/kips y una carga directa de 28.8 kips. El miembro BC tiene un momento flexionante máximo de 230 pie/kips, una carga axial máxima de 14.6 kips y un cortante máximo de 28.8 kips.



## Ejemplo 2

Determinar el valor máximo de la fuerza cortante, momento flexionante y carga axial en los dos miembros que forman el marco ilustrado en la figura 10.39a. La carga uniforme es de 1.5 kips por pie de proyección horizontal. Esto es consistente con la práctica usual en cuanto a cargas de techo. Debe observarse que ésta es lo mismo que una carga vertical de 0.93 kips por pie actuando a lo largo de 30.6 pies del miembro, es decir,  $0.93(30.6) = 1.5(19)$ .

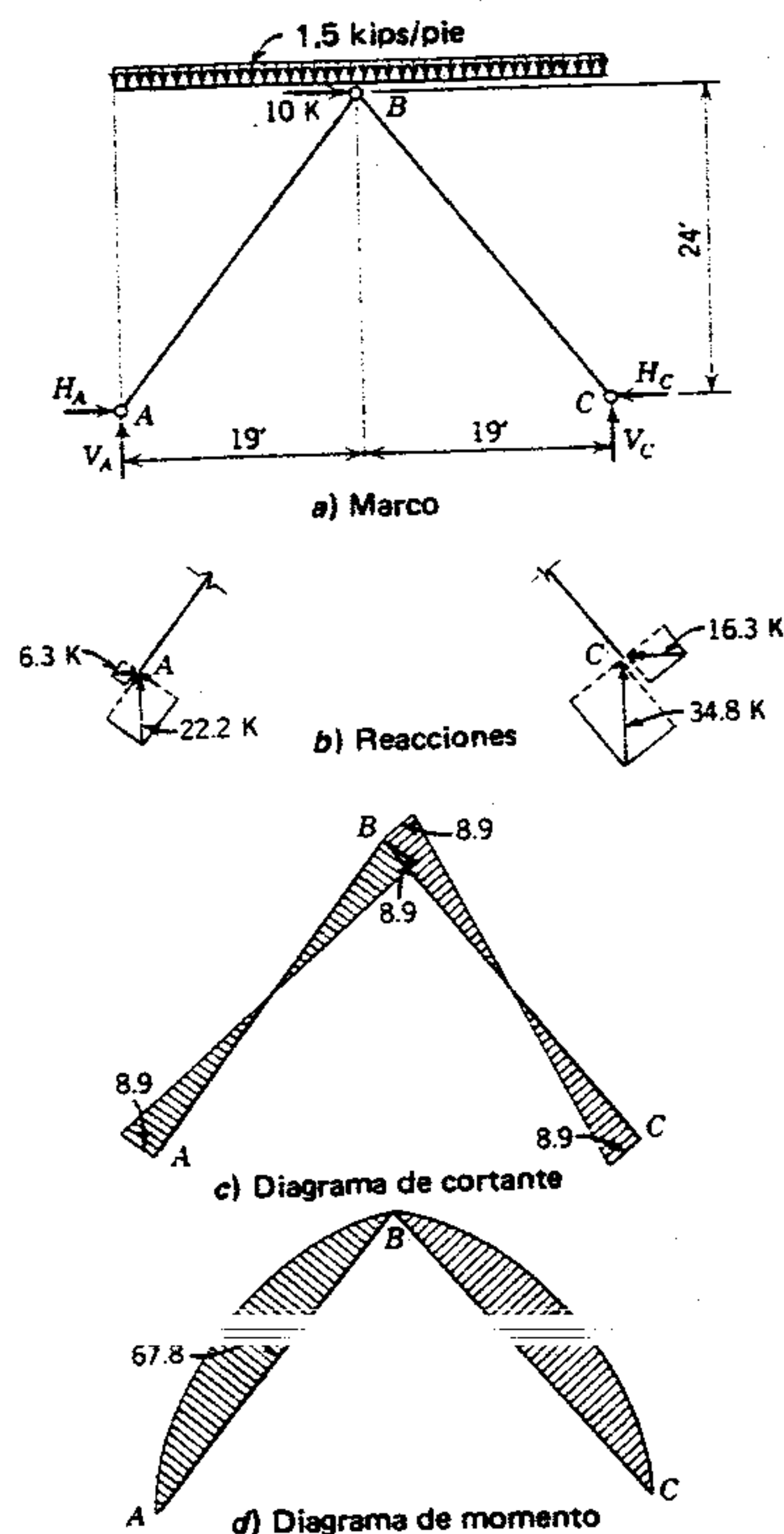


Figura 10.39 Marco de tres articulaciones.

## Solución

## 1. Determinar las reacciones

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 \quad (\text{marco entero}) \\ 1.5(38)(19) + 10(24) - V_C(38) &= 0 \\ V_C &= 34.8 \text{ kips} \\ \Sigma M_C &= 0 \quad (\text{marco entero}) \\ -1.5(38)(19) + 10(24) + V_A(38) &= 0 \\ V_A &= 22.2 \text{ kips} \\ \Sigma M_B &= 0 \quad (\text{sólo BA}) \\ -1.5(19)\frac{19}{2} + 22.2(19) - H_A(24) &= 0 \\ H_A &= 6.3 \text{ kips} \\ \Sigma M_B &= 0 \quad (\text{sólo BC}) \\ 1.5(19)\frac{19}{2} - 34.8(19) + H_C(24) &= 0 \\ H_C &= 16.3 \text{ kips}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Comprobación: } \Sigma H &= 0; \quad 10 = 16.3 - 6.3 \\ \Sigma V &= 0; \quad 1.5(38) = 34.8 + 22.2\end{aligned}$$

2. Resolver las componentes de reacción en componentes normal y paralela a los miembros. Esto se hace por triángulos semejantes y se ilustra en la figura 10.39b. Los cálculos son los siguientes.

Apoyo en A

Paralela a AB;

$$\frac{24}{30.6}(22.2) + \frac{19}{30.6}(6.3) = 21.3 \text{ kips}$$

Normal a AB;

$$\frac{19}{30.6}(22.2) - \frac{24}{30.6}(6.3) \approx 8.9 \text{ kips.}$$

Apoyo en C:

Paralela a CB;

$$\frac{24}{30.6}(34.8) + \frac{19}{30.6}(16.3) = 37.4 \text{ kips.}$$

Normal a CB;

$$\frac{19}{30.6}(34.8) - \frac{24}{30.6}(16.3) \approx 8.9 \text{ kips.}$$

3. Trazar el diagrama de fuerza cortante (figura 10.39c).
4. Trazar el diagrama de momento flexionante (figura 10.39d).

En resumen:

Miembro AB; fuerza cortante = 8.9 kips, momento flexionante = 67.8 pie/kips, carga axial = 21.3 kips.

Miembro BC; fuerza cortante = 8.9 kips, momento flexionante = 67.8 pie/kips, carga axial = 37.4 kips.

Debe observarse que la carga horizontal de 10 kips en B no causa flexión en los miembros: sólo tiende a poner a AB en tensión y a BC a compresión. Asimismo, el momento flexionante máximo en cada miembro se puede calcular sobre la base de la carga proyectada horizontal. Sabiendo que el momento máximo se producirá en el centro de AB,

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{1.5(19)^2}{8} = 67.7 \text{ pie-kips}$$

## PROBLEMAS

1. Determinar las reacciones, trazar los diagramas de cortante y momento flexionante y calcular los valores máximos de cortante y momento para el marco ilustrado en la figura 10.40. Establecer valores de diseño de cortante, momento flexionante y carga axial para los miembros AB y BC. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)
2. Determinar los valores de diseño de cortante, momento flexionante y carga axial para el marco ilustrado en la figura 10.41. El apoyo en A es articulado. El apoyo en D es articulado y con rodillos; por lo tanto, la reacción tiene solamente una componente vertical.

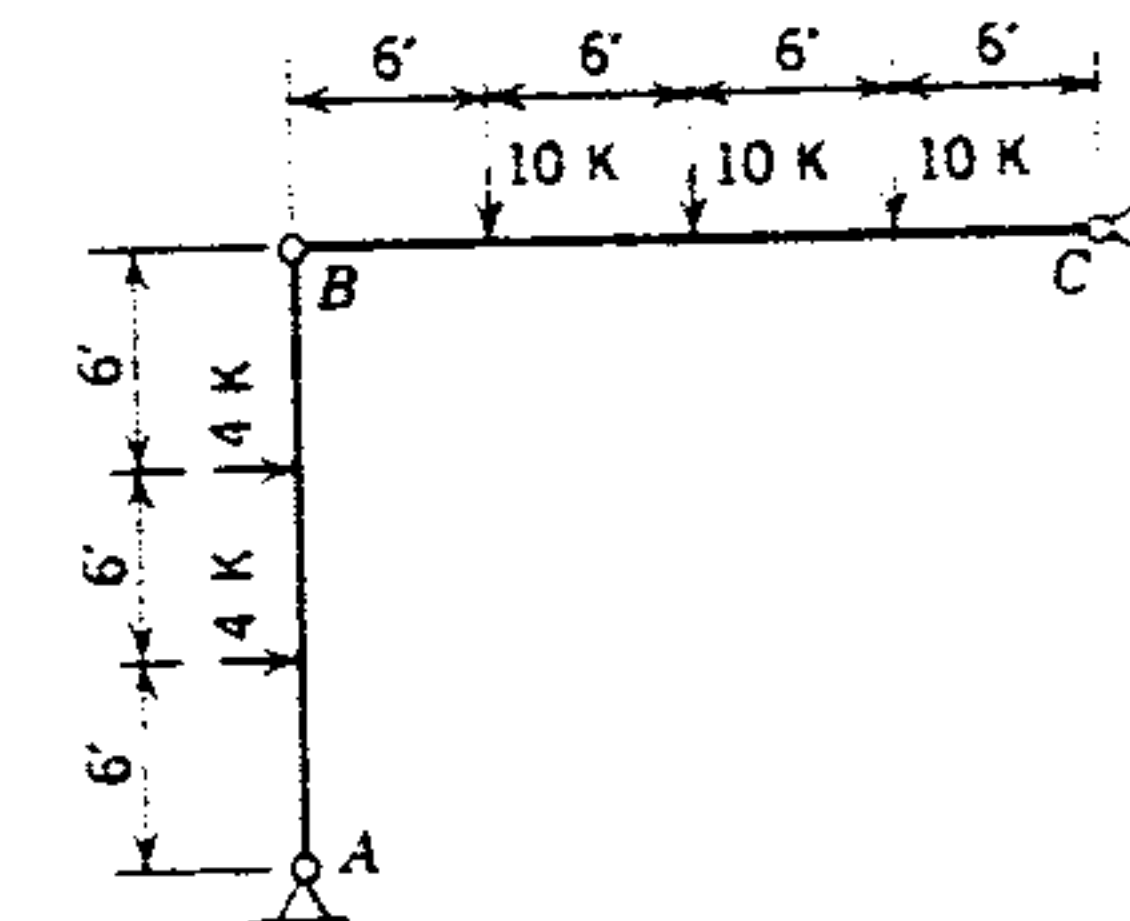


Figura 10.40 Problema 1.

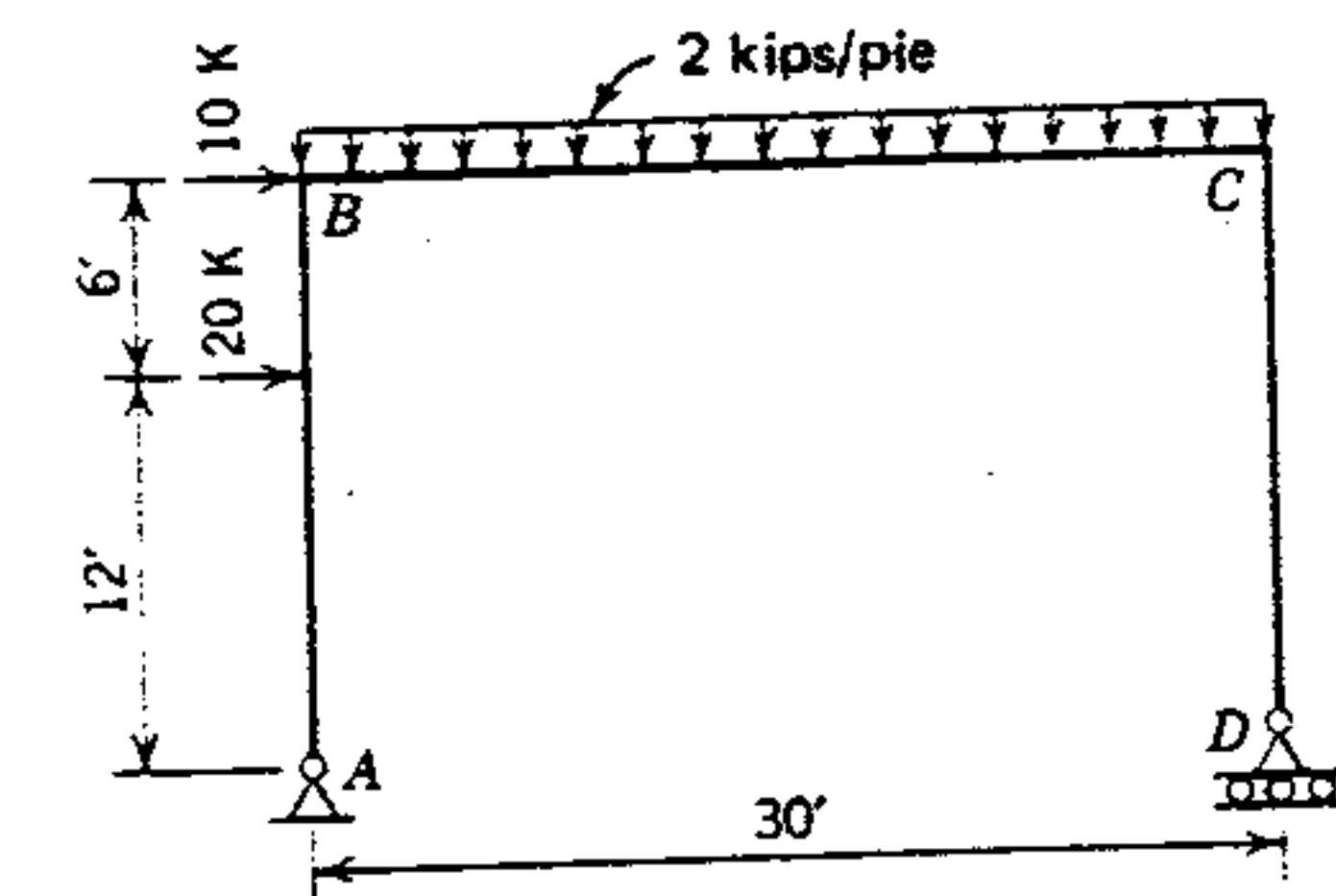


Figura 10.41 Problema 2.

3. Trazar los diagramas de cortante y momento flexionante para el marco ilustrado en la figura 10.42, y establecer valores de diseño para la fuerza cortante, momento flexionante y carga axial. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)

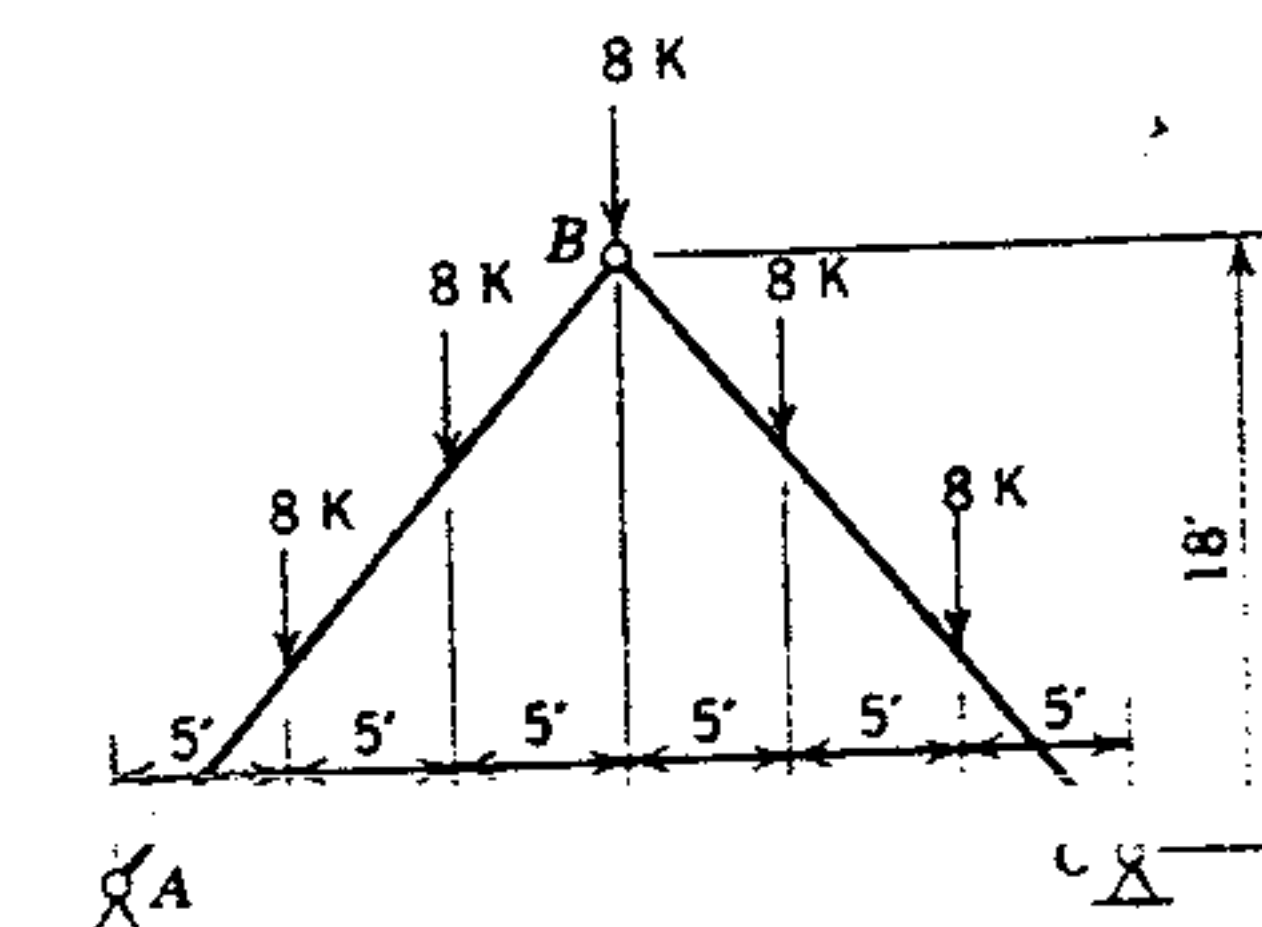


Figura 10.42 Problema 3.



## 412 | VIGAS CONTINUAS Y MARCOS

4. Determinar valores de diseño para todos los miembros del marco ilustrado en la figura 10.43. La carga uniforme sobre la longitud proyectada horizontal del miembro AB es de 2 kips por pie.

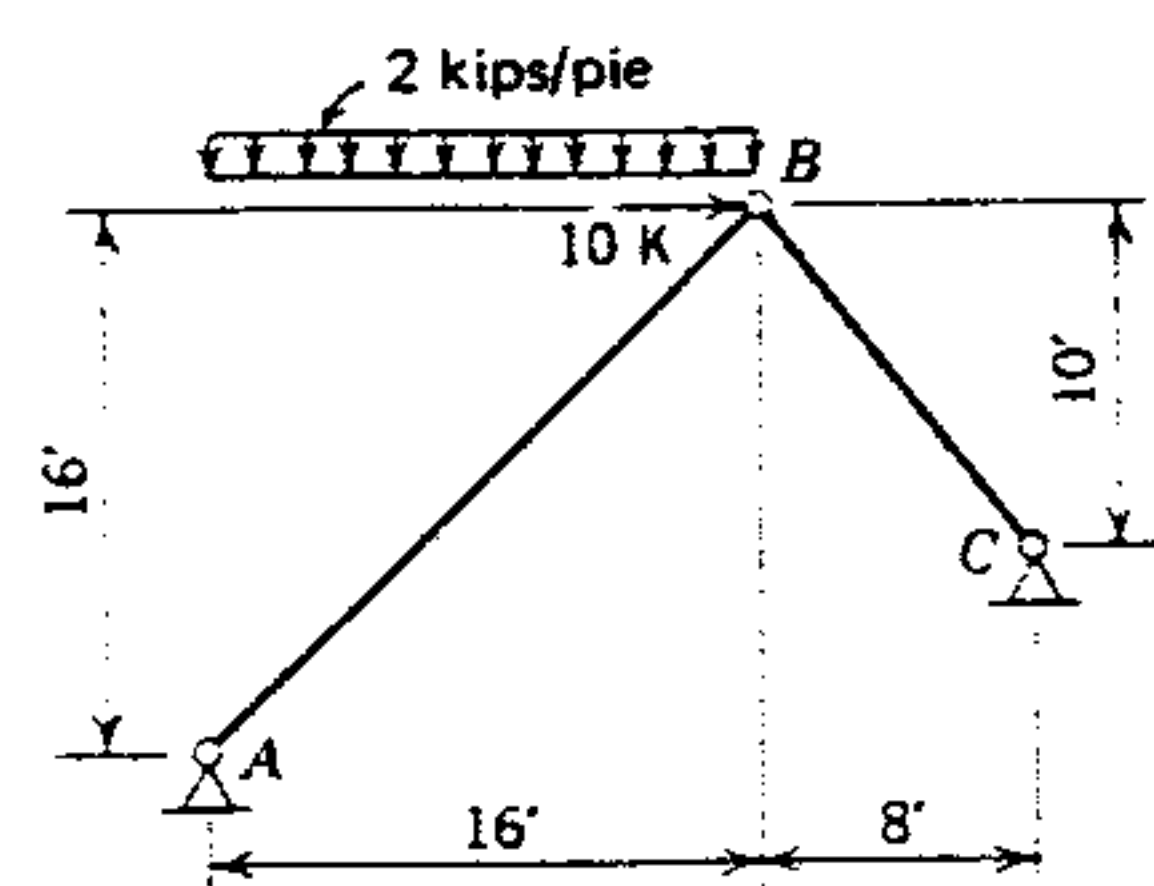


Figura 10.43 Problema 4.

## 10.11 ANÁLISIS DE MARCOS RÍGIDOS

Los marcos indeterminados se pueden analizar mediante el método de distribución de momentos de modo similar al aplicado a vigas continuas. Una vez determinados los momentos flexionantes en los apoyos y las juntas, se pueden calcular las componentes de reacción y trazar los diagramas de cortante y momento flexionante.

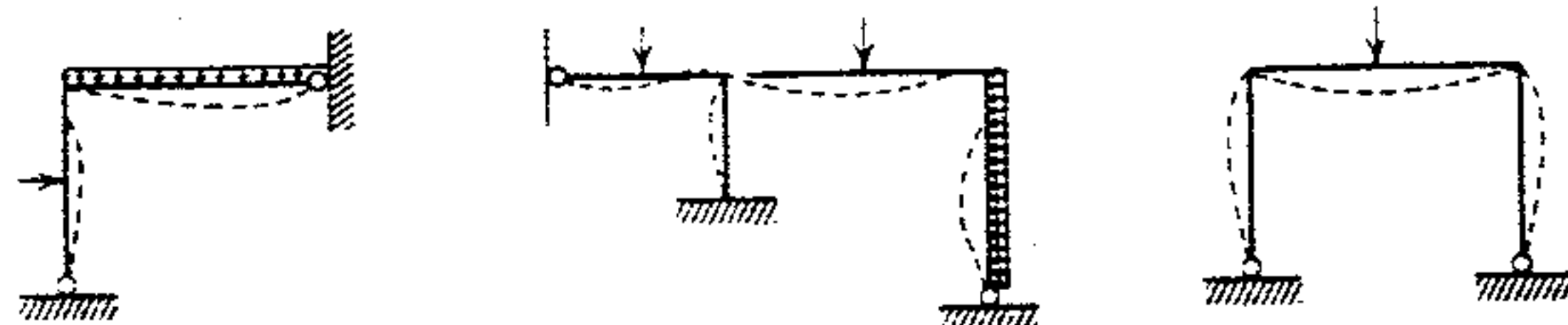


Figura 10.44 Marcos sin desplazamiento lateral.

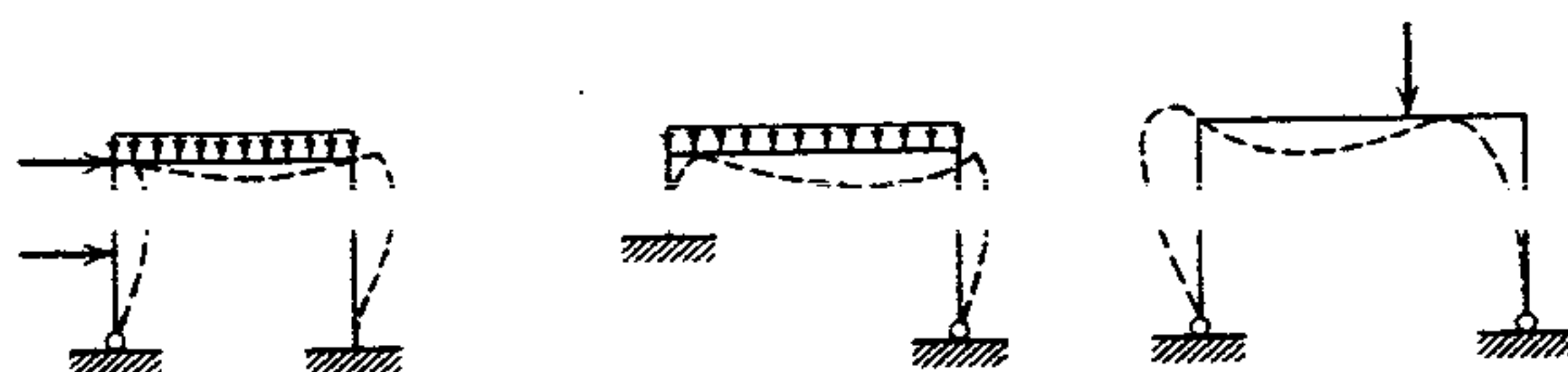


Figura 10.45 Marcos con desplazamiento lateral.

Con frecuencia, en una junta se conectan más de dos miembros. En estos casos, el momento desbalanceado se distribuye a los extremos de todos los miembros, en proporción a sus factores de rigidez relativa. El trabajo se puede tabular de muchas maneras. El procedimiento particular que se usa en los siguientes ejemplos es tan conveniente como fácil de leer.

Para propósitos de análisis, los marcos rígidos se pueden dividir en dos clases: los que tienen translación de juntas y los que no. Los marcos ilustrados en la figura 10.44 no tienen translación de juntas. Cada junta se mantiene en su posición por un soporte o por otro miembro. Cualquier movimiento de juntas resultante de un cambio en la longitud de un miembro se considera despreciable.

Los marcos de la figura 10.45 sí tienen translación de juntas o lo que comúnmente se denomina desplazamiento lateral. Un estudio de estos ejemplos revelará que la clasificación depende de la configuración del marco y/o del tipo de cargas.

El proceso de distribución de momentos es directo para aquellos casos en que no hay desplazamiento lateral, y el valor de los momentos flexionantes se puede determinar directamente. Los marcos que sí tienen desplazamiento lateral requieren un paso adicional de corrección de los momentos flexionantes calculados basándose en

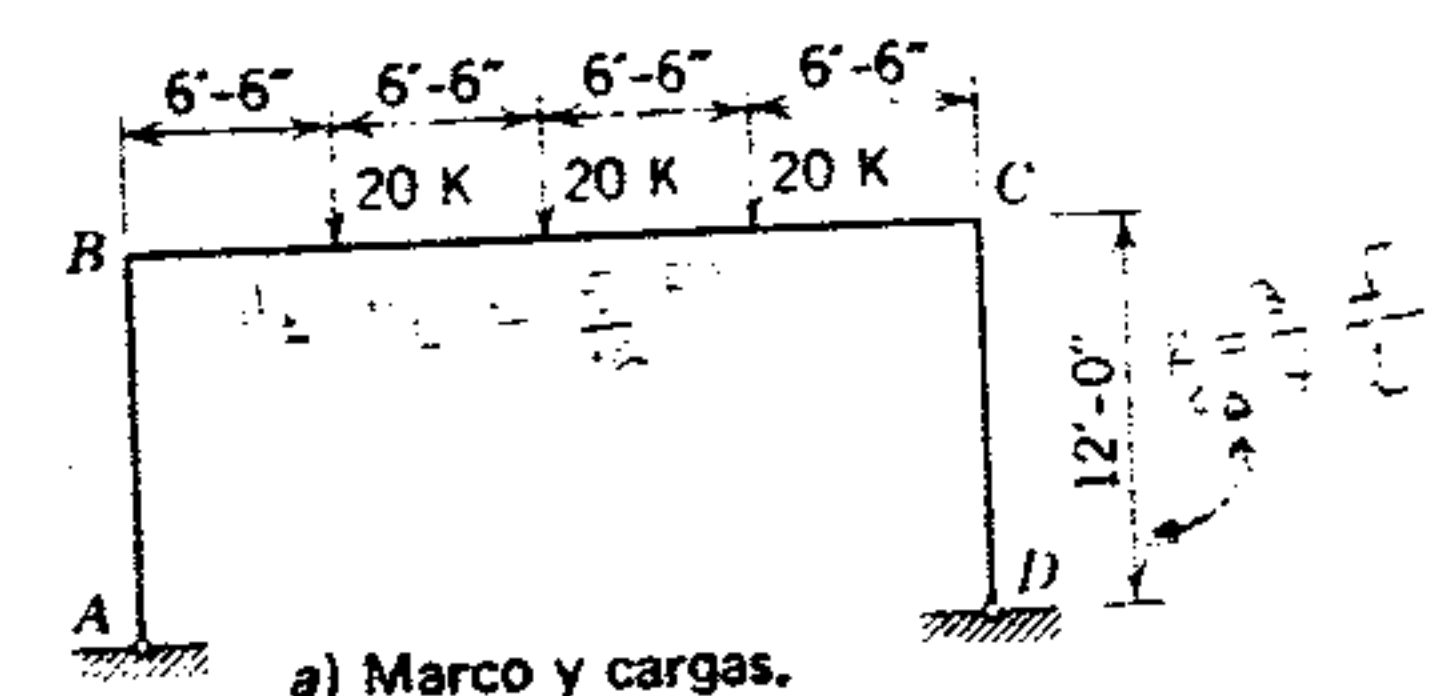
que no existe desplazamiento lateral. Los marcos con desplazamiento lateral se tratan detalladamente en las secciones 10.13 y 10.14.

## Ejemplo 1

Analizar el marco rígido cargado como se ve en la figura 10.46a. El momento de inercia del miembro horizontal es tres veces el de cada columna. Trazar el diagrama de momento flexionante.

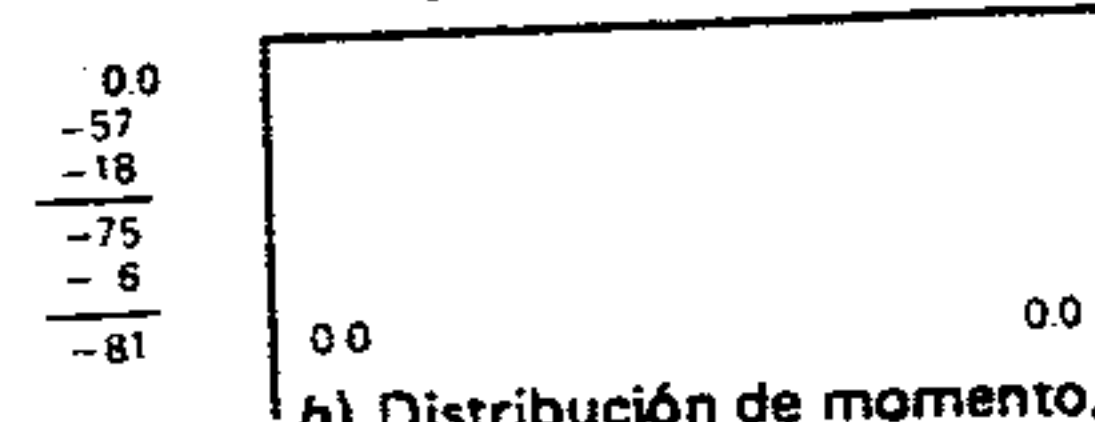
## Solución

Como el marco es simétrico y la carga simétrica, no hay desplazamiento lateral.

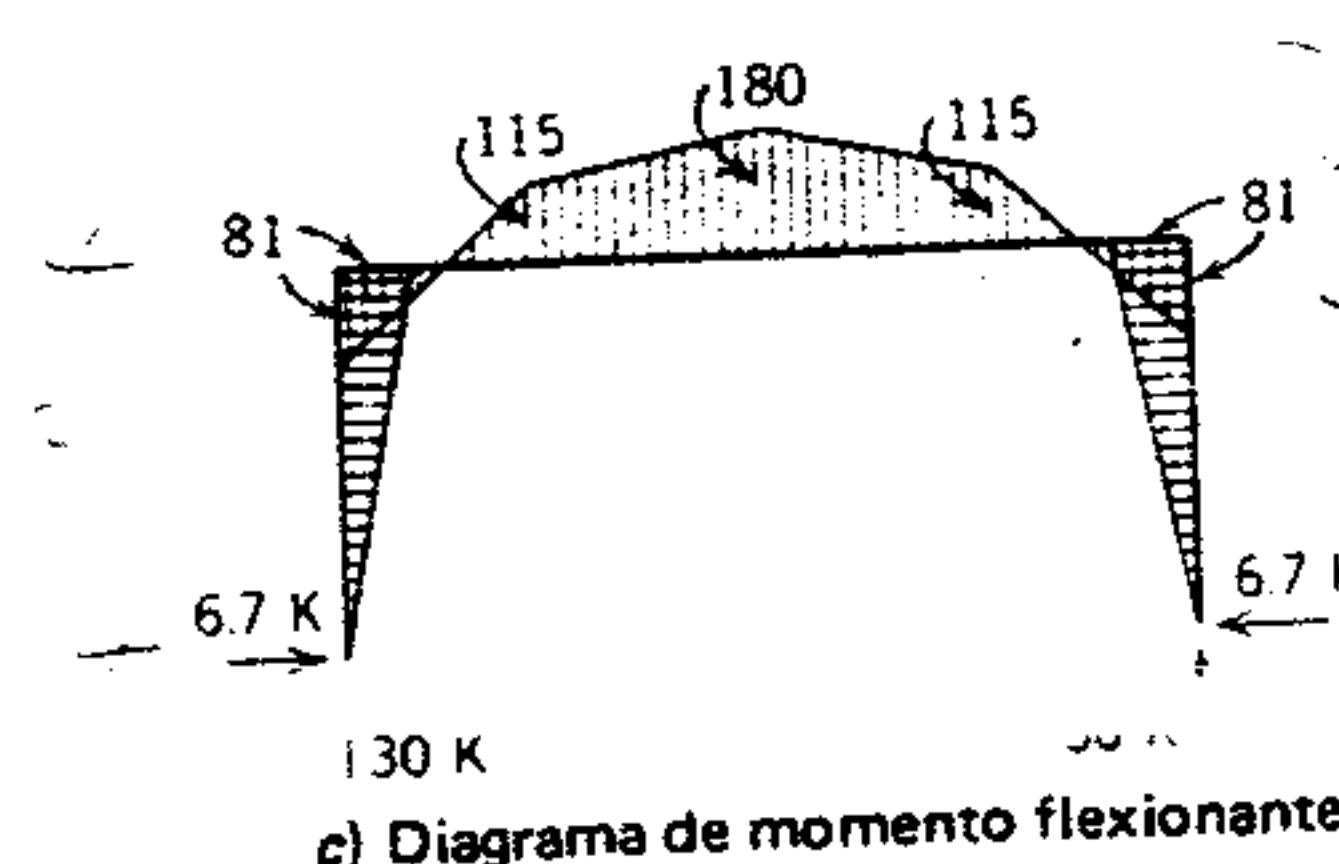


a) Marco y cargas.

+162	-162
-105	-105
-57	-57
+52	-52
-34	-34
-75	-75
+17	-17
-11	-11
+81	-81



b) Distribución de momento.



c) Diagrama de momento flexionante.

Figura 10.46 Sin desplazamiento lateral.

- Determinar la rigidez relativa de cada miembro. Usar el tratamiento simplificado para extremos articulados.

$$K'_{AB} = K'_{CD} = \frac{3}{4} \left( \frac{I}{12} \right) \approx 0.063I$$

$$K'_{BC} = \frac{3I}{26} \approx 0.115I$$

- Calcular los factores de distribución.

$$DF_{BA} = DF_{CD} = \frac{0.063I}{0.178I} = 0.35$$

$$DF_{BC} = DF_{CB} = \frac{0.115I}{0.178I} = 0.65$$

- Determinar los momentos de extremo fijo.

$$M^F_{BC} = -M^F_{CB} = \frac{15}{48}(20)26 = 162 \text{ pie-kips}$$

- Usando el método de distribución de momentos, determinar los momentos finales en B y C (figura 10.46b).
- Calcular las reacciones de extremos. Determinar el valor de los momentos flexionantes en otros puntos necesarios para trazar el diagrama de momento flexionante (figura 10.46c).

## Ejemplo 2

Analizar el marco rígido cargado como se ve en la figura 10.47a. El momento de inercia del miembro BC es el doble del de los otros miembros.

## Solución

Como el marco es tal que no puede ocurrir desplazamiento lateral, el procedimiento es el mismo que se usó en el ejemplo 1.

Cuando se estudia el momento en el lado sujeto a tensión del marco. Sin embargo, para ser congruentes con otras partes de este texto, este método no se ilustrará.



4. Determinar valores de diseño para todos los miembros del marco ilustrado en la figura 10.43. La carga uniforme sobre la longitud proyectada horizontal del miembro AB es de 2 kips por pie.

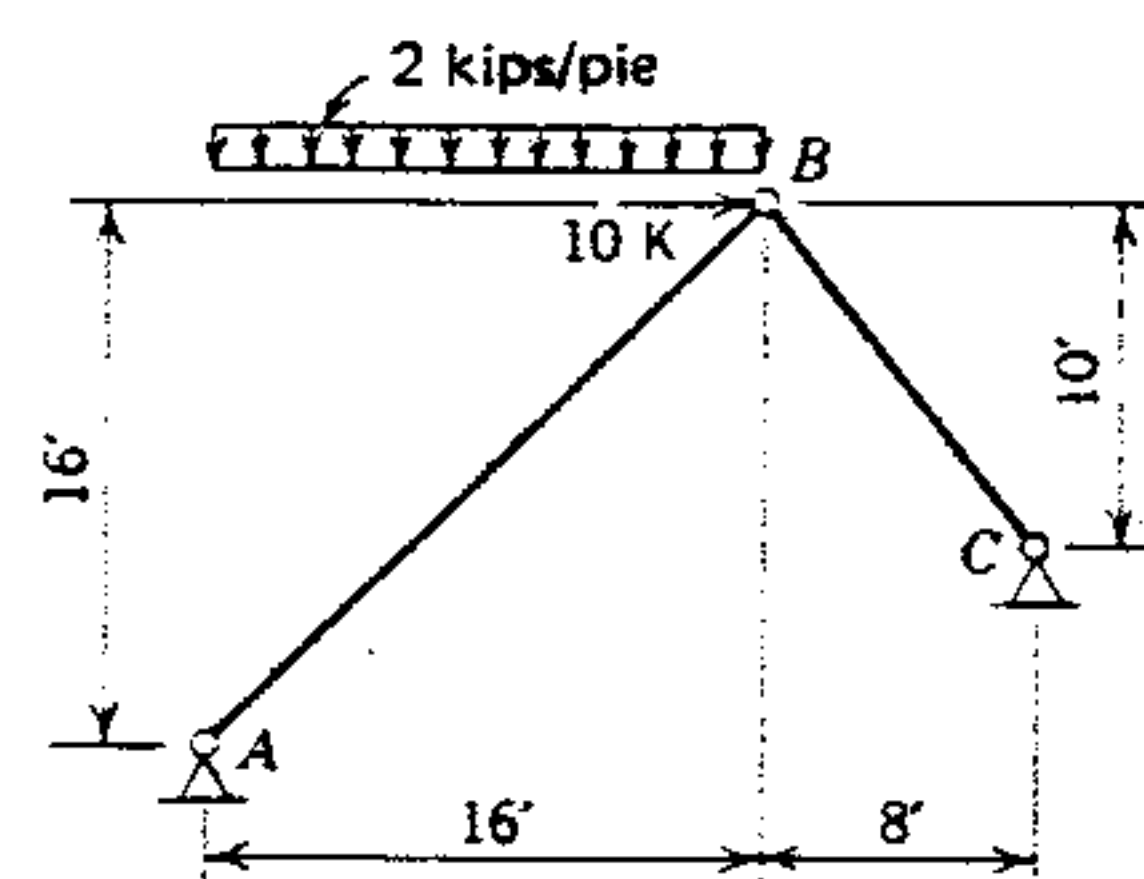


Figura 10.43 Problema 4.

### 10.11 ANÁLISIS DE MARCOS RÍGIDOS

Los marcos indeterminados se pueden analizar mediante el método de distribución de momentos de modo similar al aplicado a vigas continuas. Una vez determinados los momentos flexionantes en los apoyos y las juntas, se pueden calcular las componentes de reacción y trazar los diagramas de cortante y momento flexionante.

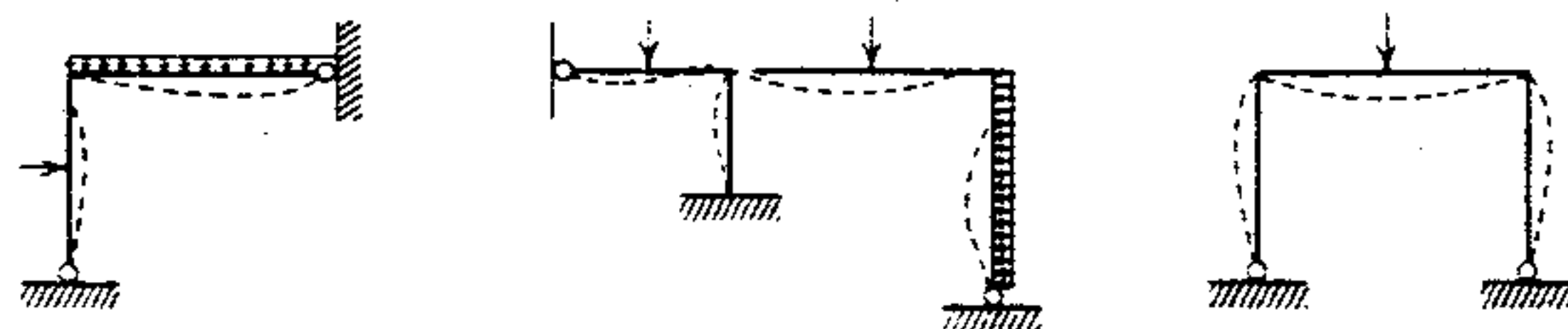


Figura 10.44 Marcos sin desplazamiento lateral.

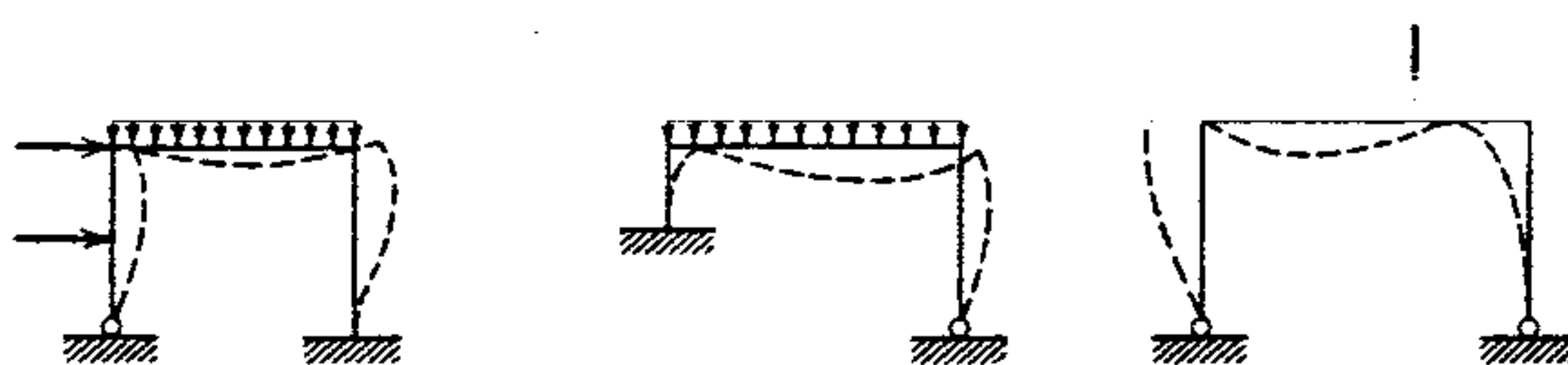


Figura 10.45 Marcos con desplazamiento lateral.

Con frecuencia, en una junta se conectan más de dos miembros. En estos casos, el momento desbalanceado se distribuye a los extremos de todos los miembros, en proporción a sus factores de rigidez relativa. El trabajo se puede tabular de muchas maneras. El procedimiento particular que se usa en los siguientes ejemplos es tan conveniente como fácil de leer.

Para propósitos de análisis, los marcos rígidos se pueden dividir en dos clases: los que tienen translación de juntas y los que no. Los marcos ilustrados en la figura 10.44 no tienen translación de juntas. Cada junta se mantiene en su posición por un soporte o por otro miembro. Cualquier movimiento de juntas resultante de un cambio en la longitud de un miembro se considera despreciable.

Los marcos de la figura 10.45 sí tienen translación de juntas o lo que comúnmente se denomina desplazamiento lateral. Un estudio de estos ejemplos revelará que la clasificación depende de la configuración del marco y/o del tipo de cargas.

El proceso de distribución de momentos es directo para aquellos casos en que no hay desplazamiento lateral, y el valor de los momentos flexionantes se puede determinar directamente. Los marcos que sí tienen desplazamiento lateral requieren un paso adicional de corrección de los momentos flexionantes calculados basándose en

que no existe desplazamiento lateral. Los marcos con desplazamiento lateral se tratan detalladamente en las secciones 10.13 y 10.14.

#### Ejemplo 1

Analizar el marco rígido cargado como se ve en la figura 10.46a. El momento de inercia del miembro horizontal es tres veces el de cada columna. Trazar el diagrama de momento flexionante.

#### Solución

Como el marco es simétrico y la carga simétrica, no hay desplazamiento lateral.

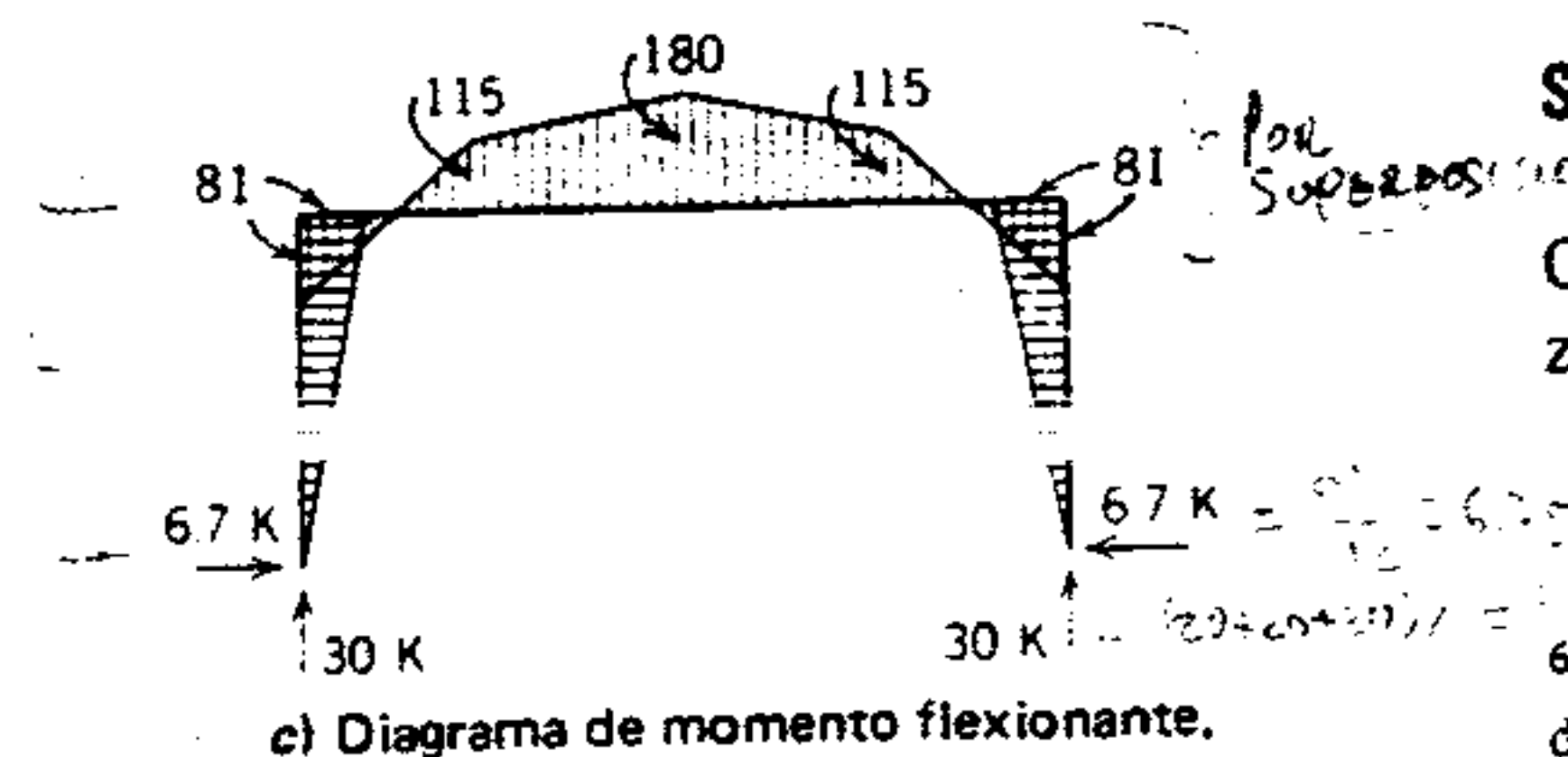
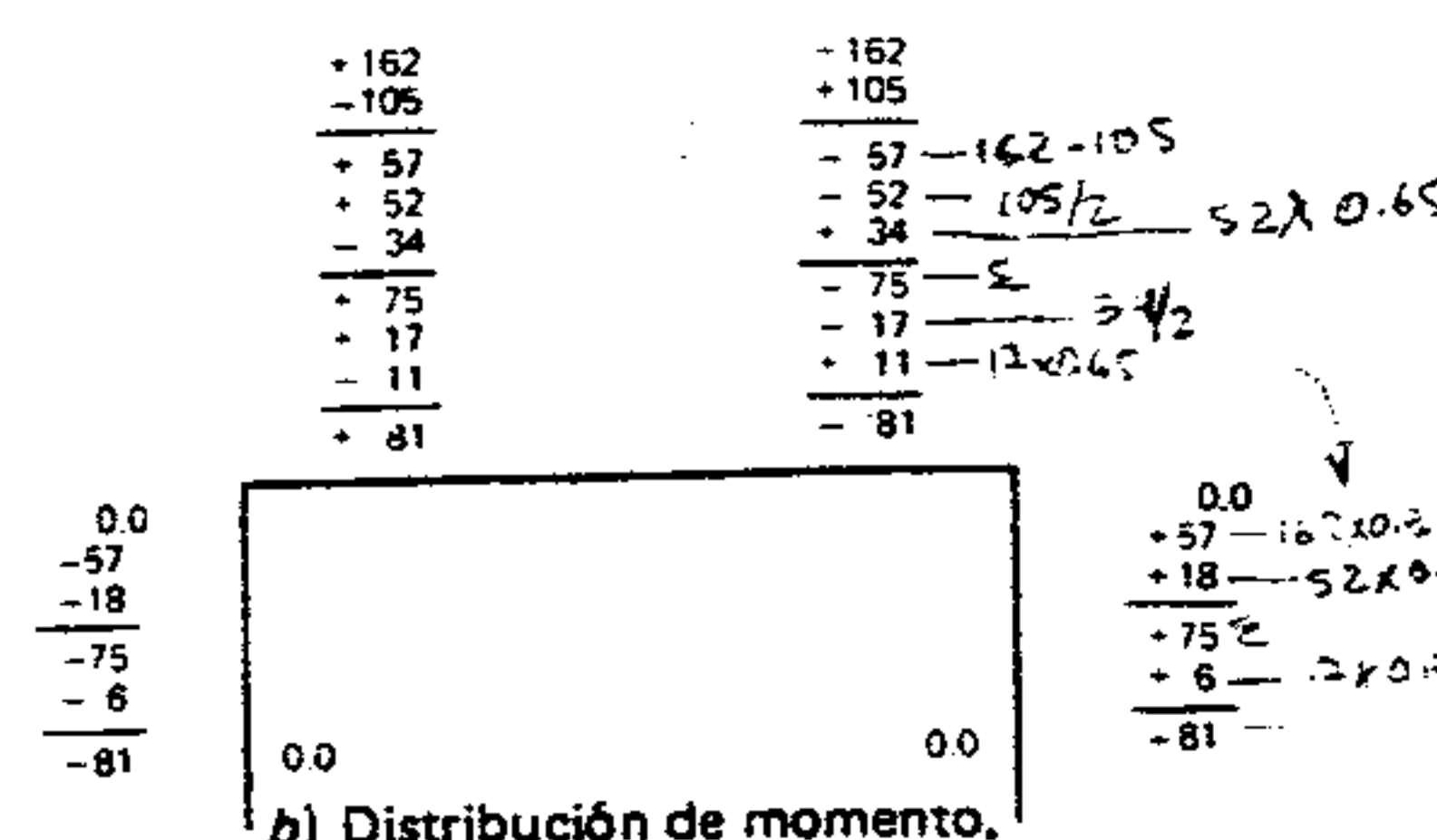
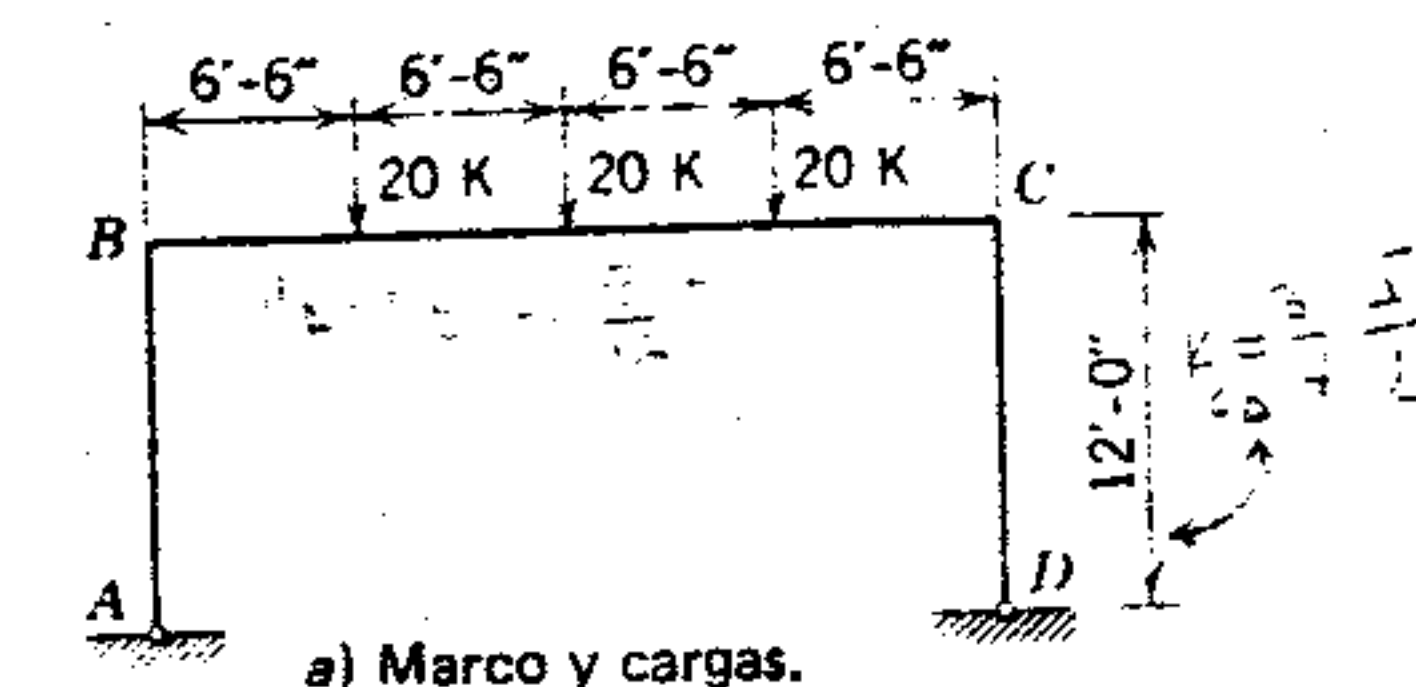


Figura 10.46 Sin desplazamiento lateral.

1. Determinar la rigidez relativa de cada miembro. Usar el tratamiento simplificado para extremos articulados.

$$K'_{AB} = K'_{CD} = \frac{3}{4} \left( \frac{I}{12} \right) \approx 0.063I$$

$$K'_{BC} = \frac{3I}{26} \approx 0.115I$$

2. Calcular los factores de distribución.

$$DF_{BA} = DF_{CD} = \frac{0.063I}{0.178I} = 0.35$$

$$DF_{BC} = DF_{CB} = \frac{0.115I}{0.178I} = 0.65$$

3. Determinar los momentos de extremo fijo.

$$M^F_{BC} = -M^F_{CB} = \frac{1}{48}(20)(26)^2 \approx 162 \text{ pie-kips}$$

4. Usando el método de distribución de momentos, determinar los momentos finales en B y C (figura 10.46b).
5. Calcular las reacciones de extremos. Determinar el valor de los momentos flexionantes en otros puntos necesarios para trazar el diagrama de momento flexionante (figura 10.46c).

#### Ejemplo 2

Analizar el marco rígido cargado como se ve en la figura 10.47a. El momento de inercia del miembro BC es el doble del de los otros miembros.

#### Solución

Como el marco es tal que no puede ocurrir desplazamiento lateral, el procedimiento es el mismo que

<sup>6</sup> Cuando se estudian los marcos, a veces es conveniente dibujar el diagrama de momento en el lado sujeto a tensión del marco. Sin embargo, para ser congruentes con otras partes de este texto, este método no se ilustrará.



## 1. Factores de rigidez relativa:

$$K'_{AB} = \frac{I}{10}$$

$$K'_{BD} = K'_{CE} = \frac{3}{4} \left( \frac{I}{10} \right)$$

$$K'_{BC} = \frac{2I}{20}$$

## 2. Factores de distribución:

$$DF_{BA} = 0.36$$

$$DF_{CB} = 0.57$$

$$DF_{BC} = 0.36$$

$$DF_{CE} = 0.43$$

$$DF_{ED} = 0.27$$

## 3. Momentos de extremos fijos:

$$M^F_{AB} = -M^F_{BA} = \frac{2(10)^2}{12} = 16.7 \text{ pie-kips}$$

$$M^F_{BC} = -M^F_{CB} = \frac{2(20)^2}{12} = 66.7 \text{ pie-kips}$$

$$M^F_{CE} = \frac{10(10)}{8} (1.5) = 18.8 \text{ pie-kips}$$

## 4. Distribución de momentos: Véase la figura 10.47b donde se ilustran dos ciclos.

## 5. Las reacciones en los extremos se determinan y se dibuja el diagrama de momento flexionante (figura 10.47c).

## 10.12 ANÁLISIS Y DISEÑO DE MARCOS DE UN SOLO PISO

El diseño de un marco rígido implica la selección de formas y el proporcionamiento de secciones, de modo que los esfuerzos reales debidos al cortante, momento flexionante y carga directa no excedan a los esfuerzos permisibles. Las juntas que se suponen rígidas en el análisis deben hacerse rígidas detallándolas de tal manera que no se presente rotación relativa en los miembros cuando se ensamblen finalmente en la obra.

Aunque el análisis precede al diseño real, primero se debe hacer una estimación preliminar del tamaño relativo de los miembros. El análisis requiere suponer, primero, que todas las juntas se mantienen en su posición de modo que no haya translación relativa. Luego se calculan los momentos flexionantes debidos a la rotación de juntas (distribución de momentos), las cuales, a su vez, son producidas por cargas situadas entre juntas. En seguida, se hace una corrección de desplazamiento lateral para conservar las fuerzas utilizadas para establecer la condición supuesta de que no hay translación relativa de juntas. Estas correcciones se aplican a los momentos calculados previamente y el análisis se completa mediante la aplicación de la Estática. En el siguiente ejemplo se ilustran las primeras etapas de este procedimiento. En la siguiente sección se ilustran

la corrección del desplazamiento lateral y el dimensionamiento de los miembros.

## Ejemplo

Analizar y diseñar un típico marco rígido interior para el edificio que se ilustra en la figura 10.48. Las bases de las columnas van a estar articuladas, y la techumbre, la cubierta del techo y los largueros pesan 28 lb/pie<sup>2</sup>. No se supondrá carga sísmica. Usar acero A36.

## Solución

1. Determinar todas las cargas que actúan sobre el marco. Para propósitos de este ejemplo, se supondrá que las cargas muerta, viva y am-

biental (es decir, viento, nieve, lluvia, etc.) combinadas imponen una carga neta hacia abajo de 68 lb/pie<sup>2</sup> sobre el techo, y que hay una carga lateral de 20 lb/pie<sup>2</sup> (sólo de viento) proveniente de la izquierda y actuando sobre el muro. (Véanse los capítulos 8 y 9 para un tratamiento más amplio de estas cargas y su cálculo).

Cada larguero soporta 6 × 18 pies de superficie de techo y la transmite como carga concentrada al marco. Sin embargo, las cargas concentradas están lo suficientemente próximas entre sí que permiten suponer que está uniformemente distribuida sobre el marco (esto simplificará en gran medida el análisis). Por lo tanto, la carga de techo por pie lineal de marco es

$$w = 68(18) \approx 1220 \text{ lb/pie lineal}$$

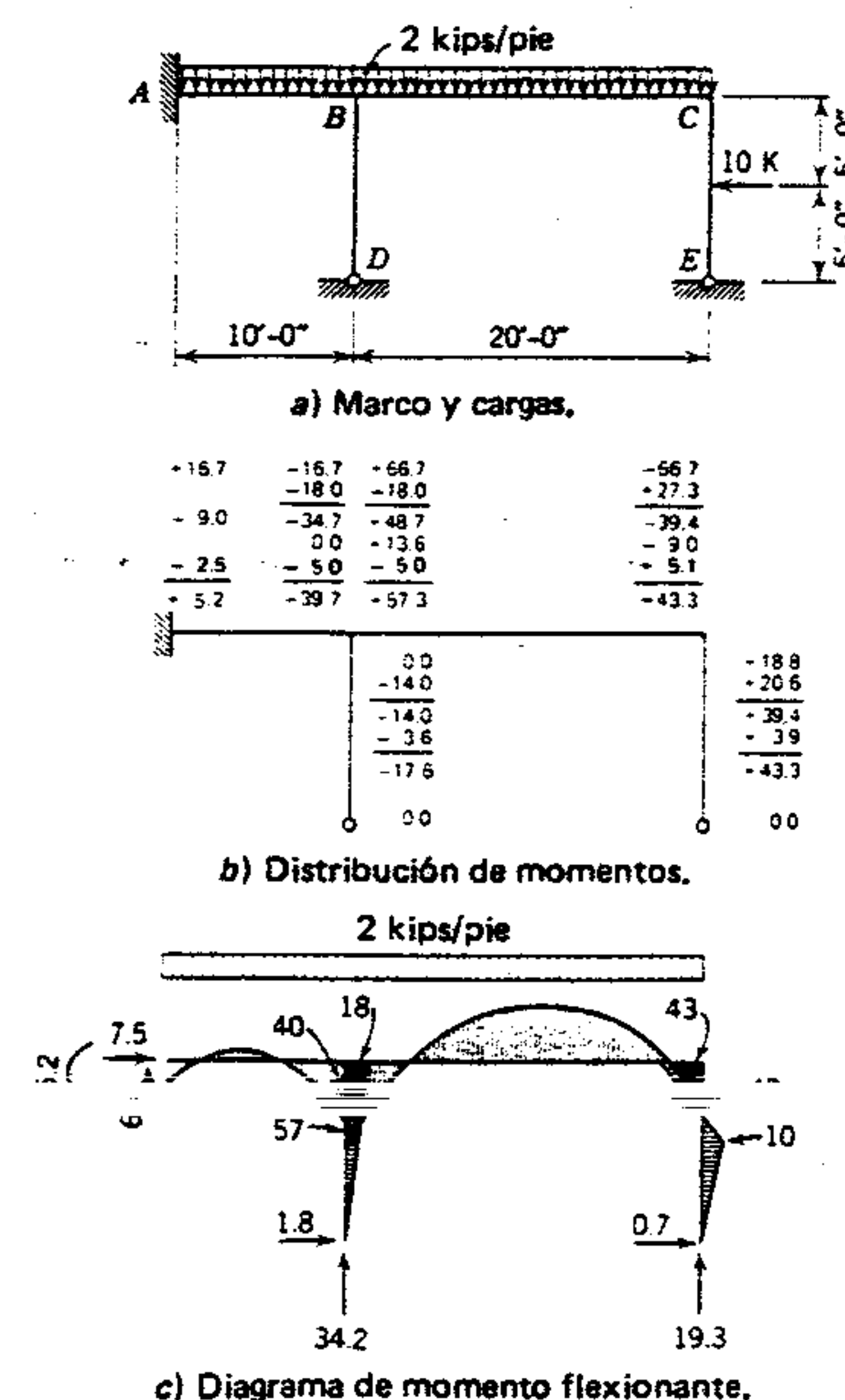


Figura 10.47 Sin desplazamiento lateral.

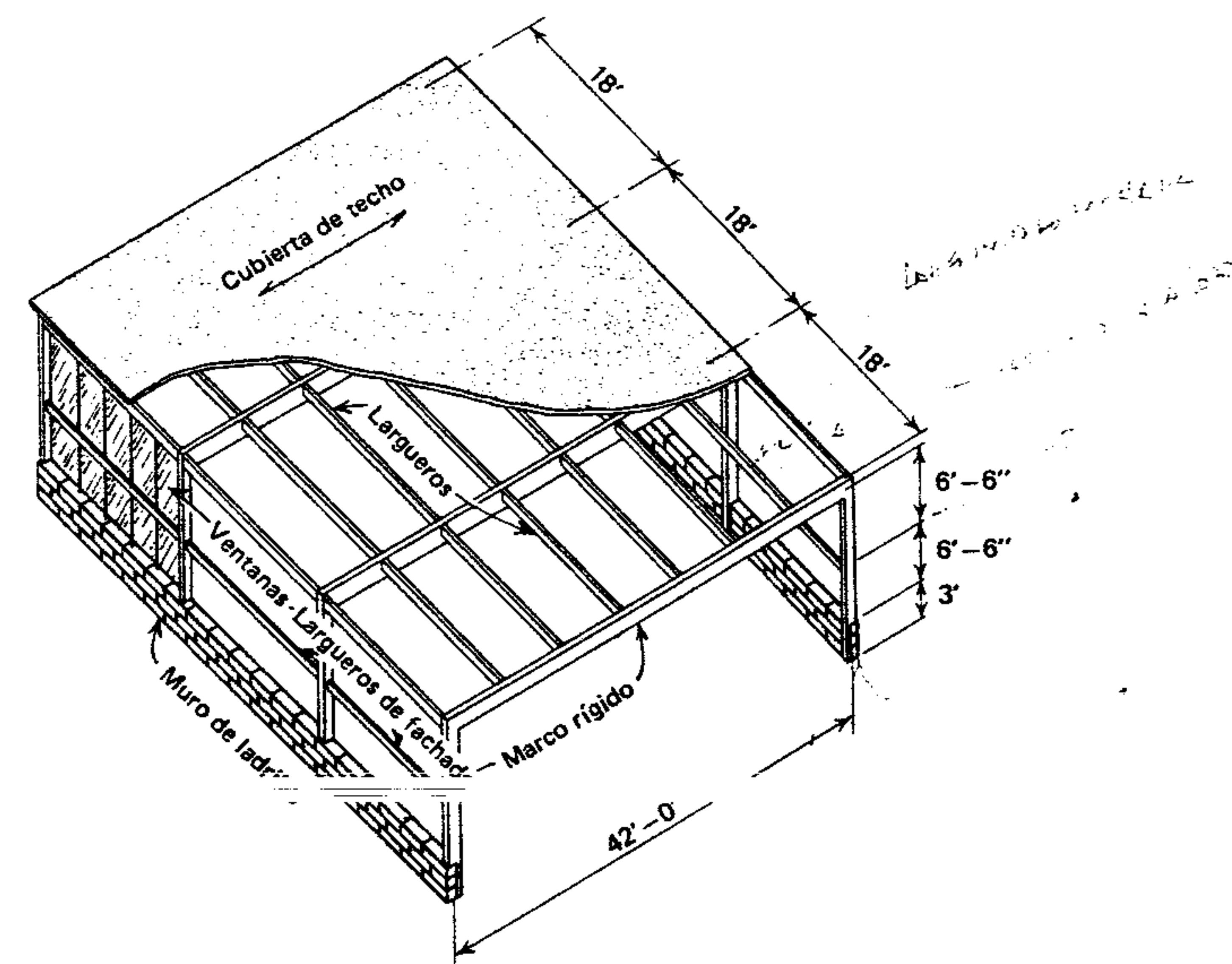


Figura 10.48 Edificio de marco rígido.



Usar 1.3 kips por pie, con 80 lb por pie supuestos para el peso del cabezal.

La carga lateral (de viento) sobre el muro de ladrillo se transmitirá directamente a la cimentación y por tanto no influirá sobre los marcos. Pero la carga de viento sobre las ventanas se transmitirá a través de largueros de alero y fachada a los marcos en forma de cargas concentradas. Para un marco, la máxima carga de viento exterior es larguero de fachada:

$$20(18)6.5 = 2340 \text{ lb; usar 2.3 kips}$$

larguero de alero:

$$\frac{2300}{2} = 1150 \text{ lb; usar 1.2 kips}$$

En la figura 10.49 se ilustran estas cargas actuando sobre el marco.

El análisis detallado mostrado aquí y en la sección 10.13 se basa en toda la carga viva, muerta y ambiental sobre el techo, más toda la carga de viento sobre un costado. Antes de tomar una decisión final sobre el tamaño de la viga y la columna, se necesitaría hacer un análisis de toda la carga sobre el techo actuando sola, es decir, sin la de viento sobre el marco. Esto se trata en las partes finales de los pasos 13 y 14 de la sección 10.13.

2. Estimar el tamaño relativo de los miembros horizontal y vertical (viga y columnas) que componen el marco. Esto se debe hacer basándose en la experiencia. Si la viga estuviera simplemente apoyada, tendría un momento

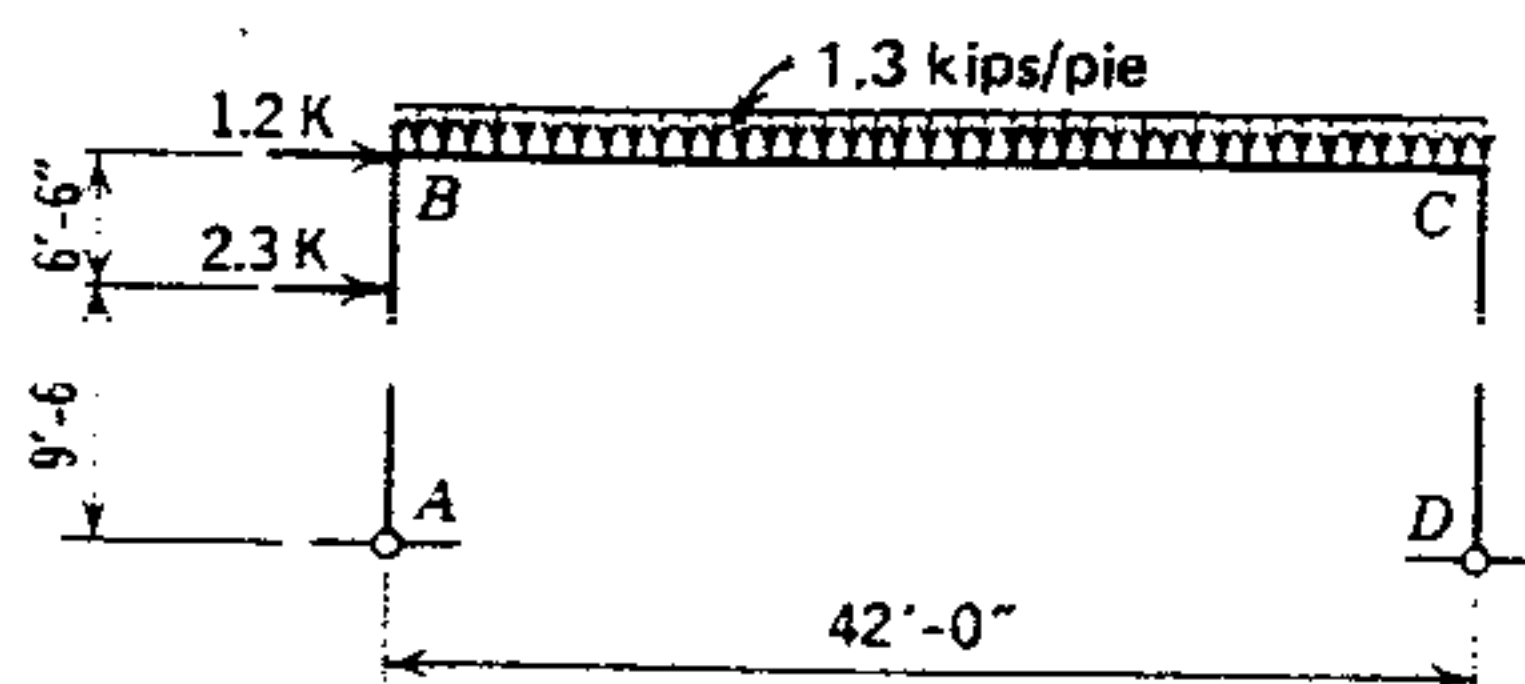


Figura 10.49 Marco típico, cargas de diseño.

máximo de  $wL^2/8 = 287 \text{ pie/kips}$ . Si se supone que este momento se reduce  $\frac{1}{4}$  por el efecto de marco rígido, el momento aproximado de diseño sería 215 pie/kips. En las tablas de vigas del AISC, se ve que las vigas del grupo W 21 serían adecuadas.

El tamaño de la columna es un poco más difícil de estimar. La carga axial será aproximadamente de  $1.3(21) = 27 \text{ kips}$ , pero también habrá un momento flexionante inducido apreciable debido a las cargas de la viga y el viento. Se estima que este momento será de  $\frac{1}{3}$  del momento de diseño de la viga, o sea 72 pie/kips. Luego, buscando en las tablas de carga permisible y aplicando el factor  $B_x$ , parecen adecuadas las columnas de menor peso del grupo W 14.

Buscando de nuevo en las tablas de momentos de inercia en los grupos de viga y columna elegidos, un  $I$  aproximado de 1600 pulg<sup>4</sup> para la viga y 400 pulg<sup>4</sup> para la columna sería razonable.

Considérese entonces una relación de 4 a 1.

3. Calcular los factores de rigidez y los factores de distribución.

$$K'_{AB} = \frac{3}{4} \left( \frac{I}{16} \right) \approx 0.047I$$

$$K'_{BC} = \frac{4I}{42} \approx 0.095I$$

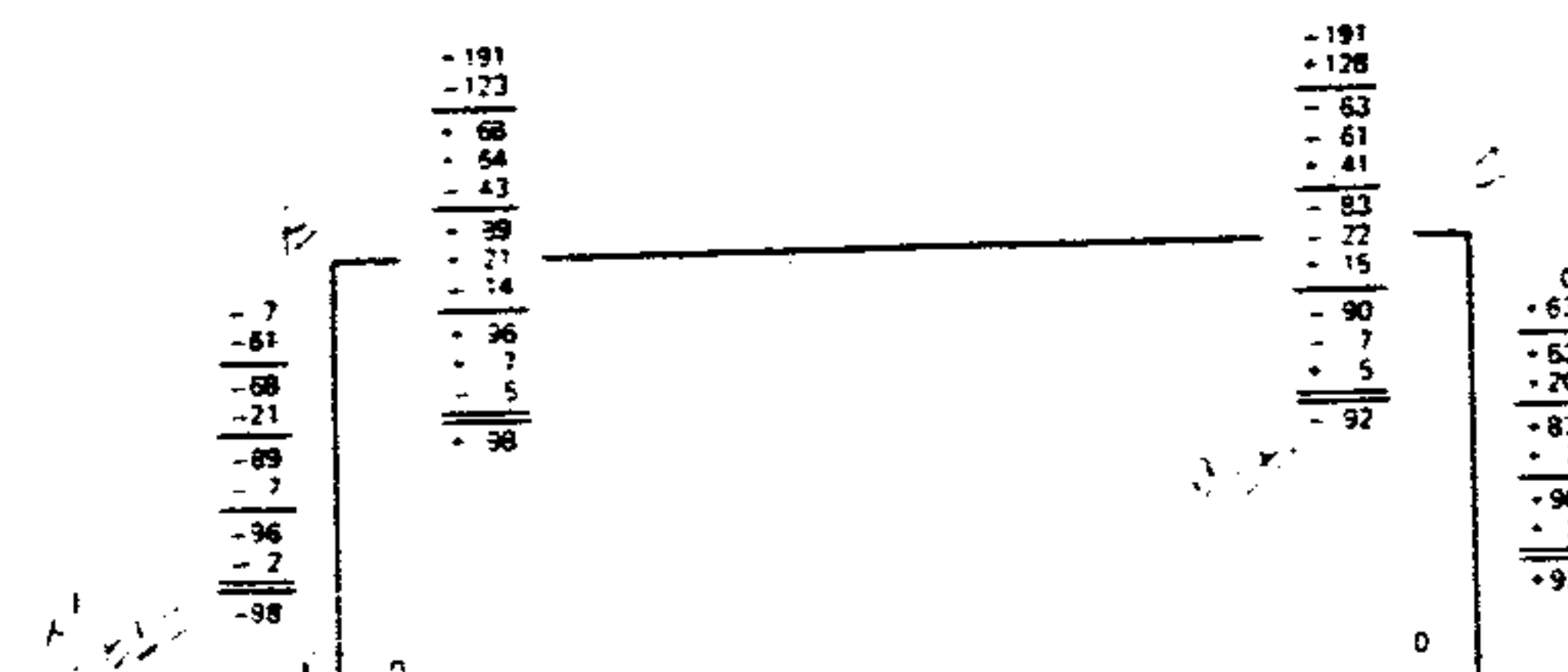
$$DF_{BA} = DF_{CD} = \frac{0.047I}{0.142I} \approx 0.33$$

$$DF_{BC} = DF_{CB} = \frac{0.095I}{0.142I} \approx 0.67$$

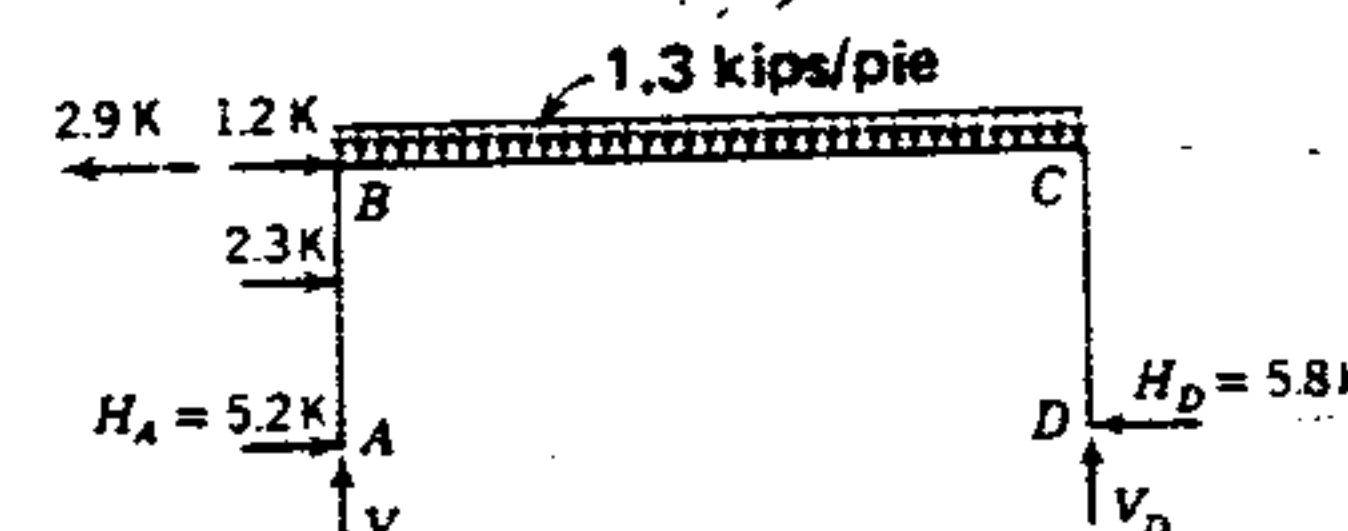
4. Calcular los momentos de extremo fijo sobre la base de que no hay traslación relativa de juntas.

$$M^F_{AB} = M^F_{DC} = 0$$

$$M^F_{BA} = -\frac{(2.3)6.5(9.5)^2}{(16)^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(2.3)9.5(6.5)^2}{(16)^2} \right] = -7.0 \text{ pie/kips}$$



a) Distribución de momento



b) Reacciones y RAJ

$$\sum M_C = 0$$

$$H_D = \frac{92}{16} = 5.8 \text{ K}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$H_A = \frac{98 - [2.3(6.5)]}{16} = 5.2 \text{ K}$$

$$\sum H = 0$$

$$1.2 + 2.3 + 5.2 - 5.8 = 2.9 \text{ K} \rightarrow$$

Restricción artificial de junta = 2.9 K ←

Figura 10.50 Solución de marco (sin traslación de juntas).

(voladizo apuntalado)

$$M^F_{BC} = -M^F_{CB} = \frac{1.3(42)^2}{12} = 191 \text{ pie-kips}$$

5. Hacer un esquema del marco, tabular los momentos de extremo fijo en sus posiciones apropiadas y balancear las juntas (distribución de momentos). Este paso se ilustra en la figura 10.50a.

6. Usando los momentos flexionantes determinados en el paso 5), calcular la fuerza horizontal en cada reacción (figura 10.50b). Nótese que cuando se revisa  $\sum H = 0$ , hay una fuerza resultante de 2.9 kips actuando a la izquierda. Esta es la magnitud de la fuerza necesaria en B para evitar la traslación de juntas. Con frecuencia esto se denomina restricción artificial de juntas (RAJ) y en este ejemplo actúa hacia la derecha. También se podrían calcular las componentes verticales de las reacciones en este punto, pero no son útiles

en el análisis aún incompleto; los momentos en B y C se necesitan corregir por el efecto de desplazamiento lateral.

### 10.13 DISEÑO DE MARCO RÍGIDO: DESPLAZAMIENTO LATERAL

En la sección anterior el análisis de marco rígido se basó en el supuesto de que no había desplazamiento lateral. En el paso 6) se mostró que para que fuera válido este supuesto, era necesaria una fuerza (RAJ) de 2.9 kips actuando a la izquierda en el punto B. Esta fuerza es ficticia y no existe realmente. Por lo tanto, los momentos flexionantes en B y C del marco se deben encontrar cuando se elimina esta fuerza.

Estos momentos se calculan suponiendo una traslación de junta (cualquier cantidad), determinando los momentos flexionantes inducidos por esta traslación, calculando la fuerza necesaria para producir la traslación y, proporcionando las fuer-



zas supuesta y real, determinando el valor real de los momentos. Este procedimiento se trata en detalle en los siguientes pasos y es una continuación del análisis iniciado en la sección anterior.

### Solución

7. Suponer que el punto *B* se mueve a la derecha una distancia  $\Delta$ . Este movimiento de junta ocurre cuando se elimina la *RAJ*. Un esquema del marco deflexionado muestra que el punto *C* también se mueve a la derecha la misma distancia (figura 10.51a). Es insignificante cualquier desplazamiento relativo causado por un cambio de longitud de cualquier miembro dado. En la sección

10.9 se mostró que el momento de extremo fijo causado por translación de junta es

$$M^F = \frac{6EI\Delta}{L^2}; \text{ambos extremos fijos}$$

$$M^F = \frac{3EI\Delta}{L^2}; \text{un extremo articulado}$$

En la solución de este problema no es necesario calcular el desplazamiento real  $\Delta$ , sino sólo determinar el valor relativo de los momentos de extremo fijo cuando hay desplazamiento. En este problema, como  $E$ ,  $I$ ,  $\Delta$  y  $L$  son los mismos para  $BA$  y  $CD$ , y como ambos tienen un extremo articulado,  $M_{BA}^F = M_{CD}^F$ .

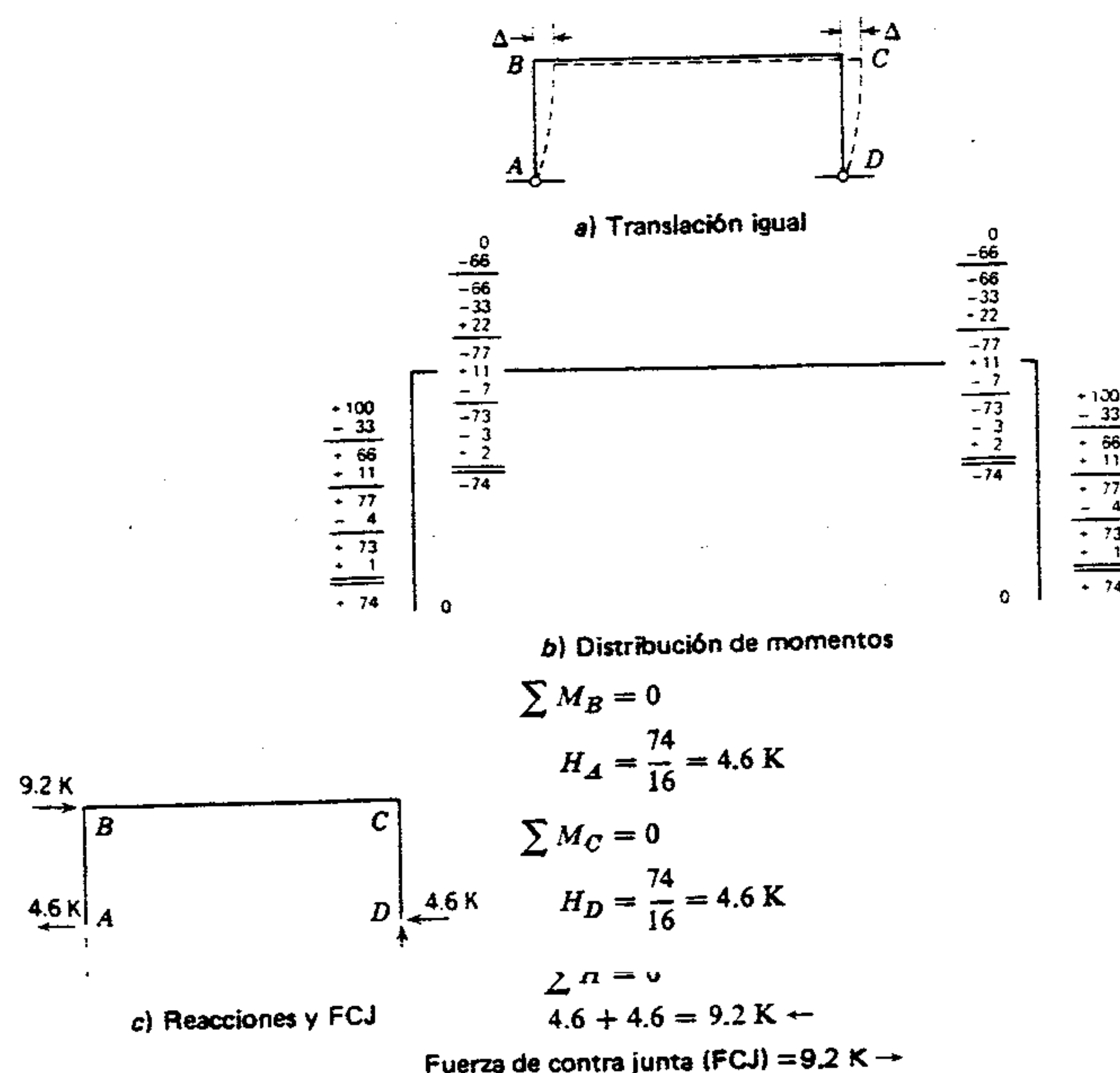


Figura 10.51 Solución de marco (con desplazamiento lateral).

8. Tomar cualquier valor de momento de extremo fijo en las proporciones determinadas en el paso 7) y dejar que las juntas roten (distribución de momentos).

$$M_{AB}^F = M_{DC}^F = M_{BC}^F = M_{CB}^F = 0$$

$$M_{BA}^F = M_{CD}^F = 100 \text{ pie/kips (supuesto)}$$

En la figura 10.51b se muestra la distribución de momentos.

9. Calcular las componentes horizontales de las reacciones resultantes de los momentos determinados en el paso 8). De estas componentes de reacción se puede calcular el valor de la fuerza necesaria para inducir los momentos supuestos. Esta se denomina con frecuencia fuerza equilibrante de la junta (FEJ) (figura 10.51c).
10. Por proporciones, determinar los momentos flexionantes cuando se libera la restricción artificial de junta. Se encontró que la restricción artificial de junta era de 2.9 kips ←. Cuando se libera, tiene el mismo efecto que situar una fuerza igual de 2.9 kips → sobre el marco. Los momentos flexionantes finales ilustrados en la figura 10.51b fueron producidos por una fuerza de 9.2 kips →. Por lo tanto, los momentos flexionantes causados por los 2.9 kips → serán

$$M_{BA} = M_{CD} = \frac{2.9}{9.2} (+74) = +23 \text{ pie/kips}$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{2.9}{9.2} (-74) = -23 \text{ pie/kips}$$

11. Corregir los momentos flexionantes calculados basándose en que no hay translación de juntas (paso 5, sección 10.11), sumándolos a los momentos flexionantes que resultaron de la eliminación de la restricción

$$M_{AB} = M_{DC} = 0$$

$$M_{BA} = -98 + 23 = -75 \text{ pie/kips}$$

$$M_{BC} = +98 - 23 = +75 \text{ pie/kips}$$

$$M_{CB} = -92 - 23 = -115 \text{ pie/kips}$$

$$M_{CD} = +92 + 23 = +115 \text{ pie/kips}$$

Estos son los momentos flexionantes finales en las juntas del marco.

12. Determinar las reacciones y trazar los diagramas de cortante y momento flexionante (figura 10.52).
13. Diseñar la viga. El momento flexionante máximo para la viga es 189 pie/kips. Los largueros proporcionan soporte lateral; por lo tanto,  $L_u = 6$  pies. Suponiendo un esfuerzo flexionante permisible de 24 k/pulg<sup>2</sup>, el módulo de sección requerido es

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{189}{24}(12) = 94.5 \text{ pulg}^3. \text{ usar } 95 \text{ pulg}^3.$$

La sección de menor peso adecuada para este módulo de sección es una W 18 X 55 ( $S = 98.3 \text{ pulg}^3$ ). Esta sección es compacta para acero A36 y tiene una longitud  $L_c$  permisible de 7.9 pies. Por lo tanto,  $F_b = 24 \text{ k/pulg}^2$ . El esfuerzo flexionante real es

$$f_b = \frac{M}{S} = \frac{189(12)}{98.3} = 23.1 \text{ k/pulg}^2 \text{ (seguro)}$$

Comprobación del cortante

$$f_v = \frac{V}{A_w} = \frac{28}{18.11(0.39)} = 3.96 \text{ k/pulg}^2 \text{ (seguro)}$$

Esta viga también soporta una carga directa de 7.2 kips; sin embargo, es proporcionalmente pequeña y se omitirá.

La sección W 18 X 55 cumple con la Especificación AISC respecto a los requisitos de resistencia tanto a la flexión como al cortante y parece adecuada. Sin embargo, se necesita un examen más amplio con respecto al diseño implica el uso del criterio del diseñador, ya que raras veces se establecen específicamente deflexiones limitantes.



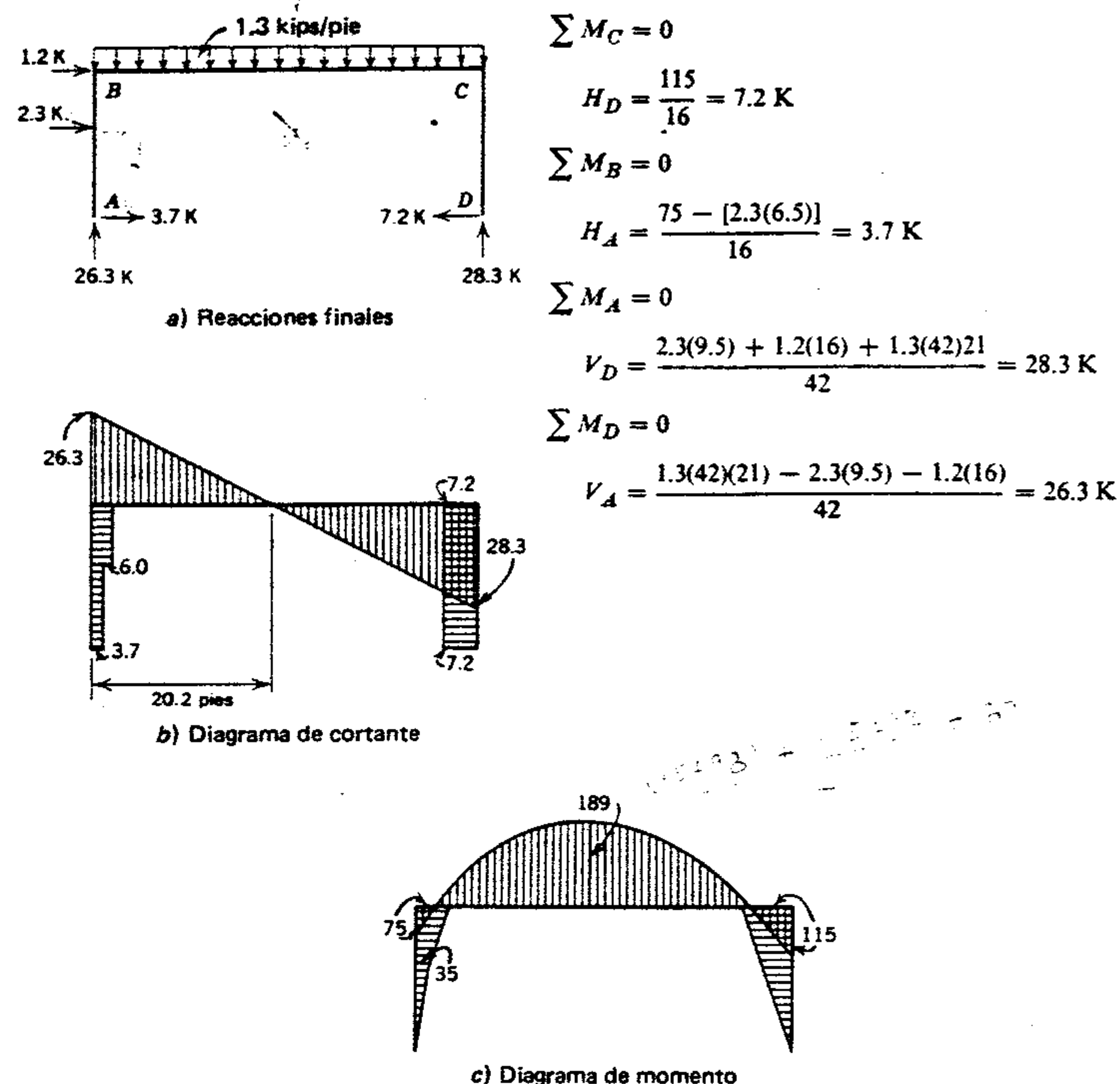


Figura 10.52 Análisis final.

Usando la guía sugerida para peralte-claro de  $F_y/800$  (Especificación AISC 1978), el peralte necesario es

$$\frac{36}{800} (42)12 = 22.7 \text{ pulg.}$$

ción 5.4). Por lo tanto, no se debe usar la sección W 18 X 55. Se debe seleccionar una viga de 18 pulgadas de mayor peso (reduciéndose así el esfuerzo flexionante) o una de mayor peralte.

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0 \\ H_D &= \frac{115}{16} = 7.2 \text{ K} \\ \sum M_B &= 0 \\ H_A &= \frac{75 - [2.3(6.5)]}{16} = 3.7 \text{ K} \\ \sum M_A &= 0 \\ V_D &= \frac{2.3(9.5) + 1.2(16) + 1.3(42)21}{42} = 28.3 \text{ K} \\ \sum M_D &= 0 \\ V_A &= \frac{1.3(42)(21) - 2.3(9.5) - 1.2(16)}{42} = 26.3 \text{ K} \end{aligned}$$

Suponiendo que la restricción del extremo desarrollada por la sujeción rígida de la viga con la columna reduce el claro de 42 pies a un claro simple de 38 pies, y limitando la deflexión del claro simple bajo carga total máxima a  $L/240$ ,

$$\Delta_{\text{max}} = \frac{38(12)}{240} = 1.9 \text{ pulg.}$$

El momento de inercia requerido es

$$I = \frac{5wL^4}{384E\Delta} = \frac{5(1.3)38^4(12)^3}{384(29,000)1.9} = 1110 \text{ pulg}^4$$

Una sección W 21 X 57 cumple con el requisito de resistencia y también tiene un momento de inercia de 1170 pulg<sup>4</sup>. Usar la sección W 21 X 55 para la viga.

En la especificación AISC también se permite un incremento del esfuerzo permisible cuando las cargas incluyen la acción del viento. Como la sección W 21 X 57 se eligió primariamente considerando los requisitos de deflexión, esta tolerancia especial no debe alterar el diseño. También debe observarse que la sección W 21 X 57 es adecuada para el flexionante y el cortante cuando toda la carga de techo está actuando sola, sin ninguna carga de viento.

14. Diseñar las columnas. Estas columnas se deben diseñar para la condición más severa que se pudiera presentar. Para la columna CD, la condición más severa se presenta cuando el viento proviene de la izquierda (figura 10.52). La columna AB estaría sujeta a las mismas fuerzas cuando el viento viniera de la derecha; por lo tanto, las condiciones de diseño son iguales para ambas columnas. Estas condiciones de diseño son: Cortante = 7.2 kips; momento flexionante = 115 pie/kips; carga axial = 28.3 kips, altura no apoyada = 16 pies para el eje mayor y 6.5 pies para el eje menor. Se supone que el factor<sup>7</sup> de longitud efectiva ( $K$ ) para el eje menor será de 1.2 y para el eje mayor de 2.0.

Después de hacer algunas selecciones de prueba, se elige una sección W 12 X 40 para analizarla detalladamente.

Las relaciones de esbeltez máximas son

$$\frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1.2(6.5)12}{1.93} = 48.5$$

$$\frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{2.0(16)12}{5.13} = 74.9$$

<sup>7</sup> Véase la sección 6.8;  $K$  no se debe confundir con  $K'$ , el símbolo usado para denotar factor de rigidez al tratar la distribución de momentos.

En las tablas, el esfuerzo axial permisible máximo es

$$F_a = 15.91 \text{ k/pulg}^2$$

Como las condiciones de diseño incluyen carga de viento, este esfuerzo (aplicando la Especificación AISC) se puede incrementar  $\frac{1}{3}$ , o sea

$$F_a = 1.33(15.91) = 21.2 \text{ k/pulg}^2$$

El esfuerzo axial real es

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{28.3}{11.8} = 2.4 \text{ k/pulg}^2$$

y

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{2.4}{21.2} = 0.113$$

Como  $f_a/F_a < 0.15$ , se debe usar la fórmula de interacción lineal para comprobar la estabilidad. El esfuerzo flexionante real es

$$f_b = \frac{M}{S} = \frac{115(12)}{51.9} = 26.6 \text{ k/pulg}^2$$

La W 12 X 40 es una sección compacta y tiene una  $L_c$  permisible de 8.4 pies  $> 6.5$  pies. Por lo tanto, el esfuerzo flexionante permisible es de 24 k/pulg<sup>2</sup>. Aumentando este esfuerzo en un tercio por viento,

$$F_b = 1.33(24) = 32 \text{ k/pulg}^2$$

Comprobando la suma de las relaciones de esfuerzo,

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{2.4}{21.2} + \frac{26.6}{32} = 0.94 < 1.0 \text{ (segura)}$$

Asimismo

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{2.4}{28.8} + \frac{26.6}{32} = 0.91 < 1.0 \text{ (segura)}$$

El cortante es despreciable.



Antes de adoptar finalmente esta sección se debe revisar para los esfuerzos resultantes de las cargas de gravedad solas, es decir, sin viento y el  $\frac{1}{3}$  de incremento en el esfuerzo permisible por viento. Se encontrará que esto es determinante y la sección final adoptada es W 12 x 45. Esta conclusión se debe verificar.

**Resumen.** Usar una sección W 21 x 57 como viga. Usar secciones W 12 x 45 para columnas.

$$\frac{I_{\text{viga}}}{I_{\text{columna}}} = \frac{1770}{350} = 3.34$$

lo cual es razonablemente aproximado a la relación originalmente supuesta de  $\frac{4}{1}$ ; por lo tanto, no se necesita mayor refinamiento.

#### 10.14 MARCOS A DOS AGUAS

El procedimiento para el análisis y diseño de marcos a dos aguas es similar al ilustrado para el marco rígido en la sección 10.13. Un marco a dos aguas es una forma especial de marco rígido. Sin embargo, el análisis es mucho más complejo que para los marcos rígidos rectangulares. Esto es así sobre todo cuando se emplea distribución de momentos. Con frecuencia, el diseñador optará por el uso de manuales especiales, programas de computadora o coeficientes de momentos en vez de efectuar un prolongado análisis. No obstante, para que el estudio sea completo, se presentará un ejemplo para mostrar el análisis de un marco a dos aguas. Cada paso se explica detalladamente. Se recomienda leer primero todo el ejemplo y luego estudiar cada paso del proceso.

##### Ejemplo

El marco rígido a dos aguas que se ilustra en la figura 10.53 está cargado como se indica. Se supone que las bases de las columnas están articuladas. Todos los miembros tienen el mismo momento de

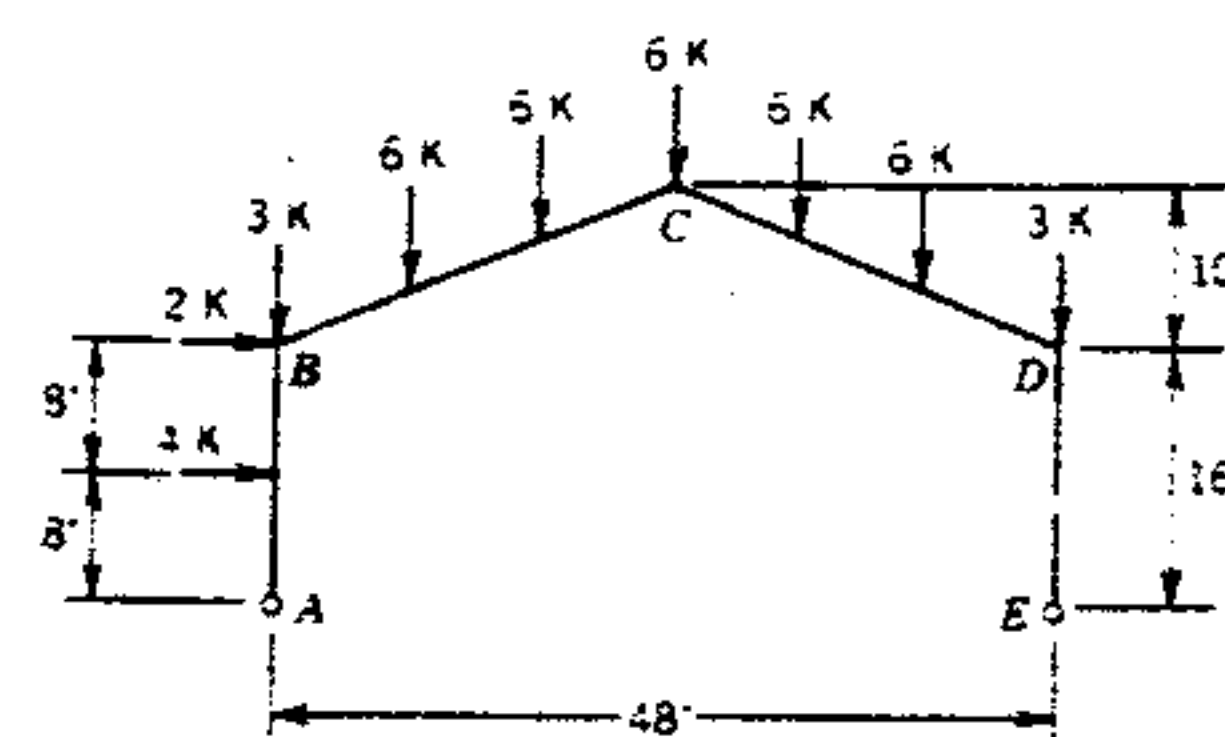


Figura 10.53 Marco rígido a dos aguas (ejemplo).

inercia. Determinar las reacciones y trazar el diagrama de momento flexionante para el marco. El siguiente análisis es tan largo como complicado. Por lo tanto, los procedimientos comunes requieren a menudo el uso de programas de computadora. La solución de este ejemplo, en el apéndice F, se efectuó mediante un programa de computadora.

##### Solución

1. Determinar los factores de rigidez relativa y los factores de distribución para cada miembro del marco. Usar el factor  $\frac{3}{4}$  para extremos articulados.

$$K'_{AB} = K'_{ED} = \frac{3}{4} \left( \frac{I}{16} \right) \approx 0.047I$$

$$K'_{BC} = K'_{CD} = \frac{I}{26} \approx 0.038I$$

$$DF_{BA} = DF_{DE} = \frac{0.047I}{0.085I} = 0.55$$

$$DF_{BC} = DF_{DE} = \frac{0.038I}{0.085I} = 0.45$$

$$DF_{CB} = DF_{CD} = \frac{0.038I}{0.076I} = 0.50$$

2. Calcular los momentos de extremo fijo. Co-

totalmente fijas, las cargas que actúan en estos puntos no entran en el cálculo. Por lo tanto, para el primer análisis se eliminan estas cargas (figura 10.54a); su efecto se considerará más adelante.

$$M^F_{AB} = M^F_{ED} = M^F_{DE} = 0$$

$$M^F_{BA} = 1.5 \left[ -\frac{4(16)}{8} \right] = -12 \text{ pie/kips}$$

$$M^F_{BC} = -M^F_{CB} = \frac{2}{3}(6)24 = 32 \text{ pie/kips}$$

$$M^F_{CD} = M^F_{DC} = 32 \text{ pie/kips}$$

3. Suponiendo que no hay translación de juntas, dejar que cada junta gire y balancear los momentos (distribución de momentos). Este paso se ilustra en la figura 10.54b.

4. Calcular las reacciones y la restricción artificial de juntas en B y D (figura 10.54c). Estas son las fuerzas que se necesitan para

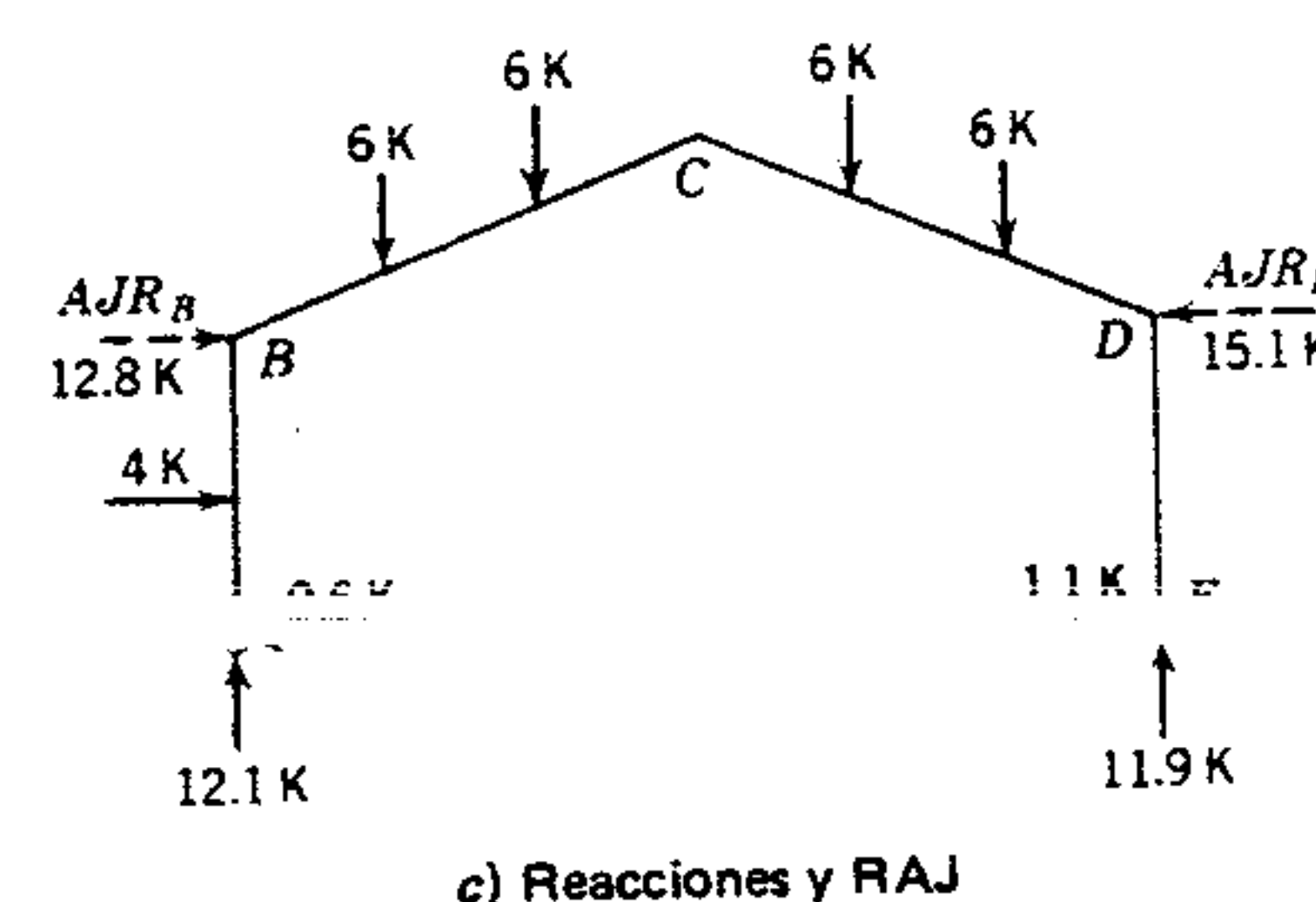
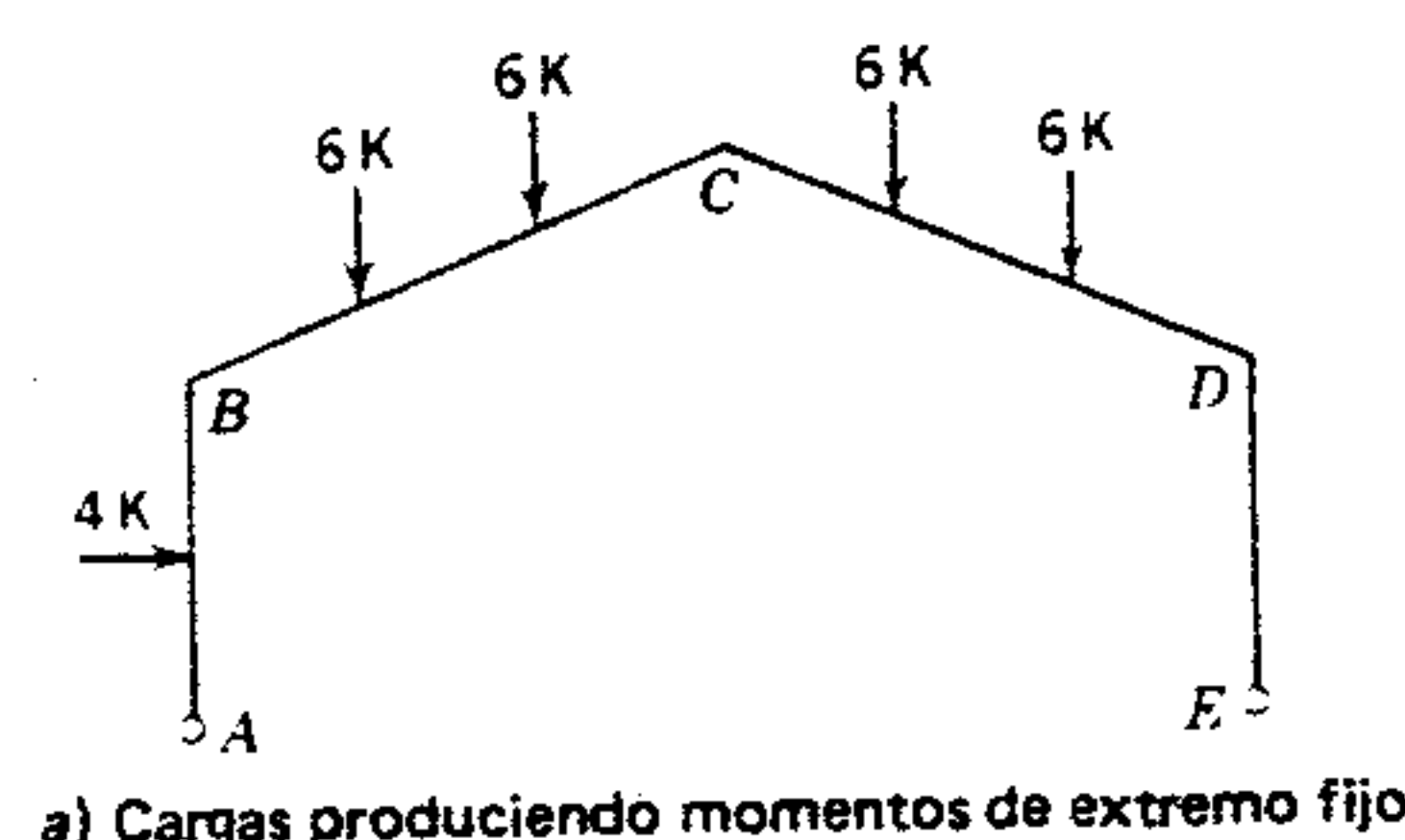
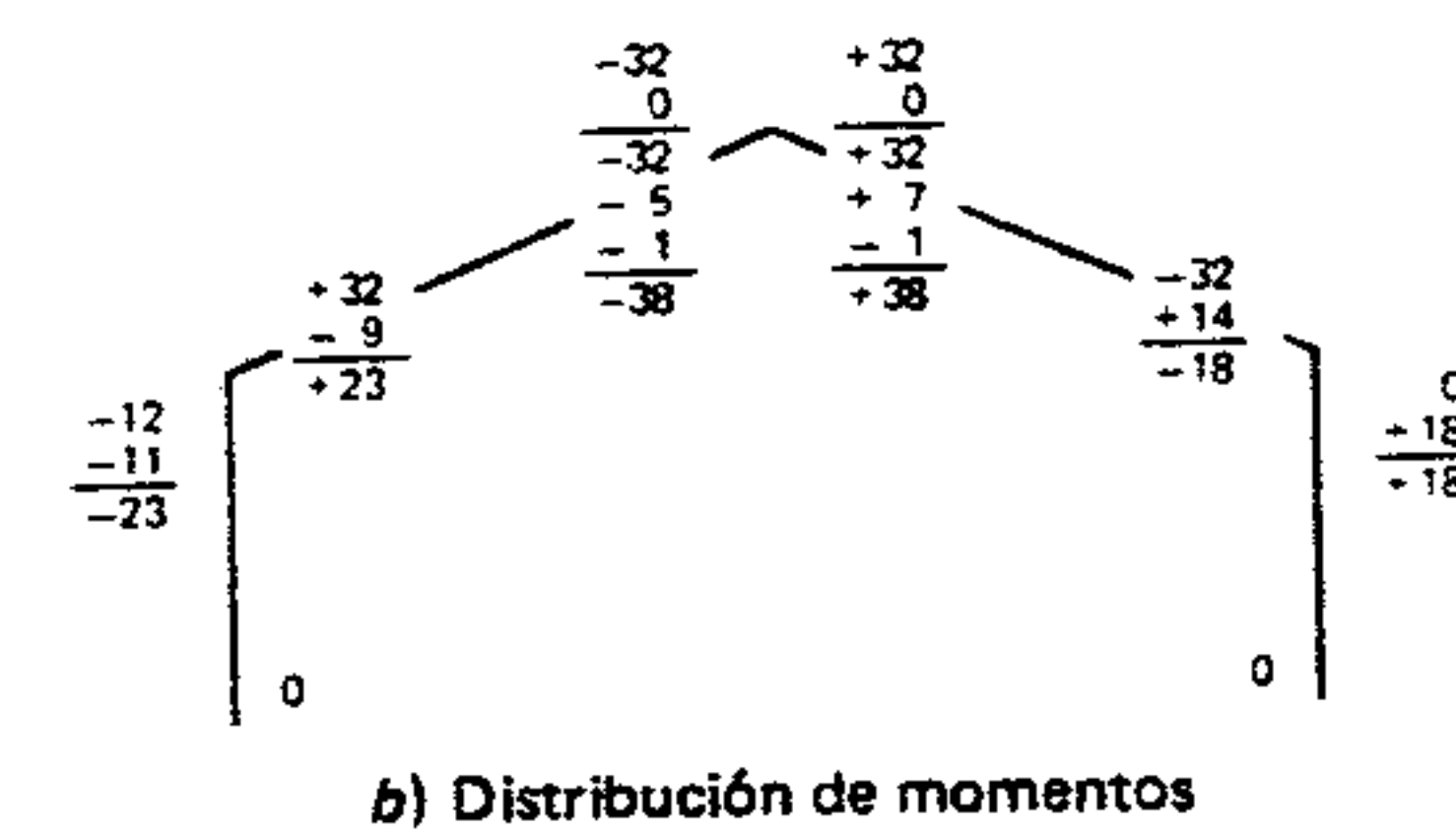


Figura 10.54 Análisis sin translación de juntas.

sostener el supuesto original de que no hay translación de juntas.

5. Desplazamiento lateral. Suponer un desplazamiento en B, igual al desplazamiento en C y en el mismo sentido (figura 10.55a). Por geometría se ve que el desplazamiento de la junta C es el mismo que para B y D, pero que el desplazamiento relativo entre B y C, y C y D, es igual a cero. Por lo tanto, no habrá momentos de extremo fijo en los miembros BC y CD debidos a este desplazamiento supuesto.

$$M^F_{BA} = M^F_{DA} = \frac{3EI\Delta}{L^2}$$

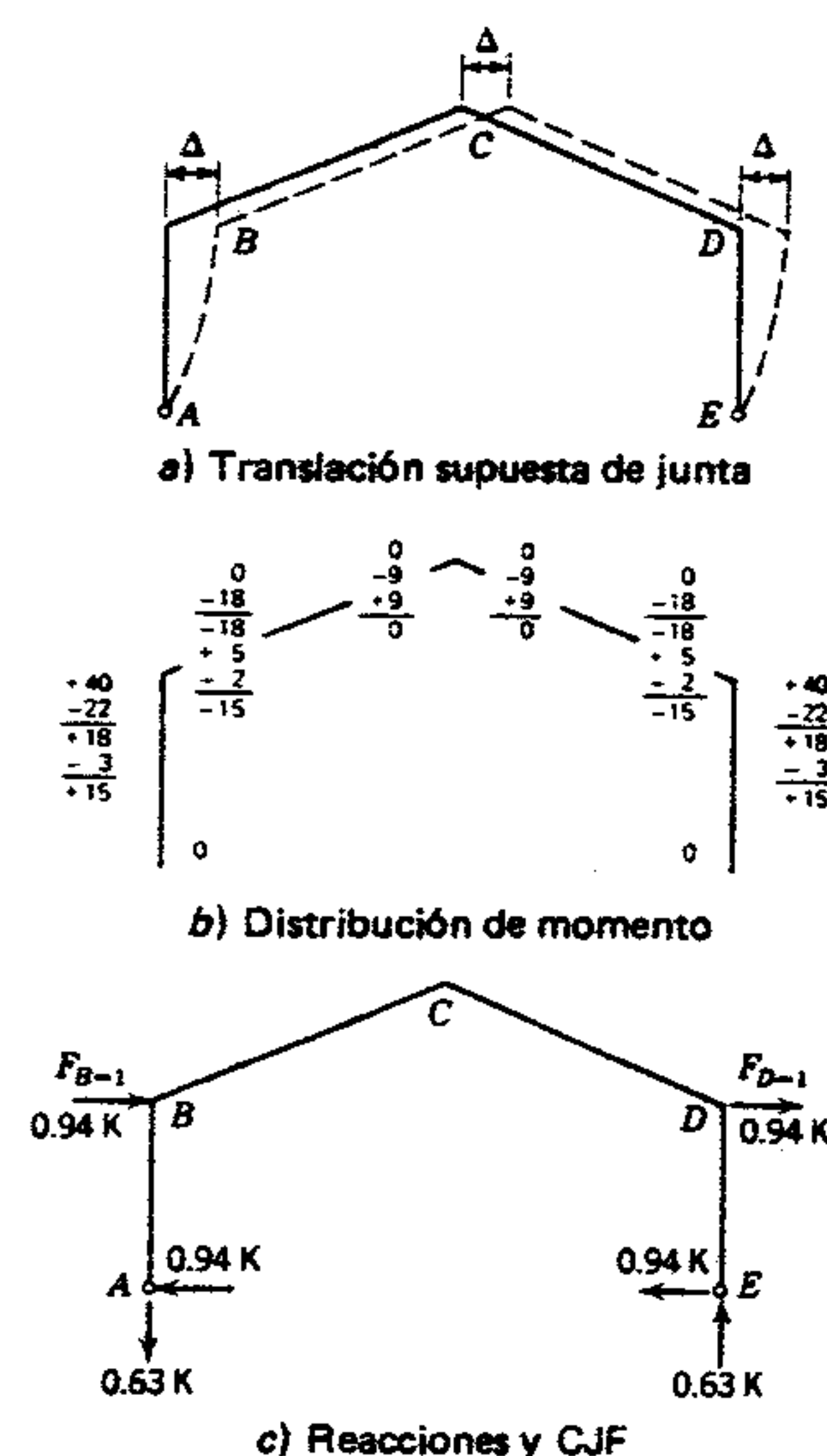


$$\begin{aligned} \sum M_D &= 0 & \sum M_B &= 0 \\ H_E &= \frac{18}{16} = 1.1 \text{ K} & H_A &= \frac{4(8) - 23}{16} = 0.6 \text{ K} \\ \sum M_D &= 0 & & \\ 6[8 + 16 + 32 + 40] & & & \\ + 4(8) - [1.1 + 0.6]16 & & & \\ V_A &= \frac{48}{48} = 12.1 \text{ K} \\ \sum M_B &= 0 & & \\ 6[8 + 16 + 32 + 40] & & & \\ + [1.1 + 0.6]16 - 4(8) & & & \\ V_E &= \frac{48}{48} = 11.9 \text{ K} \\ \sum M_C &= 0 \text{ (mitad derecha)} & & \\ 6[8 + 16] + 1.1(26) & & & \\ - 11.9(24) - 38 & & & \\ AJR_D &= \frac{10}{10} = 15.1 \text{ K} \\ \sum M_C &= 0 \text{ (mitad izquierda)} & & \\ -6[8 + 16] - 4(18) & & & \\ + 0.6(26) + 12.1(24) + 38 & & & \\ AJR_B &= \frac{10}{10} = 12.8 \text{ K} \end{aligned}$$



Suponer un valor arbitrario de 40 pie/kips para  $M_{BA}^F$  y  $M_{DA}^F$ , el momento en los extremos de los otros miembros es igual a cero. Liberar las juntas para balancear los momentos de extremo (figura 10.55b).

6. Con los momentos de extremo encontrados en el paso 5), y aplicando las condiciones de estática, calcular las reacciones y las fuerzas equilibrantes en las juntas  $F_{B-1}$  y  $F_{D-1}$  aplicadas en  $B$  y  $D$ , respectivamente.



$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ H_A &= \frac{15}{16} = 0.94 \text{ K} \\ \sum M_D &= 0 \\ H_E &= \frac{15}{16} = 0.94 \text{ K} \\ \sum H &= 0 \\ F_{B-1} &= 0.94 \text{ K} \\ F_{D-1} &= 0.94 \text{ K} \end{aligned}$$

Figura 10.55 Análisis con desplazamiento lateral.

Estas son las fuerzas necesarias para producir el desplazamiento lateral asociado con los momentos de extremo. Los cálculos aparecen en la figura 10.55c.

7. Desplegamiento. Suponer que las juntas  $B$  y  $D$  se mueven una distancia igual en sentidos opuestos (figura 10.56a). El desplazamiento del punto  $C$  en relación con los puntos  $B$  y  $D$  es como se muestra y se puede calcular por geometría (figura 10.56b). La pendiente de  $BC$  es  $1/2.4$ , y la hipotenusa  $2.6$ . Por triángulos semejantes

$$\text{como } \alpha = \frac{1}{2.6} = \frac{\Delta}{\Delta_{BC}}$$

De donde,

$$\Delta_{BC} = 2.6\Delta$$

8. Suponer cualquiera de los valores de momento de extremo fijo para los miembros, pero que sean compatibles con los desplazamientos relativos de extremos y las condiciones de extremo. En este capítulo se demostró que para los extremos fijos,

$$M^F = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

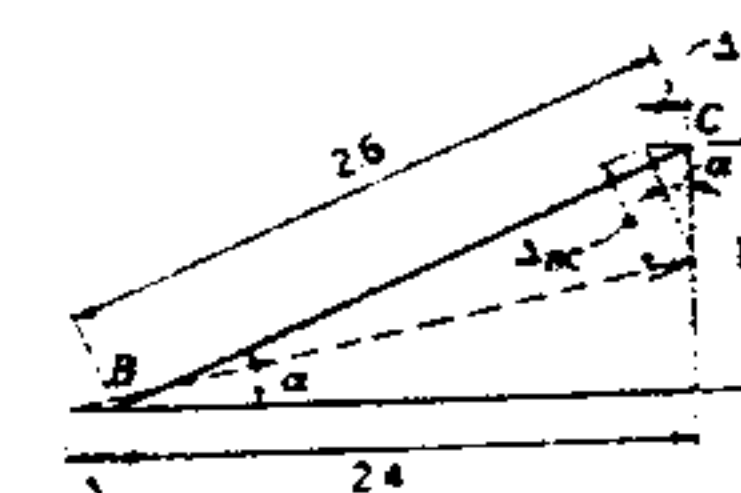
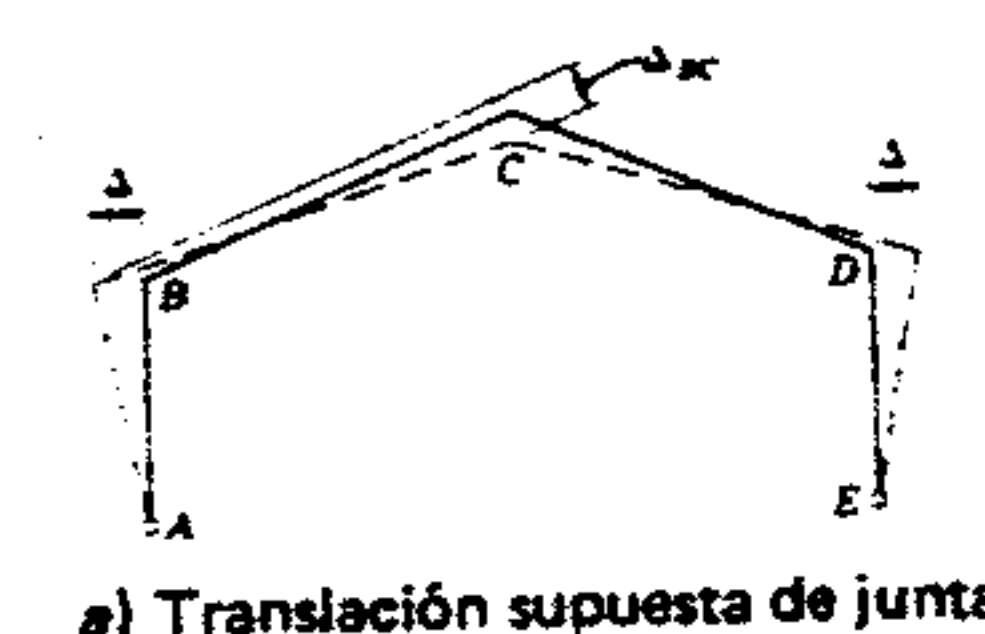
y que para los extremos articulados,

$$M^F = \frac{3EI\Delta}{L^2}$$

Se supone que los extremos de los miembros en  $B$ ,  $C$  y  $D$  son fijos. Por tanto, si se suponen 20 pie/kips para  $M_{BA}^F$  y  $M_{DE}^F$ , los otros momentos de extremo fijo serán  $2(2.6)20$ , o 104 pie/kips. Se debe tener cuidado de asignar el signo correcto a estos momentos de extremo fijo. Ahora se debe

girar las juntas para balancear los momentos de extremo (distribución de momentos). (Véase la figura 10.56c.)

9. De los momentos de extremo balanceados que se encontraron en el paso 8), y aplican-



b) Translación relativa de junta (B y C)

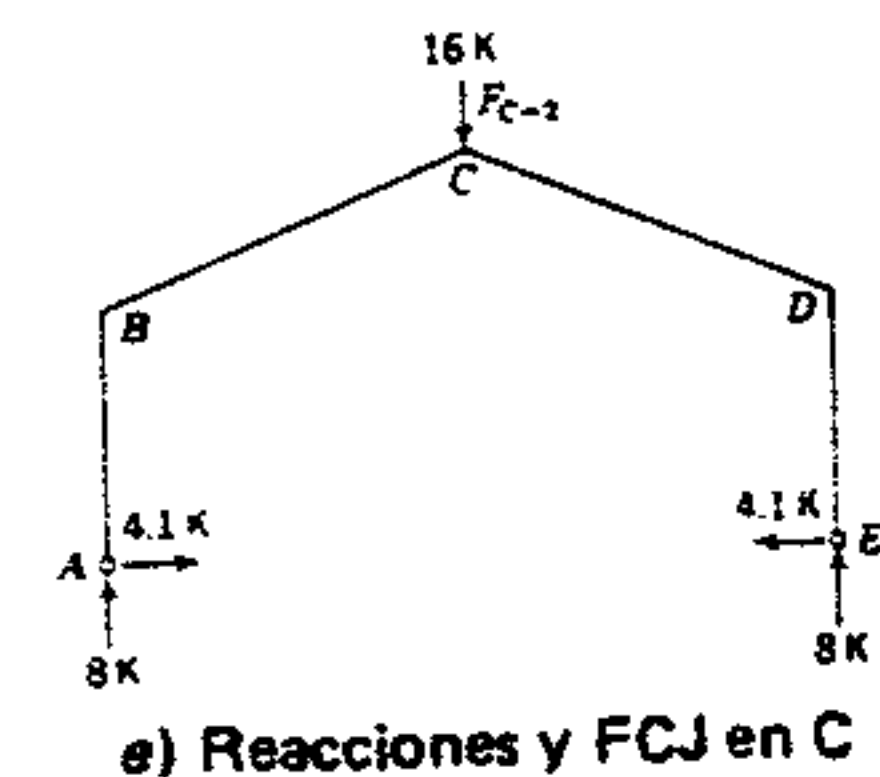
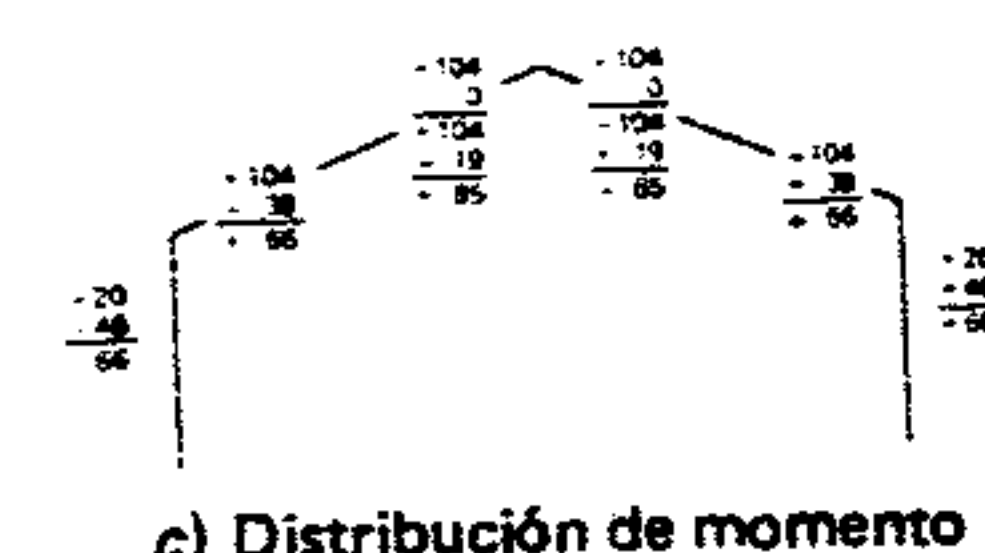


Figura 10.56 Análisis desplegamiento.

do las condiciones de estática, calcular las reacciones en  $A$  y  $E$ , y las fuerzas equilibrantes de las juntas  $F_{B-2}$  y  $F_{D-2}$  necesarias en los puntos  $B$  y  $D$ , respectivamente, para producir el desplegamiento originalmente supuesto (figura 10.56d).

10. Con el mismo desplegamiento, bajo las mismas condiciones supuestas, calcular la fuer-

$$\sum M_D = 0; \quad H_E = \frac{66}{16} = 4.1 \text{ K}$$

$$\sum M_B = 0; \quad H_A = \frac{66}{16} = 4.1 \text{ K}$$

Fuerzas horiz. en  $B$  y  $D$  para causar desplegamiento

$$\sum M_C = 0 \text{ (mitad derecha)}$$

$$F_{D-2} = \frac{4.1(26) + 85}{10} = 19.2 \text{ K} \rightarrow$$

$$\sum M_C = 0 \text{ (mitad izquierda)}$$

$$F_{B-2} = \frac{4.1(26) + 85}{10} = 19.2 \text{ K} \leftarrow$$

Fuerza vertical para causar desplegamiento

$$\sum M_C = 0 \text{ (mitad derecha)}$$

$$V_E = \frac{4.1(26) + 85}{24} = 8 \text{ K}$$

$$\sum M_C = 0 \text{ (mitad izquierda)}$$

$$V_A = \frac{4.1(26) + 85}{24} = 8 \text{ K}$$

$$\sum V = 0$$

$$F_{C-2} = 8 + 8 = 16 \text{ K}$$

za vertical necesaria  $F_{C-2}$  en el punto  $C$  (figura 10.56e). Debe observarse que  $F_{C-2}$  aplicada en el punto  $C$ , o las fuerzas  $F_{B-2}$  y  $F_{D-2}$ , producen el desplazamiento asociado a los momentos de extremo calculados en el paso 8).

11. Las restricciones artificiales de las juntas,  $RAJ_B$  y  $RAJ_D$ , evitan tanto el despla-



miento lateral como el desplegamiento. Calcular las proporciones de cada una, que evitan el desplazamiento lateral y el desplegamiento. Este paso se ilustra en la figura 10.57a. Asignar el símbolo  $x$  a las componentes que evitan el desplazamiento lateral y el símbolo  $y$  a las componentes que evitan el desplegamiento. Las componentes  $x$  para el desplazamiento lateral son iguales en  $B$  y  $D$  y se aplican en la misma dirección. Las componentes  $y$  para el desplegamiento son iguales en  $B$  y  $D$  y se aplican en direcciones opuestas.

12. Determinar las proporciones de la fuerza real en  $B$  que provoca el desplazamiento lateral y el desplegamiento (figura 10.57b). Este procedimiento es igual que el descrito para las RAJ en el paso 11).
13. Factores de corrección. Los números que al multiplicarse por los valores supuestos de momentos balanceados dan valores verdaderos basados en condiciones de carga reales, se denominan "factores de corrección".

El efecto de eliminar la restricción artificial de juntas será el mismo, que una fuerza igual y opuesta aplicada en el mismo pun-

to. Esto también es cierto para las componentes  $x$  y  $y$ . Por lo tanto, la parte de la RAJ para el desplazamiento lateral, 1.15 kips divididos entre la fuerza equilibrante de la junta para desplazamiento lateral  $F_{B-1}$ , se convierte en factor de corrección que, cuando se multiplica por los momentos de extremo encontrados en el paso 5), dará los momentos de extremo generados por la fuerza de 1.15 kips.

Los factores de corrección son los siguientes:

Efecto de la eliminación de las RAJ.

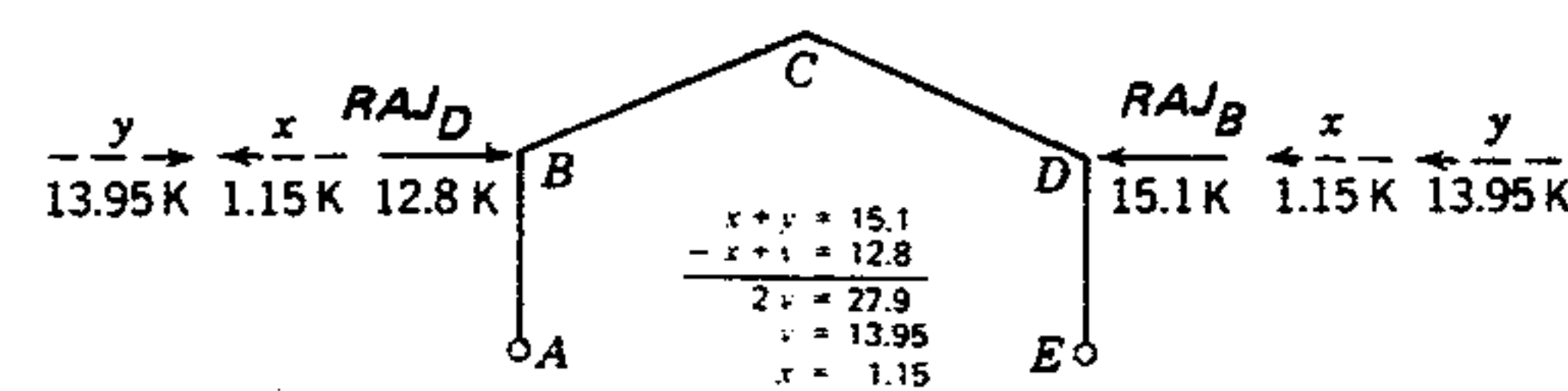
$$\text{Desplazamiento lateral} = \frac{1.15 \rightarrow}{0.94 \rightarrow} = +1.22$$

$$\text{Desplegamiento} = \frac{13.95 \leftarrow}{19.20 \leftarrow} = +0.73$$

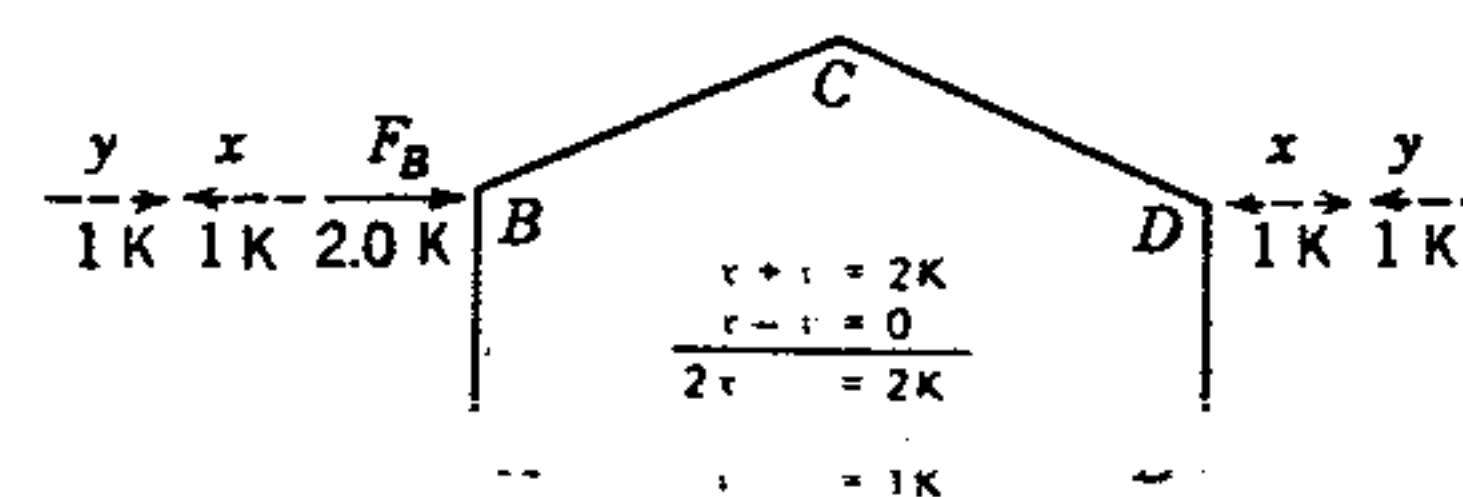
Efecto de la fuerza horizontal real en  $B$ :

$$\text{Desplazamiento lateral} = \frac{1.00 \rightarrow}{0.94 \rightarrow} = +1.06$$

$$\text{Desplegamiento} = \frac{1.00 \leftarrow}{19.20 \leftarrow} = -0.052$$



a) Proporciones de la RAJ evitando el desplazamiento lateral ( $x$ ) y desplegamiento ( $y$ )



b) Proporciones de la fuerza en  $B$  que causa desplazamiento lateral ( $x$ ) y desplegamiento ( $y$ )

Figura 10.57 Componentes del desplazamiento lateral y desplegamiento.

Efecto de la fuerza real en  $C$

$$\text{Desplegamiento} = \frac{6 \downarrow}{16 \downarrow} = +0.375$$

14. Momento de extremos finales. El momento de extremos finales en cualquier punto será la suma algebraica de:

- a) Momento de extremo balanceado causado por cargas entre los extremos de miembros, sin translación de juntas.
- b) Efecto de la eliminación de la restricción artificial de juntas:

1. Factor de corrección por momento de desplazamiento lateral.
2. Factor de corrección por momento de desplegamiento.

- c) Efecto de la fuerza horizontal en  $B$ :

1. Factor de corrección por momento de desplazamiento lateral.

2. Factor de corrección por momento de desplegamiento.

- d) Efecto de la fuerza vertical en  $C$ : factor de corrección por momento de desplegamiento.

El paso anterior se presenta ya ejecutado para cada momento de extremo en la tabla 10.1.

15. De los momentos de extremo finales encontrados en el paso 14), calcular las reacciones de  $A$  y  $E$ . Nótese que el marco está en equilibrio sin el uso de restricciones artificiales de juntas. Trazar los diagramas de momento flexionante (figura 10.58).

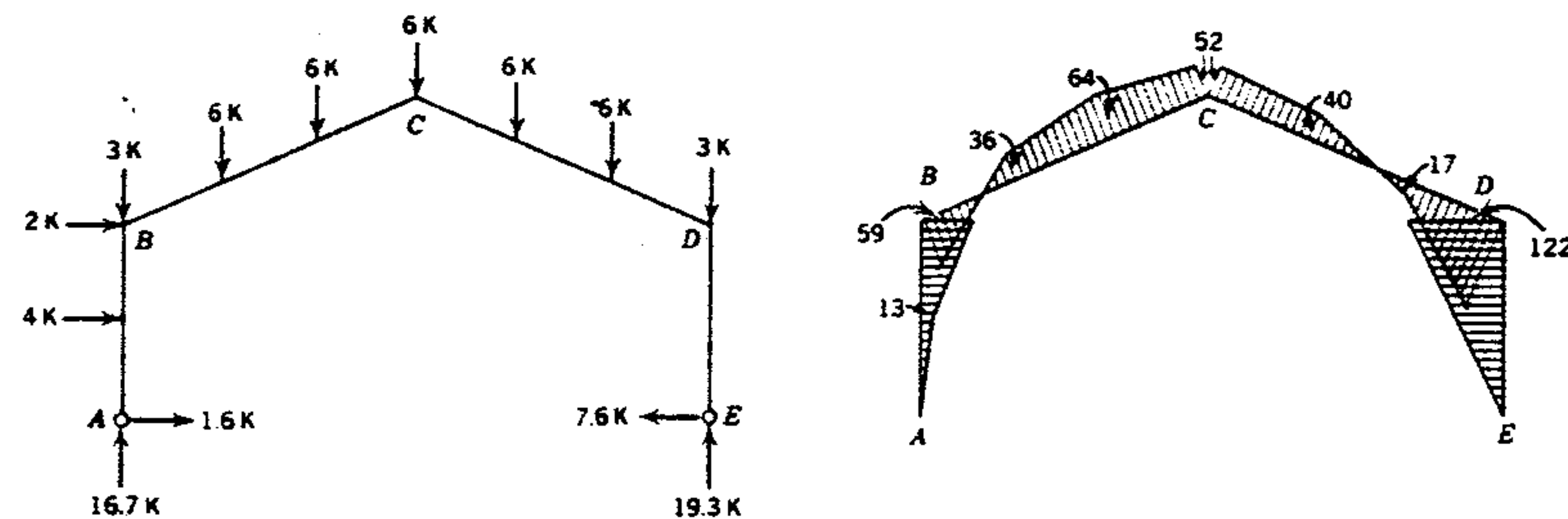
## 10.15 MARCOS RÍGIDOS, CONCLUSIÓN

El diseño de marcos rígidos no está completo hasta que se diseñan y detallan todas las juntas para lograr una condición compatible con las condiciones de diseño. Un miembro se puede sujetar rígi-

Tabla 10.1 (Resumen de momentos de extremo, kips/pie).

Localización del momento	A-B	B-A	B-C	C-B	C-D	D-C	D-E	E-D
Desplazamiento lateral arbitrario	0	+15	-15	0	0	-15	+15	0
Desplegamiento arbitrario	0	-66	+66	+85	-85	-66	+66	0
Cargas entre extremos de miembros sin translación de juntas	0	-23	+23	-38	+38	-18	+18	0
Corrección para RAJ	(+ 0.73) $M$ debido al desplazamiento arbitrario							
	0	+18	-18	0	0	-18	+18	0
Efecto de fuerza horizontal en $B$ ( $2^k$ )	(+ 1.22) $M$ debido al desplazamiento lateral arbitrario							
	0	-48	+48	+62	-62	-48	+48	0
	(+ 1.06) $M$ debido al desplazamiento lateral arbitrario							
	0	+16	-16	0	0	-16	+16	0
	(- 0.05) $M$ debido al desplazamiento arbitrario							
	0	+3	-3	-4	+4	+3	-3	0
Efecto de fuerza vertical en $C$ ( $6^k$ )	(0.38) $M$ debido al desplazamiento arbitrario							
	0	-25	+25	+32	-32	-25	+25	0
Momentos finales	0	-59	+59	+52	-52	-122	+122	0





a) Reacciones finales (por estática)

b) Diagrama de momento flexionante

$$\sum M_D = 0; \quad H_E = \frac{122}{16} = 7.6 \text{ K}$$

$$\sum M_B = 0; \quad H_A = \frac{59 - 4(8)}{16} = 1.6 \text{ K}$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$V_E = \frac{4(8) + 2(16) + 6[8 + 16 + 24 + 32 + 40] + 3(48)}{48} = 19.3 \text{ K}$$

$$\sum M_E = 0$$

$$V_A = \frac{6[8 + 16 + 24 + 32 + 40] + 3(48) - 2(16) - 4(8)}{48} = 16.7 \text{ K}$$

Revisión

$$\sum H = 0; \quad 4 + 2 + 1.6 = 7.6 \text{ K}$$

$$\sum V = 0; \quad 6(5) + 2(3) = 16.7 + 19.3 \text{ K}$$

Figura 10.58 Análisis final.

damente a otro mediante soldaduras, y usualmente se emplean placas adicionales para evitar el pandeo local.

Se debe destacar especialmente el hecho de que el método de análisis descrito en este capítulo es aplicable solamente a miembros de sección transversal constante. Con frecuencia es conveniente

trazar los diagramas de momento flexionante máximos. Esta parte reforzada se denomina con frecuencia cartela. Los marcos rígidos acartelados casi siempre se analizan mediante el uso de coeficientes, manuales o computadora. Para mayor información sobre este tema, consúltese "Single Span Rigid Frames in Steel", publicación

del American Institute of Steel Construction. (Véase también el capítulo 11 para una introducción al diseño plástico.)

## PROBLEMAS

1. El marco rígido de la figura 10.59 tiene un momento de inercia constante. Calcular los momentos en A, B y C, y todas las reacciones. Trazar los diagramas de cortante y momento flexionante. (Las respuestas se dan en el apéndice G.)
2. Determinar las reacciones y trazar los diagramas de cortante y momento flexionante para el mar-

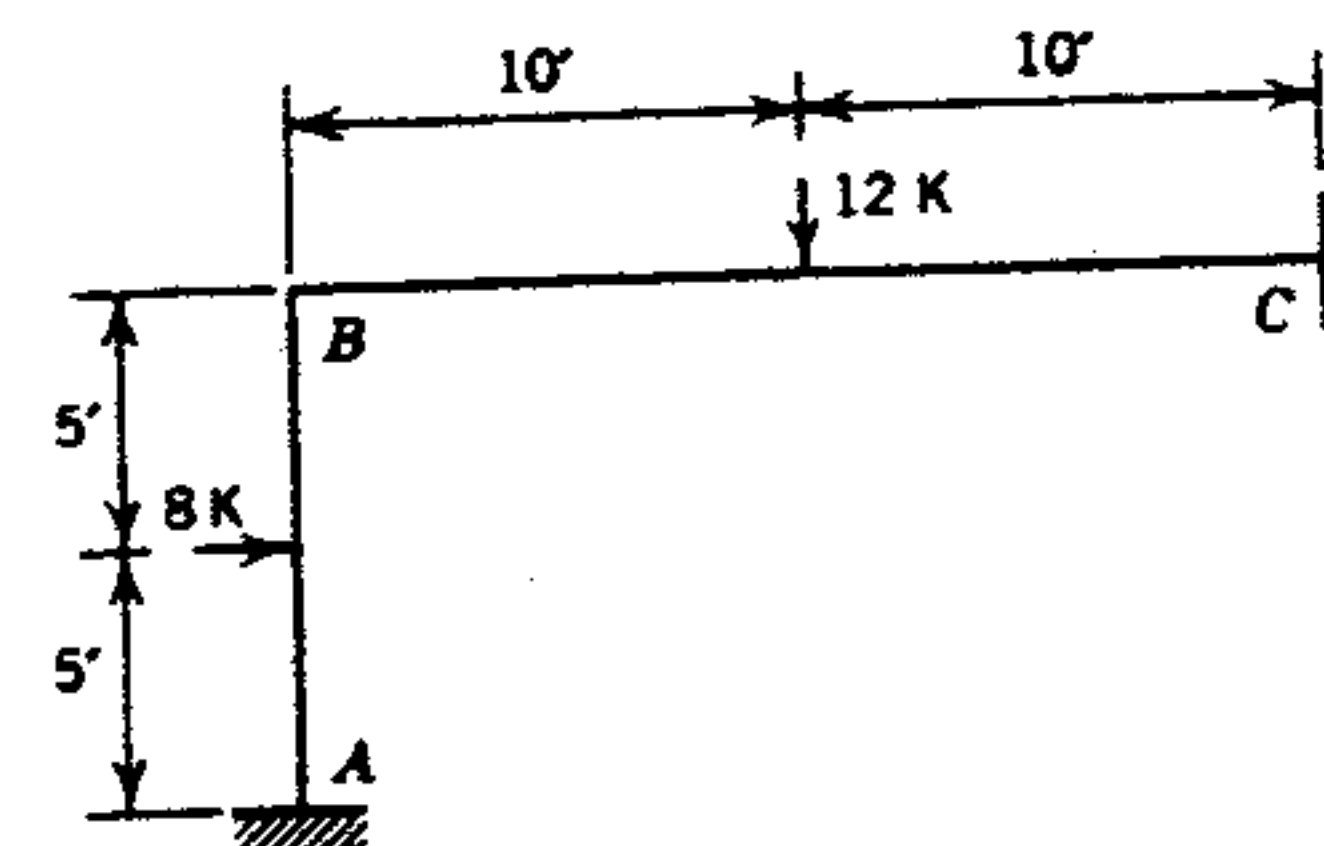


Figura 10.59

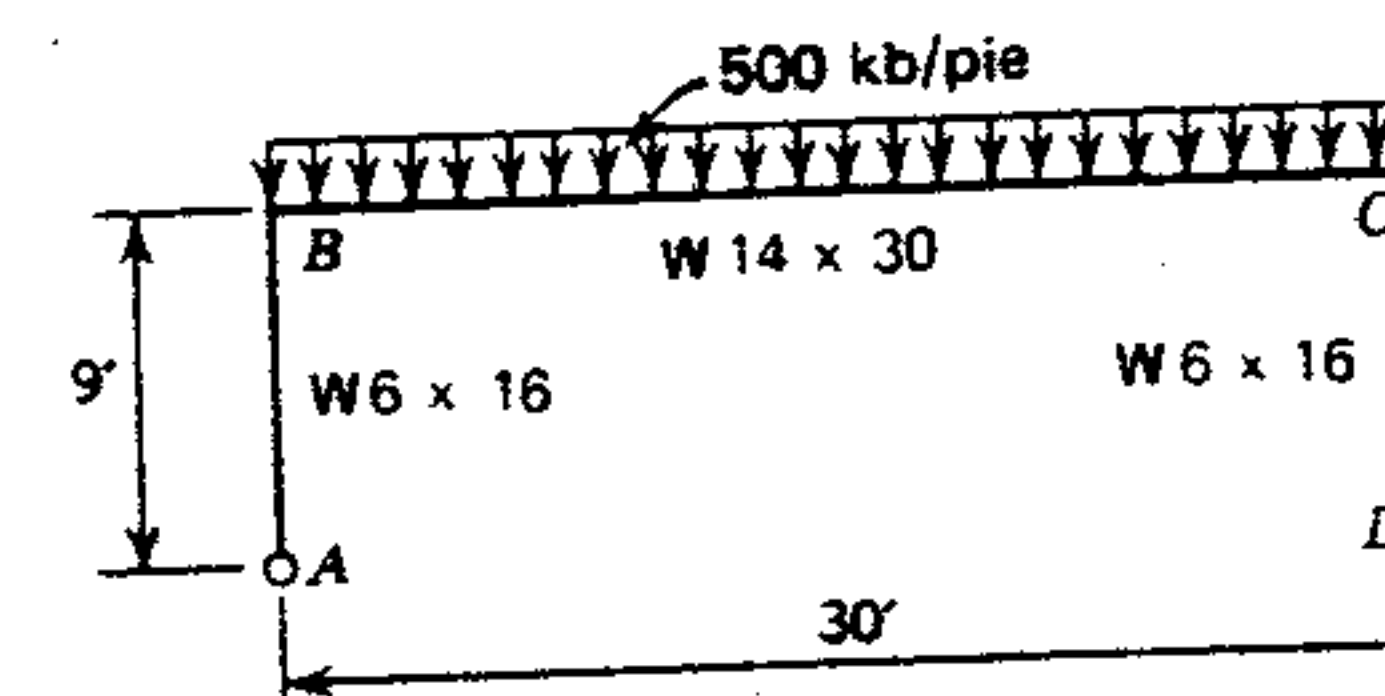


Figura 10.60

co rígido ilustrado en la figura 10.60. Las bases de las columnas están articuladas.

3. Determinar las reacciones y trazar los diagramas de cortante y momento flexionante para el marco rígido ilustrado en la figura 10.61. Se supone que las bases de las columnas están articuladas y que el momento de inercia es constante para todos los miembros. (Las respuestas se dan en el apéndice G.)

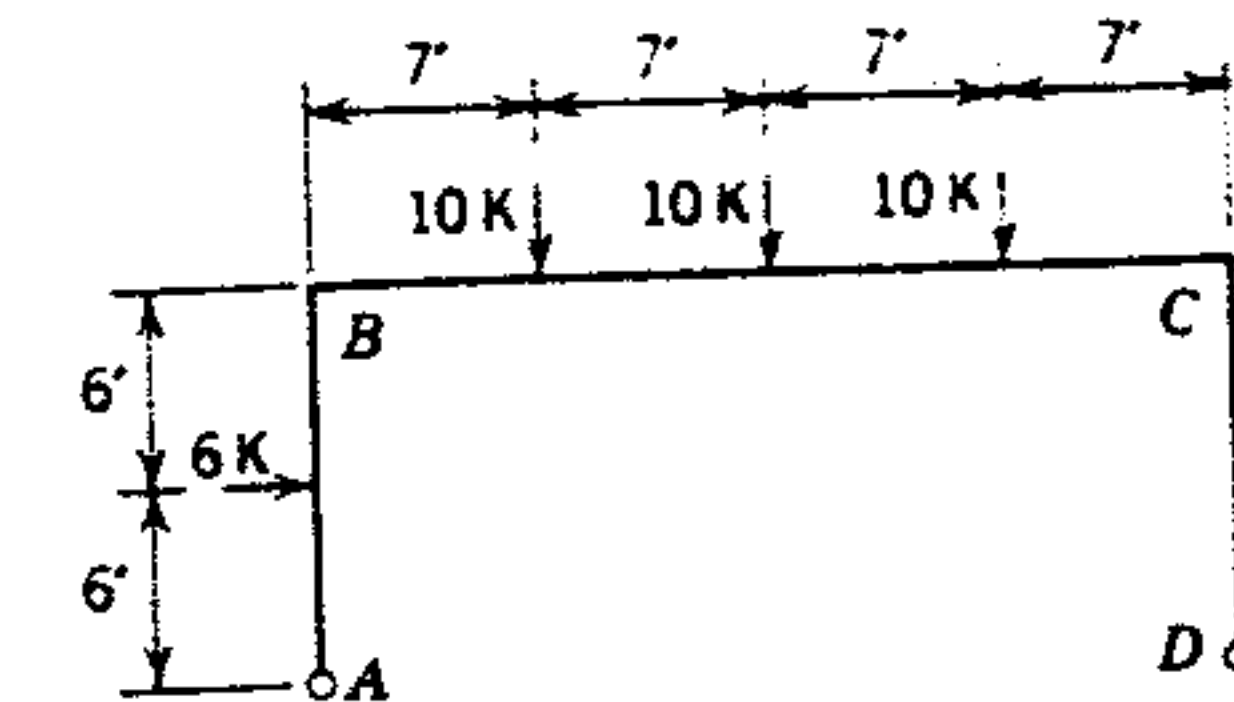


Figura 10.61

4. Determinar las reacciones y trazar los diagramas de cortante y momento flexionante para el marco rígido ilustrado en la figura 10.62. Los momentos de inercia de todos los miembros son iguales. La base de la columna A está articulada, mientras que la de D está totalmente fija.

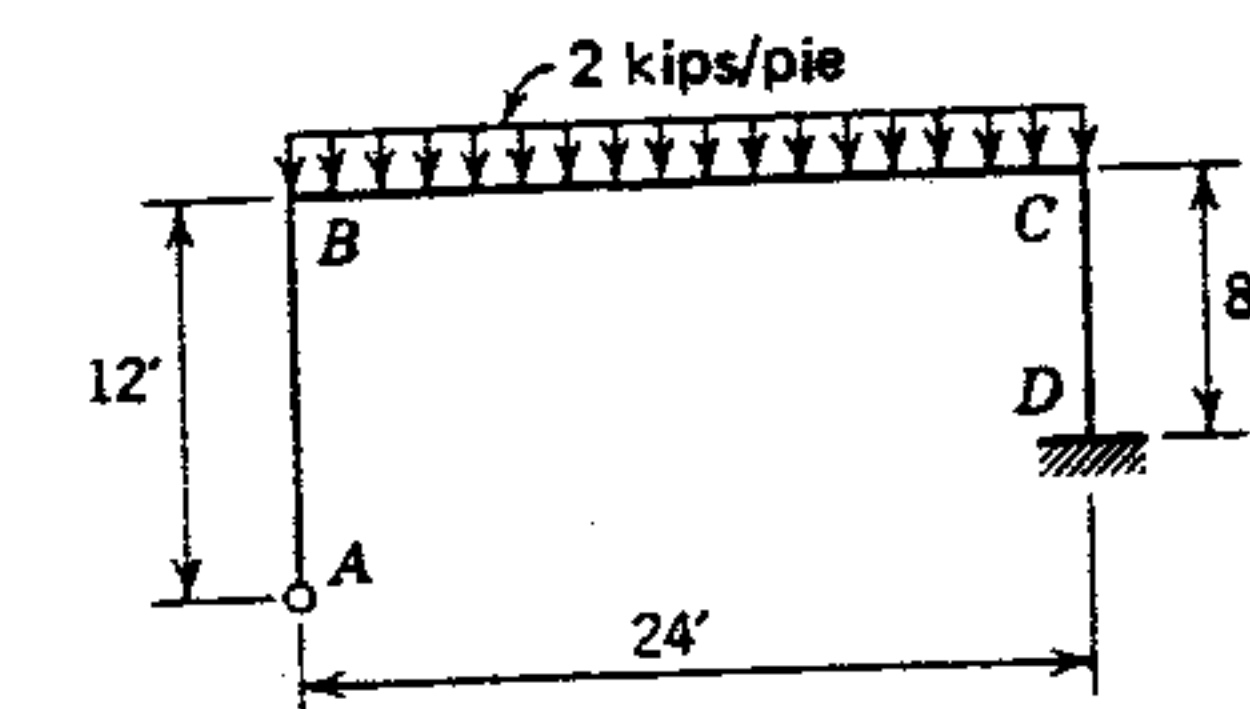


Figura 10.62



## Resistencia última y diseño plástico

### 11.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos analíticos modernos y los nuevos materiales de construcción han propiciado la creación de un enfoque alternativo al diseño de edificios de acero denominado Diseño de Resistencia Última o Diseño Plástico. En la parte 2 de la Especificación AISC de 1978 se trata este otro método de diseño; se permiten todos los aceros con grados de límite elástico hasta 65 k/pulg<sup>2</sup> inclusive (se excluye el acero A514 de ASTM). Se espera que en muy poco tiempo el diseño estructural de la mayoría de los edificios de acero se basará, en parte, en este proceso. Sin embargo, debe remarcarse que este diseño de resistencia última nunca podrá reemplazar completamente al diseño basado en el proceso elástico (diseño convencional). Esto se debe a que el diseño de resistencia última se basa en cargas irreales (aumentadas para admitir un factor de seguridad). Pero, a pesar de la inclusión de este factor de seguridad, la estructura debe comportarse, de hecho, satisfactoriamente bajo las cargas reales y permanecer dentro del límite elástico del material. Si no, se producirán daños permanentes.

El propósito principal desde el capítulo 1 al 10 ha sido presentar principios generales relacionados con el diseño estructural de edificios de acero. Uno de sus supuestos básicos ha sido que el esfuerzo máximo no debe exceder en modo alguno el esfuerzo de fluencia del material. Esto es razonable, como lo debe ser asegurarse de que no habrá daño estructural permanente y proporcionar un factor adecuado (aunque un poco impreciso) de seguridad. En este contexto, la "teoría de la elasticidad" es la base apropiada para el diseño.

Sin embargo, tanto la disponibilidad de nuevos aceros de mayor resistencia como los avances en la tecnología de la construcción con acero han propiciado una mayor confianza en la continuidad de las estructuras. Por ello el factor de seguridad se vuelve cada vez más conservador a medida que aumenta la resistencia. En consecuencia, la resistencia última o límite de la estructura en su conjunto adquiere cada vez mayor importancia. Este reconocimiento de la resistencia última no es



nuevo. Se recordará que en la publicación original de Euler (1757), ya se trataba la resistencia última de la columna. La utilización de la resistencia última como un enfoque de diseño no presupone que el esfuerzo de fluencia se excederá en algún punto de la estructura bajo las cargas esperadas durante su vida útil; al contrario, se toman todas las precauciones para evitar tal ocurrencia, ya que el resultado sería un daño permanente a la estructura. La diferencia es que con el diseño elástico, el factor de seguridad se basa en la diferencia entre el esfuerzo real máximo bajo cargas predeterminadas y el esfuerzo de fluencia inicial que ocurriría si se permitiera que las cargas aumentaran. Con el diseño plástico una parte de la resistencia de reserva de la estructura, una vez alcanzado el esfuerzo de fluencia inicial, se utiliza como parte del factor de seguridad. Sin embargo, esta resistencia de reserva es significativa solamente si la estructura que se diseña es estáticamente indeterminada.

Es importante que los términos y las frases usados en este enfoque de diseño alternativo se entiendan con claridad. Tienen interés inmediato los términos: Resistencia última, teoría plástica o diseño plástico y diseño límite.

**Resistencia última.** Ésta es la condición que se presenta cuando una viga, un elemento de una estructura o la estructura en su conjunto, alcanza su capacidad para soportar carga. En esta situación, cualquier incremento adicional de carga, no importa cuán pequeño sea, causará fractura o colapso.

**Teoría plástica o diseño plástico.** El acero tiene un comportamiento estructural predecible en el rango de esfuerzos que exceden al esfuerzo de fluencia es decir, el rango plástico. Dentro de este rango, el esfuerzo deja de ser proporcional a la deformación y hay deformación permanente. El diseño plástico implica un procedimiento de diseño basado en el comportamiento de la estructura o el material.

Existen dos aspectos principales de la teoría plástica. El primero comprende el patrón de esfuerzos en una sola sección transversal y la resultante

del esfuerzo desarrollado (En la sección 11.2 se trata este aspecto para un caso sencillo de flexión). El segundo aspecto comprende el elemento como un todo; por ejemplo, toda la longitud de una serie de vigas continuas, el marco completo, la estructura como un todo, donde se puede considerar una posible redistribución de momentos flexionantes, de fuerzas cortantes y de cargas axiales una vez que la estructura ha comenzado a ceder. En las restantes secciones de este capítulo se estudia este aspecto del diseño plástico.

**Diseño límite.** Con este término se describe el método para llegar a un diseño final mediante una serie de criterios limitantes. Por ejemplo, la carga máxima deseable sobre una viga se puede establecer mediante la limitación del esfuerzo flexionante, el esfuerzo cortante, la deflexión, la tendencia al pandeo, etc. Cualquiera de estos criterios podría establecer la carga; por lo tanto, en cierto sentido, el proceso de diseño convencional tratado en este texto es una forma de diseño límite. Sin embargo, el término diseño límite se usa con mayor frecuencia para describir el proceso de diseño general que incluye la resistencia última (establecida mediante la teoría plástica) como uno de los criterios limitantes. En este proceso, es necesario considerar todas las maneras en que podría fallar la estructura o colapsarse, para aislar el tipo de falla que requiere la menor carga.

El diseño estructural basado en la resistencia última, utilizando la teoría plástica, podría ahorrar material si la estructura fuera estáticamente indeterminada y si estuviera adecuadamente arriostrada contra el pandeo local o lateral. Como el diseño se basa en esfuerzos mayores, se necesita dar mayor atención al pandeo. Asimismo, como se pueden obtener secciones más pequeñas, se debe tener especial cuidado en evitar las deflexiones excesivas. A esto se debe que el diseño basado en la resistencia última nunca puede reemplazar por completo al diseño basado en la teoría elástica.

Esta introducción al tema del diseño plástico estará limitada a ciertos aspectos de la flexión y el esfuerzo normal. Para un tratamiento más a fondo, incluyendo esfuerzo cortante, así como esfuerzo normal y de flexión, el lector puede consultar el

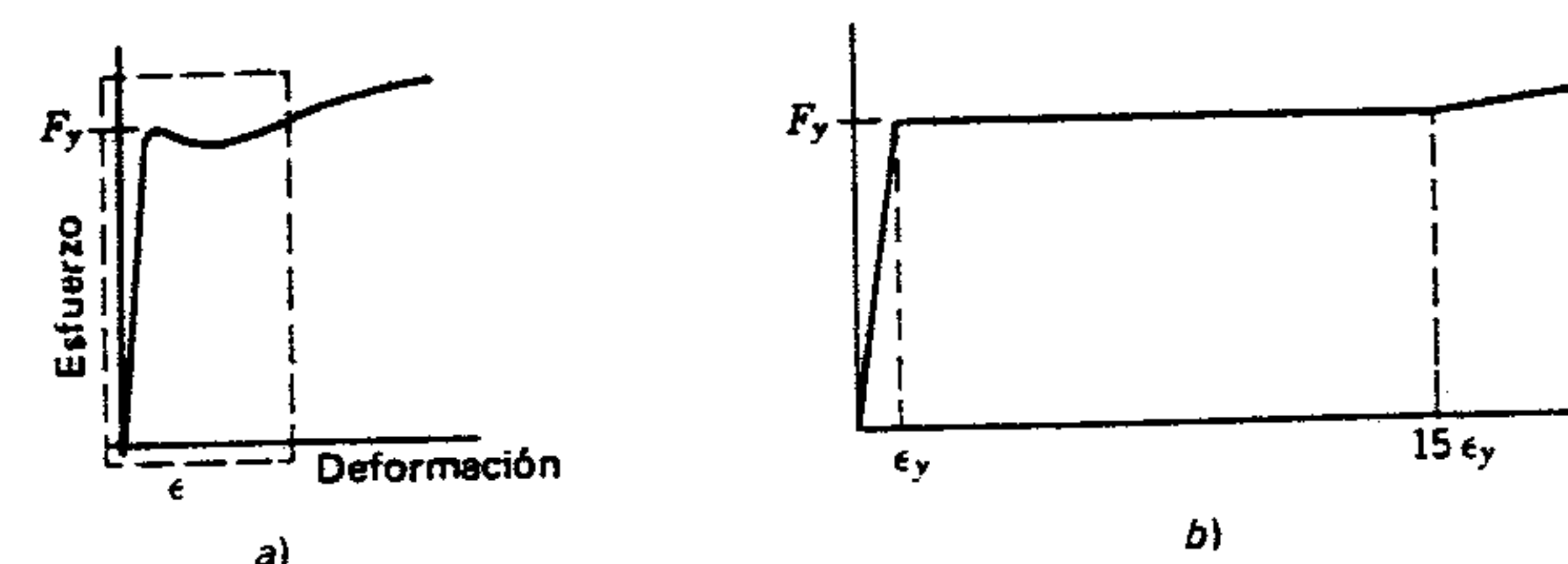


Figura 11.1 Relación esfuerzo-deformación.

"Commentary on Plastic Design in Steel" de la American Society of Civil Engineers, o bien, "Plastic Design in Steel" del AISC.

## 11.2 TEORÍA PLÁSTICA

Debido a que el acero es un material dúctil, puede soportar la deformación bajo carga sin fracturarse. En la figura 11.1a se ilustra la curva normal de esfuerzo-deformación para acero estructural, y en b), la parte de a) dentro de las líneas punteadas se ha trazado de nuevo a una escala horizontal ampliada. En b) la curva se ha alterado más con propósitos ilustrativos, al cambiar las líneas ligeramente curvas por líneas rectas.

Cuando se llega al esfuerzo de fluencia designado por  $F_y$ , se tiene una deformación correspondiente  $\epsilon_y$ . Cualquier pequeño incremento del esfuerzo más allá de este punto hará que el acero se comporte plásticamente. Sin embargo, su ductilidad permite que se deforme 15 veces en el punto de fluencia sin un aumento notable en el esfuerzo.

Esto se denomina habitualmente gran fluencia del material a un esfuerzo constante.

Si este fenómeno se aplica a un miembro a flexión (figura 11.2a), los patrones de esfuerzo ilustrados en b), c), d) y e) son los resultantes de momentos flexionantes cada vez más altos. En la teoría elástica, el esfuerzo es proporcional a la distancia desde el eje neutro, y se forman patrones triangulares de esfuerzo como los ilustrados en las figuras 11.2b) y c). En c), la fibra más alejada ha alcanzado su esfuerzo de fluencia, y el esfuerzo correspondiente resultante o momento flexionante elástico es  $M_y = F_y (S)$ . Cualquier momento adicional haría fluir la fibra más alejada, pero al mismo tiempo se mantendría el esfuerzo de fluencia. Por lo tanto, las fibras adyacentes se someten a un aumento de deformación con el correspondiente aumento en el esfuerzo hasta un máximo de  $F_y$ . Esta condición se ilustra en la figura 11.2d. Para momentos todavía mayores, el proceso continúa hasta que toda la sección está esforzada hasta  $F_y$  como se ve en la figura 11.2e. Éste es el esfuerzo máximo en toda la sección. En esta condición de

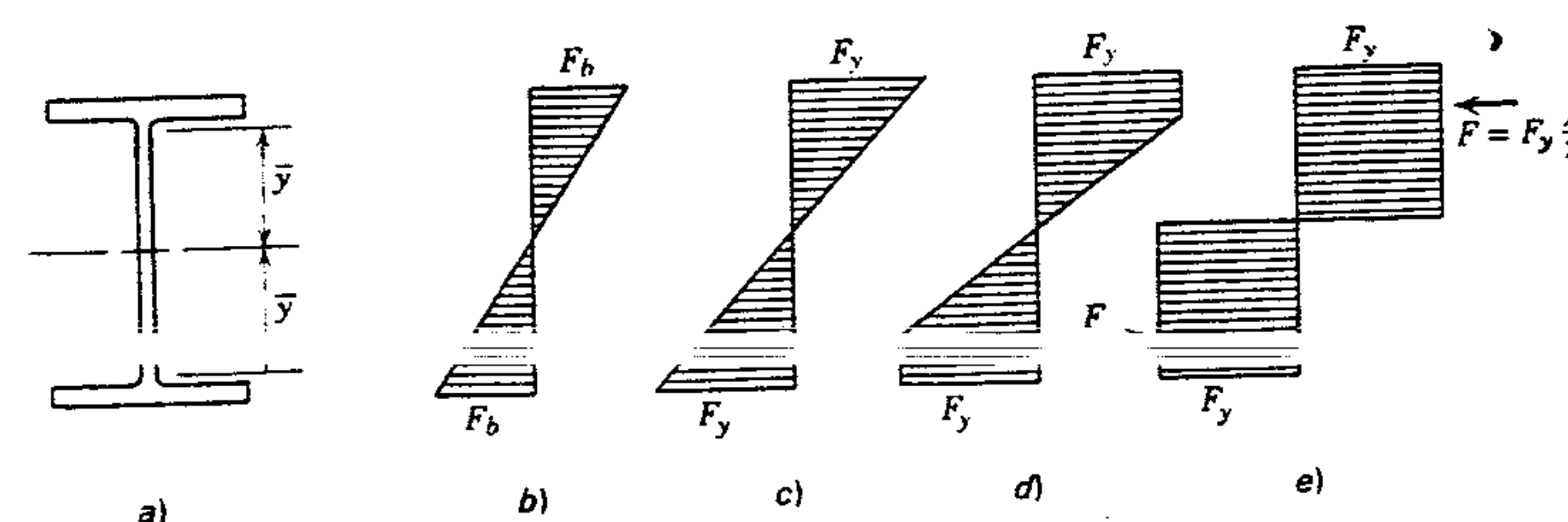


Figura 11.2 Secuencia de los esfuerzos elástico-plástico en flexión.



esfuerzo, se forma una articulación denominada plástica, y el momento correspondiente se denomina momento plástico ( $M_p$ ). Es importante observar que en este estado, la viga esforzada parecería girar fácilmente bajo cualquier tendencia a incrementar el momento; sin embargo, la viga podrá sostener el momento plástico mientras gira.

Como el esfuerzo es constante (pero de signo contrario) tanto en la región de tensión como de compresión, las áreas y las fuerzas internas deben ser iguales. Expresado esto en forma de ecuación

$$F_{\text{tensión}} = F_{\text{compresión}} = F_y \left( \frac{A}{2} \right)$$

donde  $A$  = área total de la viga.

Esta fuerza interna se localiza en el centroide de cada una de las áreas respectivas a tensión y compresión. Por lo tanto, el momento plástico es el producto de esta fuerza interna y la distancia perpendicular entre sus líneas de acción, o sea

$$M_p = F_y \left( \frac{A}{2} \right) 2\bar{y}$$

Esta expresión también se puede plantear como

$$M_p = F_y \left[ 2 \left( \frac{A\bar{y}}{2} \right) \right]$$

La cantidad dentro de los paréntesis circulares se reconocerá como el momento estático de la mitad de la sección transversal respecto al eje neutro. Esta cantidad se trató en este texto al estudiar el esfuerzo cortante horizontal. Se denominó  $Q$ ; por lo tanto

$$M_p = 2QF_y$$

La cantidad  $2Q$  se llama módulo de sección plástica, y el símbolo  $Z$  expresa su valor. Los valores de  $Z$  para diversas formas de acero se listan en la parte 2 del Manual AISC, inmediatamente después del listado de los módulos de sección elástica ( $S$ ). Por lo tanto,

$$M_p = ZF_y$$

$Z$  siempre será mayor que  $S$  en una cantidad que depende de las dimensiones reales de la viga. La relación entre  $Z$  y  $S$  se denomina factor de forma ( $u$ ) o

$$u = \frac{Z}{S}$$

Para formas  $S$  y  $W$ , por lo general se encontrará que el valor de  $u$  va de 1.02 a 1.2, y comúnmente es muy cercano a 1.12. No sólo se debe desarrollar todo el momento plástico ( $M_p$ ) sino que también se debe permitir deformación adicional, que permita la rotación, y ambos se deben efectuar sin pandeo o torcimiento local. Estos requisitos se tratarán más detalladamente.

Como consecuencia de lo anterior, se establecen límites rígidos sobre ancho-espesor y criterios especiales para evitar el pandeo del patín. Estas restricciones son más severas que las que rigen el diseño por el método elástico.

En la sección 2.7 de la Especificación AISC 1978 se listan relaciones máximas de  $b_f/2t_f$  (ancho y espesor de patines para formas de una sola alma) para diferentes grados de esfuerzo de fluencia de acero. Para el acero A36 esta relación es de 8.5. En la misma sección de la Especificación se da una fórmula para limitar la relación peralte-espesor de almas, es decir,  $d/t \leq 412/\sqrt{F_y}$ , modificada más cuando la viga debe resistir también una carga axial además de un momento flexionante.

En la sección 2.9 de la Especificación se describen los criterios de arriostramiento lateral. La fórmula apropiada para las dimensiones del arriostramiento dependen de la relación entre el momento de extremo aplicado (el menor) y el momento plástico de la viga ( $M/M_p$ ). Si una curvatura simple resulta en una relación de signo negativo, y una curvatura doble resulta en una relación de signo positivo, el valor de la relación  $M/M_p$  va de  $-1.0$  a  $+1.0$ . Cuando  $M_p \geq -1.0$ , pero  $< -0.5$ , la longitud máxima no arriostrada es

$$L_{cr} = r_y \left( \frac{1375}{F_y} + 25 \right)$$

y cuando  $M/M_p \geq -0.5$ , pero  $< +1.0$ , la longitud no arriostrada se limita a

$$L_{cr} = r_y \left( \frac{1375}{F_y} + 25 \right)$$

donde  $r_y$  es el radio de giro del miembro respecto a su eje débil.

### Ejemplo 1

Una sección  $W 12 \times 26$  tiene dos placas de patín de  $3/8 \times 12$  pulg soldadas para hacer una sección compuesta como la ilustrada en la figura 11.3. Todo el acero es A36.

- Comprobar que las relaciones ancho-espesor están de acuerdo con la sección 2.7 de la Especificación AISC 1978.
- Calcular el momento flexionante respecto al eje  $x$  que causará primero la fluencia ( $M_y$ ). Calcular el momento flexionante plástico  $M_p$ .
- Suponer un gradiente de momento lineal de 0 a  $M_p$  (es decir,  $M/M_p = 0$ ), determinar a qué intervalos se requeriría soporte lateral.

### Solución a

- Revisando la proyección de patín combinado,

$$\frac{W}{t} = \frac{5.5}{0.38 + 0.375} = 7.28 < 8.5; \text{ satisfactoria}$$

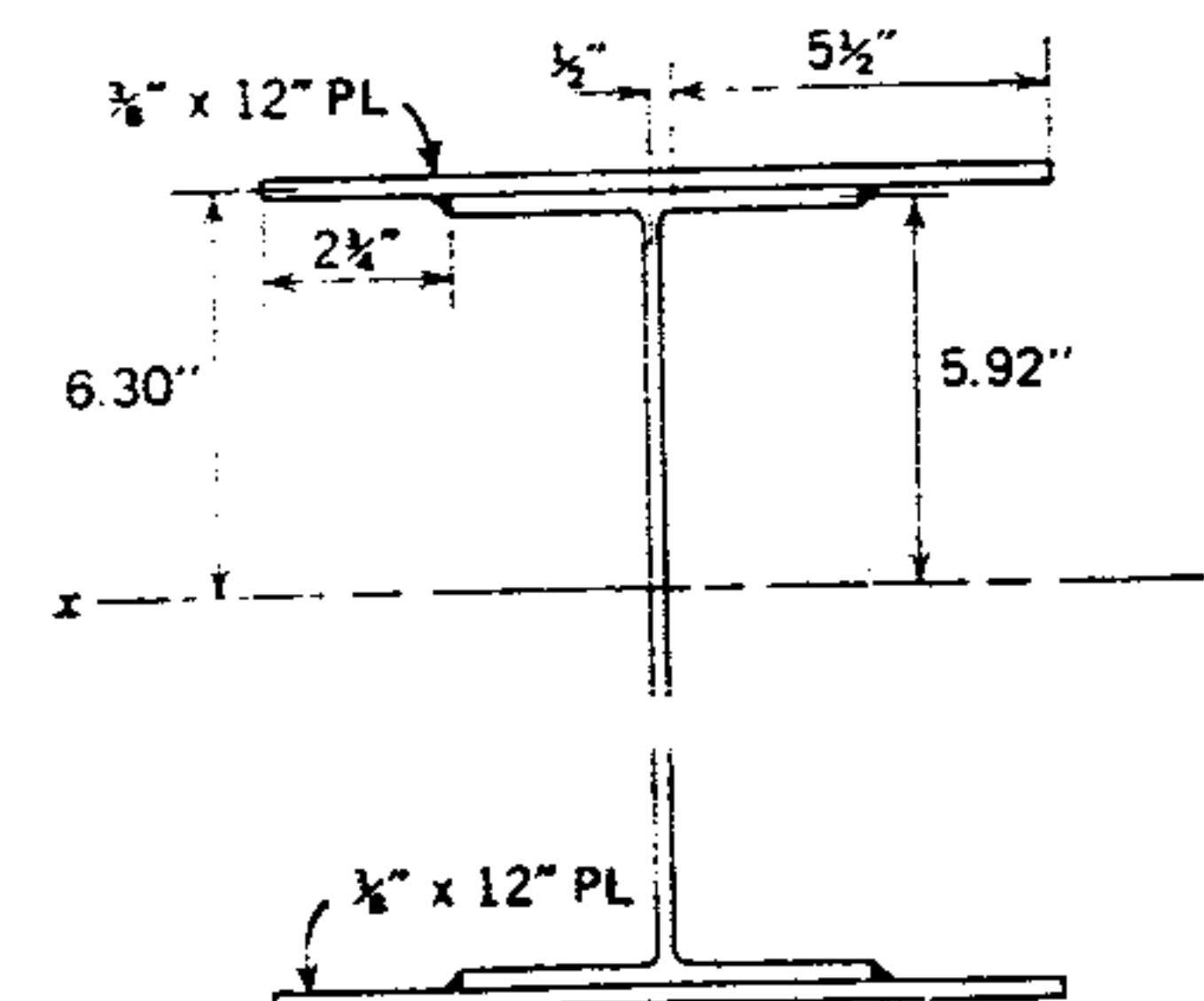


Figura 11.3 Viga W con placas de refuerzo.

- Revisando la placa saliente.

$$\frac{W}{t} = \frac{2.75}{0.375} = 7.33 < 8.5; \text{ satisfactoria}$$

- Revisando la relación peralte-espesor del alma

$$\frac{412}{\sqrt{F_y}} = \frac{412}{\sqrt{36}} = 68.7$$

$$\frac{d}{t} = \frac{10.47}{0.23} = 45.5 < 68.7; \text{ satisfactoria}$$

### Solución b

- Omitir el momento de inercia de la placa respecto a su propio eje centroidal, calcular el momento de inercia de la sección compuesta.

$$I_x = I_w + 2[A_p d^2] = 204 + 2[0.375(12)(6.30)^2] = 561 \text{ pulg}^4$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{561}{6.49} = 86.4 \text{ pulg}^3$$

$$M_y = SF_y = 86.4(36) \approx 3110 \text{ pulg-kips}$$

$$Q = A_{pl} y_1 + A_f y_2 + A_w y_3 = 4.5(6.30) + 0.38(6.49)(5.92) + 0.23(5.73) \frac{5.73}{2} = 46.7 \text{ pulg}^3$$

$$Z = 2Q = 2(46.7) = 93.4 \text{ pulg}^3$$

$$M_p = ZF_y = 93.4(36) \approx 3362 \text{ pulg-kips}$$

### Solución c

- Calcular el radio de giro respecto al eje perpendicular al de flexión

$$I_y = I_{\text{viga}} + 2I_{\text{placa}} = 17.3 + 2(0.375) \frac{t^3}{12} = 125.3 \text{ pulg}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{125.3}{16.65}} = 2.74 \text{ pulg}$$



- b) En la sección 2.9 de la Especificación AISC 1978,

$$\frac{M}{M_p} = \frac{0}{M_p} = 0$$

Por lo tanto,

$$l_{cr} = 2.74 \left( \frac{1375}{36} + 25 \right) = 173 \text{ pulg} = 14.4 \text{ pies}$$

### Ejemplo 2

Encontrar el primer momento de fluencia y el momento plástico para una sección W 14 X 34 hecha de acero A36. Asimismo, calcular el factor de forma y la longitud máxima no arriostrada suponiendo un gradiente de pendiente de momento de 0 a  $M_p$ .

### Solución

1. En el Manual AISC seleccionar las siguientes propiedades de la sección W 14 X 34:

$$S_x = 48.6 \text{ pulg}^3 \quad Z_x = 54.6 \text{ pulg}^3 \quad r_y = 1.53 \text{ pulg}$$

$$(2) \quad M_y = SF_y = 48.6(36) = 1750 \text{ pulg-kips}$$

$$(3) \quad M_p = ZF_y = 54.6(36) = 1966 \text{ pulg-kips}$$

$$(4) \quad u = \frac{Z}{S} = \frac{54.6}{48.6} = 1.12$$

5. La longitud no arriostrada máxima es

$$\frac{M}{M_p} = 0$$

por lo tanto

$$l_{cr} = 1.53 \left( \frac{1375}{36} + 25 \right) = 96.7 \text{ pulg} = 8.1 \text{ pies}$$

### PROBLEMAS

1. Una sección compuesta de canales y placas está construida como se ve en la figura 11.4. Se es-

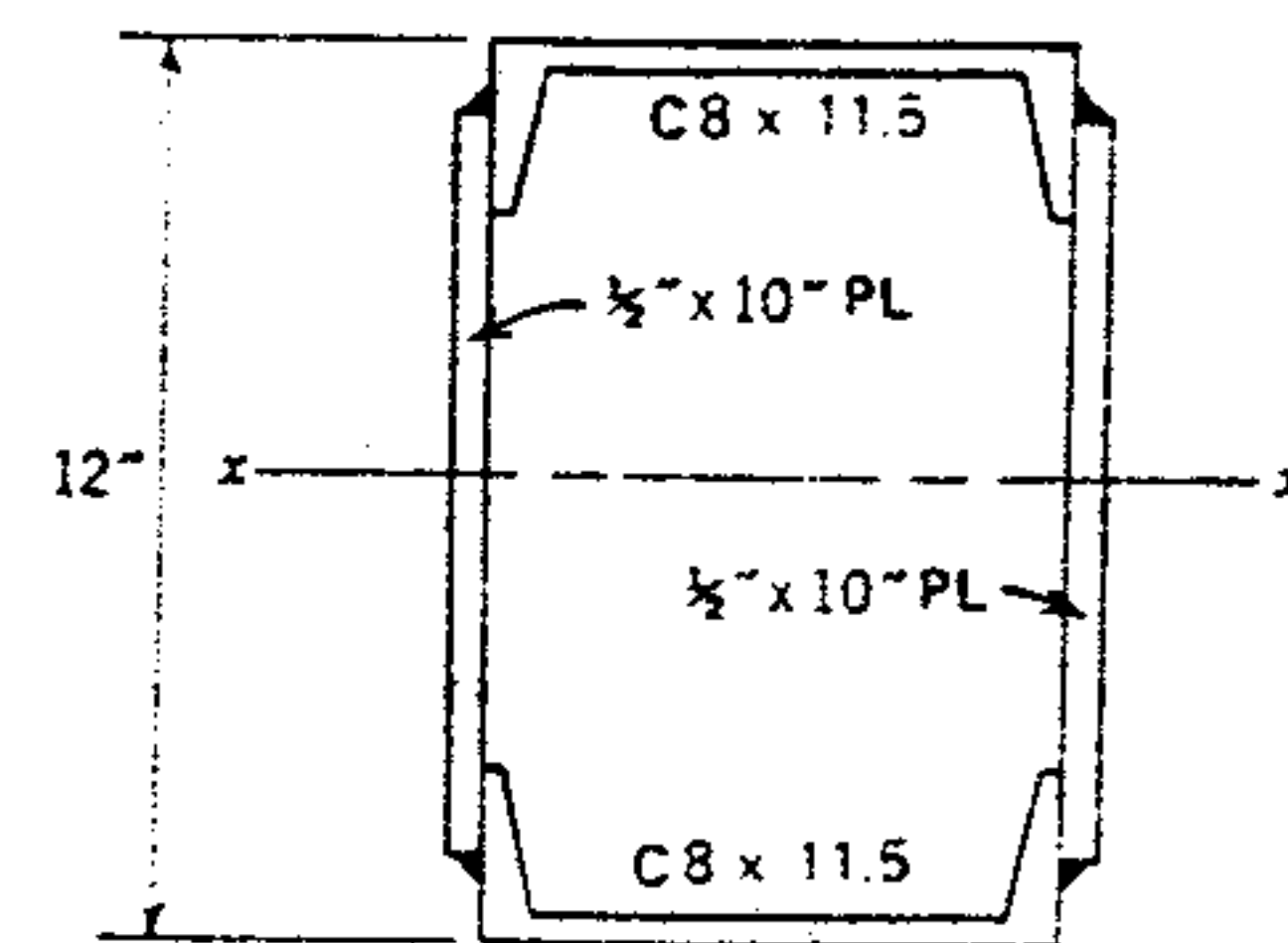


Figura 11.4 Viga de cajón compuesta.

pecifica acero A36, y la flexión es respecto al eje x.

- ¿Satisface la viga los requisitos de ancho-espesor necesarios para un momento plástico?
- Calcular el momento flexionante elástico máximo que pueda desarrollar, si está apoyada lateralmente.
- Encontrar el momento flexionante que provocaría la primera fluencia.
- Calcular el momento plástico.
- Determinar la máxima longitud no arriostrada permitida, suponiendo un gradiente de momento de 0 a  $M_p$ .

(Las respuestas se dan en el Apéndice G).

- Encontrar el momento plástico y el factor de forma respecto al eje mayor para una sección W 16 X 36. Usar acero A36. Calcular el momento plástico para el eje menor. (Las respuestas se dan en el apéndice G).
- Una sección W 14 X 22 de acero A36 se usa como viga simple para un claro de 24 pies. Tiene apoyo lateral completo. Calcular la carga uniforme total ( $W$ ) que haría que se desarrollara un momento plástico.

### 11.3 APLICACIÓN DE LA TEORÍA PLÁSTICA

Se dijo ya que un diseño basado en la resistencia última podría producir ahorros si la resistencia de reserva (una vez alcanzado el esfuerzo de fluencia inicial) contribuía al factor general de seguridad.

Con la teoría plástica no hay una relación lineal entre esfuerzo y carga última. Por lo tanto, se debe tomar en consideración el factor de seguridad incrementando la carga real a una carga de diseño última. Esto se hace multiplicando la carga real por un factor de carga (FC).

La Especificación AISC se basa en la premisa de que las vigas continuas diseñadas por carga última deben tener el mismo margen de seguridad que las vigas simplemente apoyadas diseñadas conforme a la teoría elástica. Esto implica que no se permitirá reducción de resistencia en vigas simplemente apoyadas y que estas vigas sirven como estándar para determinar el factor de carga.

Para vigas simplemente apoyadas sujetas a carga distribuida uniformemente (figura 11.5a), hay tres intensidades de carga que se tienen que tomar en consideración, es decir,

$$W_1 = w_1 L, \quad W_2 = w_2 L, \quad W_3 = w_3 L$$

En la figura 11.5b se ilustran los correspondientes diagramas de momento flexionante. El momento máximo para los tres se produce en el centro. Sea  $M_e$  igual al momento elástico máximo permitido por el reglamento, y  $F_b$  el esfuerzo flexionante permisible. Entonces,

$$M_e = F_b S = \frac{W_1 L}{8}$$

Si se permitiera que aumentara la carga, la viga se comportaría elásticamente hasta llegar a la carga  $W_2$  que causaría el primer esfuerzo de fluencia. Esto ocurrirá en el centro de la viga; por lo tanto,

$$M_y = F_y S = \frac{W_2 L}{8}$$

Cualquier otro incremento en la carga crearía un patrón de esfuerzo elástico-plástico similar al ilustrado en la figura 11.2d. La carga máxima ( $W_3$ ) formaría una articulación plástica en el centro de la viga. No se podría aplicar más carga; la viga ha alcanzado su resistencia última. Por lo tanto,

$$M_p = F_y Z = \frac{W_3 L}{8}$$

La diferencia entre  $M_e$  y  $M_p$  representa el margen de seguridad en esta viga; por lo tanto,  $M_p/M_e = F_y Z/F_b S$  establece el factor de carga. Se ha mostrado que  $F_b = 0.66 F_y$  para vigas adecuadamente arriostradas, y que la relación  $Z/S$  es igual a  $u$  y tiene un valor medio de 1.12. Por lo tanto,

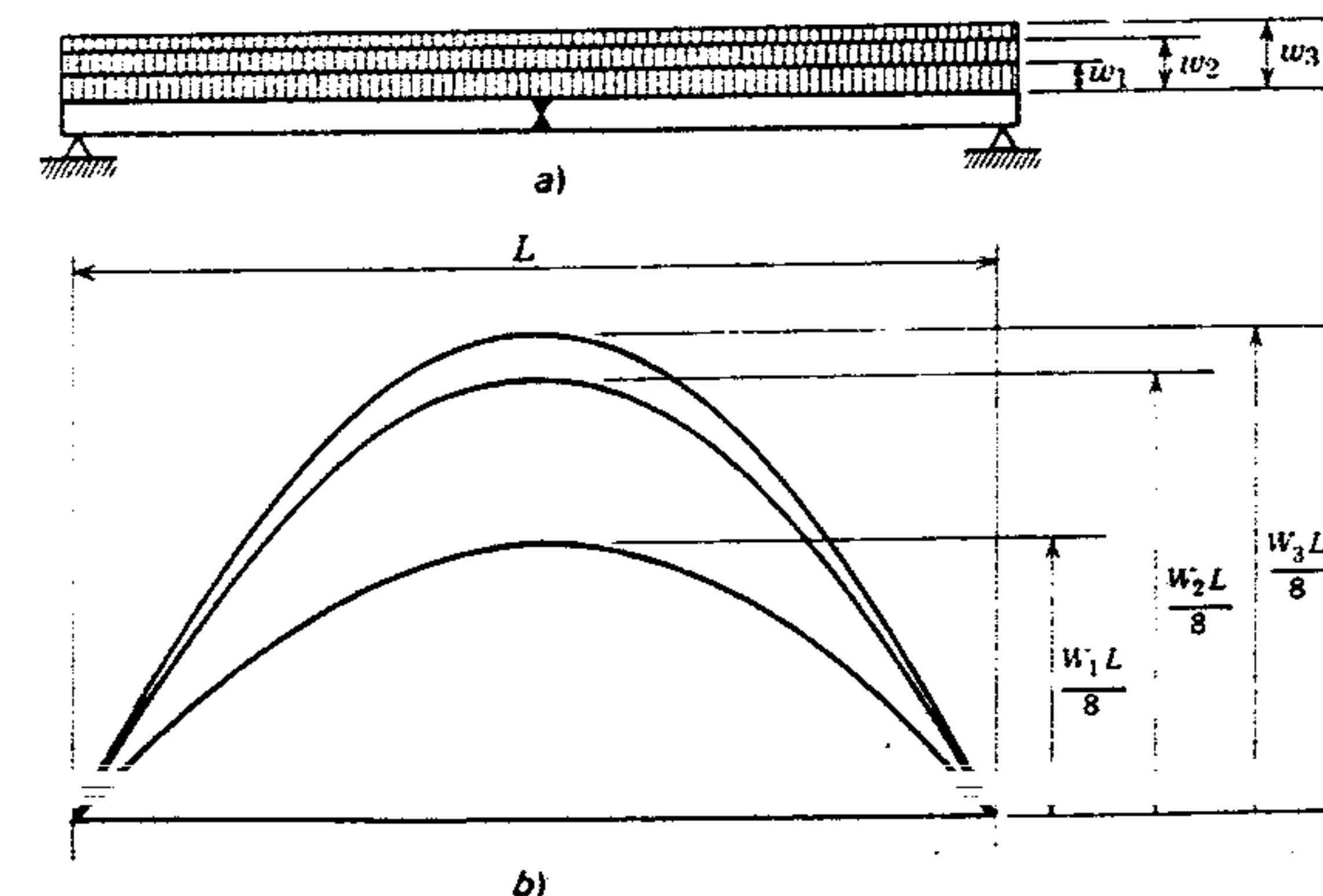


Figura 11.5 Viga simplemente apoyada-carga última.



$$LF = \frac{M_p}{M_e} = \frac{F_y}{0.66F_y} (1.12) = 1.70$$

Este factor de carga de 1.70 se usa para el diseño último de todas las vigas y marcos continuos cuando se consideran solamente cargas vivas y muertas. Sin embargo, el factor de carga se reduce a 1.3 cuando los efectos del viento o sismo se agregan a la carga viva y muerta.

Se ha remarcado que el diseño por resistencia última puede producir ahorros de material solamente si la estructura a la que se aplica es estáticamente indeterminada. Las vigas simplemente apoyadas son estáticamente determinadas, y no se podrían obtener ahorros de material.

La Especificación AISC 1978 estipula que la carga factorizada sea 1.7 veces la carga viva más la muerta o 1.3 veces estas cargas actuando en conjunción 1.3 veces con cualquiera de las cargas especificadas de viento y sismo.

### Ejemplo

Una viga simplemente apoyada cubre un claro de 30 pies y soporta una carga uniforme de 1 kip por pie, incluyendo una tolerancia para su peso propio. Tiene apoyo lateral completo y se usa acero A36. Encontrar la viga de menor peso permisible, usando los dos tipos de diseño, el convencional y el de resistencia última. Considérense tanto la flexión como el esfuerzo cortante.

### Solución

1. Diseñando conforme al método convencional,

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} = \frac{1(30)^2}{8} = 113 \text{ pie-kips}$$

$$S = \frac{M}{F_y} = \frac{113(12)}{36} = 37.3 \text{ pulg}^3$$

En la tabla de Módulos de Sección Elástico del AISC, seleccionar una sección W 18 X 35, como la viga de peso más ligero.

2. Diseñando conforme al método de resistencia última, se debe tomar en cuenta el factor de carga, es decir,

$$w = 1.7(1) = 1.7 \text{ kips por pie}$$

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} = \frac{1.7(30)^2}{8} = 191 \text{ pie-kips}$$

$$Z = \frac{M}{F_y} = \frac{191(12)}{36} = 63.7 \text{ pulg}^3$$

En la tabla de Módulos de Sección Plástico del AISC, seleccionar una sección W 18 X 35 como la viga de peso más ligero.

3. Revisar el esfuerzo cortante.

El esfuerzo cortante en el alma de vigas y trabes raras veces es determinante en el diseño, lo cual es congruente con el procedimiento de diseño por esfuerzos de trabajo (diseño elástico). Sin embargo, se debe revisar. En las regiones de cortante alto, como en las conexiones a las columnas, podría llegar a ser crítico y se podría necesitar usar placas de refuerzo o diagonales de alma. En la parte 2 de la Especificación AISC 1978 la fuerza cortante factorizada se limita como sigue:

$$V_u = 0.55F_y t_w d$$

Esto implica un esfuerzo cortante de fluencia equivalente de  $0.55F_y$ .

En este ejemplo, la sección W 18 X 35 puede desarrollar una carga cortante máxima de

$$V_u = 0.55(36)(0.30)(17.75) = 105 \text{ kips}$$

la cual, como se ve, es considerablemente mayor que la carga cortante factorizada

$$V_u = R_u = \frac{1.7(30)}{2} = 25.5 \text{ kips}$$

4. Revisar las relaciones ancho-espesor plásticas.

Patín:

$$\frac{d}{rw} = \frac{17.75}{0.30} = 59.2 < \frac{412}{\sqrt{36}} = 68.7$$

Alma:

$$\frac{b}{2t_f} = \frac{6.0}{2(0.425)} = 7.06 < 8.5 \text{ correcto}$$

Para entender la manera en que se formarían estas articulaciones, considérese la carga uniforme  $w$  aumentando lentamente en magnitud. Cuando  $w$  es pequeña, la viga se comportará elásticamente hasta llegar a  $w_1$ , dando una carga total  $W_1 = w_1 L$ . El correspondiente diagrama de momento está representado por el área sombreada de la figura 11.6b. El momento máximo se produce en los extremos; por lo tanto, la primera fluencia se produce en aquellos puntos de flexión máxima y se forma una articulación plástica. Así,

$$M_p = \frac{W_1 L}{12}$$

de donde

$$W_1 = \frac{12M_p}{L}$$

### 11.4 VIGAS DE EXTREMOS FIJOS

Como las vigas de extremos fijos son estáticamente indeterminadas, el método de diseño por resistencia última producirá economías. Esto es así porque se debe formar más de una articulación plástica antes de llegar a la carga última. La redundancia proporciona la resistencia de reserva.

La viga de extremos fijos de la figura 11.6 requiere tres articulaciones plásticas antes del "mecanismo" y, por tanto, de la carga última. Aquí se debe hacer una distinción entre una estructura y un "mecanismo". Una estructura debe ser estable e inmóvil (bajo cargas estáticas), mientras que un mecanismo se define como el instante en que una estructura llega a su límite estructural y cualquier carga adicional produciría movimiento. Las articulaciones necesarias para formar un mecanismo estarían en cada extremo fijo y en el centro de la viga.

La viga tiene aún una capacidad de carga adicional. Las articulaciones mantienen su momento plástico desarrollado pero permiten que los extremos giren cuando se aplica carga adicional. Sólo los extremos están esforzados en el rango plástico; el resto de la viga se comporta elásticamente. La carga adicional ( $W_2 = w_2 L$ ) que la viga podría soportar, sería la carga que causara un momento flexionante adicional en el centro de una manera similar a la de una viga simplemente apoyada. Esto es así porque las

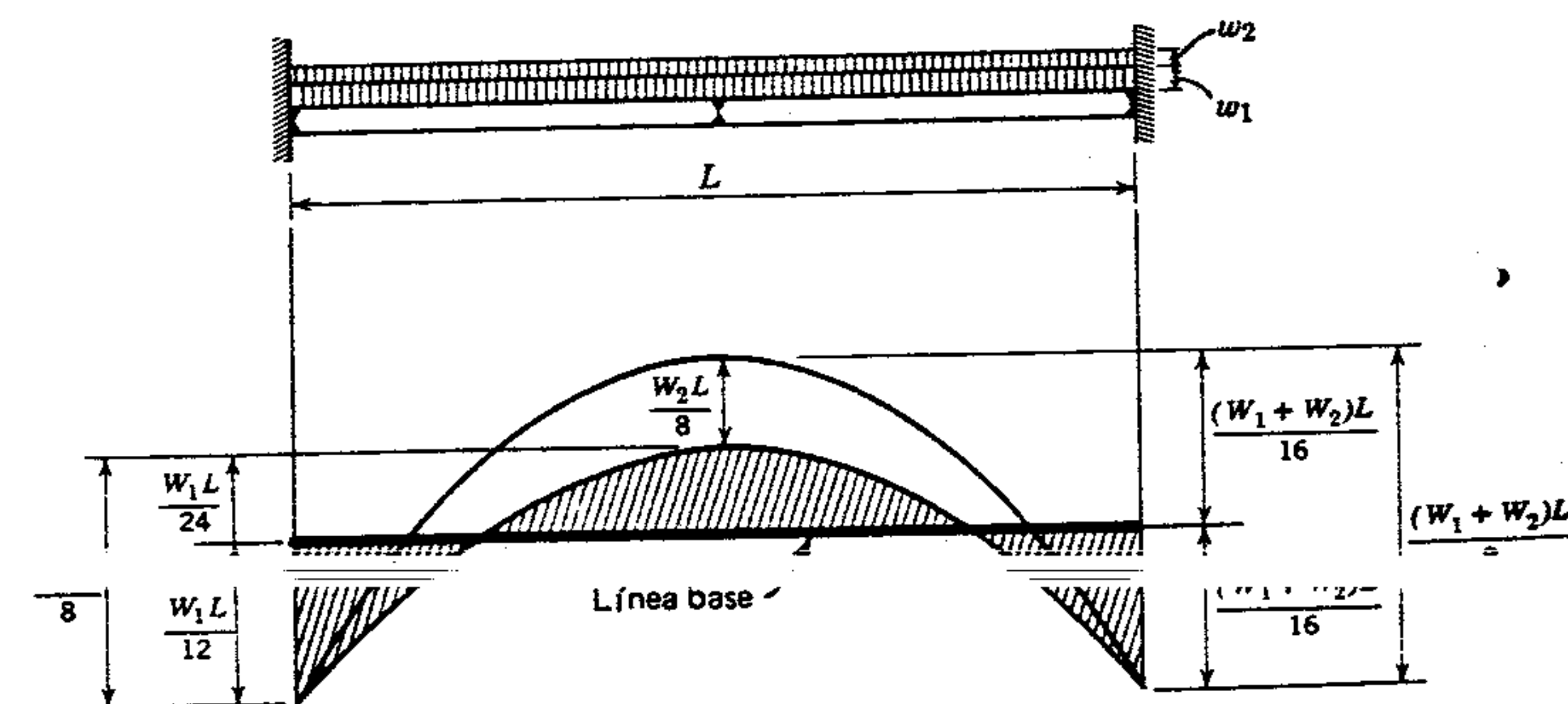


Figura 11.6 Viga con extremos fijos-carga última.



articulaciones plásticas de los extremos no ofrecen resistencia rotativa adicional. Si la viga tiene un tamaño uniforme en toda su longitud, el momento desarrollado en el centro por la primera carga ( $W_1$ ) es  $W_1 L/24$ , que se ve que es de la mitad de la capacidad máxima ( $M_p$ ) que ya ha desarrollado en el apoyo. Por lo tanto, la carga  $W_2$  estaría limitada a la cantidad requerida para desarrollar la otra mitad de  $M_p$ , es decir,

$$\frac{M_p}{2} = \frac{W_2 L}{8}$$

de donde

$$W_2 = \frac{4M_p}{L}$$

Lo que interesa aquí es la carga total a la resistencia última que es igual a  $W_1 + W_2$ , es decir,

$$W_1 + W_2 = \frac{12M_p}{L} + \frac{4M_p}{L} = \frac{16M_p}{L}$$

ó

$$M_p = \frac{(W_1 + W_2)L}{16}$$

Este momento se desarrollaría en ambos extremos y en el centro (figura 11.6b).

Obsérvese cuidadosamente el diagrama de momento flexionante a la resistencia última final. Se ve que el diagrama de viga simple, con un valor máximo de  $WL/8$ , se divide en partes iguales entre el momento positivo en el centro y el momento negativo en los extremos; es decir,  $WL/16$  cada uno. Esta característica es típica y es válida para cualquier tipo de carga simétrica para vigas de extremo fijo. (Se necesitará para resolver los problemas al final de esta sección).

Cuando se diseña una viga, similar a la de este ejemplo, para carga uniforme, las fórmulas que se

$$M_p = F_y Z = \frac{LF(W)L}{16}$$

o

$$Z = \frac{LF(W)L}{16F_y}$$

donde  $W$  es la carga real que debe soportar la viga.

### Ejemplo 1

Una sección W 12 X 30 se usa como viga de extremos fijos sujeta a una carga uniforme sobre todo su claro de 25 pies. La viga tiene apoyo lateral completo. Usar acero A36. Encontrar la carga total ( $W_1$ ) que produciría la primera fluencia. Encontrar la carga total ( $W_2$ ) que represente la resistencia última de la viga.

### Solución

1. En el Manual AISC,

$$S_x = 38.6 \text{ pulg}^3 \quad Z_x = 43.1 \text{ pulg}^3$$

2. Cuando se alcanza la primera fluencia, la viga se encuentra aún dentro del rango elástico. Por lo tanto,

$$M_y = SF_y = 38.6(36) = 1390 \text{ pulg-kips} \\ \text{o } 116 \text{ pie-kips}$$

y

$$M_{\max} = \frac{W_1 L}{12}$$

de donde

$$W_1 = \frac{12M_y}{L} = \frac{12(116)}{25} \approx 56 \text{ kips}$$

3. La resistencia última de la viga está limitada por su momento plástico.

$$M_p = ZF_y = 43.1(36) = 1550 \text{ pulg-kips} \\ \text{o } 129 \text{ pie-kips}$$

y

$$M_{\max} = \frac{W_2 L}{16}$$

de donde

$$W_2 = \frac{16M_p}{L} = \frac{16(129)}{25} = 82.6 \text{ kips}$$

### Ejemplo 2

Encontrar la viga de menor peso que pueda soportar una carga uniforme de 2 kips por pie en un claro de 28 pies. Cada extremo de la viga está totalmente restringido y tiene apoyo lateral completo. Usar acero A36. Omitir el esfuerzo cortante y la deflexión. Comparar la sección de la viga seleccionada con una elegida mediante el método convencional.

### Solución

1. Mediante el método de resistencia última, se encuentra el módulo de sección plástico requerido, es decir,

$$Z = \frac{LF(W)L}{16F_y} = \frac{1.7(56)28(12)}{16(36)} = 55.5 \text{ pulg}^3$$

2. En la Tabla de Módulos de Sección Plástica del AISC, se elige una sección W 18 X 35.
3. Mediante el método elástico, el módulo de sección requerido es

$$S = \frac{WL}{12F_b} = \frac{56(28)12}{12(24)} = 65.3 \text{ pulg}^3$$

4. En la Tabla de Módulos de Sección Elástica del AISC se selecciona una sección W 18 X 40.

es de 30 pies y ambos extremos están totalmente restringidos. Tiene apoyo lateral completo. Omitir el cortante, la deflexión y cualquier efecto de la carga muerta de la viga. (La respuesta se da en el Apéndice G).

2. Una viga con extremos fijos tiene un claro de 24 pies y soporta dos cargas concentradas iguales de 12 kips cada una, situadas en las terceras partes de su longitud. Se especifica acero A36 y tiene apoyo lateral completo. Diseñar la viga. Despreciar el cortante, la deflexión y la carga muerta de la viga. (La respuesta se da en el Apéndice G).
3. Una sección S 12 X 35, de acero A36, se usa como viga de extremos fijos con una longitud de claro de 26 pies. Tiene apoyo lateral completo, y la viga soporta una carga uniforme de 1 kip por pie, incluyendo el peso propio de la viga. Encontrar el valor de una carga concentrada adicional que se pueda aplicar con seguridad en el centro de su claro. Omitir el cortante y la deflexión.

## 11.5 EL VOLADIZO APUNTALADO

El voladizo apuntalado es otro tipo de viga indeterminada que sería más económica si se diseña mediante el método de resistencia última. Esta viga requeriría el desarrollo de dos articulaciones plásticas antes de que se produzca un "mecanismo". Asimismo, a diferencia de la viga de extremos fijos, no hay simetría en el diagrama de momento flexionante. La localización de la primera articulación plástica a desarrollar se derivaría del comportamiento elástico de la viga (usualmente sería en el extremo fijo). Luego se podría aplicar carga adicional hasta que la segunda articulación plástica se desarrolle, teniendo el mismo valor ( $M_p$ ) que la primera articulación plástica. La carga que produce las dos articulaciones plásticas es la carga última para la viga. El proceso de diseño se puede explicar mejor mediante el uso de un problema ilustrativo.

### Ejemplo 1

El voladizo apuntalado de la figura 11.7a soporta una sola carga concentrada ( $P$ ) en el centro del cla-

1. Encontrar la sección de acero A36 de menor peso que pueda soportar una carga concentrada de 20 kips en el centro de su claro, si el claro total



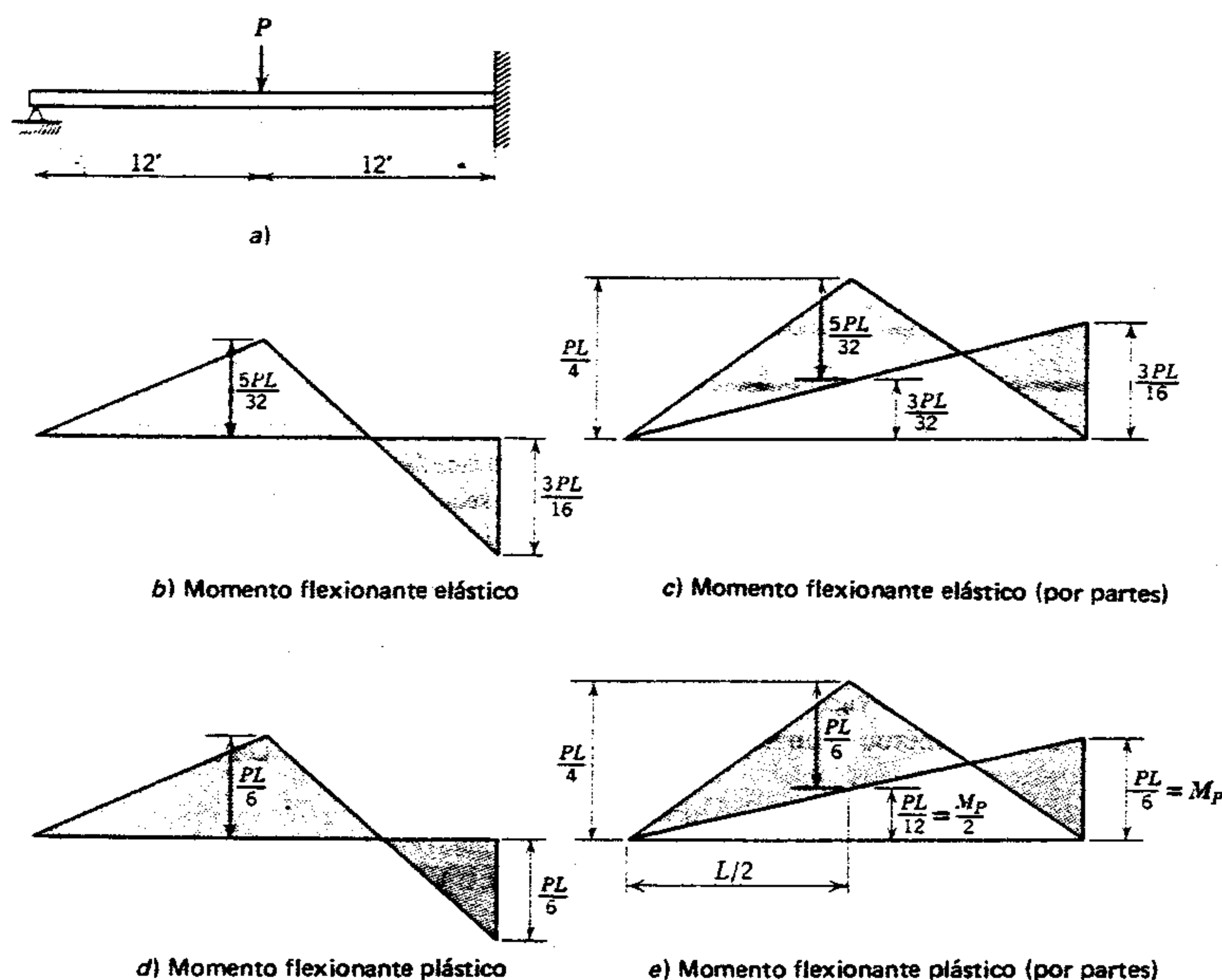


Figura 11.7 Voladizo apuntalado, carga concentrada.

ro. La viga es de acero A36, W 12 X 22, y tiene apoyo lateral completo. Omitir el cortante, la carga muerta de la viga y la deflexión.

- Encontrar el valor máximo de  $P$  permitido usando el método de diseño elástico.
- Encontrar el valor de  $P$  que causaría la primera fluencia.
- Encontrar el valor de  $P$  que provocaría la falla última.

**Solución a**

- En el Manual AISC, el módulo de sección elástico de un W 12 X 22 es  $Z_x = 224$  in<sup>3</sup>. El momento flexionante máximo permisible es

$$M_b = SF_b = 25.4(24) \approx 610 \text{ pulg-kips} \text{ o } 50.8 \text{ pie-kips}$$

- Se traza el diagrama de momento flexionante elástico (figura 11.7b) el momento máximo se produce en el apoyo y es

$$M_{\text{máx}} = \frac{3PL}{16}$$

El procedimiento para esta solución elástica se presentó en el capítulo 10. En la figura 11.7c se ilustra un método alternativo para trazar el diagrama de momento flexionante (por partes). Se traza primero el diagrama de viga simple, teniendo un valor máximo de  $PL/4$  en el centro del claro. El momento de empuje en el apoyo es  $M_p/2$ .

Se traza una línea que va linealmente a cero en el extremo simple, se sobrepone al primer diagrama. El área comprendida entre los dos diagramas representa el diagrama de momento flexionante

real y se ilustra en la parte sombreada. Este método será sumamente útil en el proceso de diseño por resistencia última que se explicará más adelante.

- Igualando el momento flexionante elástico máximo a la capacidad de diseño elástico de la viga, la carga se puede resolver como sigue:

$$M_{\text{máx}} = \frac{3PL}{16} = 50.8 \text{ pie-kips}$$

$$P = \frac{16(50.8)}{3(24)} = 11.3 \text{ kips}$$

**Solución b**

- El momento desarrollado por la sección W 12 X 22 bajo esfuerzo de fluencia incipiente es

$$M_y = SF_y = 25.4(36) = 914 \text{ pulg-kips} \text{ o } 76 \text{ pie-kips}$$

- Igualando este momento al valor máximo del diagrama de momento y resolviendo para la carga  $P$ ,

$$M_{\text{máx}} = \frac{3PL}{16} = 76 \text{ pie-kips}$$

$$P = \frac{16(76)}{3(24)} = 16.9 \text{ kips}$$

**Solución c**

- El momento plástico desarrollado por la sección W 12 X 22 bajo esfuerzo de fluencia total es

$$M_p = ZF_y = 29.3(36) = 1055 \text{ pulg-kips} \text{ o } 88 \text{ pie-kips}$$

- En la figura 11.7b se ilustra el diagrama de momento plástico. El valor máximo del momento se produce tanto en el apoyo como en el centro del claro y es igual a  $PL/6$ . Para

llegar a esta conclusión, trazar el diagrama por partes como se ilustra en la figura 11.7e. Se traza primero este diagrama de viga simple con el máximo valor en el centro del claro ( $PL/4$ ). La línea recta que representa los momentos negativos, de cero en el apoyo simple a  $M_p/2$  en el extremo empotrado, se traza sobre la parte superior del diagrama de momento de viga simple, y su valor en la mitad del claro es igual a  $M_p/2$ . Por lo tanto, el momento neto en el centro del claro es  $PL/4 - M_p/2$ . Como ambas articulaciones plásticas (positiva en el centro del claro, negativa en el extremo empotrado) deben tener el mismo valor, el valor neto en el centro del claro se puede igualar a  $M_p$  en el extremo empotrado.

$$\frac{PL}{4} - \frac{M_p}{2} = M_p$$

de donde  $M_p = PL/6$ .

- Igualando este valor del momento plástico causado por las cargas a la capacidad de la viga, la carga se puede determinar como sigue:

$$M_p = \frac{PL}{6} = 88 \text{ pie-kips}$$

$$P = \frac{6(88)}{24} = 22 \text{ kips}$$

Sin embargo, debe señalarse que la carga de resistencia última de diseño debe incluir un factor de carga. Por lo tanto,

$$P = \frac{22}{LF} = \frac{22}{1.7} = 12.9 \text{ kips}$$

Una fórmula de diseño para este problema particular de voladizo apuntalado sería

$$Z = \frac{(LF)PL}{6F_y}$$

El procedimiento de diseño para un voladizo apuntalado que soporta una carga uniforme es muy similar. No obstante, se requieren mu-



chos más cálculos, como se verá en la segunda solución del ejemplo que sigue. Por lo tanto se recomienda un procedimiento semigráfico de tanteo. Primero se describirá este método.

### Ejemplo 2

Diseñar una viga en voladizo apuntalado de acero A36, como se ilustra en la figura 11.8a. Usar el método de diseño de resistencia última. Suponer que tiene apoyo lateral completo, y omitir el cortante, la deflexión y el peso propio de la viga.

#### Solución (mediante el procedimiento semigráfico)

1. La carga incrementada necesaria para el diseño por resistencia última es

$$w = LF(w) = 1.7(2) = 3.4 \text{ kips por pie}$$

2. Trazar a escala al diagrama de momento de viga simple. Para mayor exactitud usar papel cuadriculado. Se requiere calcular el valor numérico del momento flexionante en unos puntos solamente.

$$M \text{ en el punto central} = \frac{3.4(28)^2}{8} = 333 \text{ pie-kips}$$

$$M \text{ en la cuarta parte del claro} = 47.6(7) - \frac{3.4(7)^2}{2}$$

$$= 250 \text{ pie-kips}$$

Este diagrama se ilustra como una curva *a* en la figura 11.8b.

3. Sobreponer la línea recta *b* en este diagrama de viga simple, para representar el efecto del momento negativo del extremo empotrado. La posición final de esta línea recta se determina mediante un procedimiento de tanteo, como sigue: el extremo izquierdo se coloca en el origen y el extremo derecho se ajusta

de modo que su ordenada vertical sea igual a la ordenada vertical máxima entre la curva *a* y la línea *b*. Esta diferencia máxima en la ordenada ocurrirá a la izquierda de la línea central de la viga. En este ejemplo, el momento flexionante máximo plástico es de aproximadamente 225 pie-kips. La parte sombreada de este diagrama representa al diagrama de momento flexionante final.

4. Determinar el módulo de sección plástico necesario para desarrollar  $M_p$ .

$$M_p = 225(12) = ZF_y$$

$$Z = \frac{225(12)}{36} = 75 \text{ pulg}^3$$

5. En la Tabla de Módulos de Sección Plástico del AISC, elegir la sección W 18 X 40 como la viga de menor peso.

#### Solución (mediante el procedimiento matemático)

1. La carga incrementada necesaria para el diseño por resistencia última es

$$1.7(2) = 3.4 \text{ kips por pie}$$

2. Determinar las reacciones. Se recordará que para un análisis elástico, la reacción en el extremo empotrado será mayor que en el extremo simplemente apoyado. No obstante, una vez desarrollada la articulación plástica en el apoyo y efectuada la rotación, la carga se redistribuirá hasta, que cuando falle, ambas reacciones sean iguales.

$$R = 3.4(14) = 47.6 \text{ kips}$$

3. Trazar el diagrama de momento flexionante de viga simplemente apoyada y desarrollar la fórmula para su curva. El origen para la distancia variable *x* está en el extremo simple. Sea  $M_{x1}$  el momento de la viga simple. Esta es la curva *a* de la figura 11.8c. Entonces,

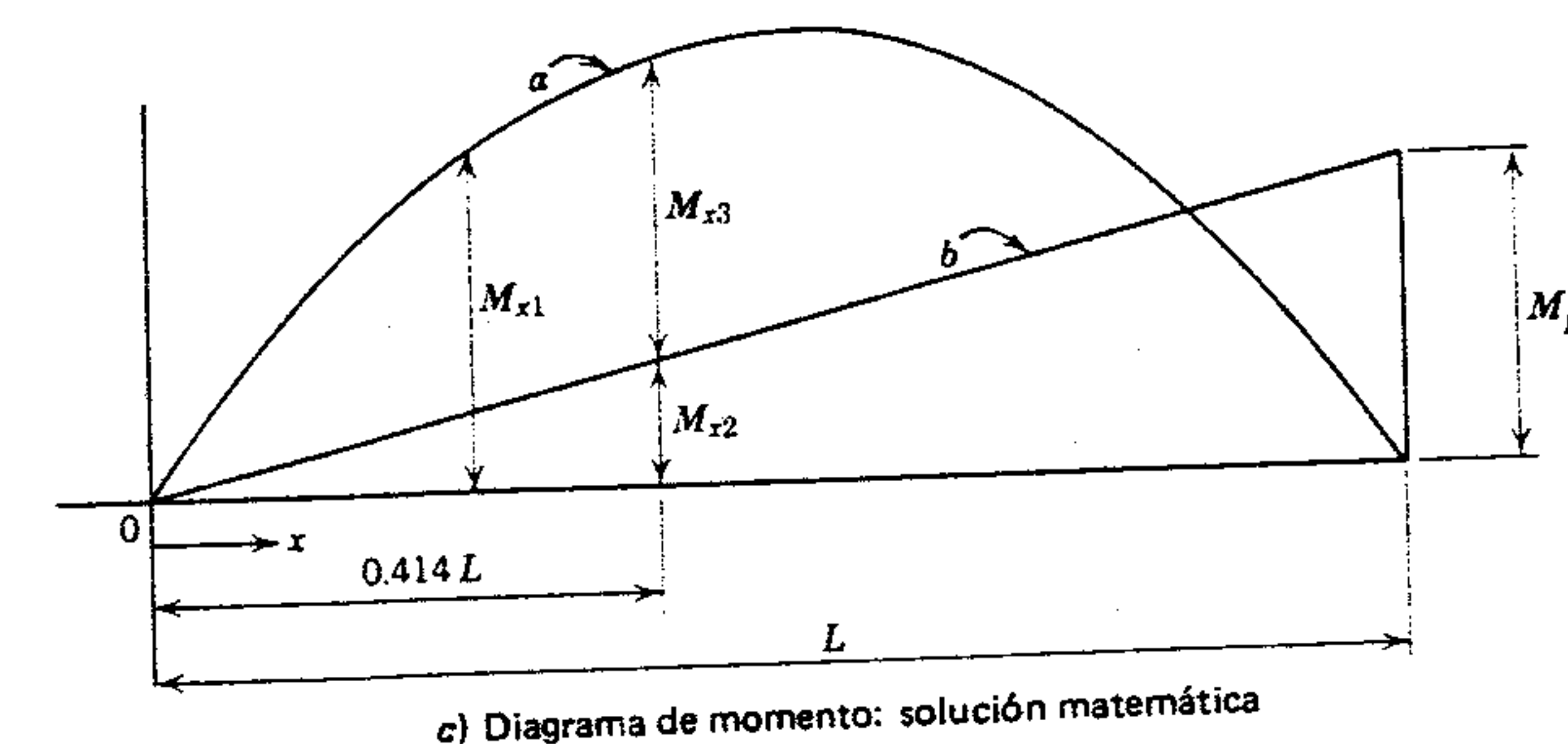
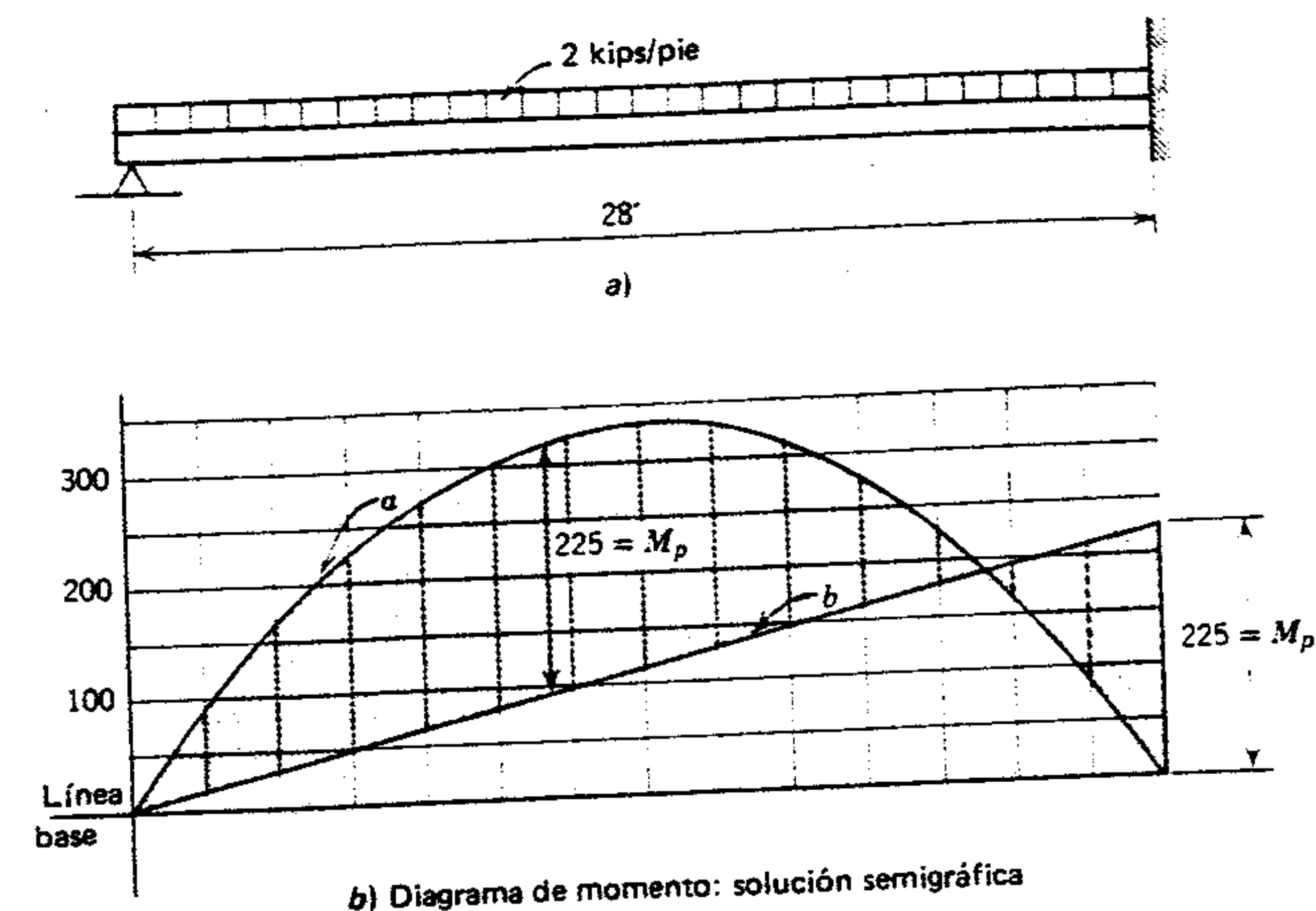


Figura 11.8 Viga apuntalada en voladizo.

$$M_{x1} = -\frac{3.4x^2}{2} + 47.6x$$

$$M_{x2} = \frac{M_p x}{L} = \frac{M_p x}{28}$$

donde  $M_{x1}$  es la distancia vertical desde la línea base hasta la curva *a*, para cualquier valor de *x*

4. Sobreponer la línea recta *b*, variando de cero en el origen hasta  $M_p$  en el extremo fijo. La ecuación de esta línea, representando  $M_{x2}$  la distancia vertical desde la línea base a la línea *b*, es

$$M_{x3} = M_{x1} - M_{x2}$$

$$M_{x3} = -\frac{3.4x^2}{2} + 47.6x - \frac{M_p x}{28}$$

5. La fórmula para  $M_{x3}$ , representando la distancia vertical entre la curva *a* y la línea *b*, es



6. En la solución mediante el diseño por resistencia última se ve que  $M_{x3}$  debe ser igual a  $M_p$ ; por lo tanto,

$$M_{x3} = M_p = -\frac{3.4x^2}{2} + 47.6x - \frac{M_p x}{28}$$

Despejando  $M_p$  de la fórmula anterior,

$$M_p = \frac{-1.7x^2 + 47.6x}{1 + 0.036x}$$

7. Ahora se necesita establecer el valor de  $x$ , es decir, el lugar donde  $M_p$  es máximo. Esto se logra tomando la primera derivada de  $M_p$  con respecto a  $x$  e igualándola a cero.

$$\frac{dM}{dx} = \frac{(1 + 0.036x)(-3.4x + 47.6) - (-1.7x^2 + 47.6x)(0.036)}{(1 + 0.036x)^2} = 0$$

Simplificando,

$$x^2 + 53.4x = 754$$

Y despejando  $x$  completando el cuadrado,

$$x^2 + 53.4x + 26.7^2 = 754 + 26.7^2$$

$$(x + 26.7)^2 = 1468$$

$$x = \pm 38.3 - 26.7$$

$$x = 11.6 \text{ pies}$$

8. El valor de  $M_p$  se puede determinar sustituyendo el valor de 11.6 en cualquier ecuación planteada en el paso 6, es decir,

$$M_p = \frac{-1.7(11.6)^2 + 47.6(11.6)}{1 + 0.036(11.6)} = 226 \text{ pie-kips}$$

cesario para desarrollar  $M_p$ .

$$M_p = 226(12) = ZF_y$$

$$Z = \frac{226(12)}{36} = 75.3 \text{ pulg}^3$$

10. En la Tabla de Módulos de Sección Plástico del AISC, elegir una sección W 18 X 40 como la viga de menor peso. En los problemas ilustrativos se puede ver que el procedimiento para diseñar voladizos apuntalados implica establecer primero el diagrama de momento de viga simplemente apoyada, y luego sobreponer la variación en línea recta del efecto del momento de empotramiento, de modo que el valor máximo de  $M_p$  ocurra tanto en el extremo fijo (negativo) como en algún otro lugar (momento positivo) cerca del centro del claro. El proceso empleado puede ser semigráfico o matemático directo. Usualmente, el proceso semigráfico se emplea cuando la carga uniforme es importante.

También es útil observar que al diseñar vigas en voladizo apuntalado sujetas solamente a carga uniforme, el momento plástico máximo *positivo* siempre se producirá a  $0.414L$  del extremo simplemente apoyado (figura 11.8c). También se comprobará que la fórmula para  $M_p$  también es útil. Se puede desarrollar a partir de la ecuación planteada en el paso 5, sustituyendo las siguientes igualdades:

$$M_{x3} = M_p \quad x = 0.414L$$

$$3.4 = w \quad 28 = L$$

$$47.6 = \frac{wL}{2}$$

Es decir,

$$M_p = -\frac{w(0.414)^2 L^2}{2} + \frac{wL}{2} (0.414)L - \frac{M_p(0.414)L}{L}$$

y

$$1.414M_p = -0.0858wL^2 + 0.207wL^2$$

$$M_p = \frac{0.1212}{1.414} wL^2$$

$$M_p = 0.0858wL^2$$

## PROBLEMAS

1. Diseñar una viga en voladizo apuntalada de acero A36, sujeta a una carga concentrada de 20 kips en el centro del claro. El claro es de 28 pies. Suponer que tiene apoyo lateral completo. Omitir el esfuerzo cortante, la deflexión y el peso propio de la viga. (La respuesta se da en el Apéndice G).
2. Diseñar una viga en voladizo apuntalada de acero A36, sujeta a dos cargas concentradas iguales de 12 kips en las terceras partes de su claro. La longitud del claro es de 27 pies. Suponer apoyo lateral completo. Omitir cortante, deflexión y peso propio de la viga. (Las respuestas se dan en el Apéndice G).
3. Una sección W 18 X 46 de acero A36 se usa como viga en voladizo apuntalada con un claro de 26 pies. Soporta una carga uniformemente distribuida de 1.5 kips por pie, incluyendo el peso propio de la viga. Determinar la carga concentrada adicional en el centro del claro que podría soportar si tuviera apoyo lateral completo. Omitir cortante y deflexión.

cargas reales se multiplican por el factor de carga (1.7), y se traza el diagrama de momento flexionante correspondiente de modo que los valores máximos se localicen en las articulaciones plásticas necesarias para el mecanismo. Como se ilustró para las vigas de extremos fijos y empotradas apuntaladas, el flexionante total se distribuye entre los componentes negativo y positivo de la manera más favorable. El momento flexionante máximo obtenido de este proceso es el que establece el módulo de sección plástico requerido ( $Z$ ) y, por tanto, el tamaño de la viga.

Para casos en que se usa un mismo tamaño de viga para todos los claros, y todos los claros son iguales e igualmente cargados con las cargas situadas simétricamente, se puede observar que el claro extremo es determinante. De hecho, en estas condiciones, los claros interiores tienen articulaciones plásticas formadas solamente en los apoyos y, por tanto, no alcanzan la resistencia última.

### Ejemplo 1

Diseñar la viga continua de tres claros ilustrada en la figura 11.9, usando acero A36. Omitir cortante, deflexión y peso propio de la viga. Suponer apoyo lateral completo.

## 11.6 VIGAS CONTINUAS

El diseño de vigas continuas se hace de una manera similar a la explicada en secciones anteriores. Las

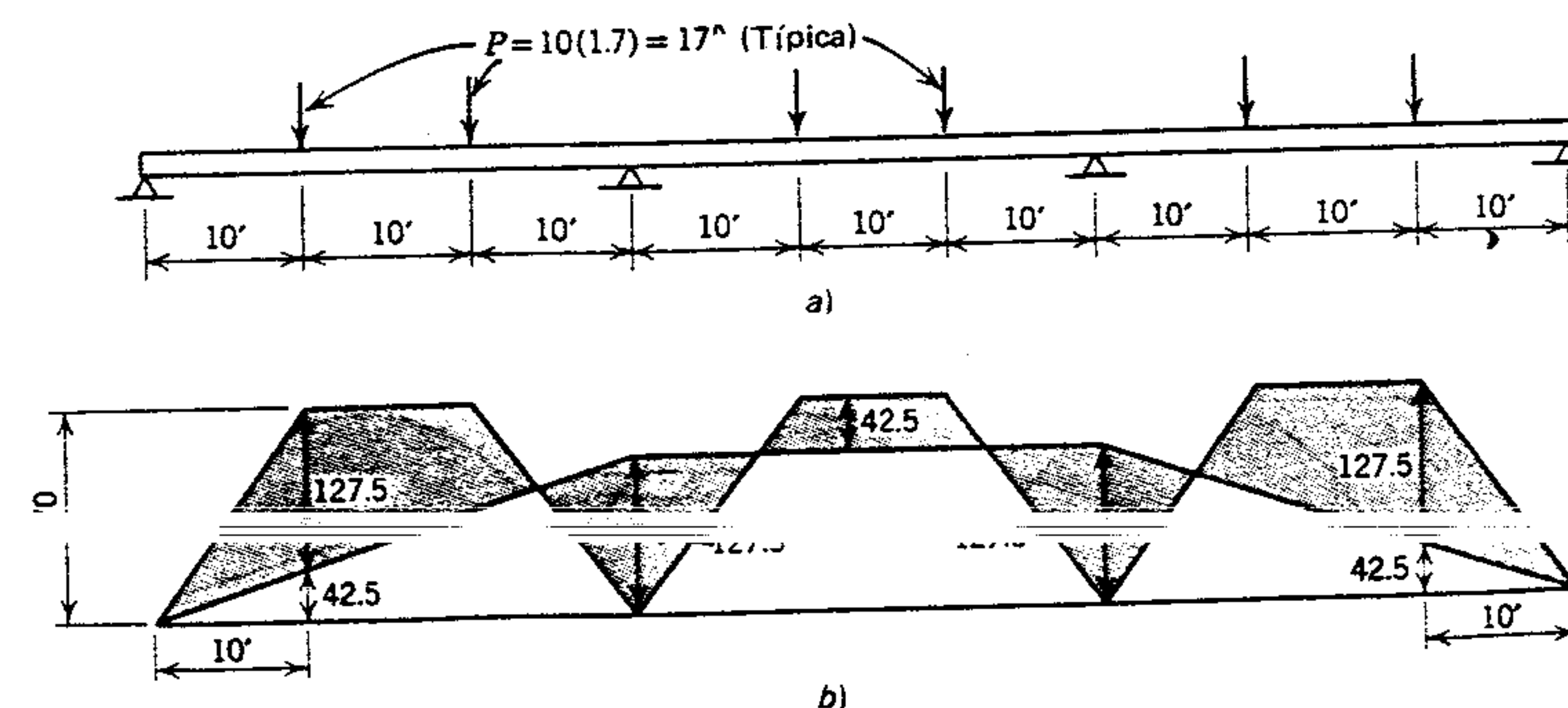


Figura 11.9 Viga continua, carga concentrada.



**Solución**

1. Calcular la carga incrementada que admita un factor de seguridad.

$$P = 10(1.7) = 17 \text{ kips}$$

2. Determinar el momento de viga simple

$$M = P \frac{L}{3} = 17(10) = 170 \text{ pie-kips}$$

3. Determinar el valor del momento máximo en las dos articulaciones plásticas, una en el apoyo interior y otra a 10 pies del extremo simple.

$$M_p = 170 - \frac{M_p}{3}$$

$$M_p = \frac{3}{4}(170) = 127.5 \text{ pie-kips}$$

4. Trazar el diagrama de momento para la viga continua (figura 11.9b). Se observará que el momento en el centro del claro interior es

$$M = 170 - 127.5 = 42.5 \text{ pie-kips}$$

5. Determinar el módulo de sección plástico requerido.

$$Z = \frac{M_p}{F_y} = \frac{127.5(12)}{36} = 42.5 \text{ pulg}^3$$

6. Seleccionar la sección de viga de menor peso en la Tabla de Módulos de Sección Plástico del AISC. Ésta es una W 16 X 26.

**Ejemplo 2**

Diseñar la viga continua de tres claros ilustrada en la figura 11.10, usando acero A36. La carga de 1.5 kips por pie incluye una tolerancia para el peso propio de la viga. Omitir cortante y deflexión, y suponer apoyo lateral completo.

**Solución**

1. La carga real de 1.5 kips por pie se multiplica primero por el factor de carga para admitir un factor de seguridad.

$$w = 1.5(1.7) = 2.55 \text{ kips por pie}$$

2. Determinar el momento de viga simple

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{2.55(26)^2}{8} \approx 216 \text{ pie-kips}$$

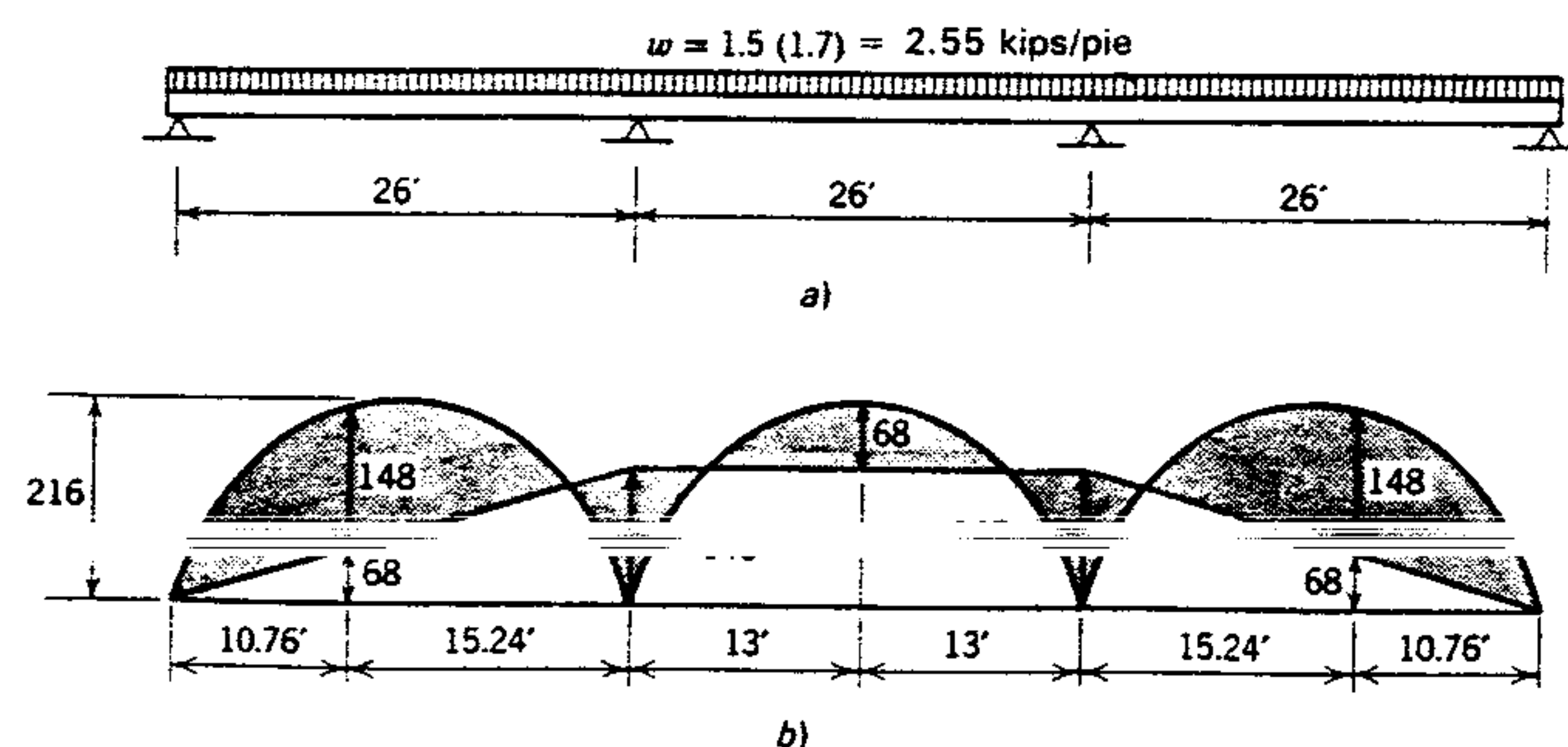


Figura 11.10 Viga continua, carga uniforme.

3. El momento plástico para el claro extremo ocurre en el primer apoyo interior y a  $0.414L$ , o 10.76 pies del extremo simple. Determinar el valor de  $M_p$  para el claro extremo (ver la Sección 11.5).

$$M_p = 0.0858WL = 0.0858(2.55)26^2 = 148 \text{ pie-kips}$$

4. Trazar el diagrama de momento para la viga continua (figura 11.10b). Se observará que el momento en el centro del claro interior es

$$M = 216 - 148 = 68 \text{ pie-kips}$$

5. Determinar el módulo de sección plástico requerido.

$$Z = \frac{M_p}{F_y} = \frac{148(12)}{36} = 49.3 \text{ pulg}^3$$

6. En la Tabla de Módulos de Sección Plástico del AISC, seleccionar la sección W 16 X 31 como la viga de peso más ligero.

Las longitudes desiguales de claros y las variaciones de cargas complican el procedimiento de diseño, pero los principios siguen siendo los mismos. No siempre es aparente la localización de los momentos máximos y las articulaciones plásticas. El procedimiento

recomendado es el semigráfico que se presentó en la Sección 11.5.

El procedimiento es el siguiente: Trazar las longitudes de la viga y la posición de reacciones y cargas a una escala conveniente. Calcular los momentos flexionantes basándose en una serie de vigas independientes (todas simplemente apoyadas). Trazar a escala el diagrama de momento flexionante. Luego sobreponer en los diagramas de momento flexionante de viga simple una nueva línea base dividiendo los diagramas en áreas positivas y negativas, y localizar esta línea base de modo que se produzcan las menores ordenadas máximas posibles. Usualmente el medio para la solución más rápida será el método de tanteo acompañado por algunos cálculos matemáticos.

**Ejemplo 3**

Investigar la viga continua de tres claros ilustrados en la figura 11.11. Trazar el diagrama de momento flexionante de acuerdo con los principios establecidos por el proceso de resistencia última.

**Solución**

1. Dibujar claros y localización de carga a alguna escala conveniente (figura 11.11a).

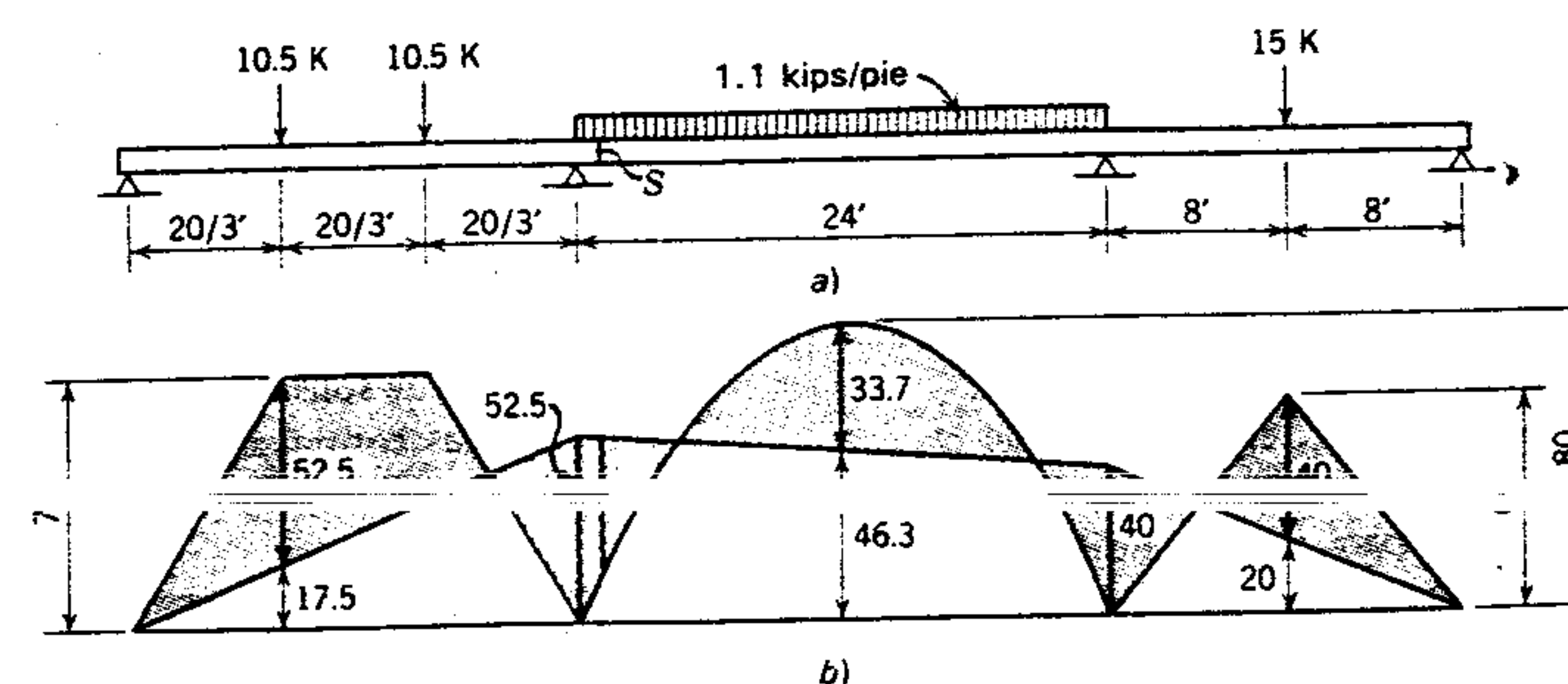


Figura 11.11 Viga continua, varios claros y cargas.



2. Calcular el momento máximo de claro simple para cada claro.

$$\text{Claro izquierdo: } M_{\max} = 10.5 \left( \frac{20}{3} \right) \\ = 70 \text{ pie-kips}$$

$$\text{Claro central: } M_{\max} = \frac{1.1(24)^2}{8} \\ = 79.2 \approx 80 \text{ pie-kips}$$

$$\text{Claro derecho: } M_{\max} = \frac{15(16)}{4} \\ = 60 \text{ pie-kips}$$

3. Trazar a una escala conveniente la variación en el diagrama de momento flexionante con base en una serie de vigas independientes simplemente apoyadas (figura 11.11b).
4. Sobreponer la línea recta que representa al efecto del momento negativo y dividiendo el diagrama en áreas positivas y negativas. Comenzando con el claro izquierdo se ve que si se usan 52.5 kips-pie para el extremo continuo, la línea recta producirá un valor negativo bajo la carga concentrada izquierda, como sigue:

$$M = 52.5 \left( \frac{1}{3} \right) = 17.5 \text{ pie-kips}$$

y el momento positivo neto en este mismo punto es  $M_p$ , o sea

$$M_p = 70 - 17.5 = 52.5 \text{ pie-kips}$$

Cualquier valor diferente de 52.5, establecido en el apoyo continuo, produciría un valor de momento flexionante negativo o positivo mayor o menor que el de 52.5. Por lo tanto, la posición ilustrada es la más favorable.

De modo similar, el momento del claro extremo de la derecha se dividirá entre 40 pie-kips tanto para el valor negativo en un extremo, como un valor neto positivo en el centro del claro. En la figura 11.11b se ilustra el diagrama de momento flexionante para el claro interior.

Obsérvese que el claro del extremo izquierdo es determinante. Si se usara una sección de viga de un solo tamaño en toda la longitud, se necesitaría tener un valor de  $Z$  adecuado para desarrollar el momento de 52.5 pie-kips. En estas condiciones, en el claro del extremo derecho no se formaría un "mecanismo", y el claro central habría desarrollado una sola articulación plástica, y por tanto, no estaría en la resistencia última.

Esto apunta hacia la consideración final en el diseño de vigas continuas, es decir, variación de tamaños de vigas y localización de los empalmes de las vigas. Considérese además el diagrama de momento flexionante de la figura 11.11. Se ha mostrado que el claro del extremo izquierdo debe tener un módulo de sección plástico suficiente para desarrollar un momento de 52.5 pie-kips y, al hacerlo, estaría en la carga última. El claro del extremo derecho tendría que tener un valor de  $Z$  adecuado para desarrollar sólo 40 pie-kips y por tanto la carga última. El claro interior es más complejo. Debe tener un valor de  $Z$  adecuado para desarrollar los 52.5 pie-kips en el extremo izquierdo, pero como sólo se desarrollaría una sola articulación plástica, la viga no estaría en la resistencia última. Con un valor de  $Z$  menor que el necesario para desarrollar 52.5 pie-kips, se bajaría la línea base sobrepuesta para el claro extremo (por tanto, incrementando el momento positivo neto), y el claro extremo estaría subdiseñado.

Sin embargo, si la viga del extremo izquierdo, capaz de desarrollar un momento de 52.5 pie-kips, se extendiera sobre el apoyo y se empalmara a la viga interior en el punto  $S$ , el tamaño del resto de la viga interior se podría reducir, puesto que tendría que desarrollar un momento de solamente 40 pie-kips. El diseño de vigas continuas de tamaño variable se puede ilustrar mejor mediante ejemplos.

#### Ejemplo 4

Una viga continua de acero A36 de tres claros soporta una carga uniforme de 2 kips por pie, inclu-

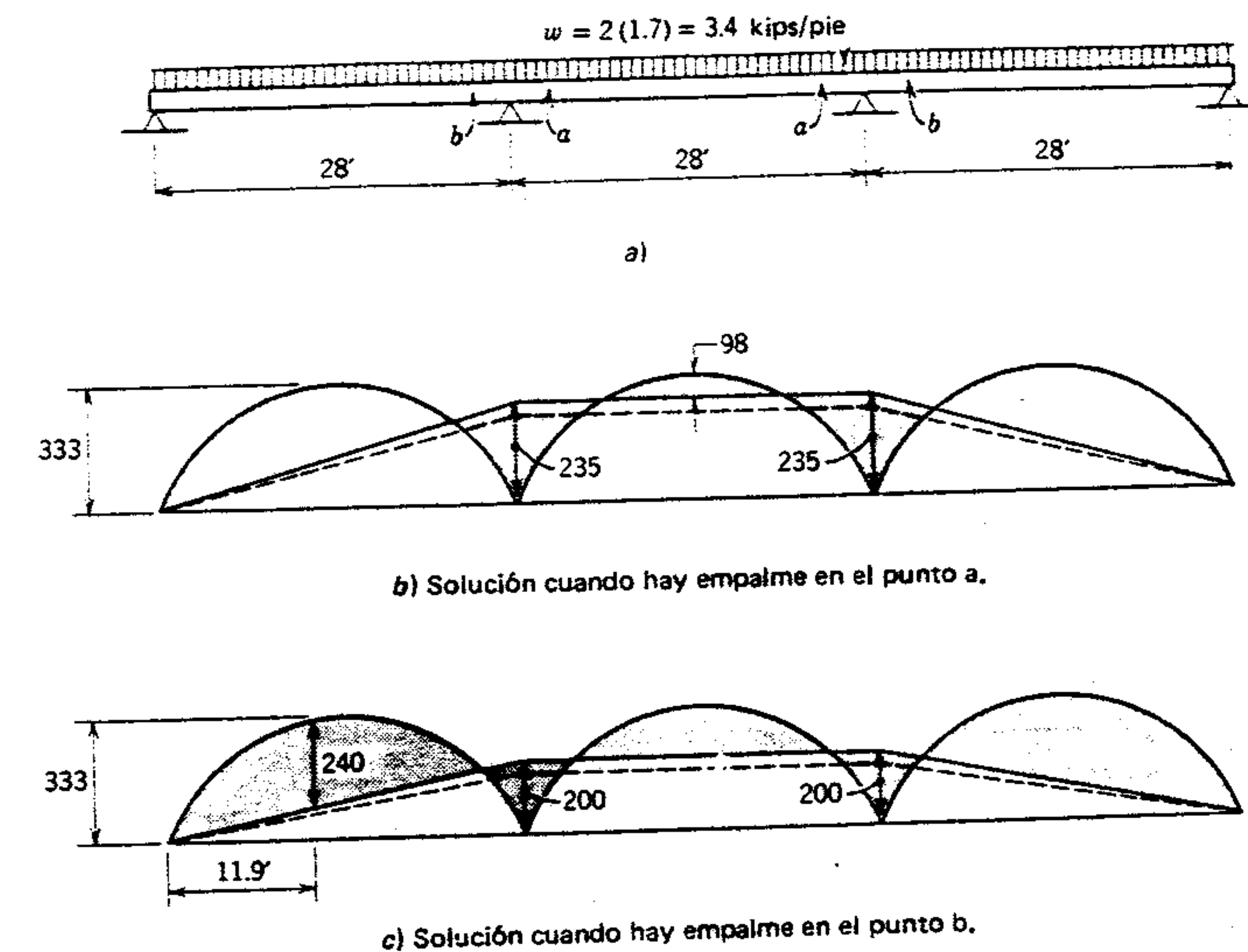


Figura 11.12 Viga continua empalmada.

yendo una tolerancia para la carga muerta de la viga (figura 11.12). La longitud total de la viga,  $28(3) = 84$  pies, está compuesta por tres vigas separadas empalmadas como se dijo antes. Suponer que tiene apoyo lateral completo y el cortante y la deflexión.

- a) Efectuar el diseño de modo que las vigas de los extremos queden en voladizo sobre el apoyo y se empalmen al claro interior en el punto  $a$ .
- b) Efectuar el diseño de modo que la viga interior quede en voladizo sobre los apoyos y se empalme a las vigas de los extremos en el punto  $b$ .

#### Solución a

- a) Dibujar los claros de las vigas a una escala conveniente (figura 11.12a).
- b) Calcular la carga incrementada para que admita un factor de seguridad.

$$w = 2(1.7) = 3.4 \text{ kips por pie}$$

- c) Calcular el momento positivo máximo con base en una serie de claros simples.

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{3.4(28)^2}{8} = 333 \text{ pie-kips}$$

- d) Determinar los momentos que producen articulaciones plásticas en el claro extremo, y sobreponer la línea recta de variación del momento negativo tanto para los claros extremos como para el interior. (Ésta es la línea punteada de la figura 11.12b).

$$M_p = 0.0858WL = 0.0858(3.4)28^2 \\ = 229 \text{ pie-kips}$$

- e) Determinar el módulo de sección plástico requerido para el claro de extremo.



$$Z = \frac{M_p}{F_y} = \frac{229(12)}{36} = 76.3 \text{ pulg}^3$$

- f) Seleccionar la sección para el claro exterior en la Tabla de Módulos de Sección Plástico del AISC.

Elegir una W 18 X 40 ( $Z = 78.4 \text{ pulg}^3$ )

- g) La viga exterior está ligeramente sobrediseñada debido a la disponibilidad de formas ( $Z = 78.4$  vs.  $Z = 76.3$  necesaria). Por lo tanto, calcular el momento plástico de la sección seleccionada.

$$M_p = ZF_y = \frac{78.4(36)}{12} = 235 \text{ pie-kips}$$

- h) Ajustar la línea de variación de momento negativo sobrepuesta, para tomar en cuenta la resistencia al momento plástico real para la sección seleccionada. (Esto se ilustra con una línea cerrada en la figura 11.12b).
- i) Calcular el momento positivo neto restante en el centro del claro interior.

$$M = 333 - 235 = 98 \text{ pie-kips}$$

- j) Determinar el módulo de sección plástico necesario para el claro interior.

$$Z = \frac{M_p}{F_y} = \frac{98(12)}{36} = 32.7 \text{ pulg}^3$$

- k) Seleccionar la sección para el claro interior en la tabla de Módulos de Sección Plástico del AISC.

Aunque la Sección W 14 X 22 sería adecuada, se elige la sección de 18 pulgadas de peralte para mantener un peralte constante de 18 pulg. (aproximadamente) y simplificar el empalme de las vigas.

### Solución b

Los pasos a) a c) son idénticos a los de la solución a.

- d) Considerar primero el claro interior. Sobreponer la línea base más favorable y determinar  $M_p$ . La línea base más favorable dividiría en partes iguales el momento de claro simple momentos negativo y positivo.

$$M_p = \frac{333}{2} = 166.7 \text{ pie-kips}$$

(Esta línea se presenta punteada en la figura 11.12c).

- e) Encontrar el módulo de sección plástico requerido.

$$Z = \frac{M_p}{F_y} = \frac{166.7(12)}{36} = 55.5 \text{ pulg}^3$$

- f) Seleccionar la sección de viga de menor peso.

Elegir una W 18 X 35 ( $Z = 66.5 \text{ pulg}^3$ )

- g) Como la viga está ligeramente sobrada, determinar su momento resistente plástico y ajustar la línea base sobrepuesta (la línea cerrada de la figura 11.12c).

$$M_p = ZF_y = \frac{66.5(36)}{12} \approx 200 \text{ pie-kips}$$

- h) Encontrar el momento positivo máximo para el claro de extremo que corresponda al efecto de variación de línea recta ajustada del momento negativo de 200 pie-kips. Para hacerlo, desarrollar una ecuación que represente este momento positivo a cualquier distancia  $x$  del apoyo izquierdo. La reacción izquierda es de aproximadamente 47.5 kips. Por lo tanto,

$$M = -\frac{3.4x^2}{2} + 47.5x - \frac{x}{28}(200)$$

$$M = -1.7x^2 + 40.36x$$

La posición del momento máximo ( $M$ ) a partir de la ecuación anterior se determina tomando la primera derivada con respecto a  $x$  e igualándola a cero.

$$\frac{dM}{dx} = -3.4x + 40.36 = 0$$

$$x = \frac{40.36}{3.4} = 11.9 \text{ pies}$$

Determinar el valor de  $M_p$ , situado a 11.9 pies de la reacción izquierda.

$$M_p = -1.7(11.9)^2 + 40.36(11.9) = 240 \text{ pie-kips}$$

- i) Encontrar el módulo de sección plástico requerido para el claro de extremo.

$$Z = \frac{M_p}{F_y} = \frac{240(12)}{36} = 80 \text{ pulg}^3$$

- j) Seleccionar la sección de viga de 18 pulg de menor peso que proporcione este módulo de sección.

Elegir una W 18 X 46

### PROBLEMAS

1. Una viga continua de dos claros soporta dos cargas concentradas de 20 kips, cada una en las terceras partes de su longitud como se muestra en la figura 11.13. Suponer que se va a usar una sola sección de viga en toda la longitud (60 pies), y que los patines inferior y superior tienen apoyo lateral completo. Se especifica acero A36. Omitir el peso propio de la viga.

- a) Diseñar la viga basándose en la resistencia última al cortante y la deflexión.
- b) Suponiendo que la carga de 20 kips es viva, revisar para determinar si la sección de viga seleccionada en el punto a) es adecuada si la deflexión máxima por carga viva está limitada a  $L/360$ .

(Las respuestas se dan en el Apéndice G).

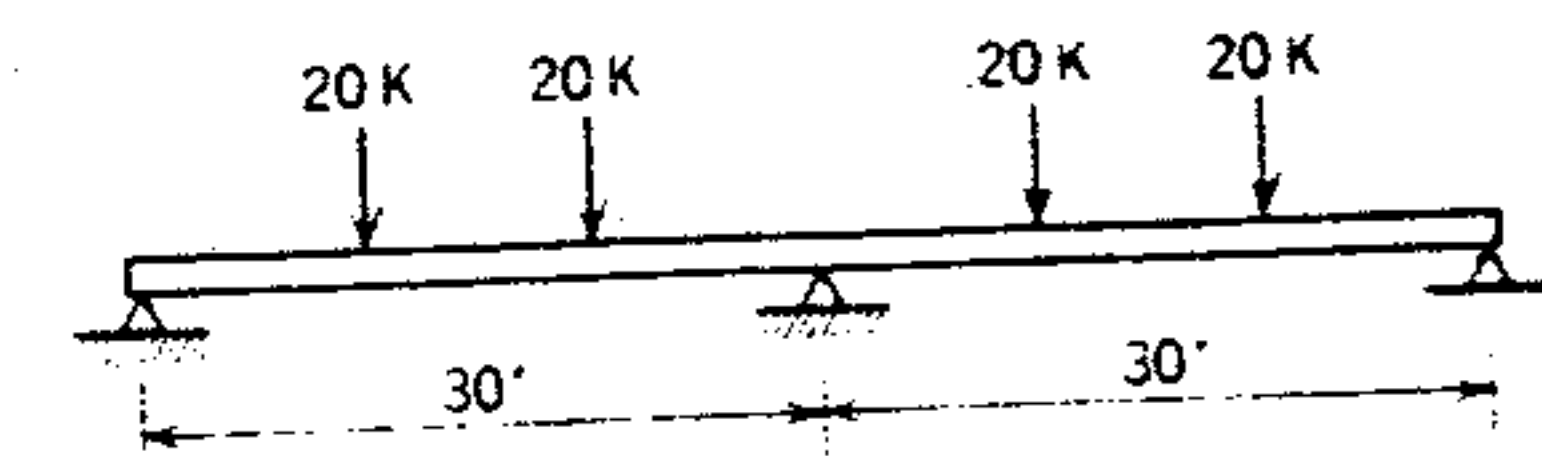


Figura 11.13

2. Una viga continua sobre tres claros soporta cargas concentradas a intervalos de 8 pies como se ve en la figura 11.14. No hay carga uniforme. Omitir el peso propio de la viga. Se va a usar un solo tamaño de sección de acero A36 en toda la longitud. Ignorar el cortante y la deflexión. Diseñar la viga suponiendo que tiene apoyo lateral completo.

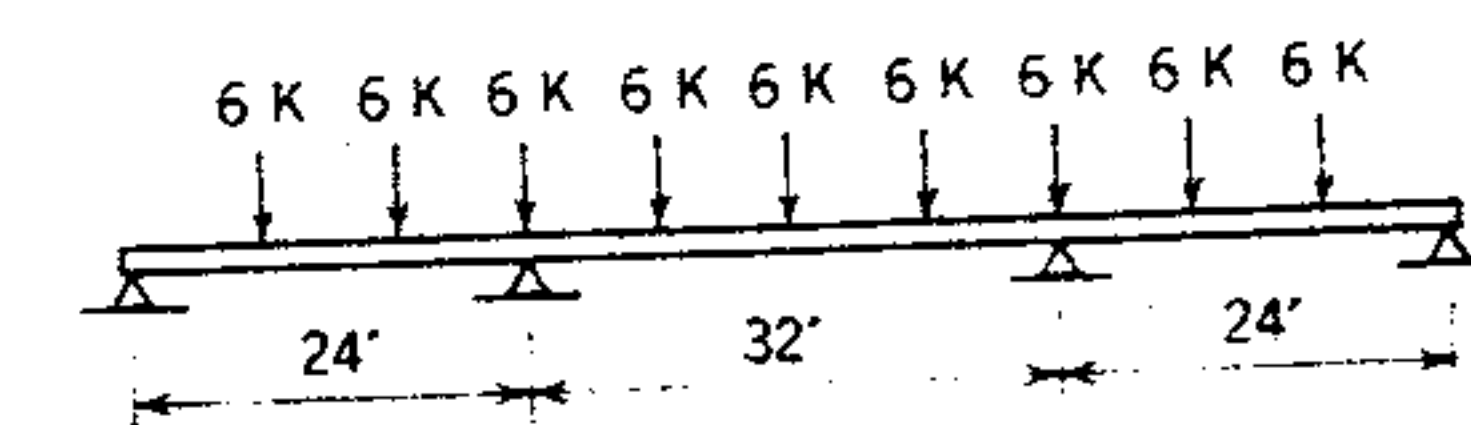


Figura 11.14

3. La viga continua ilustrada en la figura 11.15 se va a componer de tres partes separadas, empalmadas en los puntos marcados con S. Usar acero A36. Diseñar la viga manteniendo un peralte nominal constante. Omitir el cortante, la deflexión y el peso propio de la viga. Suponer que tiene apoyo lateral completo. (La respuesta se da en el Apéndice G).

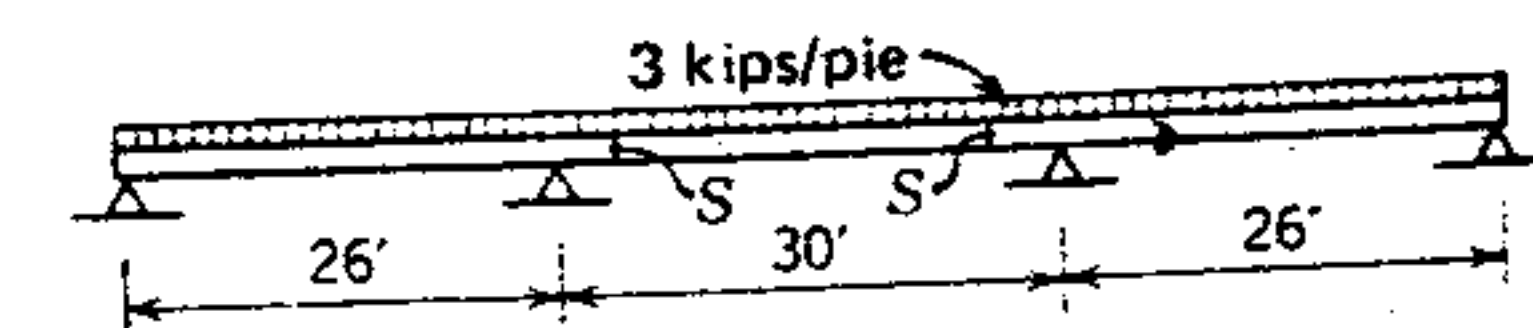


Figura 11.15

4. La viga continua de la figura 11.16 se va a componer de tres secciones separadas, empalmadas en los puntos marcados con S. Diseñar la viga usando acero A36. Suponer que tiene apoyo lateral completo y omitir cortante, deflexión y peso propio de la viga.



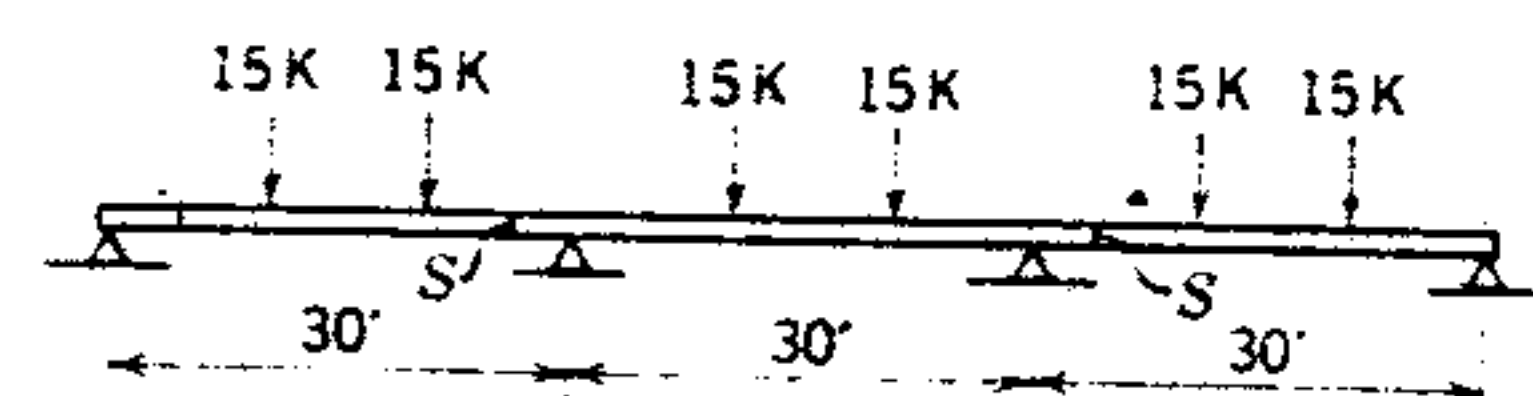


Figura 11.16

5. En la figura 11.17 se ilustra una viga continua de tres claros. Se usa una sola sección en toda la longitud, y no hay cargas uniformes. ¿Qué longitud de claro exterior  $L$  se debe usar para lograr la solución más económica? (La solución se da en el Apéndice G).

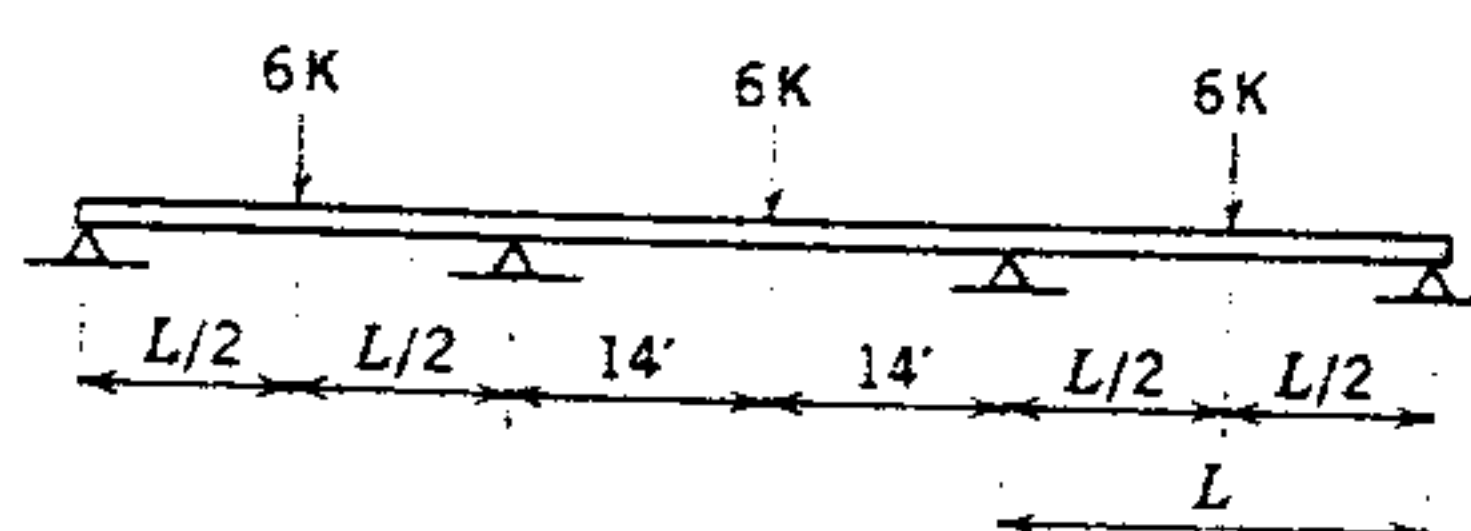


Figura 11.17

## 11.7 MARCOS

En la especificación AISC 1978 se permite el diseño por resistencia última por el método plástico para marcos arriostrados y no arriostrados siempre que se use un factor de carga de 1.7 para cargas viva y muerta, o de 1.3 si las cargas viva y muerta actúan en conjunción con las de viento o sismo. Sin embargo, se debe tener especial cuidado en asegurarlos contra el pandeo local y general.

El análisis de marcos por el método plástico es demasiado complicado para tratarlo en forma completa en este texto. Por lo tanto, sólo se verán principios básicos, y la mayoría de éstos referidos a marcos rectangulares simples. Además de las referencias listadas al final de la sección 11.1, existen muchos textos dedicados exclusivamente a este

La localización de articulaciones plásticas en marcos para formar un mecanismo varía con el tipo de carga, así como con la forma y otras propiedades físicas del marco. Es importante enfatizar que cada mecanismo, para cada condición de carga, requiere un análisis separado, y que no es válida la sobreposición de diagramas de momentos.

Este principio se ilustra en la figura 11.18. La carga de gravedad  $P_g$  necesita tres articulaciones plásticas, situadas como se ve en la figura 11.18a, para crear un mecanismo para este marco con bases articuladas. Sin embargo, la carga lateral  $P_w$  requiere sólo dos articulaciones plásticas para formar un mecanismo en el mismo marco (figura 11.18b).

Con el diseño elástico fue posible analizar varias combinaciones de condiciones de carga variables e independientes para obtener las condiciones críticas para las que se debe diseñar la estructura. No obstante, como se dijo antes, en el diseño plástico no se aplica la sobreposición de diagramas de momentos para diversas condiciones de carga. Cada combinación de carga posible tendrá su propio mecanismo de falla; por lo tanto, cada combinación se debe considerar por separado.

En la figura 11.19 se ilustran cinco marcos distintos y la localización del número mínimo de articulaciones plásticas necesario para formar un mecanismo con las cargas dadas.

Hay varios procedimientos analíticos que se pueden aplicar a los marcos. Los dos de uso más común son el "método del mecanismo" y el "método de equilibrio". El primero se recomienda para marcos con muchas reacciones redundantes. El método implica una teoría de la energía en que se supone que cada articulación plástica tiene una rotación virtual tal que el trabajo interno total se puede igualar al trabajo externo. El trabajo externo

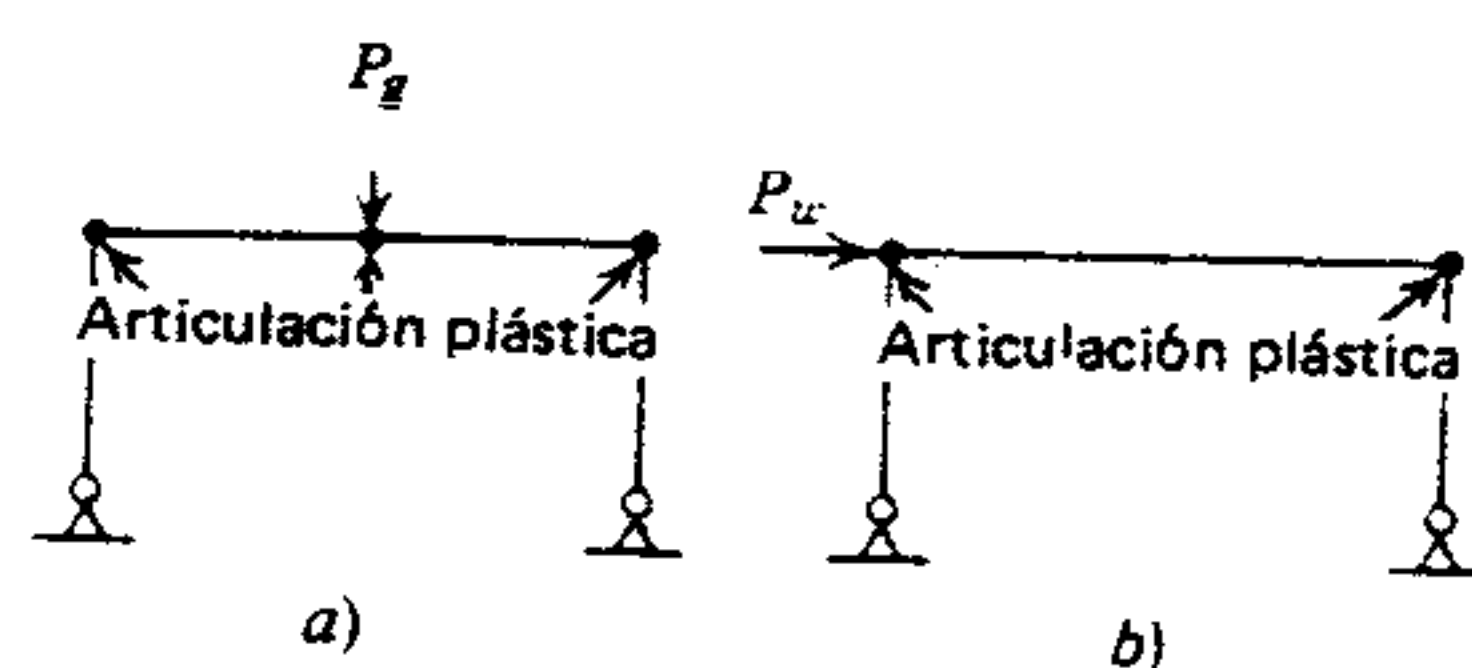


Figura 11.18 Relación carga-mecanismo.

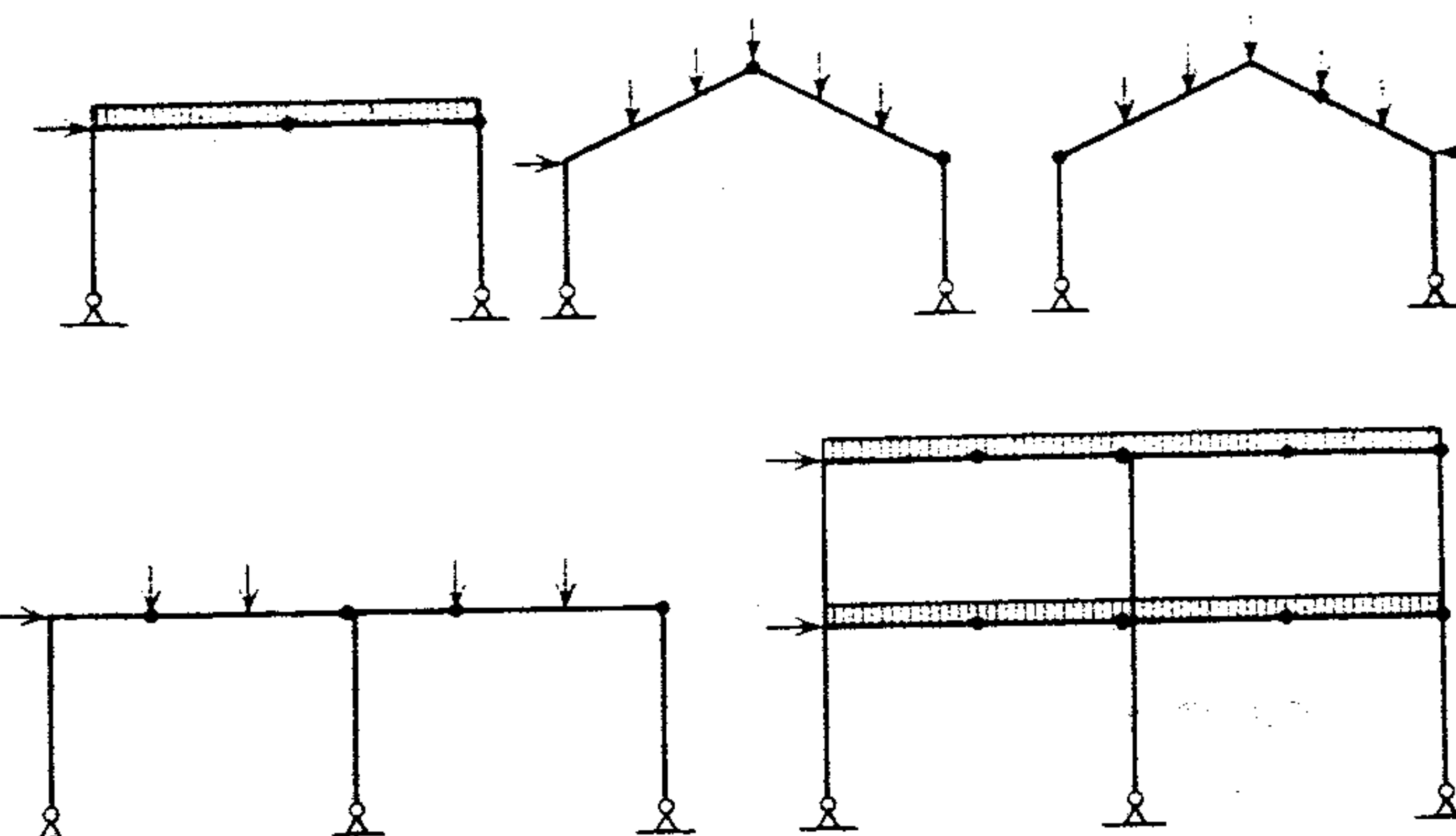


Figura 11.19 Mecanismos en marcos.

se representa por el desplazamiento de las cargas soportadas. El "método del mecanismo" se describirá primero en relación con un marco rectangular simple. Luego se explicará el método de equilibrio junto con un ejemplo ilustrativo.

**Método del mecanismo.** Comprende el principio del trabajo virtual. Se supone que el marco que se analiza ha llegado a un estado de mecanismo y que cada articulación plástica, desarrollando un momento plástico  $M_p$ , tiene una rotación ( $\theta$ ) tan pequeña que se considera virtual. Luego el trabajo interno de cada articulación plástica se puede representar como el producto de  $M_p$  y  $\theta$ . La suma de todo el trabajo en cada articulación plástica, requerido para el mecanismo, representa el trabajo total interno  $W_i$ . El trabajo externo se representa por la suma de los productos de cargas y sus desplazamientos respectivos ( $\Delta$ ). Y finalmente, la ley de conservación de la energía permite igualar el trabajo externo al trabajo interno.

Considérese el marco cargado que se muestra en la figura 11.20a. Se necesitan tres análisis separados: uno para el mecanismo tipo viga que necesita tres articulaciones plásticas y producidas solamente por la carga vertical (figura 11.20b); uno para el mecanismo tipo tablero que necesita dos

articulaciones plásticas y producidas solamente por la carga lateral (figura 11.20c), y uno para el mecanismo combinado que necesita dos articulaciones plásticas y producidas por las cargas vertical y lateral combinadas (figura 11.20d). La tarea principal consiste en descubrir cuál mecanismo requiere la menor carga, y así establecer la capacidad limitante del marco, es decir su resistencia límite. Para simplificar la tarea, suponer que  $h = L/3$  y  $P_w = P_g/4$ ; asimismo, suponer que las vigas y las columnas serán del mismo tamaño.

**Mecanismo de viga:** Por geometría y sabiendo que para ángulos pequeños,  $\tan \theta = \theta$ , se puede observar que  $\Delta_1 = \theta_1 L/2$ .

La carga  $P_g$  se mueve una distancia  $\Delta_1$ ; por lo tanto, el trabajo externo total es

$$W_e = P_g \Delta_1 = \frac{P_g \theta_1 L}{2}$$

El trabajo interno total es la suma del producto de  $M_p$  y el ángulo para cada articulación plástica. De izquierda a derecha, el trabajo interno es

$$W_i = M_p \theta_1 + M_p 2\theta_1 + M_p \theta_1 = 4M_p \theta_1$$

<sup>1</sup>B.G. Neal, *The Plastic Methods of Structural Analysis*, Wiley, 1956; Fritz Engineering Laboratories, *Lecture Notes, Plastic Design of Multi-Story Frames*, Lehigh University, 1965. *Plastic Design of Braced Multi-story Steel Frames*, American Iron and Steel Institute y AISC.



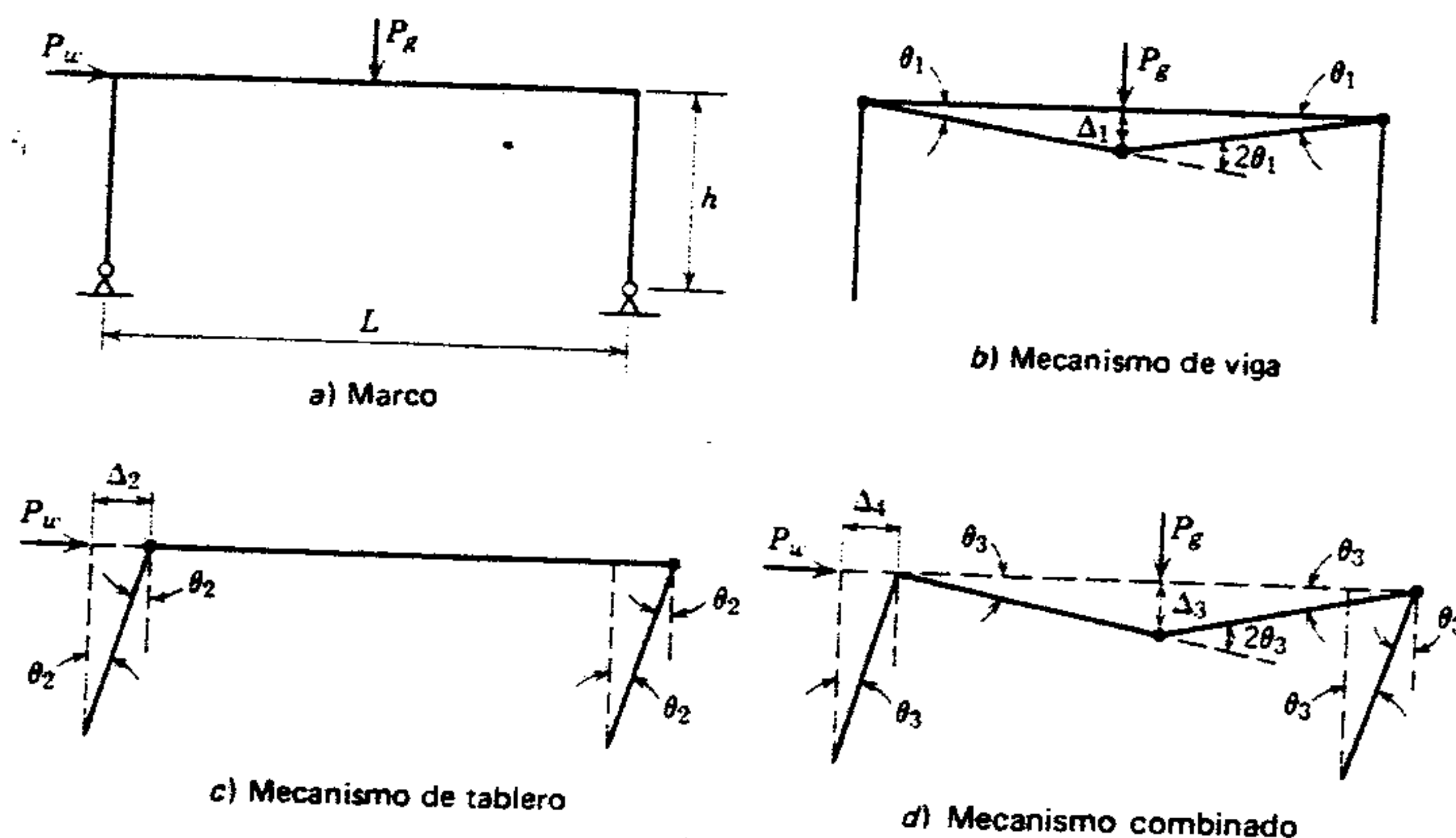


Figura 11.20 Método del mecanismo.

Igualando el trabajo externo al trabajo interno y simplificando,

$$W_e = W_i = \frac{P_g \theta_1 L}{2} = 4M_p \theta_1$$

y

$$P_g = \frac{8M_p}{L}$$

Mecanismo de tablero: El trabajo externo es

$$W_e = P_w \Delta_2$$

y

$$\Delta_2 = \theta_2 h$$

Sin embargo, como  $h = L/3$ ,

$$\Delta_2 = \frac{\theta_2 L}{3}$$

Por lo tanto,

$$W_e = \frac{P_w \theta_2 L}{3}$$

El trabajo interno se calcula con base en dos articulaciones plásticas.

$$W_i = M_p \theta_2 + M_p \theta_2 = 2M_p \theta_2$$

Por lo tanto

$$W_e = W_i = \frac{P_w \theta_2 L}{3} = 2M_p \theta_2$$

$$P_w = \frac{6M_p}{L}$$

Asimismo, como  $P_w = P_g/4$ ,

$$P_g = \frac{24M_p}{L}$$

Mecanismo combinado: El trabajo externo es

$$\begin{aligned} W_e &= P_g \Delta_3 + P_w \Delta_4 = P_g \theta_3 \frac{L}{2} + P_w \theta_3 h \\ &= \frac{P_g \theta_3 L}{2} + \frac{P_w \theta_3 L}{3} \end{aligned}$$

Sustituyendo  $P_w$  por  $P_g/4$ ,

$$W_e = \frac{P_g \theta_3 L}{2} + \frac{P_g \theta_3 L}{12} = \frac{7P_g \theta_3 L}{12}$$

El trabajo interno es

$$W_i = M_p 2\theta_3 + M_p 2\theta_3 = 4M_p \theta_3$$

Por lo tanto,

$$W_e = W_i = \frac{7P_g \theta_3 L}{12} = 4M_p \theta_3$$

y

$$P_g = \frac{48M_p}{7L}$$

En resumen: Comparar los resultados de los tres análisis.

$$P_g = \frac{8M_p}{L} \quad (\text{mecanismo de viga})$$

$$P_g = \frac{24M_p}{L} \quad (\text{mecanismo de tablero})$$

$$P_g = \frac{48M_p}{7L} \quad (\text{mecanismo combinado})$$

Se ve que la carga para el mecanismo combinado es la menor y, por tanto, será ésta la carga limitante. La carga de resistencia última se puede calcular de

$$P_g = \frac{48M_p}{7L}$$

Se necesita una comprobación más para asegurarse de que en ningún lugar del marco se excede  $M_p$ . En la figura 11.21 se ilustra el diagrama de momento para esta comprobación,<sup>2</sup> con el momento en cada sección determinado por estática. Ésta es una comprobación de equilibrio y se trata con mayor detalle a continuación, junto con el "método de equilibrio" de análisis.

Debe notarse que los procedimientos descritos no son demasiado complicados, incluso cuando se encuentran más de tres articulaciones plásticas o variaciones en geometría. Por lo tanto, el anterior método es más complicado que el marco rectangular simple.

<sup>2</sup>Cuando se analizan marcos, con frecuencia es conveniente dibujar el diagrama de momento sobre el lado de tensión del marco. Sin embargo, para mantener la congruencia en este texto, no se usará este método.

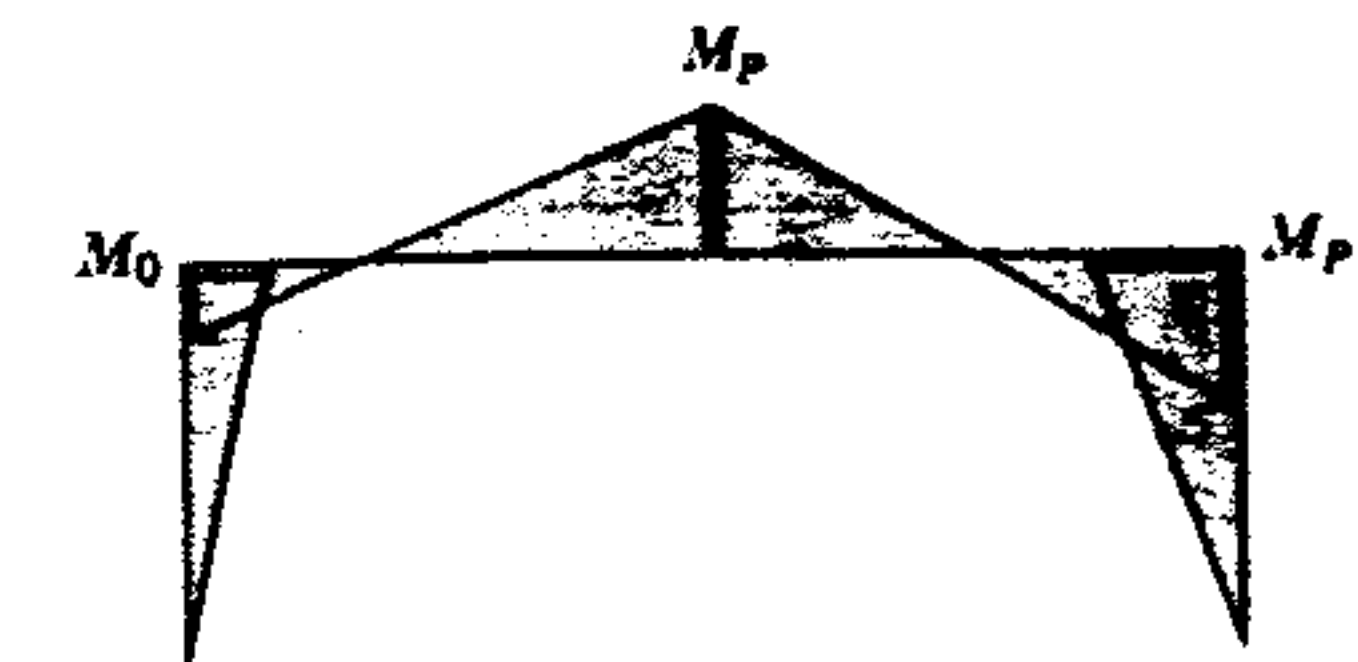


Figura 11.21 Diagrama de momento.

**Método de equilibrio.** Para marcos con no más de tres articulaciones plásticas, el "método de equilibrio" proporciona una solución simple muy similar a la empleada para vigas continuas. Se requiere una investigación separada para cada posible mecanismo causado por cualquier variación en la carga. De nuevo, se debe dar mucha atención al hecho de que no se pueden sobreponer diagramas de momento flexionante. Cada solución se basa en la estática y en el hecho de que el momento flexionante máximo está limitado a  $M_p$ , una articulación plástica. Esto permite una redistribución de otros momentos hasta que se forma una segunda articulación, y así sucesivamente, hasta formarse un número suficiente de articulaciones para crear un mecanismo.

Supóngase que las columnas del marco ilustrado en la figura 11.22a tienen la mitad de la resistencia de flexión última de la viga, es decir,

$$M_{p1} = \frac{1}{2} M_{p2}$$

Se necesitan tres análisis separados (figuras 11.22b, c y d). El mecanismo tipo viga necesita tres articulaciones plásticas que se forman como se ilustra (figura 11.22b). Entonces, por estática,

$$M_{p1} + M_{p2} = P_g \frac{L}{3}$$

11.22c, y requiere dos articulaciones, y

$$2M_{p1} = P_w h$$

El mecanismo combinado se ilustra en la figura 11.22d, y requiere sólo dos articulaciones. El análisis



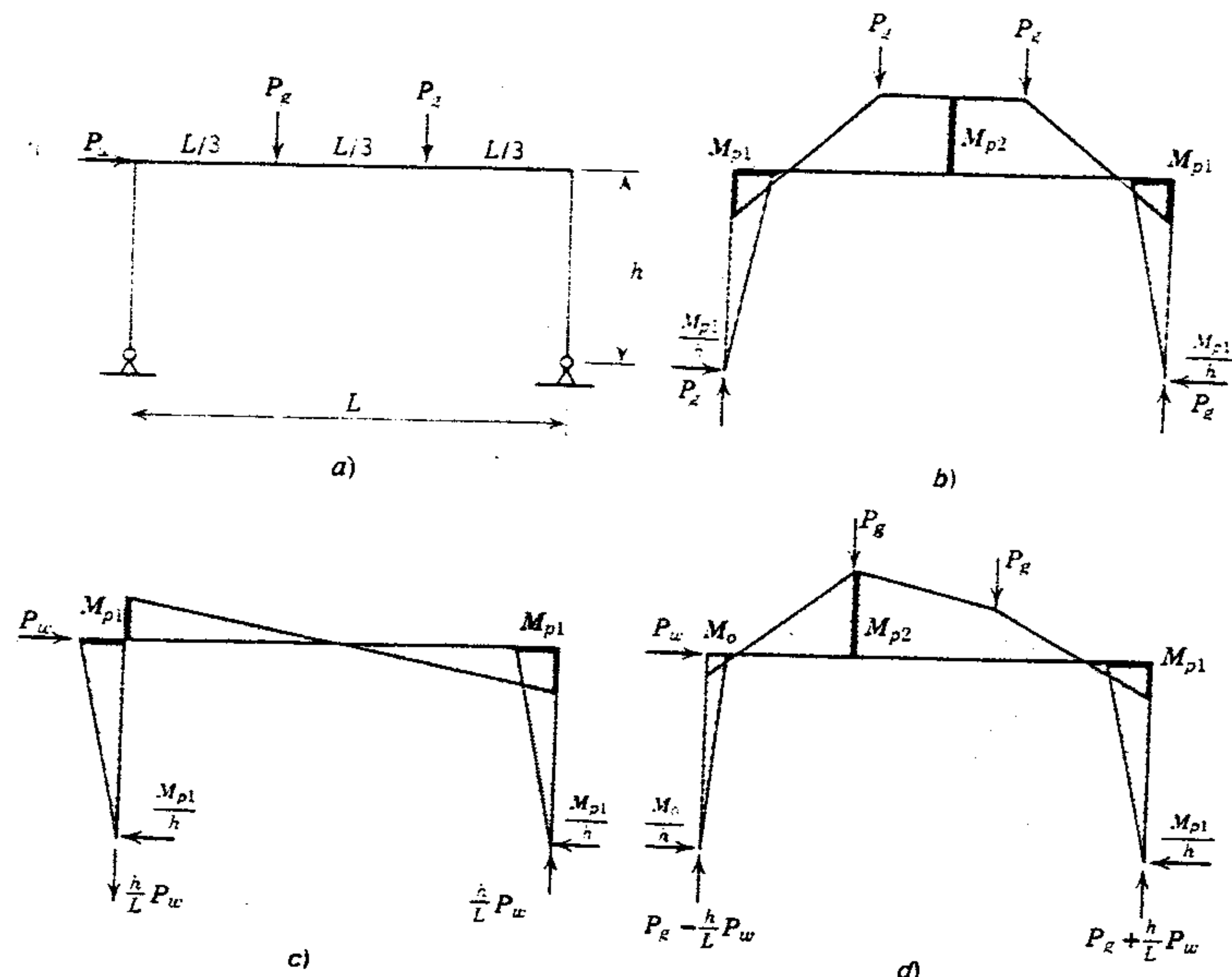


Figura 11.22 Método de equilibrio.

es más complicado; sin embargo, por estática, se puede concluir que

$$M_{p1} = \frac{PL}{3} - M_{p2} + \frac{P_w h}{2}$$

$$M_0 = \frac{PL}{3} - M_{p2} - \frac{P_w h}{2}$$

$$M_{p2} = \left( P_g - \frac{h}{L} P_w \right) \frac{L}{3} - M_0$$

Un miembro sujeto a un momento plástico  $M_p$  también podría sostener una pequeña carga axial. Sin embargo, a medida que la carga axial aumenta, el momento plástico disponible disminuye. Para un tratamiento más detallado, véase la nota de pie 1). La parte 2 de la Especificación AISC cubre este aspecto y también proporciona fórmulas para diversas combinaciones de momento y carga axial. Éste

y otros requisitos de especificación se tratarán junto con el siguiente problema de ejemplo.

### Ejemplo

Diseñar la viga y las columnas que forman el marco ilustrado en la figura 11.23. Se especifica acero A36. Se supondrá que las bases de las columnas están articuladas, y que hay conexiones continuas en los nudos. La suma de las cargas de gravedad, viva, ambiental y muerta es de 2.1 kips por pie. Se supone que la carga lateral por viento o sismo está concentrada en el cabezal (4.95 kips). Las columnas están arriostradas respecto al eje débil a intervalos de 5 pies. Supóngase que la parte de la viga del marco tiene apoyo lateral adecuado. Basar el diseño en el supuesto de que la viga tiene un valor Z de aproximadamente 4 veces el de las columnas.

La solución se obtendrá en cuatro partes. En la primera a), se establecerá el tamaño de prueba basándose solamente en el flexionante resultante de las cargas de gravedad. En la segunda b) y la tercera c), el tamaño de prueba se revisará solamente para el flexionante resultante de las cargas laterales. En la cuarta d), las secciones de prueba se examinarán para las cargas axial y flexionante combinadas y otros requisitos especificados.

### Solución a

Solamente el flexionante por cargas de gravedad que podrían causar un mecanismo tipo viga.

- a) Incrementar las cargas de gravedad mediante la aplicación del factor de carga.

$$w = LF(w_1) = 1.7(2.1) \approx 3.6 \text{ pie-kips}$$

- b) Determinar el momento flexionante de viga simple total que desarrollarán la viga y la columna.

$$M_i = \frac{3.6(40)^2}{8} = 720 \text{ pie-kips}$$

- c) Basándose en la relación supuesta de 4 a 1, determinar la cantidad de momento positivo que desarrollará la viga, y el momento negativo que desarrollará la columna en el nudo o junta.

$$M_{col.} = \frac{1}{5} M_i = \frac{1}{5}(720) = 144 \text{ pie-kips}$$

$$M_{viga} = \frac{4}{5} M_i = \frac{4}{5}(720) = 576 \text{ pie-kips}$$

$$\text{Total} = 720 \text{ pie-kips}$$

- d) Hacer un esquema del diagrama de momento basándose en los cálculos anteriores (la parte sombreada de la figura 11.24)

- e) Determinar el primer tamaño de prueba para la viga.

$$Z = \frac{M}{F_y} = \frac{576(12)}{36} = 192 \text{ pulg}^3$$

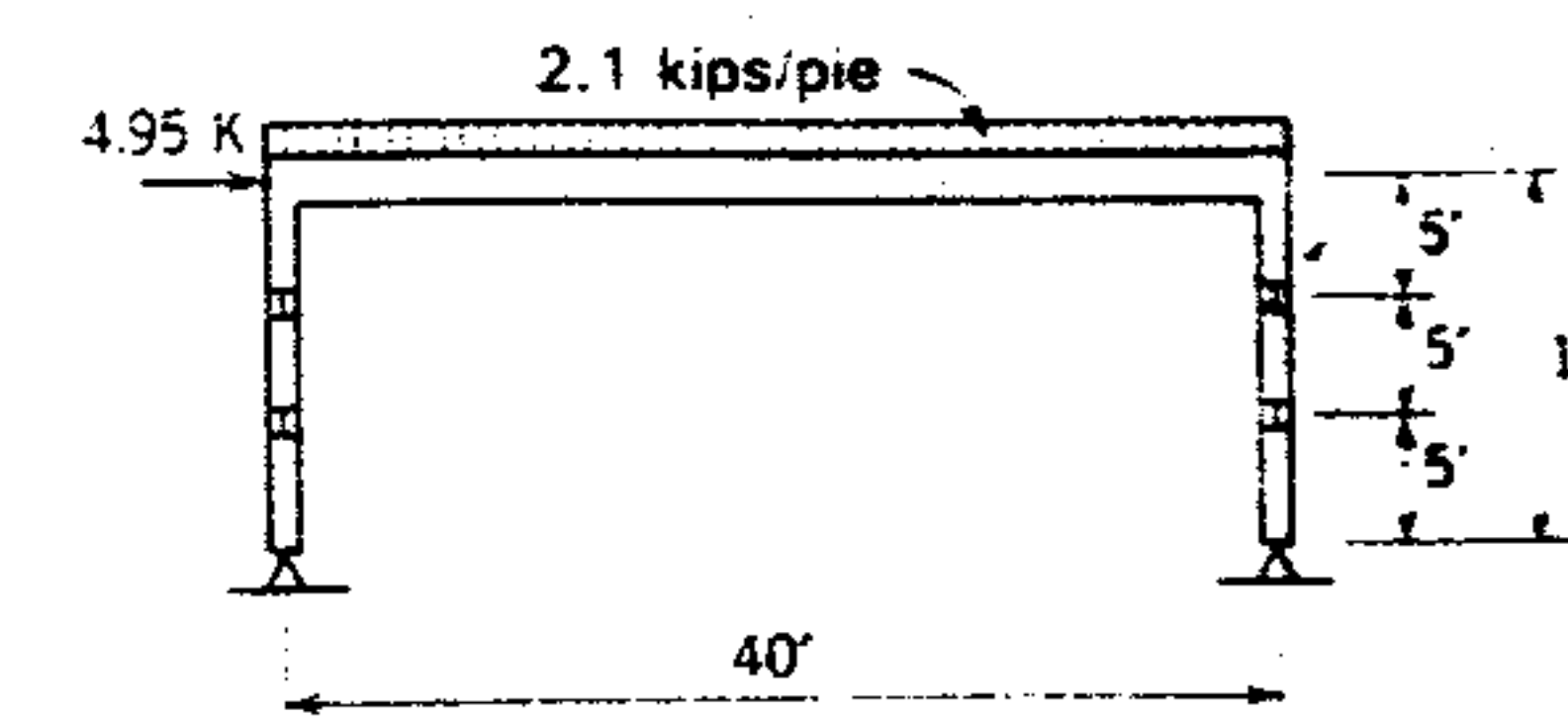


Figura 11.23 Ejemplo

Seleccionar una W 24 × 76 ( $Z = 200 \text{ pulg}^3$ ). La viga está ligeramente sobrada; por lo tanto, calcular el momento plástico basándose en su tamaño real:

$$M_{p(viga)} = \frac{200(36)}{12} = 600 \text{ pie-kips}$$

- f) Calcular de nuevo el momento requerido que desarrollará la columna, basándose en la adopción de la sección W 24 × 76 para la viga.

$$M_{p(col.)} = 720 - 600 = 120 \text{ pie-kips}$$

Estos momentos flexionantes están representados por la línea punteada de la figura 11.24.

- g) Determinar el primer tamaño de prueba para la columna.

$$Z = \frac{M}{F_y} = \frac{120(12)}{36} = 40 \text{ pulg}^3$$

Se necesitaría un módulo de sección plástico de 40 pulg<sup>3</sup> si no hubiera carga axial. Sin em-

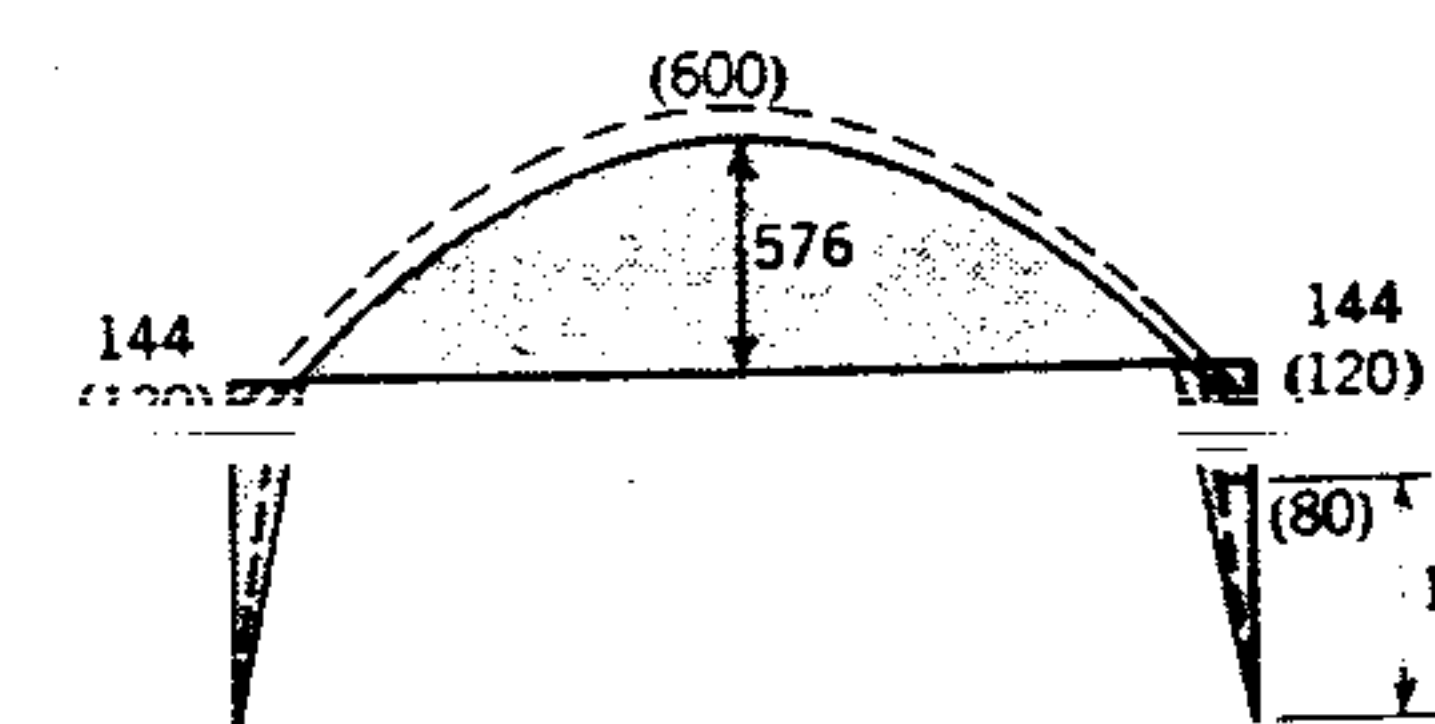


Figura 11.24 Diagrama de momento



bargo, como sí hay carga axial, elegir una sección de prueba con un valor de  $Z$  un poco mayor.

Seleccionar una W 12×35 ( $Z = 51.2$  pulg<sup>3</sup>).

Las selecciones de prueba son muy aproximadas a los requisitos originales de la relación 4 a 1 para los módulos de sección plástico, es decir,

$$\frac{200}{51.2} \approx \frac{4}{1}$$

Después de investigar otro tipo de mecanismos, se hará la revisión detallada de requisitos reglamentarios, así como la combinación de flexión y carga axial.

#### Solución b

Flexión por acción del viento (o sismo) aisladamente, que produciría un mecanismo de tablero. (Para esto se supone que la carga muerta es despreciable).

a) Aumentar la carga lateral aplicando el factor de carga.

$$P_w = LF(P) = 1.3(4.95) = 6.44 \text{ kips}$$

b) Determinar el momento total por viento.

$$M_w = P_w h = 6.44(15) = 96.6 \text{ pie-kips}$$

c) Distribuir proporcionalmente el momento total por viento en cada junta (en este caso, cantidades iguales) y trazar el diagrama de momento (figura 11.25).

$$M_{\text{nudo}} = \frac{1}{2}(96.6) = 48.3 \text{ pie-kips}$$

La capacidad de momento plástico en la junta de las secciones elegidas es de 155 pie-kips, no puede haber mecanismo de tablero por la cara lateral y las secciones de prueba se consideran seguras.

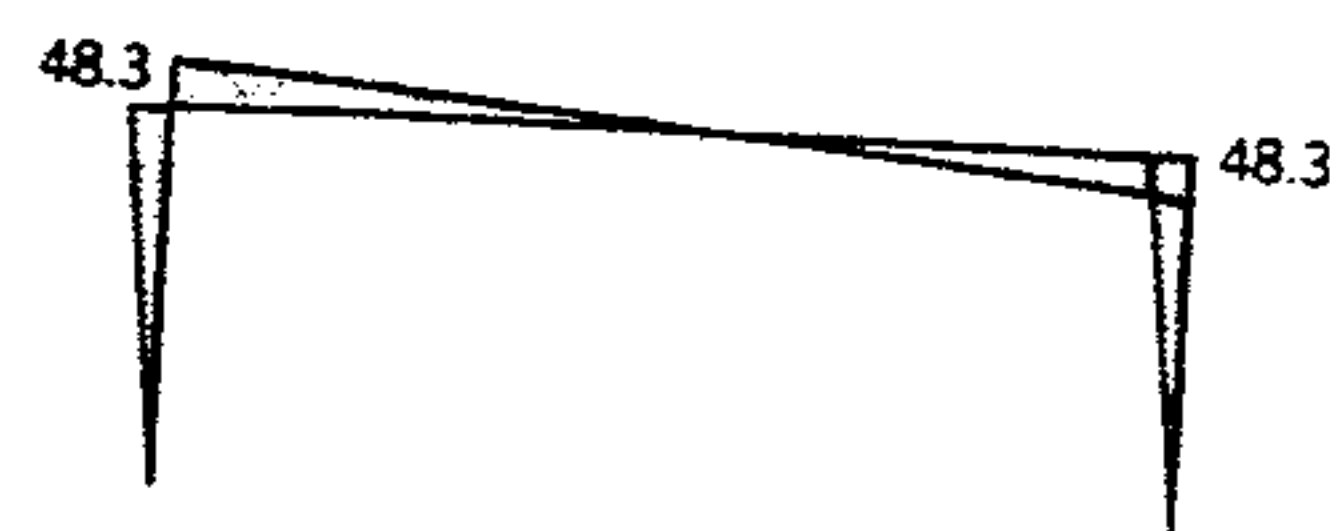


Figura 11.25 Sólo viento.

#### Solución c

Flexión debido a una combinación de cargas de gravedad y de viento que podrían causar un mecanismo combinado.

a) Aumentar las cargas de viento y gravedad aplicando el factor de carga

$$w = 1.3(2.1) = 2.73 \text{ kips por pie}$$

$$P_w = 1.3(4.95) = 6.44 \text{ pie-kips}$$

b) Calcular el momento flexionante total de viga simple que desarrollará la viga (positivo) y la columna en la junta (negativo).

$$M_t = \frac{2.73(40)^2}{8} = 546 \text{ pie-kips}$$

Este momento se representa por la línea punteada de la figura 11.26a.

c) Como la columna es más débil que la viga en la junta donde se unen, alcanzaría su momento plástico limitante primero con  $M_p = 155$  pie-kips. Se observa que para la dirección de viento ilustrada, los momentos en la junta derecha causados por las cargas de viento y gravedad están en la misma dirección. Por lo tanto, la combinación de momento por viento (48.3 pie-kips) y momento por carga de gravedad (106.7 pie-kips) es 155 pie-kips. Por tanto, la porción del momento plástico disponible para cargas de gravedad es  $155 - 48.3 = 106.7$  pie-kips.

Los momentos de viento y los momentos por carga de gravedad en la junta tienen sen-

tidos opuestos, de modo que el efecto combinado es  $106.7 - 48.3 = 58.4$  pie-kips. Estas combinaciones se ilustran en la figura 11.26a.

d) Un mecanismo bajo carga última requiere una articulación plástica cerca del centro de la viga, así como una en la junta derecha. Por lo tanto, se necesita determinar si el momento positivo máximo excede a la capacidad de momento plástico de la viga (600 pie-kips).

Se observó que el momento positivo, antes de la inclusión de los momentos de los extremos por viento, era máximo en el centro del claro y fue de  $546 - 106.7 = 439.3$  pie-kips. Cuando se toman en consideración los momentos en las juntas ( $\pm 48.3$  pie-kips), la localización del momento positivo máximo se mueve a la izquierda y aumenta ligeramente (figura 11.26a). Si se traza a escala el diagrama de momento ajustado, se puede ver que el momento máximo positivo es considerablemente menor que el necesario para una articulación plástica (600 pie-kips). Sin embargo, bajo otras condiciones, este brazo pue-

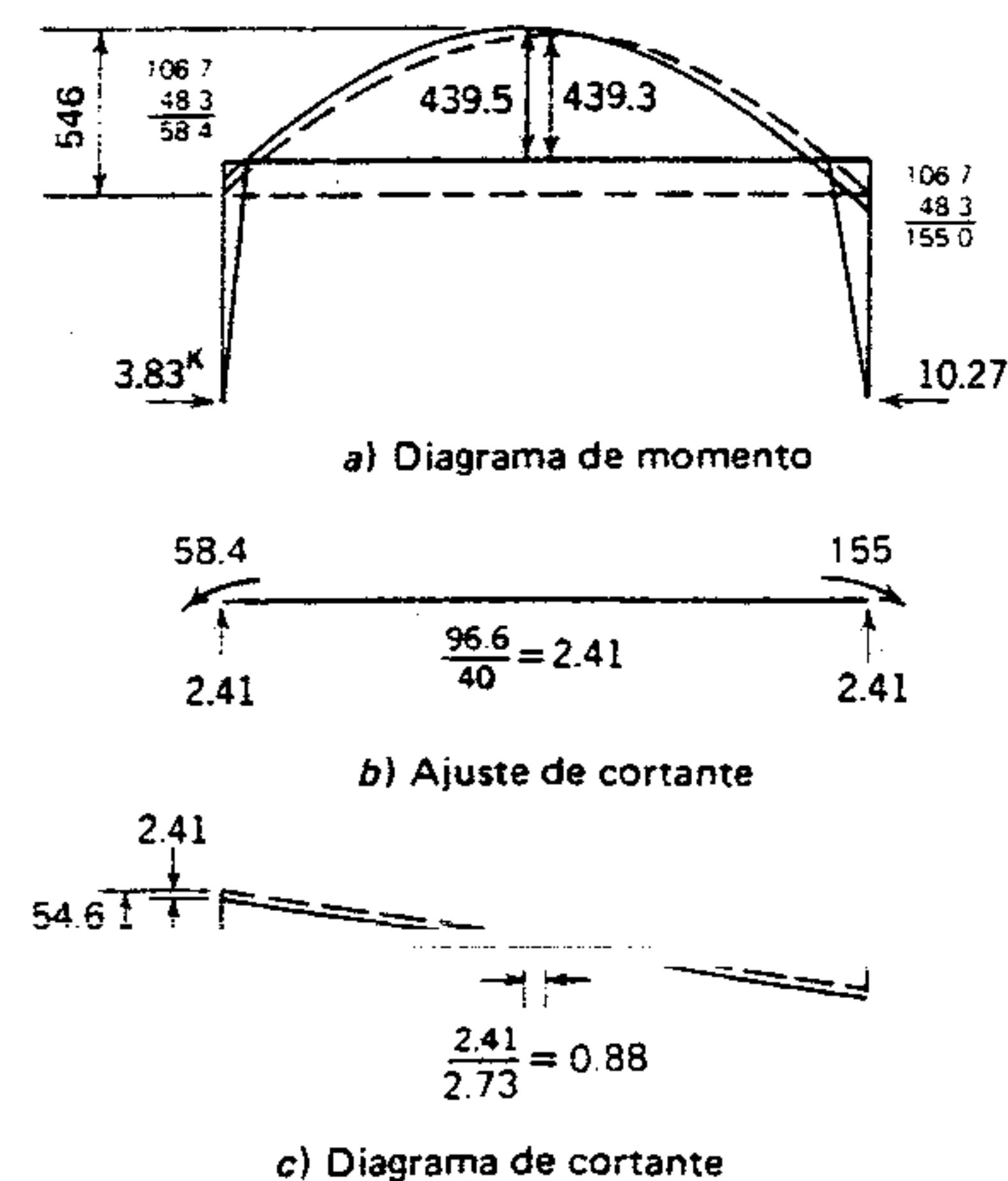


Figura 11.26

de no ser adecuado para llegar a esa conclusión; entonces, se necesitaría hacer cálculos.

La localización del momento máximo positivo y su valor se pueden determinar mediante el diagrama de fuerza cortante. En la figura 11.26b se muestran los valores  $V$  ajustados de las fuerzas cortantes (por los momentos de viento en las juntas), y la posición del momento máximo positivo se mueve a la izquierda del centro (0.88 pies).

El área del diagrama de cortante de la parte izquierda es

$$A = \frac{52.19}{2} (19.12) = 498.9 \text{ pies-kips}$$

Esta área representa la diferencia de momentos en la junta izquierda y el momento máximo positivo. Por lo tanto,

$$M_{\text{máx}} = 498.9 - 58.4 = 440.5 \text{ pie-kips}$$

Como  $440.5 < 600$ , no se forma una articulación plástica y las primeras secciones de prueba se aceptan como seguras.

#### Solución d

Revisión de flexión combinada con carga axial y otras restricciones de especificación.

a) En el caso más crítico, es decir, sólo la carga de gravedad en la solución a, examinar la sección de prueba para la carga combinada (sección 2.4 de la Especificación AISC 1978).

Se listan las siguientes propiedades de la sección W 12×35 para referencia inmediata:

$$r_x = 5.25 \text{ pulg}$$

$$r_y = 1.54 \text{ pulg}$$

$$A = 10.3 \text{ pulg}^2$$

$$Z = 51.1 \text{ pulg}^3$$

La carga axial plástica es

$$P_y = AF_y = 10.3(36) = 371 \text{ kips}$$



El momento flexionante plástico es

$$M_p = ZF_y = \frac{51.2(36)}{12} = 154 \text{ pies-kips}$$

La carga axial real es

$$P = \frac{wL}{2} = \frac{3.6(40)}{2} = 72 \text{ kips}$$

El momento flexionante real máximo es

$$M = 117 \text{ pie-kips}$$

La relación de esbeltez para el eje mayor (plano de flexión) es

$$\frac{L_x}{r_x} = \frac{15(12)}{5.25} = 34.3 < C_c = 126.1; \text{ satisfactorio}$$

y para el eje menor

$$\frac{L_y}{r_y} = \frac{(5)12}{1.54} \approx 39 < 126.1; \text{ satisfactorio}$$

La resistencia máxima para un miembro cargado axialmente a compresión es

$$P_{cr} = 1.7AF_a = 1.7(10.3)19.27 = 337 \text{ kips}$$

$$P = 72 \text{ kips} < 337 \text{ kips}; \text{ satisfactoria}$$

Asimismo

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{72}{10.3} = 6.99 \text{ ksi} < 0.75F_y$$

$$0.75F_y = 27 \text{ ksi}; \text{ satisfactorio}$$

Como las columnas están arriostradas a intervalos de 5 pies en la dirección débil

$$M_m = \left[ 1.07 - \frac{(L_y/r_y)\sqrt{F_y}}{3160} \right] M_p$$

$$= \left[ 1.07 - \frac{39\sqrt{36}}{3160} \right] 155 = 154$$

ficadas

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m M}{\left(1 - \frac{P}{P_{cr}}\right) M_m} \leq 1.0$$

$$f_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad f_e = 2,108,279 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

$$\frac{72}{337} + \frac{0.85(117)}{\left(1 - \frac{72}{155}\right) 154}$$

$$= 0.89 < 1.0; \text{ satisfactorias}$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{1.18M_p} \leq 1.0$$

$$\frac{72}{371} + \frac{117}{1.18(154)} = 0.84 < 1.0; \text{ satisfactorias}$$

b) Revisar la columna en función de las relaciones máximas ancho espesor.

Para el patín

$$\frac{b_f}{2t_f} = \frac{6.560}{2(0.52)} = 6.31 < 8.5; \text{ satisfactoria}$$

Para el alma

$$\frac{412}{\sqrt{F_y}} = \frac{412}{\sqrt{36}} = 68.7$$

$$\frac{d}{t} = \frac{10.50}{0.30} = 35 < 68.7; \text{ satisfactoria}$$

c) Revisar la columna en función del arriostramiento lateral. La sección crítica está entre el arriostramiento superior y la junta. El momento en el arriostramiento superior es

$$M = \frac{10}{13}(117) = 78 \text{ pie-kips (figura 11.23)}$$

La columna se flexiona en curvatura simple; por lo tanto,  $M/M_p$  es positiva, y

$$\frac{M}{M_p} = + \frac{78}{155} = +0.5$$

$$I_{cr} = r_y \left( \frac{1375}{F_y} + 25 \right)$$

$$= 1.34 \left( \frac{36}{36} + 25 \right)$$

$$= 97 \text{ pulg}$$

La distancia no arriostrada real de la columna en la proximidad de la junta es de 60 pulg.

menos la mitad del peralte de la viga (11.96  $\approx$  12 pulg.); por lo tanto,

$$I_{cr} = 60 - 12 = 48 < 97 \text{ pulg}; \text{ satisfactorio}$$

## 11.8 CONEXIONES DÚCTILES RESISTENTES AL MOMENTO

Los marcos de acero se usan a menudo para resistir cargas sísmicas, y en el capítulo 8 se describieron las condiciones en que se requieren conexiones dúctiles resistentes al momento en tales marcos. En las zonas sísmicas más críticas se encuentra comúnmente reglamentado como requisito para estas conexiones, siendo su propósito proporcionar una conexión que desarrolle la resistencia plástica completa de la viga y, además, permite a la conexión una rotación de articulación plástica.

En la figura 11.27 se ilustra una típica conexión dúctil resistente al momento. La viga se atornilla en la obra a la placa de cortante, la que a su vez transfiere el cortante de viga al patín de la columna. La soldadura a tope de penetración completa sobre los patines de la viga transfiere las fuerzas de tensión y compresión al patín de la columna. Se

pueden necesitar o no necesitar placas atiesadoras de patín de columna, dependiendo del tamaño de la fuerza en el patín y las dimensiones de la columna. Asimismo, se puede requerir o no la placa rigidizadora del alma de la columna, dependiendo del cortante en la columna y de las dimensiones de ésta. Y esta placa se podría colocar en ambos lados del alma de la columna también.

Anteriormente se describió la forma en que se pueden analizar y diseñar los marcos de acero usando el procedimiento de diseño plástico de resistencia última. Se infiere que las conexiones también se deben diseñar y detallar de acuerdo con el procedimiento de diseño plástico y conforme a la parte 2 de la Especificación AISC. Sin embargo, al hacerlo no se satisfarán necesariamente todos los requisitos del Reglamento de Construcción Uniforme de 1982 (UBC) y del ANSI A58.1-1982 para una conexión dúctil resistente al momento.<sup>3</sup>

Un marco de acero resistente al momento se puede diseñar mediante el procedimiento de dise-

<sup>3</sup> ANSI A58.1-1982 denomina "marcos especiales" a los que tienen conexiones como éstas.

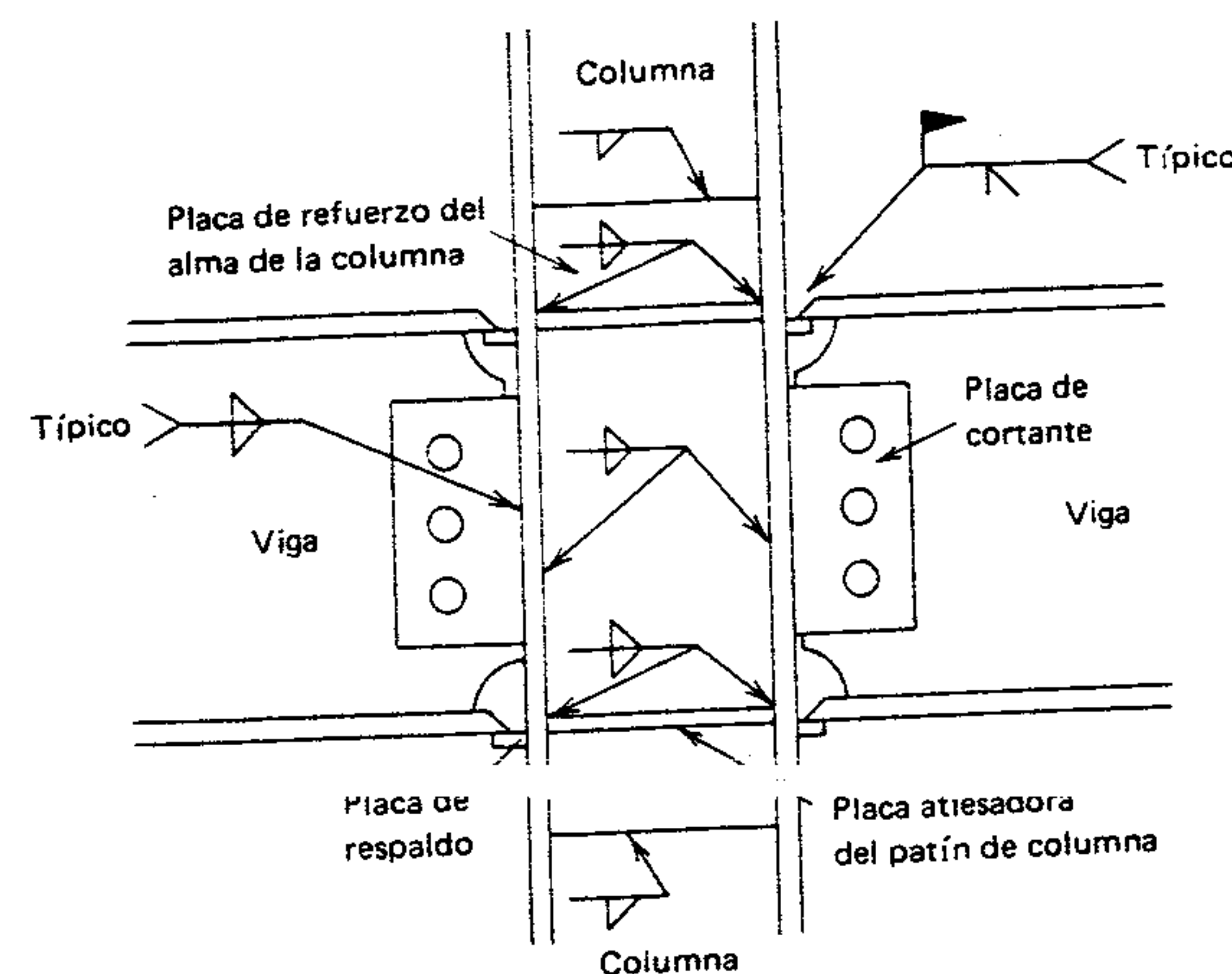


Figura 11.27 Típica conexión resistente a momento.



ño de esfuerzo de trabajo (teoría elástica) y luego diseñar las conexiones de tal manera que se satisfagan los requisitos reglamentarios para conexiones dúctiles resistentes al momento. Por lo tanto, se puede usar una combinación de procedimientos de diseño de esfuerzo de trabajo y de diseño plástico para producir un marco de acero satisfactorio con conexiones dúctiles resistentes al momento.

Un criterio esencial es que la conexión se diseñe para resistir el momento plástico de la viga y su fuerza cortante correspondiente. Se omite específicamente el procedimiento por el cual se determina el tamaño de la viga. Por lo tanto, se supone que se permite ya sea el diseño plástico o el de esfuerzo de trabajo. Es importante mantener la relación adecuada entre el procedimiento de diseño, los factores de carga y los esfuerzos permisibles. Estas relaciones se ilustrarán con los siguientes cuatro procedimientos de diseño:

1. Diseño del marco viga + columnas por el procedimiento de esfuerzo de trabajo, donde la carga de gravedad es determinante y se usan los esfuerzos de trabajo normales.
2. Diseño del marco viga + columnas mediante el procedimiento de diseño de esfuerzo de trabajo, donde la carga de gravedad, más la carga de viento o sismo, son determinantes y el esfuerzo normal de trabajo se incrementa en un 33 por ciento.
3. Diseño del marco viga + columnas mediante el procedimiento de diseño plástico, donde la carga de gravedad es determinante y se usa el factor de carga de 1.7.
4. Diseño del marco viga + columnas mediante el procedimiento de diseño plástico, donde la carga de gravedad, más la de viento o sismo, son determinantes y se usa el factor de carga de 1.3.

Aunque existen diferencias menores entre los requisitos del UBC 1982 y el ANSI A58.1-1982 para las conexiones dúctiles resistentes al momento, ambos estipulan el desarrollo de la capacidad de momento plástico de la viga. Esto implica que también se debe desarrollar la fuerza cortante correspondiente en la conexión. La siguiente es una lista

de los requerimientos adicionales del UBC y del ANSI A58.1:

- No se permiten acero con esfuerzos de fluencia mayores de 55 k/pulg<sup>2</sup>
- Se permiten tanto tornillos como soldaduras.
- Las relaciones máximas ancho-espesor son las especificaciones para el diseño plástico.
- Las distancias máximas de arriostramiento lateral son las especificadas para el diseño plástico.
- Se debe llevar a cabo un programa de pruebas no destructivas de las soldaduras.

### Ejemplo

Con acero A36 y electrodos E70, diseñar una conexión dúctil resistente al momento, similar a la ilustrada en la figura 11.28. La viga es una sección W 18 X 50 y la columna una W 12 X 106. La viga tiene un claro de 26 pies y la altura efectiva de la columna es de 10 1/2 pies. La viga tiene carga viva y muerta uniforme total de 1.9 kips por pie.

### Solución

1. Revisar las relaciones ancho-espesor. Patín de la viga.

$$\frac{b}{2t_f} = \frac{7.495}{2(0.57)} = 6.57 < 8.5 \text{ correcto}$$

Alma de la viga (suponer que la carga axial de la viga se omite).

$$\frac{d}{t_w} = \frac{17.99}{0.355} = 50.68 < \frac{412}{\sqrt{36}} \text{ correcto}$$

Patín de columna.

$$\frac{b}{2t_f} = \frac{12.22}{2(0.99)} = 6.17 < 8.5 \text{ correcto}$$

Alma de columna (suponer  $P/P_y > 0.27$ ).

$$\frac{d}{t_w} = \frac{12.89}{0.61} = 21.1 < \frac{257}{\sqrt{36}} \text{ correcto}$$

2. Determinar el momento plástico de la viga.

$$M_p = ZF_y = \frac{101(36)}{12} = 303 \text{ kip-pie}$$

3. Calcular la fuerza cortante total a partir de los momentos plásticos en los extremos y la carga uniforme de la viga. El diagrama de cuerpo libre para la viga se ilustra en la figura 11.28. Obsérvese que los momentos en los extremos son aditivos y que se usa el factor de carga para la carga uniforme.

$$V_{\max} = \frac{3.23(26)}{2} + \frac{2(303)}{26} = 65.3 \text{ kips}$$

4. Diseñar la conexión de cortante. Se usarán tornillos conforme al procedimiento de diseño de esfuerzo de trabajo del AISC. Convertir el  $V_{\max}$  a su valor de esfuerzo de trabajo.

$$\frac{V_{\max}}{LF} = \frac{65.3}{1.7} = 38.4 \text{ kips}$$

Probar con cuatro tornillos,

$$BV = \frac{38.4}{4} = 9.6 \text{ kips por tornillo}$$

Se usarán espesor y dimensiones de una placa de modo que el cortante sea determinante. Usar cuatro tornillos de 7/8 pulg., A325F, en agujeros estándar. Usar un peralte de placa de 12 pulg, dando un espaciamiento de 3 pulg y 1 1/2 pulg, de distancia al extremo. Probar una placa de 3/8 pulg. Revisar el cortante plástico bruto.

$$f_v = \frac{65.3}{0.375(12)} = 14.5 < 0.55(36) = 19.8 \text{ k/pulg}^2 \text{ correcto}$$

Revisar la flexión en la placa de cortante, suponiendo que la línea de tornillos está a 3 pulg de la cara del patín. Calcular el módulo de sección plástico de la placa de cortante y el esfuerzo flexionante.

$$Z = \frac{bt^2}{4} = \frac{0.375(12)^2}{4} = 13.5 \text{ pulg}^3$$

$$f_b = \frac{3(65.3)}{13.5} = 14.5 < 36 \text{ k/pulg}^2 \text{ correcto}$$

Diseñar las soldaduras para la conexión de la placa de cortante al patín de la viga, usando la excentricidad de 3 pulg.

$$f_1 = \frac{P}{L} = \frac{65.3}{12} = 5.44 \text{ kips por pulg.}$$

$$f_2 = \frac{Pec}{I} = \frac{65.3(3)6}{12^3/12} = 8.16 \text{ kips por pulg.}$$

$$f_t = \sqrt{5.44^2 + 8.16^2} = 9.81 \text{ kips por pulg.}$$

Dividir esta fuerza plástica combinada máxima en la soldadura entre el factor de carga para hacer el diseño mediante el procedimiento de esfuerzo de trabajo.

Fuerza de diseño en la solda-

$$\text{dura} = \frac{9.81}{1.7} = 5.77 \text{ kips por pulg.}$$

La soldadura de tamaño mínimo sobre el patín de la columna es de 5/16 pulg ( $t_f = 0.99$ )

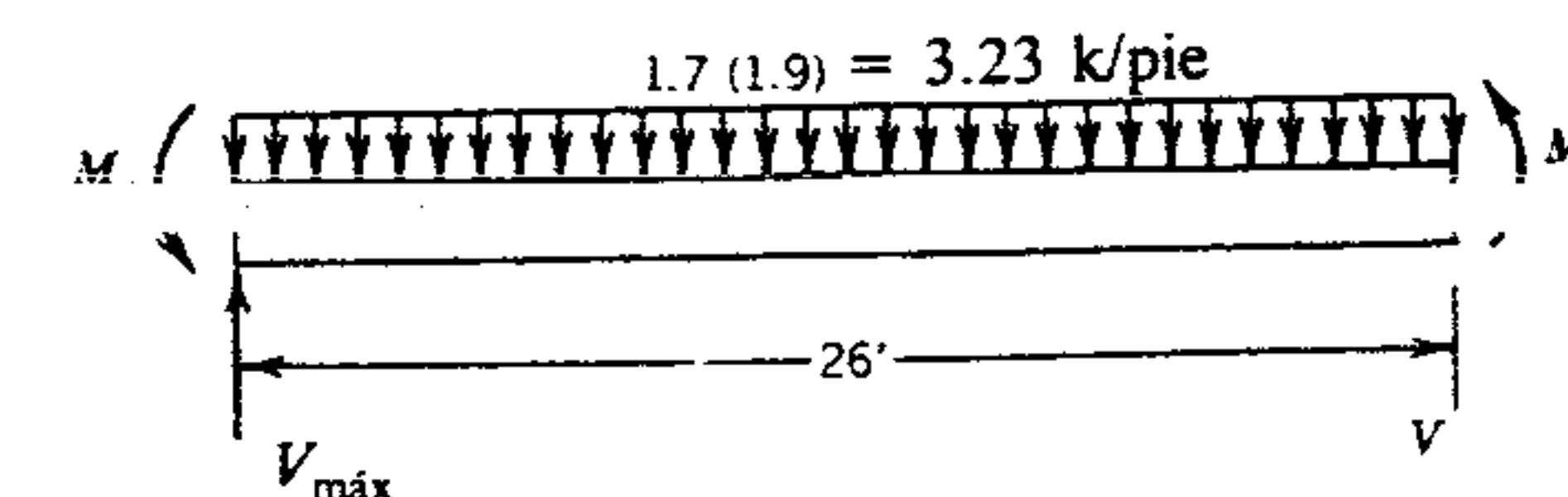


Figura 11.28 Diagrama de cuerpo libre de la viga.



pulg). La resistencia de dos soldaduras de filete (una en cada lado) es de  $2(14.8) \frac{5}{16} = 9.25$  kips por pulg, que es mayor que la fuerza de diseño en la soldadura.

5. Desarrollar las fuerzas de patín en las vigas. Una soldadura a tope en forma de ve y de penetración completa desarrollará la fuerza del patín, es decir,

$$F_{bf} = \frac{M_p}{0.95d} = \frac{303(12)}{0.95(17.99)} = 213 \text{ kips}$$

6. Investigar si la columna necesita atiesadores de patín (véase la sección 7.31 y la Especificación AISC 1.15). La capacidad de tensión del patín de la columna es

$$P_{fb} = \frac{t_f^2 F_{yc}}{0.16} = \frac{0.57^2(36)}{0.16} = 73.1 \text{ kips}$$

La capacidad del patín de compresión, determinada por el peralte del alma  $d_c$ , es

$$P_{fb} = \frac{4100t_w^3 \sqrt{F_{yc}}}{d_c} = \frac{4100(0.61)^3 \sqrt{36}}{9.5} = 588 \text{ kips}$$

La capacidad del patín de compresión, determinada por el patín de la columna, es

$$P_{fb} = t_w(t_f + 5k)F_{yc} = 0.61[0.57 + 5(1\frac{1}{6})]36 = 198 \text{ kips}$$

Se ve que la tensión es determinante y la fuerza de diseño para la placa atiesadora es

$$P_{bf} - P_{fb} = 213 - 73.1 \approx 140 \text{ kips}$$

Calcular el área de las placas atiesadoras.

$$A_{st} = \frac{140}{36} = 3.89 \text{ pulg}^2$$

Usar una placa de  $\frac{3}{8}$  pulg, sobre cada lado del alma de la columna, con un ancho suficiente para que quede al ras con el borde del patín. Esto da un área de

$$(12.22 - 0.61) \frac{3}{8} = 4.35 \text{ pulg}^2$$

Las soldaduras que sujetan las placas atiesadoras a los patines de la columna, si se diseñan mediante el procedimiento de esfuerzo de trabajo, deben tener una capacidad de

$$F = \frac{140}{2(1.7)} = 41.2 \text{ kips}$$

Usando las soldaduras de  $\frac{5}{16}$  pulg (4.63 kips por pulg.) a lo largo de ambos bordes de las placas atiesadoras donde se unen a los patines de la columna,

$$F = 4.63(2) \frac{b_f - t_w}{2} = 4.63(2) \left( \frac{12.22 - 0.61}{2} \right) = 53.75 > 41.2 \text{ kips} \quad \text{correcto}$$

Usando soldaduras de  $\frac{1}{4}$  pulg sobre ambos lados de la placa a lo largo del alma de la columna

$$F = 14.8(\frac{1}{4})2(d - 2t_f) = 14.8(\frac{1}{4})2[12.89 - 2(0.99)] = 80.7 > 41.2 \text{ kips} \quad \text{correcto}$$

7. Investigar si el alma de la columna necesita placas de refuerzo. En la figura 11.29a se ilustra el diagrama de cuerpo libre de una columna suponiendo que los puntos de inflexión se producen a la mitad de la altura de la columna. Como se ilustra en la figura 11.29b, los patines de la columna necesitan placas de refuerzo en su punto de inflexión es

$$V_b = \frac{\Sigma M_p}{H_c}$$

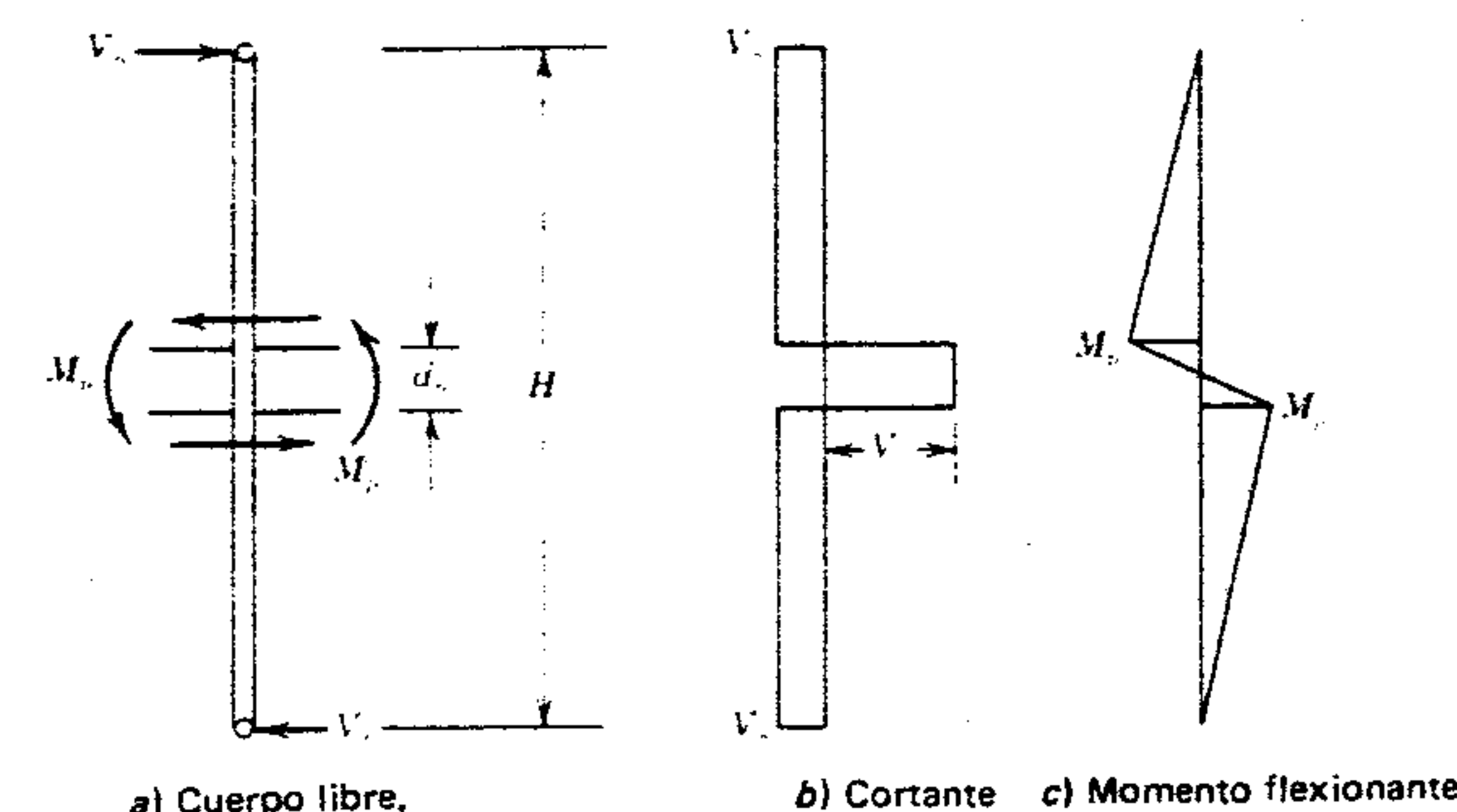


Figura 11.29 Diagrama de cuerpo libre de la columna.

La zona de tablero crítica del alma de la columna está entre los patines superior e inferior de la viga. Se recomienda que el cortante del alma se calcule como sigue:

$$V_a = \frac{\Sigma M_p}{0.95d_b} - V_b$$

donde 0.95 considera el hecho de que la distancia de centro a centro entre los patines de la viga es menor que el peralte  $d_b$  de la viga.

Calcular el cortante de tablero de la columna.

$$V_a = \frac{2(303)12}{0.95(17.99)} - \frac{2(303)}{10.5} = 425.5 - 57.7 = 367.8 \text{ kips}$$

El esfuerzo cortante plástico admisible es de  $0.55F_y = 19.8 \text{ k/pulg}^2$ , y el espesor del alma necesario es

$$t_w = \frac{367.8}{19.8(17.99)} = 1.03 \text{ pulg}$$

Como el espesor del alma de la columna es de 0.61 pulg, el espesor total de la placa de refuerzo es  $1.03 - 0.61 = 0.42 \text{ pulg}$ .

Una placa de  $1/2$  pulg será suficiente como refuerzo del alma y se extiende 6 pulg hacia arriba y hacia abajo de los patines de la columna para permitir mayores longitudes de soldadura. El cortante de tablero de la columna se agrega a la fuerza del patín y luego se prorratea al alma y la placa de refuerzo de acuerdo con sus espesores relativos. Si el perímetro de la placa de refuerzo no es adecuado para la resistencia de la soldadura, se deben usar dos placas, una a cada lado del alma de la columna.

## PROBLEMAS

1. El marco de acero no arriostrado de la figura 11.30 tiene tres cargas verticales iguales ( $P$ ) apli-

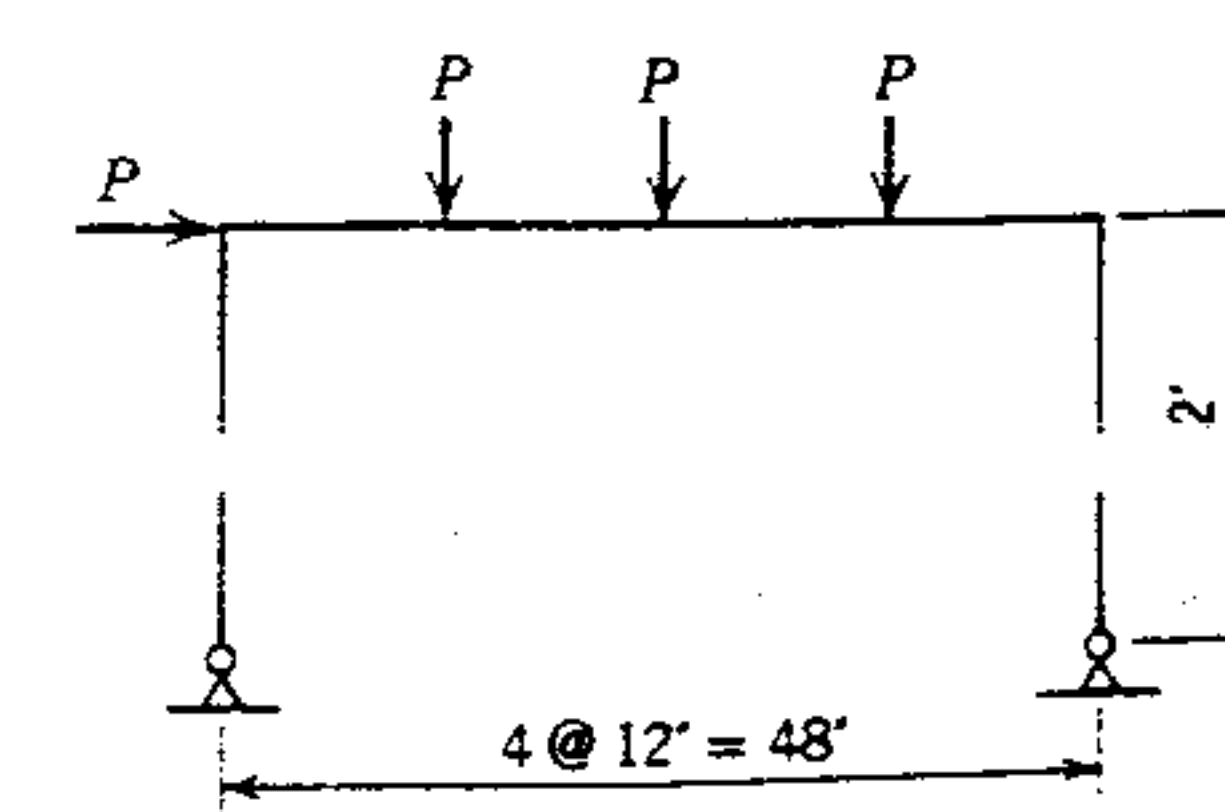


Figura 11.30



cadras en las cuartas partes de su claro, y una carga lateral ( $P$ ) de la misma magnitud aplicada en una junta. Suponer que la resistencia última de la viga y las columnas es la misma. Encontrar el valor  $P$  en términos de  $M_p$  a resistencia última. Usar el método del mecanismo. (La respuesta se da en el Apéndice G).

- Suponer que el acero del marco arriostrado de la figura 11.30 es A36, y que tiene apoyolateral adecuado en las columnas y la viga. Calcular el

tamaño de la viga y las columnas necesario, suponiendo que la viga tiene el doble de la resistencia de la columna, y que las cargas ( $P$ ) son de 10.9 kips cada una. (La carga lateral se debe al viento). La columna está arriostrada respecto a su eje débil a mitad de su altura. Usar el método de equilibrio. (Nótese que se pueden obtener varias soluciones, dependiendo de cuál tamaño de miembro se selecciona primero y de la relación entre la resistencia última de la viga y la columna).

## 12

# Análisis y diseño computarizados

## 12.1 INTRODUCCIÓN

Como se señaló ya en este libro, el comportamiento de una estructura, su seguridad y su idoneidad es responsabilidad del diseñador, sin importar los medios que utilice para delegar tal responsabilidad. Al igual que las normas, las especificaciones y los manuales que sirven como guías para el diseño, la computadora y los programas disponibles constituyen simplemente otro auxiliar, ciertamente poderoso, para el diseñador. Utilizada adecuadamente, la computadora puede incrementar significativamente la eficiencia y efectividad del diseñador. A esto se debe que el uso de la computadora digital electrónica en el análisis y diseño de estructuras sea muy amplio y no se pueda soslayar.

Los costos relativos relacionados con el uso de la computadora siguen bajando, los servicios de computadora se obtienen con facilidad y los diseñadores adquieren cada vez más habilidad en su uso. Sin embargo, se debe señalar de nuevo que la computadora y sus programas no pueden sustituir a la buena comprensión de las propiedades de los materiales y de los principios del análisis y el diseño estructurales. Como se verá en este capítulo, esta comprensión es esencial para que el diseñador pueda usar la computadora e interpretar y utilizar sus resultados.

La mayor parte de la información que se presenta en este capítulo se podría aplicar fácilmente también a estructuras de materiales diferentes del acero; sin embargo, como este texto está dedicado al análisis y diseño de edificios de acero, las explicaciones se centran naturalmente en este material. La computadora es un instrumento electrónico; es decir, sus operaciones se ejecutan mediante circuitos electrónicos, no mecánicos. Debido a ello, la computadora puede ejecutar un gran número de operaciones. Las señales eléctricas fluyen a través de la computadora a velocidades cercanas a la de la luz. Una unidad de medición denominada "nanosegundo" se usa para expresar la cantidad de tiempo que requiere la computadora para completar una operación. El



nanosegundo es la división más pequeña de tiempo de computadora, y mil millones de nanosegundos es igual a un segundo de cronómetro. Y mil millones de segundos de cronómetro es igual a aproximadamente 30 años. Una computadora puede procesar un "bit" de información en aproximadamente 50 nanosegundos.

Las capacidades de operación o procesamiento de una computadora incluyen todos los procedimientos matemáticos usuales utilizados en los cálculos matemáticos. Además, y lo más importante, la computadora tiene una capacidad de almacenamiento de memoria que permite que el usuario almacene una serie de instrucciones paso por paso, que pueden ser recuperadas. Estas instrucciones deben definir específica y completamente las operaciones que se van a ejecutar. Este conjunto de instrucciones se denomina *programa*. En éste se incluyen instrucciones sobre la manera en que se recibirán los datos y sobre los cuales va a operar el programa, y la manera en que se presentarán visualmente los resultados. Estos datos consisten en valores de parámetros específicos relacionados con la estructura (por ejemplo, dimensiones, cargas y propiedades físicas, así como áreas, módulos de elasticidad y momentos de inercia).

En los apéndices E y F se dan ejemplos de estos programas. Los programas ilustrados están escritos en lenguaje "FORTRAN", lo cual significa que las instrucciones se ajustan a un conjunto de reglas establecidas por ese lenguaje.

Los dos lenguajes de uso más común en programas estructurales son "FORTRAN" y "ALGOL". La mayoría de las computadoras están equipadas para aceptar programas "escritos" en uno o ambos lenguajes. No se necesita decir que el diseñador debe estar familiarizado con el lenguaje para poder crear un nuevo programa escrito en ese lenguaje. Sin embargo, no siempre es esencial que el diseñador esté experimentado en el lenguaje del programa para usarlo en un programa existente, aunque esto sería útil para asegurar su comprensión.

En la sección C.15 se describen algunas de las instrucciones básicas FORTRAN, incluyendo diagramas de flujo.<sup>1</sup> Sin embargo, con algunos progra-

mas (de naturaleza especial) no se necesita trabajar en un solo lenguaje de computadora; son adecuados los términos de resolución de problemas estructurales estándar. En el futuro es muy probable que la mayoría de los programas sean de este tipo.

Se podrían preparar programas (y algunos ya lo están) para usar la teoría y los procedimientos utilizados en otros capítulos de este libro. Sin embargo, generalmente se acepta que los programas de esta clase no son particularmente eficientes y no aprovechan las enormes capacidades de la computadora. Por ejemplo, la computadora puede manejar una gran cantidad de datos y resolver un gran número de ecuaciones simultáneas de modo muy eficiente. Una de las mejores maneras de utilizar estas capacidades es aplicar los principios del álgebra matricial. (En el Apéndice C se presenta una introducción a los principios del álgebra matricial para quienes no estén familiarizados con el tema.)

Debido a estas consideraciones se han desarrollado dos procedimientos generales para el análisis estructural: el "Método de la Flexibilidad" y el "Método de la Rigidez", ambos basados en principios bien establecidos. Dado que todas las partes de una estructura están interrelacionadas, las interrelaciones se expresan como incógnitas y luego éstas se expresan colectivamente en una serie de ecuaciones simultáneas. En las siguientes secciones se tratará detalladamente este enfoque, para mostrar la manera en que se preparan los programas. En los apéndices se presentan dos programas independientes con problemas ilustrativos, y en las últimas dos secciones de este capítulo se estudian varios de los programas existentes disponibles.

## 12.2 TEORÍA ESTRUCTURAL

El marco de acero estructural de cualquier edificio consistirá en diversos elementos que se podrían

encontrar en muchos buenos textos sobre la materia: por ejemplo, *A Guide to FORTRAN Programming*, y *A Guide to ALGOL Programming*, Daniel D. McCracken, John Wiley and Sons, Nueva York, N. Y.

ensamblar en una diversidad de configuraciones geométricas. Las conexiones entre los elementos podrían ser flexibles o restringidas. Y aunque el marco completo debe poder encerrar un espacio tridimensional, esto se puede lograr ya sea mediante la creación directa de un marco tridimensional, o bien, de dos o más componentes bidimensionales independientes usualmente formando ángulos rectos entre sí, los cuales, al conectarse, formarán una estructura tridimensional. El primer caso se denomina marco espacial o armadura espacial (sección 12.6). Los marcos bidimensionales pueden ser marcos planos, armaduras planas o combinaciones de elementos de marco y armadura.

Las cargas en los marcos bidimensionales se transmiten en sólo dos direcciones y en el mismo plano. En la figura 12.1 se ilustra una estructura de edificio que consta de dos componentes planos que forman un marco. La armadura plana recibe las cargas de gravedad de los largueros y las transfiere en el sentido este-oeste. El marco plano recibe cargas de las armaduras intermedias y las transfiere en el sentido norte-sur. Aquí se tratarán solamente estructuras planas, aunque la mayoría de los principios que se verán tienen aplicación general. Esto es congruente con otras presentaciones en este libro; o sea, en el capítulo 9 se presentó información relacionada con las armaduras planas, y en el 10 sobre marcos planos.

En la introducción de este capítulo se dijo que la mayor parte de las ventajas que se obtienen de la

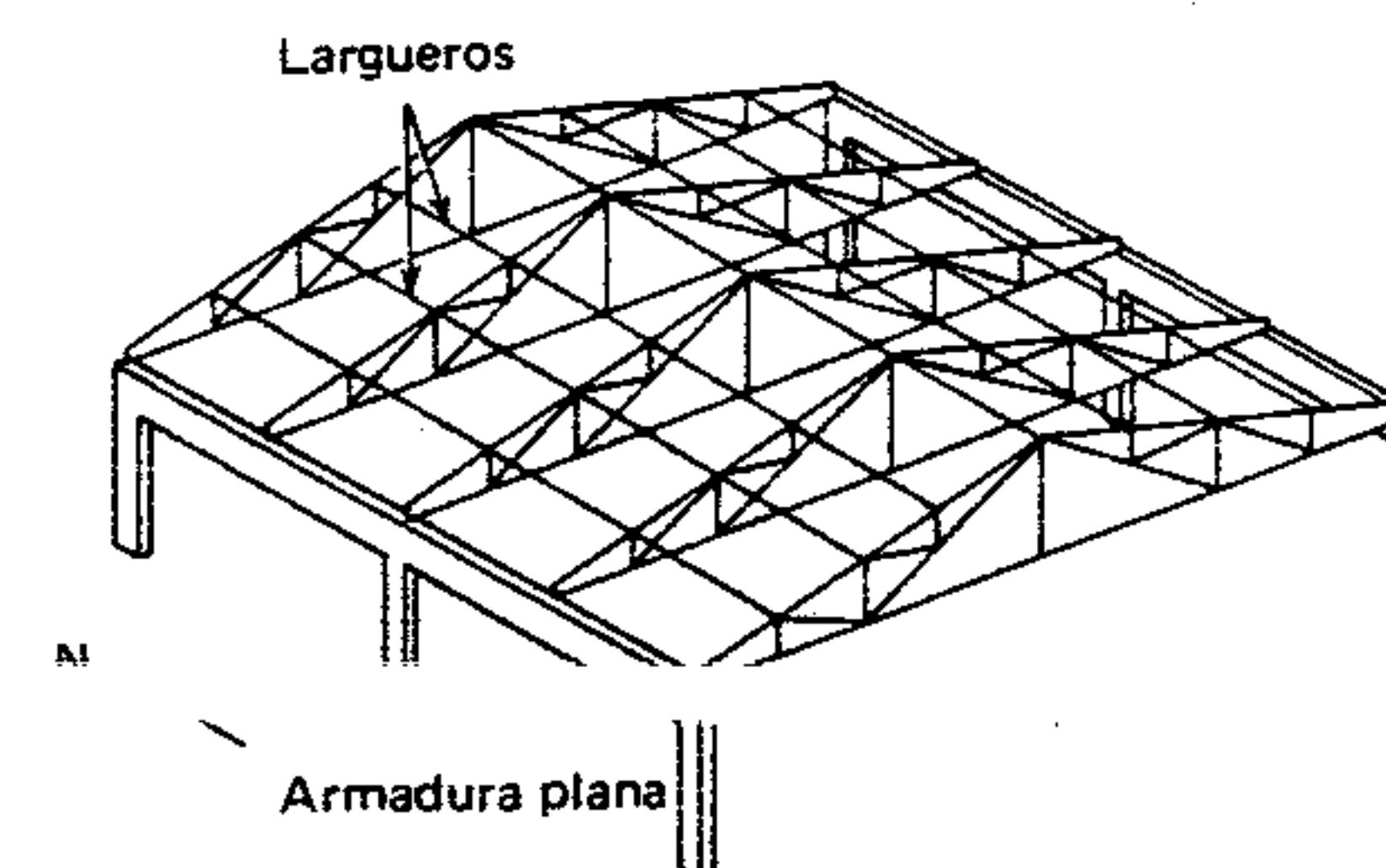


Figura 12.1 Armadura plana y marco plano.

computadora consiste en su capacidad analítica. El análisis en este contexto es la determinación de las fuerzas, momentos, deflexiones y rotaciones resultantes en lugares específicos dentro de la estructura dada. Esto se denomina habitualmente teoría estructural. En el capítulo 9 se presentaron métodos matemáticos y gráficos para determinar las fuerzas y momentos resultantes en armaduras planas estáticamente determinadas. En el capítulo 10 se presentó el concepto de estructuras estáticamente indeterminadas y se mostraron métodos para determinar las fuerzas y momentos resultantes en vigas y marcos continuos. Con la introducción de la computadora como auxiliar para el análisis, ahora será necesario presentar aquellos conceptos nuevos que son pertinentes para su uso. Sin embargo, antes de ellos se dará un panorama general de la teoría estructural (figura 12.2).

**Estructura del edificio.** El punto inicial es un dibujo esquemático de la configuración de la estructura propuesta (figura 12.1). Se debe localizar cada parte de la estructura y el conjunto debe satisfacer los requisitos arquitectónicos del edificio. Además, se deben definir y especificar todos los materiales y las dimensiones.

**Supuestos teóricos básicos.** Las teorías aplicables se basan en ciertos supuestos que se pueden verificar, o bien, casi están verificados. Entre ellos: el material de la estructura es elástico y obedece a la ley de Hooke (es decir, el esfuerzo es proporcional a la deformación); todas las cargas se aplican gradualmente, produciendo condiciones estáticas y no dinámicas; una relación lineal se mantiene entre las cargas y los desplazamientos resultantes, haciendo aplicables las leyes de la superposición; los miembros de la estructura están articulados a miembros adyacentes, o bien, son continuos (fijos a miembros adyacentes); y los puntos de soporte de la estructura se deben definir como articulados, fijos, o mixtos.

**Estructura matemática idealizada.** Un paso muy importante en este enfoque teórico es la creación



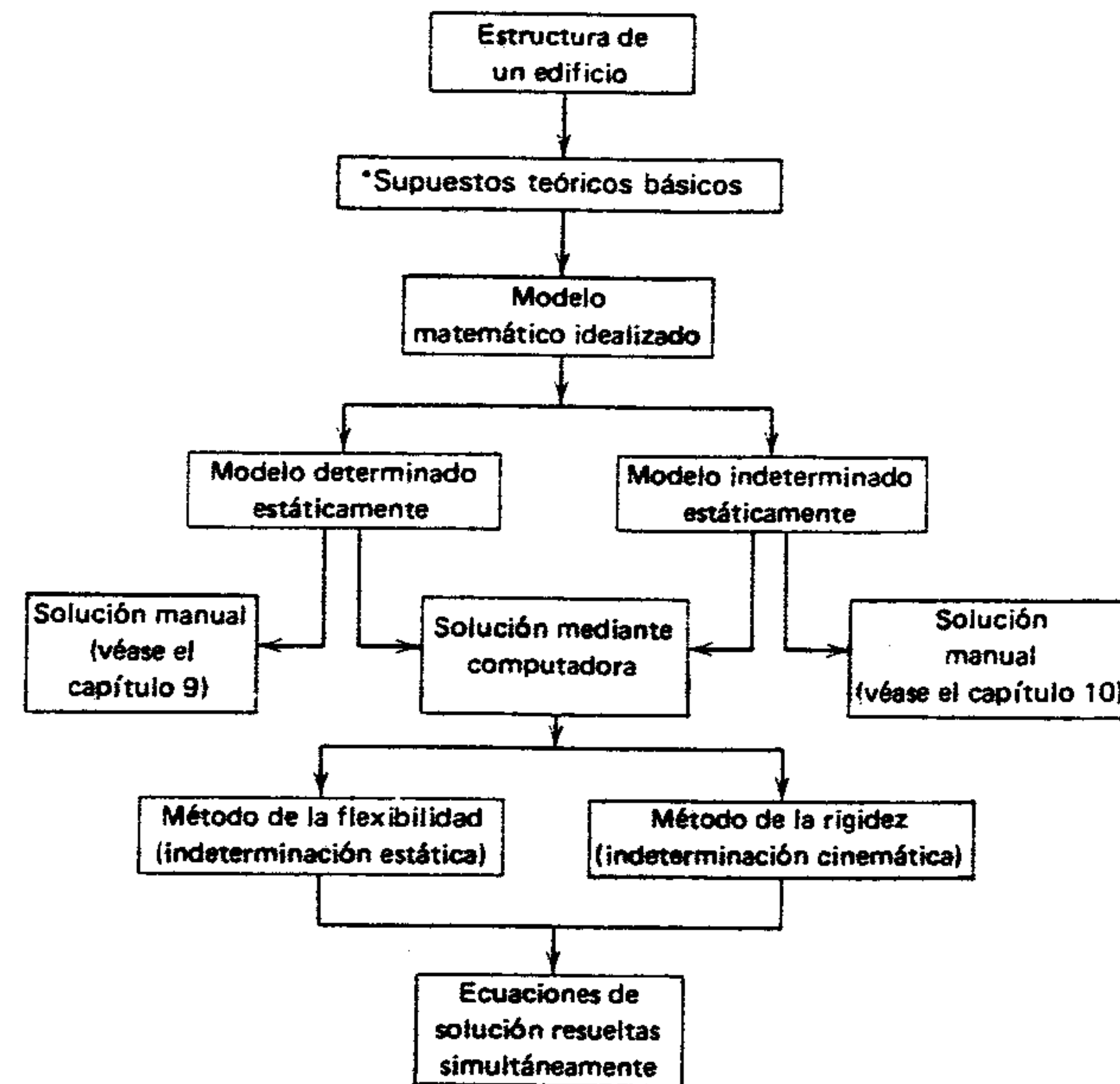


Figura 12.2 Aspecto general de la teoría estructural.

de un modelo matemático, usualmente en forma de una figura. En la mayoría de los textos que plantean problemas, este paso constituye el principio del análisis. El modelo debe simular la estructura real del edificio, porque es este modelo el que se usará para obtener la solución más exacta posible. En la medida que el modelo falle al representar verdaderamente a la estructura real, las respuestas obtenidas serán proporcionalmente menos exactas.

**Establecimiento de la determinación.** La configuración del modelo matemático idealizado, junto con la aplicación de cargas y supuestos básicos, pondrá a la estructura dentro de una categoría determinada o indeterminada. Esto se estudió en el capítulo 10, donde se mostró que esta categorización depende del tipo de conexiones usadas, así

como del número, tipo y localización de apoyos externos a la estructura.

**Solución manual.** Hasta esta parte de este libro, se ha confiado en las soluciones manuales, es decir, algebraicas o gráficas, que se obtienen usando modelos estáticamente determinados en que se pueden aplicar ecuaciones de estática. No obstante, las soluciones para modelos estáticamente indeterminados son mucho más complejas. Esto es así sobre todo cuando se presentan desplazamientos laterales, como sucede con estructuras de varios pisos y/o muchos vanos. Entonces, las ecuaciones de estática

son adicionales derivadas de la "compatibilidad" o "ajuste" de la estructura.

**Solución mediante computadora.** La solución por computadora es aplicable al modelo determinado

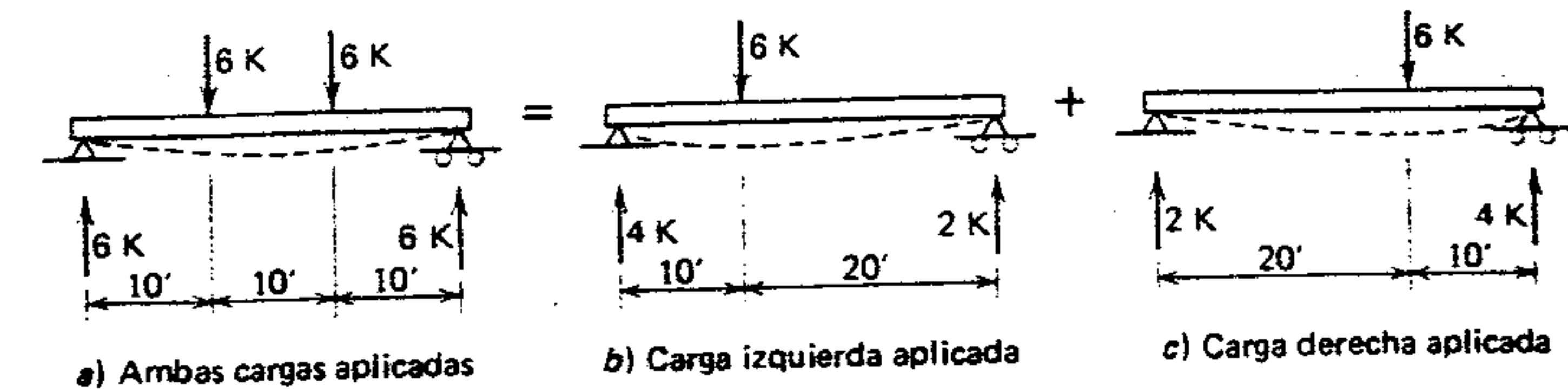


Figura 12.3 Sobreposición

o indeterminado. Sin embargo, es particularmente útil cuando el modelo es complejo y tiene un alto grado de indeterminación y/o cuando se requieren deflexiones en la solución. El procedimiento se podría basar en teorías utilizadas en el método manual, como se vieron en capítulos anteriores, pero usualmente se basa en uno de los dos siguientes métodos.

En general, cualquier método (flexibilidad o rigidez) generará un conjunto de ecuaciones lineales que se debe resolver simultáneamente. Aunque esto se puede lograr mediante cualquiera de varios procedimientos; el que se usa con más frecuencia comprende el empleo de álgebra matricial (apéndice C).

## 12.3 CONCEPTOS BÁSICOS

El acero, como material elástico, obedece a la ley de Hooke si los esfuerzos a que se sujeta no exceden al límite elástico. En estas condiciones, los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones, y existe una relación lineal entre las cargas aplicadas y los desplazamientos resultantes del modelo matemático idealizado. Por lo tanto, las reglas de superposición son válidas y se pueden aplicar para establecer las ecuaciones de equilibrio.

Un importante aspecto de las reglas de superposición es que las componentes de reacciones y los desplazamientos debidos a cargas aplicadas separadamente, al sumarse algebraicamente, producen

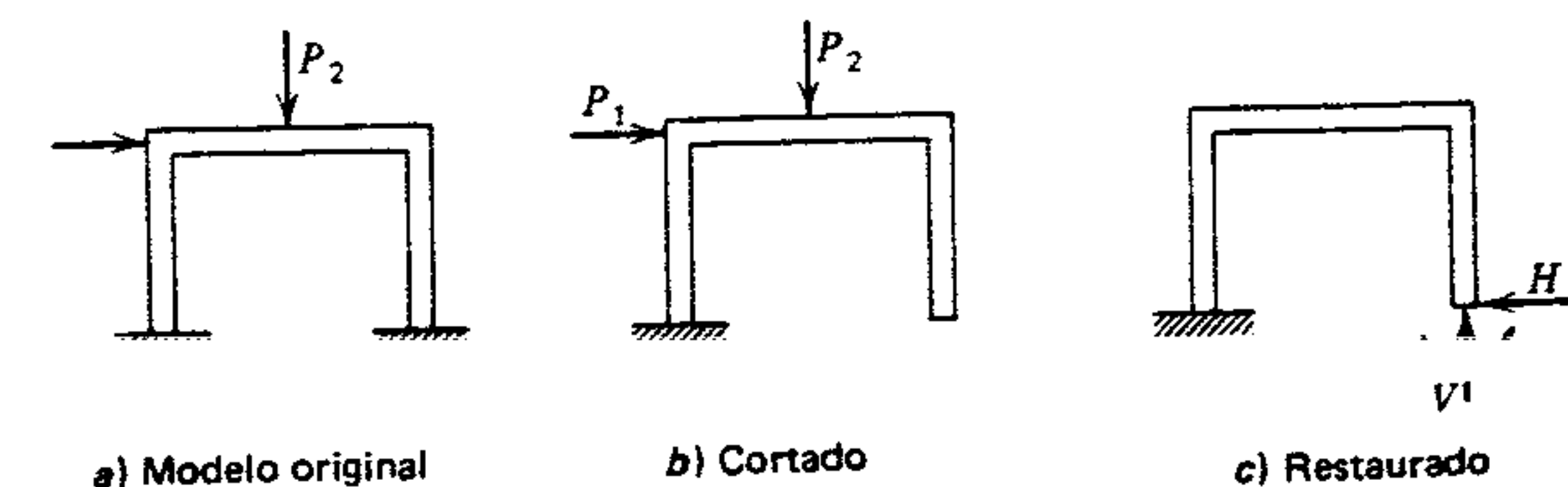


Figura 12.4 Método de flexibilidad.



las mismas componentes de reacciones y desplazamientos que resultarían si las cargas se aplicaran simultáneamente (figura 12.3). Como se verá en los siguientes problemas, la verdadera utilidad de la sobreposición está en su aplicación a las estructuras más complejas.

El objetivo del procedimiento es preparar un conjunto de ecuaciones simultáneas independientes en términos de incógnitas designadas especialmente. Por supuesto, el número de incógnitas debe ser igual al número de ecuaciones. Si son pocas las ecuaciones, se pueden resolver fácilmente a mano usando álgebra ordinaria o álgebra matricial. Sin embargo, si las ecuaciones son muchas, se puede programar una computadora para resolverlas rápidamente mediante álgebra matricial.

Cuando las incógnitas del sistema se expresan en términos de fuerzas y momentos resultantes del equilibrio estático, el proceso se conoce como método de la flexibilidad. Cuando las incógnitas se expresan en términos de desplazamientos y rotaciones de juntas, el proceso se conoce como método de la rigidez.<sup>2</sup>

Con frecuencia, el método de la flexibilidad requiere conocer la indeterminación estática de la estructura (sección 10.1). El número de componentes de reacciones redundantes establece el grado de indeterminación de la estructura. Las ecuaciones para estas componentes de reacciones redundantes se suman a las ecuaciones de equilibrio estático

<sup>2</sup> Nótese que el método de distribución de momentos usado en el capítulo 10 es un método de rigidez.

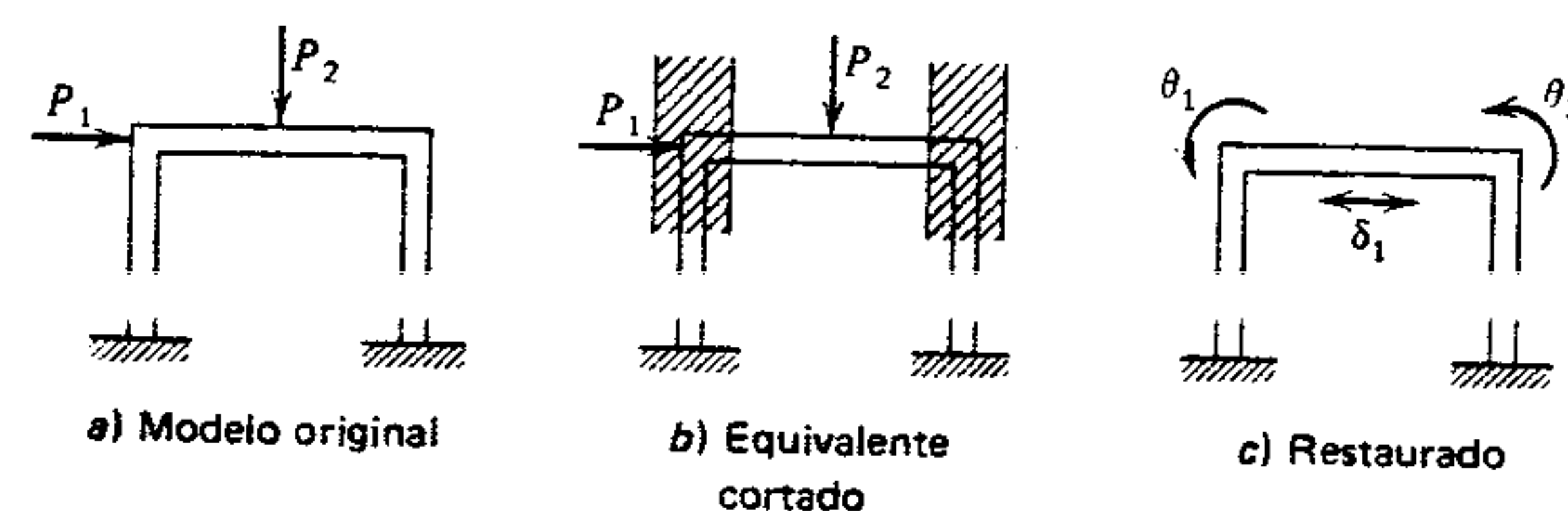


Figura 12.5 Método de rigidez.

para llegar al número total de ecuaciones independientes necesarias para una solución completa.

En la figura 12.4 se ilustra un marco estáticamente indeterminado en tercer grado. La reacción derecha se elige arbitrariamente como la que tiene componentes redundantes. El proceso de flexibilidad requiere que la estructura se "corte" a un grado determinado (figura 12.4) y luego se restaure a su forma inicial aplicando de nuevo las componentes redundantes (usualmente una a la vez). En este caso, se podrían establecer tres ecuaciones independientes adicionales. En la sección 10.2 se describió un método llamado de la "deformación compatible". Si se observa atentamente, se verá que este método es el mismo que el de la flexibilidad.

El método de la rigidez comprende la indeterminación cinemática de la estructura (la cinemática es el estudio del movimiento sin tomar en cuenta las fuerzas que causan el movimiento). El grado de indeterminación cinemática de una estructura se establece por el número de componentes independientes de desplazamientos de junta (rotación, translación vertical y translación horizontal) necesarias para describir la respuesta del sistema a las cargas. Además, se acostumbra despreciar el cambio muy pequeño en la geometría de la estructura debido a la distorsión de los miembros.

En la figura 12.5a se ilustra el mismo marco que se usó para describir el método de la flexibilidad. En la figura 12.5b se ilustra el "corte" equivalente, el cual se obtuvo mediante la fijación de las dos juntas de rodilla. Así se previene cualquier desplazamiento (o movimiento) debido a las cargas aplicadas. Al principio, esto parece requerir dos

componentes de restricción o empotramiento en cada junta de rodilla (rotación y desplazamiento horizontal). Sin embargo, si se ignora el cambio en la longitud del miembro horizontal, y una junta de rodilla se fija contra la translación horizontal, no se requiere restricción horizontal en la otra rodilla. Por lo tanto, se requieren dos rotaciones de junta y una translación de junta para crear la determinación cinemática.

En seguida se desarrollan ecuaciones en términos de dos rotaciones de junta y una translación de junta para restaurar el equilibrio en los nodos del sistema (juntas) que se crearon artificialmente en la etapa de "corte" equivalente. Este procedimiento de solución es muy similar al proceso de distribución de momentos descrito en el capítulo 10, donde cada junta se fijaba artificialmente y luego se liberaba, permitiéndola rotar y balancear los momentos.

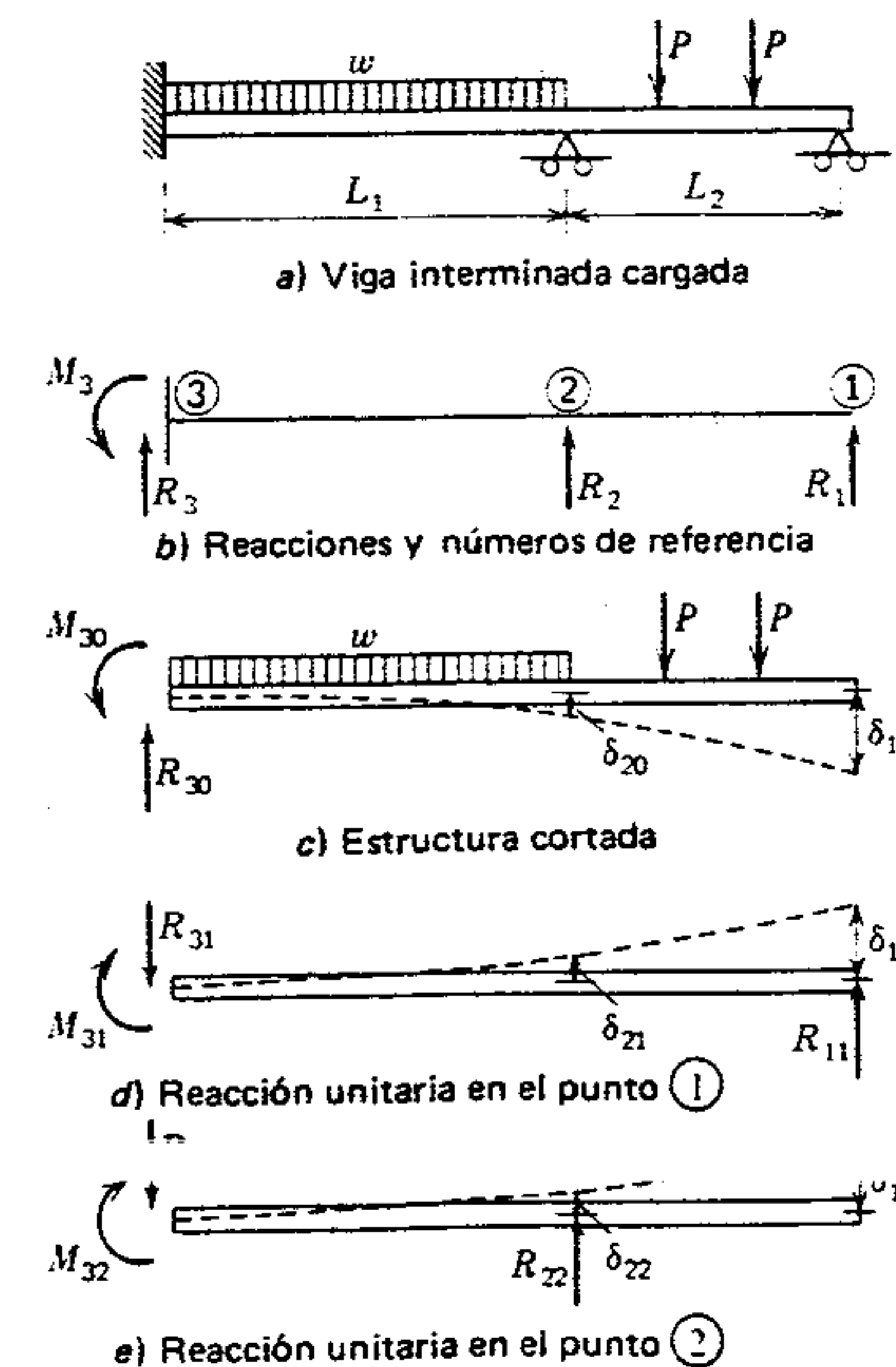


Figura 12.6 Método de flexibilidad.

## 12.4 INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LA FLEXIBILIDAD

El procedimiento para este método se describió en relación con la viga continua de dos claros de la figura 12.6. Para simplificar el proceso, no se incluyen cargas axiales; sin embargo, en cualquier procedimiento de resolución de problemas, se debe dejar una tolerancia para su inclusión. Las juntas (o nodos) se numeran de derecha a izquierda, y las reacciones finales son como se indican en la figura 12.6b.

En la figura 12.6c se ilustran la estructura cortada y su deflexión. Las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  se designaron como reacciones redundantes y se han removido. Obsérvese que cada componente de reacción y cada deflexión están marcadas con dos subíndices. El primero se refiere a la localización de la reacción o componente de deflexión, mientras que el segundo a la causa o fuente de la componente. En el caso ilustrado en la figura 12.6c, el subíndice cero se refiere a la condición de corte. En la figura 12.6d, el símbolo  $\delta_{21}$  denota la deflexión en el punto ② debida a la carga unitaria en el punto ①.

Los valores de  $M_{30}$  y  $R_{30}$  se pueden calcular fácilmente por estática; es decir,  $M_{30} = wL_1^2/2 + 2P(L_1 + L_2/2)$  y  $R_{30} = wL_1 + 2P$ . Las deflexiones,  $\delta_{10}$  y  $\delta_{20}$ , también se calculan a partir de condiciones estáticas. El trabajo de cálculo implícito depende de las cargas y el método usados en la determinación de deflexiones. Este tema se presentó en el capítulo 4.

En el siguiente paso del procedimiento se consideran las reacciones redundantes liberadas. Se considera una a la vez. Como se desconoce el valor de  $R_1$ , se asigna un valor unitario  $R_{11}$  en ese lugar y se ajusta al valor real de  $R_1$  en la ecuación final de equilibrio. Obsérvese que  $R_{11}$  por  $R_1$  es igual a  $R_1$ . En la figura 12.6d se muestra la viga cortada sin las cargas reales, pero con una carga unitaria ( $R_{11}$ ) aplicada en el punto ①. Con la viga cortada se marca la deflexión por esta carga sola. La cantidad  $\delta_{11}$  es la deflexión en el punto ① debida a una carga unitaria aplicada en el punto ①, y  $\delta_{21}$  es la deflexión en el punto ② debida a una carga unitaria en el punto ①. Estas deflexiones se pueden



calcular por estática por cualquiera de los métodos descritos en el capítulo 4. Asimismo,  $M_{31}$  y  $R_{31}$  se pueden calcular como sigue

$$M_{31} = R_{11}(L_1 + L_2)$$

$$R_{31} = R_{11}$$

El proceso establecido arriba se repite con una carga unitaria  $R_{22}$  aplicada en el punto ②. Por tanto,

$$M_{32} = R_{22}L_1$$

$$R_{32} = R_{22}$$

El paso final en la solución de las reacciones redundantes consiste en restaurar la estructura cortada a su condición inicial. Obsérvese que el punto de referencia ① debe tener una deflexión de cero. Por lo tanto, si  $R_{11}$  y  $R_{22}$  fueran los valores reales ( $R_1$  y  $R_2$ ) en vez de valores unitarios, los valores de deflexión combinados sumarían cero ( $-\delta_{10} + \delta_{11} + \delta_{12} = 0$ ). Para considerar los valores de reacción reales, se necesita multiplicar los valores unitarios de deflexión por sus reacciones reales correspondientes. Esto se hace para ambos puntos ① y ②, como sigue:

$$-\delta_{10} + R_1\delta_{11} + R_2\delta_{12} = 0$$

$$-\delta_{20} + R_1\delta_{21} + R_2\delta_{22} = 0$$

Se ve que éstas son ecuaciones simultáneas lineales con solamente  $R_1$  y  $R_2$  como incógnitas. Las ecuaciones se pueden escribir en forma de matriz como sigue:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix}$$

Los valores de  $R_1$  y  $R_2$  se pueden determinar usando álgebra matricial (Apéndice C).

Después de determinar  $R_1$  y  $R_2$ , se pueden determinar las componentes de reacción en ③:

$$R_3 = R_{30} - R_1R_{31} - R_2R_{32}$$

$$M_3 = M_{30} - R_1M_{31} - R_2M_{32}$$

La matriz que contiene los elementos  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{21}$  y  $\delta_{22}$  se conoce como matriz de flexibilidad, y los elementos mismos se conocen como coeficientes de flexibilidad. El cálculo de estos elementos se puede hacer por cualquiera de los métodos estándar. Sin embargo, en los programas de computadora preparados para resolver estructuras complicadas se emplea usualmente el método conocido como "Carga Unitaria Ficticia". Este método se trata a veces bajo el encabezado de Trabajo Virtual.<sup>3</sup> Los ejemplos y problemas asignados en este libro se resuelven usando el método de área-momento (sección 4.2) o las fórmulas de deflexión de la figura 4.15 o en la parte 2 del Manual AISC.

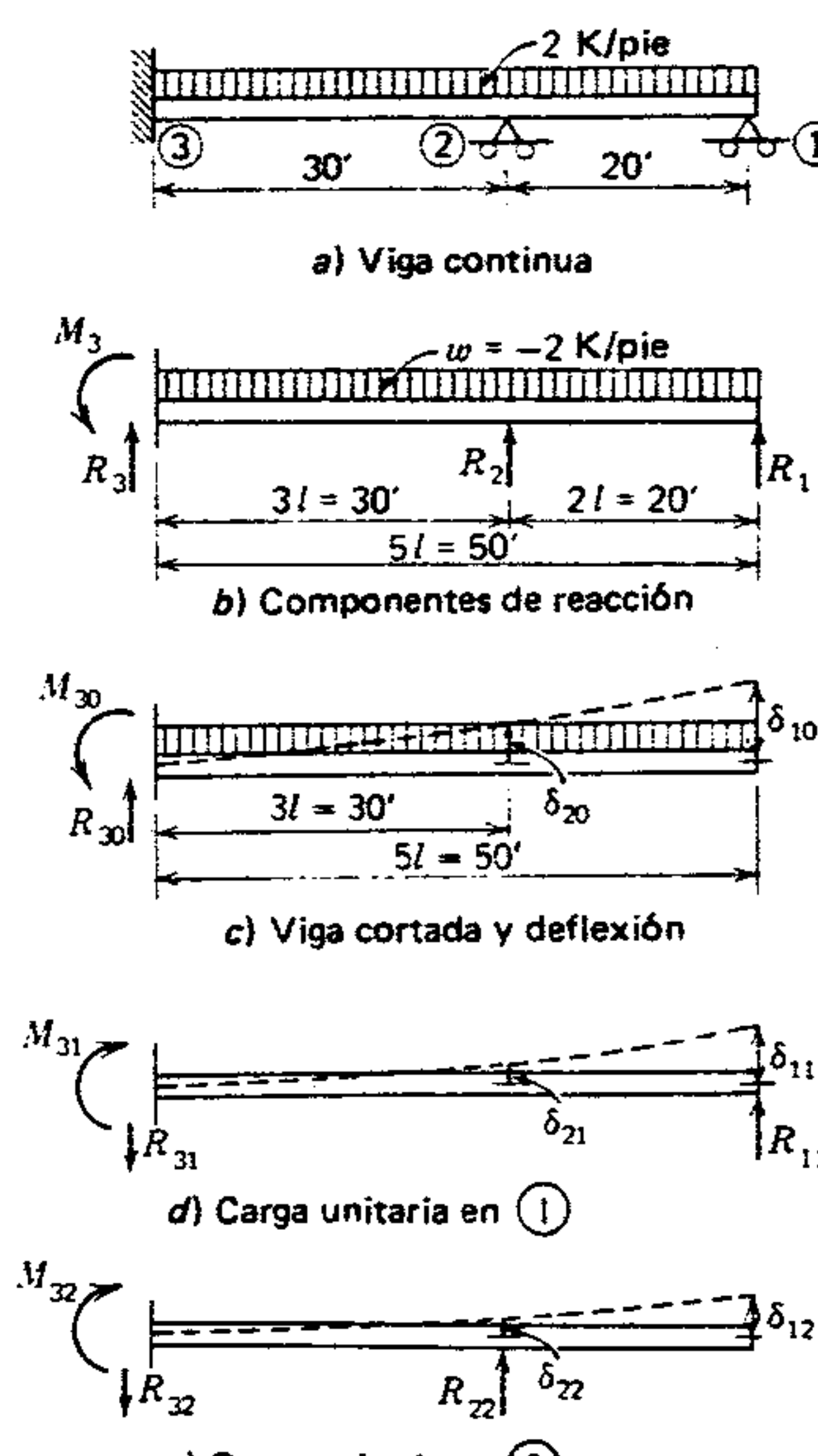


Figura 12.7 Ejemplo.

<sup>3</sup> Consúltase un libro de texto sobre teoría estructural.

En este problema de ejemplo,  $x = 3l$ ,  $L = 5l$  y  $w = -2$ . Sustituyendo estos términos en la ecuación de deflexión.

$$\begin{aligned} EI\delta_{20} &= \frac{-2k(5l)^4}{\text{pie } 24} \left( \frac{3l}{5l} \right)^2 \left[ \left( \frac{3l}{5l} \right)^2 - 4 \left( \frac{3l}{5l} \right) + 6 \right] \\ &= \frac{-k(5l)^4}{\text{pie } 12} \left( \frac{9}{25} \right) \left( \frac{9}{25} - \frac{12}{5} + 6 \right) \\ &= \frac{-k625l^4}{\text{pie } 12} \left( \frac{9}{25} \right) \left( \frac{9 - 60 + 150}{25} \right) \\ EI\delta_{20} &= \frac{-k297l^4}{\text{pie } 4} \end{aligned}$$

### Ejemplo

Calcular las componentes de reacción para la viga continua de la figura 12.7a. Usar el método de la flexibilidad y álgebra matricial;  $E = 29,000$  k/pulg<sup>2</sup> e  $I = 500$  pulg<sup>4</sup>.

### Solución

1. Marcar las componentes de reacción (figura 12.7b). Para eliminar errores de redondeo en los cálculos, usar un múltiplo de una longitud básica para las longitudes reales; en este caso, 10 pies. Entonces,  $3l = 30$  pies,  $2l = 20$  pies y  $5l = 50$  pies. Estos aparecen en la figura 12.7b.
2. Elegir  $R_1$  y  $R_2$  como reacciones redundantes y cortar la estructura a una forma determinada (figura 12.7c). Suponer una dirección positiva para todas las fuerzas y desplazamientos (hacia arriba, a la derecha y antihoraria). Bosquejar la forma deflexionada y marcar la deflexión en los puntos en que se eliminaron las redundantes.
3. Calcular la deflexión en unidades de  $EI$  y  $l$  en los puntos en que se eliminaron reacciones redundantes.

$$EI\delta_{10} = \frac{wL^4}{8} = \frac{-2k}{\text{pie}} \left[ \frac{(5l)^4}{8} \right]$$

$$EI\delta_{10} = -\frac{k}{\text{pie}} \left[ \frac{625l^4}{4} \right]$$

La ecuación del Manual AISC para la deflexión en cualquier punto  $x$ , debida a carga uniformemente distribuida, es

$$EI\delta_x = \frac{wL^4}{24} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 6 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

factorizando  $(x/L)^2$  de los corchetes

$$EI\delta_x = \frac{wL^4}{24} \left( \frac{x}{L} \right)^2 \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left( \frac{x}{L} \right) + 6 \right]$$

4. Aplicar una carga unitaria en la reacción de recha (figura 12.7d) y calcular la deflexión indicada.

$$EI\delta_{11} = \frac{R_{11}(L)^3}{3} = \frac{1(5l)^3}{3}$$

$$EI\delta_{11} = \frac{125l^3}{3}$$

Por el método de área-momento calcular  $\delta_{21}$ ,

$$EI\delta_{21} = \frac{1(2l)(3l)(3l)}{2} + \frac{1(3l)}{2} (3l[\frac{2}{3}(3l)])$$

$$EI\delta_{21} = 18l^3$$

5. Aplicar una carga unitaria en la reacción central (figura 12.7e) y calcular las deflexiones indicadas.

$$EI\delta_{22} = \frac{R_{22}L^3}{3} = \frac{1(3l)^3}{3}$$

$$EI\delta_{22} = 9l^3$$

Por el método de área-momento calcular  $\delta_{12}$ ,

$$EI\delta_{12} = \frac{1(3l)}{2} (3l[2l + \frac{2}{3}(3l)])$$

$$EI\delta_{12} = 18l^3$$



6. Restaurar la estructura cortada en su condición original igualando a cero la suma de las deflexiones en los puntos ① y ②.

$$R_1 \delta_{11} + R_2 \delta_{12} + \delta_{10} = 0$$

$$R_1 \delta_{21} + R_2 \delta_{22} + \delta_{20} = 0$$

El término  $EI$  ocurre en cada elemento y, por lo tanto, se anula. Insertar las fórmulas  $\delta_{ij}$  calculadas para cada elemento.

$$R_1 \frac{125l^3}{3} + R_2 18l^3 - \frac{625l^4}{4} = 0$$

$$R_1 18l^3 + R_2 9l^3 - \frac{297l^4}{4} = 0$$

Mover a la derecha el término negativo y anular  $l^3$  de todos los elementos. Sustituir 10 para los demás valores de  $l$ .

$$\frac{125}{3} R_1 + 18R_2 = \frac{625(10)}{4}$$

$$18R_1 + 9R_2 = \frac{297(10)}{4}$$

Para tener números enteros para la matriz, multiplicar la primera ecuación por 6 y la segunda por  $\frac{2}{3}$ .

$$250R_1 + 108R_2 = 9375$$

$$4R_1 + 2R_2 = 165$$

7. Reordenar las ecuaciones en forma de matriz y resolver las reacciones redundantes (Apéndice C).

$$\begin{bmatrix} 250 & 108 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9375 \\ 165 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 250 & 108 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 68$$

$$R_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9375 & 108 \\ 165 & 2 \end{vmatrix}}{68} = 13.68 \text{ kips}$$

$$R_2 = \frac{\begin{vmatrix} 250 & 9375 \\ 4 & 165 \end{vmatrix}}{68} = 55.15 \text{ kips}$$

8. Calcular las componentes de reacción en el extremo empotrado.

$$R_3 = 2(50) - 13.68 - 55.15$$

$$R_3 = 31.17 \text{ kips}$$

$$D_3 = \frac{2(50)^2}{2} - 13.68(50) - 55.15(30)$$

$$M_3 = 161.50 \text{ pie-kips}$$

## 12.5 INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LA RIGIDEZ

El método de la rigidez comprende ciertos aspectos que lo hace más adecuado que el método de la flexibilidad para programas generales de computadora para estructuras complejas. Por lo tanto, se presentará una manera más general y se desarrollará más detalladamente en las siguientes secciones. El método de la flexibilidad y el método de la rigidez se parecen en que cada proceso genera una serie de ecuaciones simultáneas que se necesita resolver para un conjunto de cantidades incógnitas. La diferencia básica entre los dos métodos se debe al hecho de que las incógnitas del método de la flexibilidad son fuerzas, mientras que las del método de la rigidez son desplazamientos.

Los programas generales contenidos en los Apéndices D y E se basan en el método de la rigidez (desplazamiento). Como se señala en el Apéndice

requiere que las matrices sean positivas-definidas. Para asegurar que una matriz de rigidez estructural satisfaga este criterio, se debe usar una convención universal de signos para todos los desplazamientos y componentes de fuerzas. La direc-

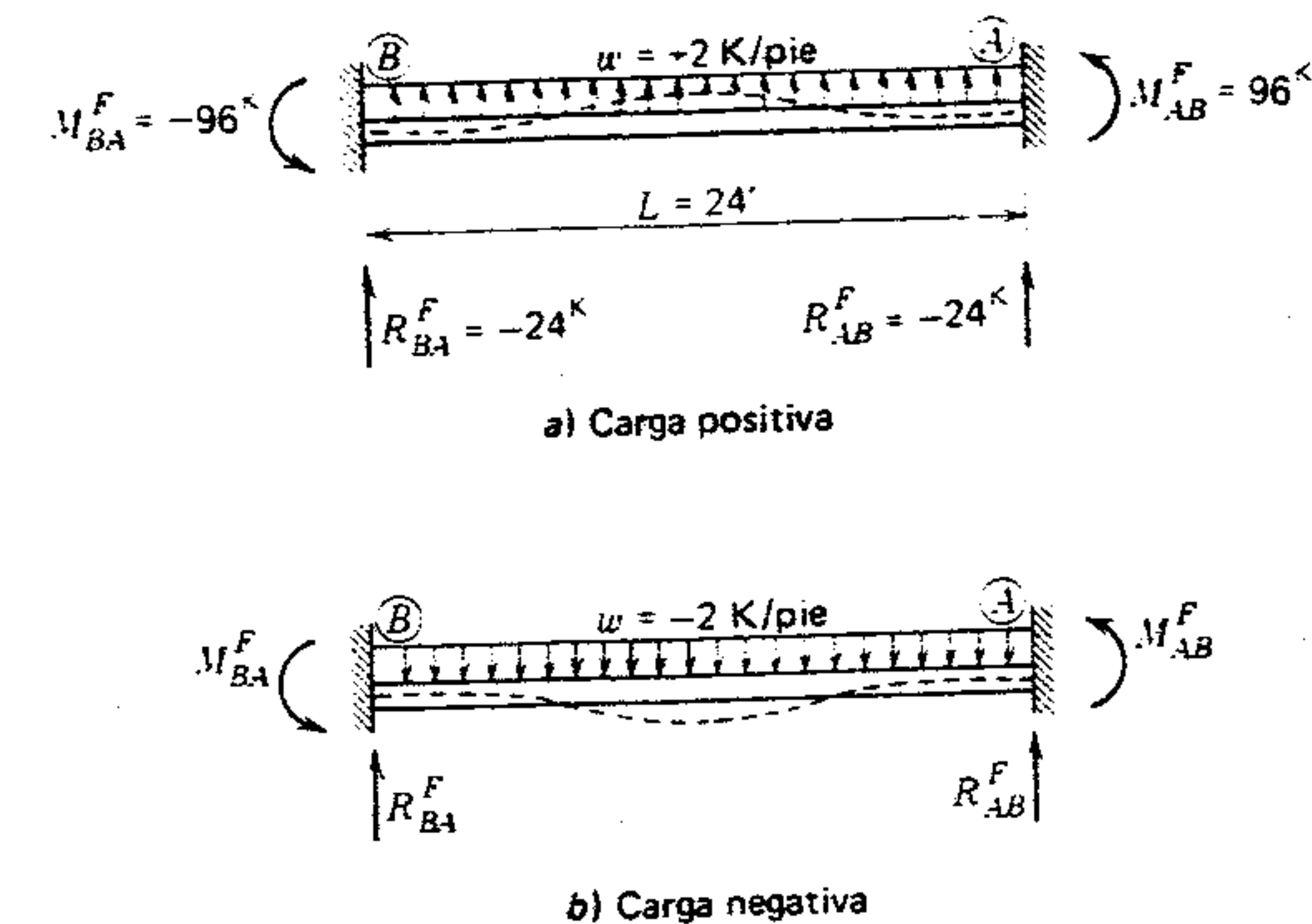


Figura 12.8 Signos convencionales.

ción positiva es hacia arriba, a la derecha y antihoraria. Si es incógnita, se supone que la dirección es positiva, y si los cálculos subsiguientes la muestran negativa, tienen sentido negativo.

Se acostumbra presentar todas las componentes de fuerzas sobre el diagrama de cuerpo libre en la dirección positiva y designarlas negativas cuando sea apropiado. Por ejemplo, véase el diagrama de cuerpo libre para una viga de extremo empotrado en la figura 12.8. En una condición de carga positiva (figura 12.8a), es obvio que ambas reacciones verticales y el momento de empotramiento en B están en el sentido equivocado y, por tanto, necesitan signos negativos. La carga de gravedad más común se ilustra en la figura 12.8b, donde la carga toma un signo negativo. En estas circunstancias, sólo el momento de empotramiento en A es negativo.

Cuando las componentes de fuerzas redundantes incluyen momentos flexionantes, el proceso es muy similar al procedimiento de distribución de momentos que se estudió en el capítulo 10. Se

luego se ajusta aplicando rotaciones de junta. Debido a la similitud de ambos procedimientos, en la siguiente explicación se emplean los mismos símbolos, notaciones y descripciones usados para la distribución de momentos.

El método se explica en relación con la viga continua ilustrada en la figura 12.9a. Se han omitido deliberadamente las cargas axiales para simplificar la exposición; sin embargo, se tratarán en secciones posteriores. Las juntas (o nodos) están marcadas de derecha a izquierda, A, B y C. Se observa que la viga es cinemáticamente indeterminada en segundo grado. Las juntas A y B podrían tener cierta rotación y, por lo tanto, deben fijarse temporalmente y luego liberarse, requiriéndose ajustes en las componentes de fuerza en el extremo empotrado.

En la figura 12.9b se ilustra el equivalente cortado que es la estructura cinemáticamente determinada. En la figura 12.9c se muestran las componentes de fuerzas de reacción para esta condición de extremo fijo. Obsérvese que los puntos nodales B y A no están en equilibrio, es decir,  $M_{BA}^F$  no es necesariamente igual a  $M_{BC}^F$  y  $M_{AB}^F$  no es igual a cero (condición de la estructura original). En consecuencia, se necesitan ajustes para la condición de extremo fijo:

Estos ajustes se podrían hacer fácilmente si se conociera la carga axial. Como éste no es el caso, se aplica independientemente una rotación unitaria en cada lugar, y en los otros lugares se determina la influencia de tal acción. Luego se suman los resultados y se fuerzan a



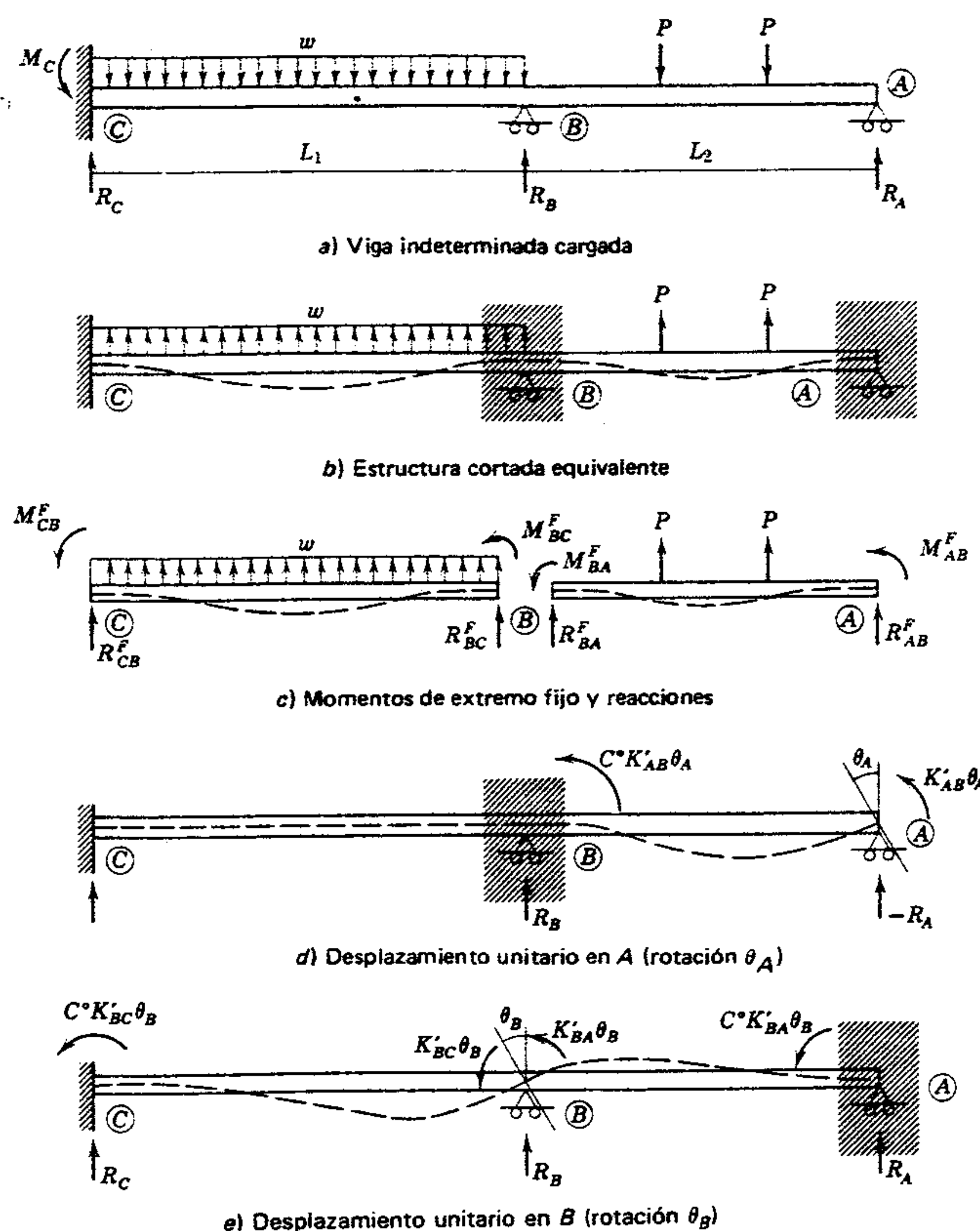


Figura 12.9 Método de rigidez.

cumplir con los requisitos de equilibrio resolviendo las ecuaciones con los valores apropiados de las ro-

En la figura 12.9d se muestra un desplazamiento  $\theta_A$  aplicado en la junta A, suponiendo fijas todas las otras juntas. En la sección 10.6 se define un factor de rigidez como el momento que genera una rotación unitaria y se deriva su valor para una viga prismática, a saber

$$K'_{AB} = \frac{4EI}{L_2}$$

Obsérvese que el momento real en A para cualquier rotación  $\theta_A$  es igual al producto de los dos, o sea,  $K'_{AB}\theta_A$ .

En la sección 10.6 también se describe el efecto de transporte (un momento aplicado en un extremo de una viga empotrada transportará un mo-

mento al otro extremo). El signo seguirá siendo el mismo. En la figura 12.9d se ve que el momento en B es el producto del factor de transporte y el momento en A, o sea  $C^0 K'_{AB}\theta_A$ . Se ha mostrado que el factor de transporte para vigas prismáticas es  $\frac{1}{2}$ .

En seguida se aplica una rotación en el punto nodal B. Para esto se necesita la suma de dos momentos de extremo, uno para la viga BA y otro para la viga BC. También se anotan los efectos del transporte en los puntos A y C.

Finalmente, las leyes de superposición permiten la adición de las condiciones que se ilustran en las figuras 12.9 c), d) y e) para establecer el equilibrio.

Para la junta A

$$M_{AB}^F + K'_{AB}\theta_A + C^0 K'_{BA}\theta_B = 0$$

Para la junta B

$$M_{BC}^F + M_{BA}^F + C^0 K'_{AB}\theta_A + K'_{BC}\theta_B + K'_{BA}\theta_B = 0$$

Usando un valor de  $C^0$  de  $\frac{1}{2}$  para vigas prismáticas y reordenando los términos:

$$K'_{AB}\theta_A + \frac{1}{2}K'_{BA}\theta_B = -M_{AB}^F - \frac{1}{2}K'_{AB}\theta_B$$

$$+ (K'_{BA} + K'_{BC})\theta_B = -M_{BC}^F + M_{BA}^F$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden expresar en forma de matriz, como sigue:

$$\begin{bmatrix} K'_{AB} & \frac{1}{2}K'_{BA} \\ \frac{1}{2}K'_{AB} & K'_{BA} + K'_{BC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{AB}^F \\ -(M_{BC}^F + M_{BA}^F) \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez      Vector de desplazamiento      Vector de carga

Los valores desconocidos de  $\theta$  en el vector de desplazamiento se determinan por métodos de álgebra matricial.

Los elementos en la matriz de rigidez se conocen como coeficientes de rigidez y requieren una explicación más amplia. Se ve que tienen algunas similitudes con la matriz de flexibilidad descrita en la sección 12.4. Sustituyendo el símbolo general  $\delta_{ij}$  para cada uno de los elementos de la matriz y anotando la definición de cada uno:

$K'_{AB} = \delta_{11}$ , momento en 1 debido a una rotación unitaria en 1.

$\frac{1}{2}K'_{BA} = \delta_{12}$ , momento en 1 debido a una rotación unitaria en 2.

$\frac{1}{2}K'_{AB} = \delta_{21}$ , momento en 2 debido a una rotación unitaria en 1.

$K'_{BA} + K'_{BC} = \delta_{22}$ , momento en 2 debido a una rotación unitaria en 2.

Con este patrón de elementos identificados por los dos subíndices se facilita mucho la preparación de una matriz de rigidez para una estructura compleja. Además, la ley de Maxwell de desplazamientos recíprocos hace simétrica la matriz respecto a su diagonal principal, es decir, el desplazamiento en un punto A en una estructura, debido a una carga aplicada en otro punto B es exactamente el mismo que el desplazamiento en el punto B si se aplica la misma carga en el punto A. Expresado esto en forma de ecuación

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad \text{si } i \neq j$$

El vector de desplazamiento tendrá un valor desconocido por cada grado de indeterminación, situado en cada nodo que requiera un empotramiento artificial. El vector de carga tendrá un valor ( $\sum M^F$ ) para cada nodo que requiera un empotramiento artificial de extremo.

Una vez determinado el valor de  $\theta$  de cada punto nodal artificialmente restringido, se pueden calcular las componentes de reacción finales en términos de este valor de  $\theta$  y las condiciones de equilibrio estático.

En la figura 12.10 se representa la viga continua cargada de la figura 12.9a, ilustrada como diagrama de cuerpo libre de cada viga. El momento final en C es el momento de empotramiento en C



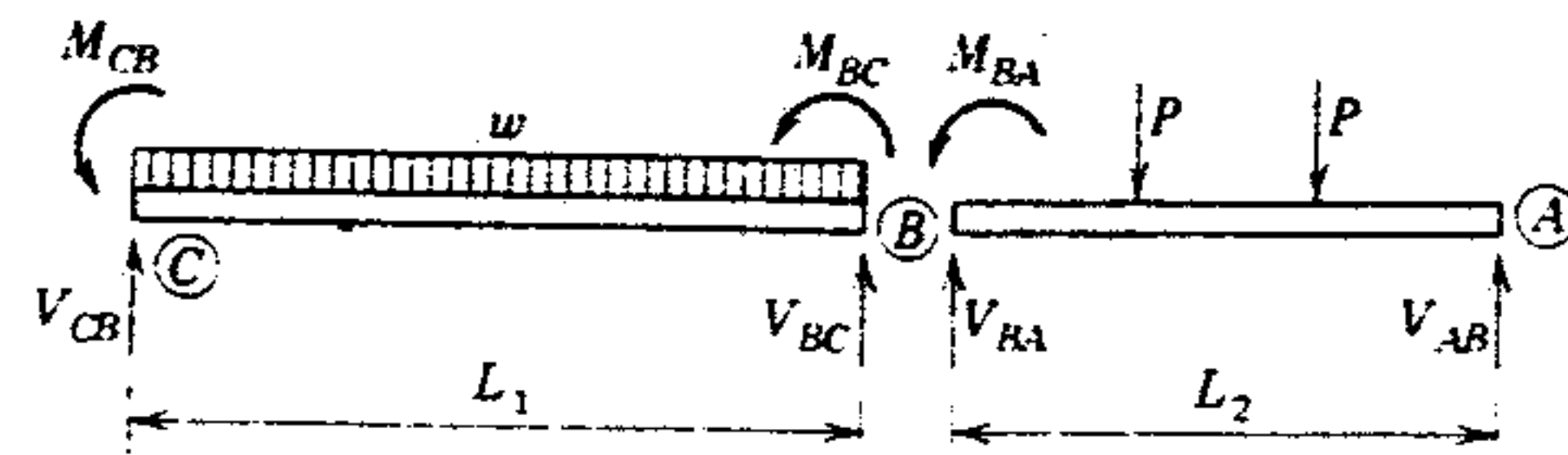


Figura 12.10 Momentos y cortante de extremos.

más el factor de transporte por la rotación real en B, o sea

$$M_{CB} = M_{CB}^F + \frac{1}{2} K'_{BC} \theta_B$$

El momento final en B es igual al momento de extremo fijo en BA más el factor de transporte en A por el factor de rigidez por la rotación real en A más el factor en B por la rotación real en B, o sea

$$M_{BA} = M_{BA}^F + \frac{1}{2} K'_{AB} \theta_A + K'_{BA} \theta_B$$

El momento final en B también se puede calcular usando el segmento izquierdo, es decir,

$$M_{BC} = M_{BC}^F + K'_{BC} \theta_B$$

Los cortantes de extremos se calculan a partir de las cargas y los momentos de extremos, como sigue:

$$V_{AB} = -P - \frac{M_{BA}}{L_2}$$

$$V_{BA} = -P + \frac{M_{BA}}{L_2}$$

$$V_{BC} = -\frac{wL_1}{2} - \frac{(M_{BC} + M_{CB})}{L_1}$$

$$V_{CB} = -\frac{wL_1}{2} + \frac{(M_{BC} + M_{CB})}{L_1}$$

### Ejemplo

Calcular los momentos de extremos y cortantes para la viga continua de la figura 12.7a. Usar el método de la rigidez y álgebra matricial.  $E = 29,000 \text{ k/pulg}^2$

e  $I = 500 \text{ pulg}^4$ . (Este es el mismo problema que se usó como ejemplo en el método de la flexibilidad.)

### Solución

1. Hacer un croquis de la estructura con las cargas y marcar los puntos nodales (figura 12.11).
2. Calcular el factor de rigidez para las vigas.

$$K'_{AB} = K'_{BA} = \frac{4EI}{L} = \frac{4(29,000)500}{20(12)^2} = 20.139 \text{ pie-kips}$$

$$K'_{BC} = K'_{CB} = \frac{4(29,000)500}{30(12)^2} = 13.426 \text{ pie-kips}$$

3. Calcular los momentos de extremos fijos.

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{(-2)(20)^2}{12} = -66.67 \text{ pie-kips}$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{(-2)(30)^2}{12} = -150.00 \text{ pie-kips}$$

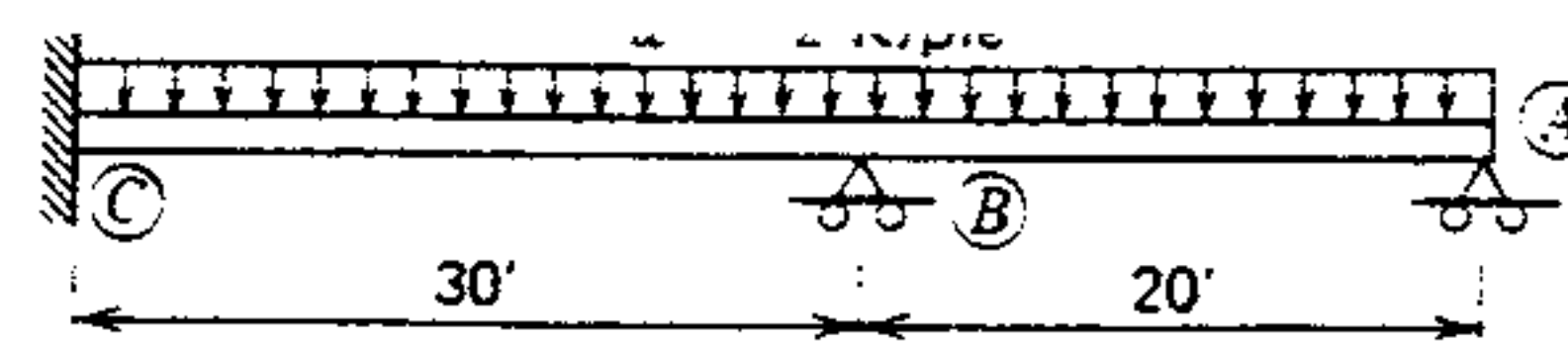


Figura 12.11 Ejemplo.

4. Determinar el vector de carga.

$$-M_{AB}^F = -(-66.67) = 66.67 \text{ pie-kips}$$

$$-(M_{BC}^F + M_{BA}^F) = -(66.67 - 150.00) = 83.33 \text{ pie-kips}$$

5. Determinar la matriz de rigidez. (Para simplificar los cálculos se factoriza un valor de 10,000 de los valores de rigidez).

$$K'_{AB} = K'_{BA} = 10,000(2.01)$$

$$K'_{BC} = K'_{CB} = 10,000(1.34)$$

Usando 2.01 y 1.34 para las rigideces, entonces los valores de  $\theta$  serán 10,000 veces mayores que sus valores reales. Sin embargo, este efecto se anulará cuando  $\theta$  se multiplique por  $K'_{ij}$  para balancear los momentos. Este procedimiento no se debe usar cuando se calculen deflexiones.

De los elementos dentro de la matriz de rigidez, se determinan los siguientes valores:

$$\delta_{11} = K'_{AB} = 2.01$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2} K'_{BA} = 1.01$$

$$\delta_{22} = K'_{BA} + K'_{BC} = 2.01 + 1.34 = 3.35$$

6. Ordenar la matriz y resolver para la rotación en los puntos A y B.

$$\begin{bmatrix} 2.01 & 1.01 \\ 1.01 & 3.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66.67 \\ 83.33 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2.01 & 1.01 \\ 1.01 & 3.35 \end{vmatrix} = 5.71$$

$$\theta_A = \frac{\begin{vmatrix} 66.67 & 1.01 \\ 83.33 & 3.35 \end{vmatrix}}{5.71}$$

$$\theta_B = \frac{\begin{vmatrix} 2.01 & 66.67 \\ 1.01 & 83.33 \end{vmatrix}}{5.71} = 17.53$$

7. Calcular los momentos de extremo para las vigas.

$$M_{BA} = M_{BA}^F + \frac{1}{2} K'_{AB} \theta_A + K'_{BA} \theta_B$$

$$M_{BA} = 66.67 + \frac{1}{2}(2.01)(24.36) + (2.01)(17.53) = 126.39 \text{ pie-kips}$$

$$M_{CB} = M_{CB}^F + \frac{1}{2} K'_{BC} \theta_B = 150.00 + \frac{1}{2}(1.34)(17.53) = 161.75 \text{ pie-kips}$$

8. Determinar el valor de los cortantes de extremos para las vigas.

$$V_{AB} = -\left[\frac{-2(20)}{2}\right] - \frac{126.4}{20} = 13.68 \text{ kips}$$

$$V_{BA} = -\left[\frac{-2(20)}{2}\right] + \frac{126.4}{20} = 26.32 \text{ kips}$$

$$V_{BC} = -\left[\frac{-2(30)}{2}\right] - \frac{(-126.4 + 161.7)}{30} = 28.82 \text{ kips}$$

$$V_{CB} = -\left[\frac{-2(30)}{2}\right] + \frac{(-126.4 + 161.7)}{30} = 31.17 \text{ kips}$$

### PROBLEMAS

1. Mediante el método de la flexibilidad resolver la viga continua de la figura 12.12 para las reacciones redundantes en A y B. Calcular los momentos flexionantes en B y C.

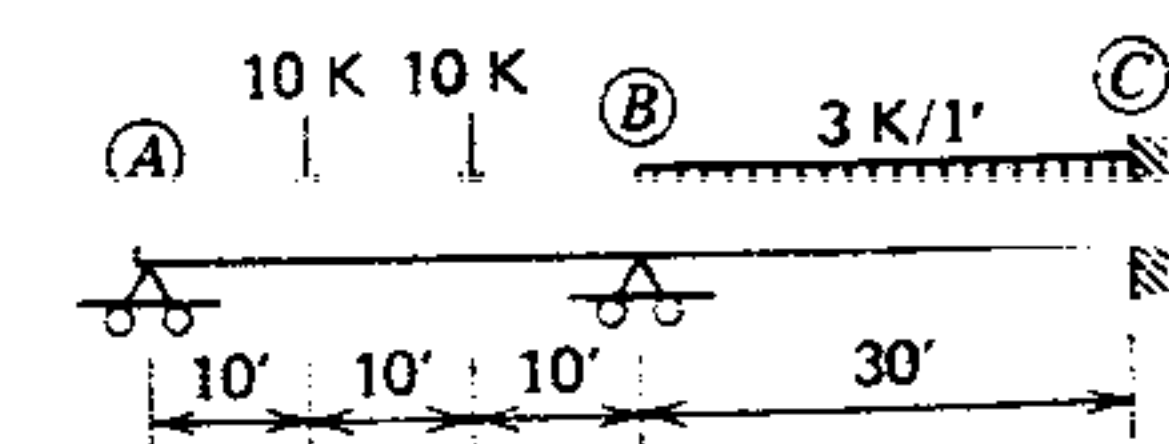


Figura 12.12 Problemas 1 y 3.



2. Mediante el método de la flexibilidad resolver la viga continua de la figura 12.13 para las reacciones redundantes en *B* y *C*. Calcular los momentos flexionantes en la viga en los puntos *B* y *C*. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)

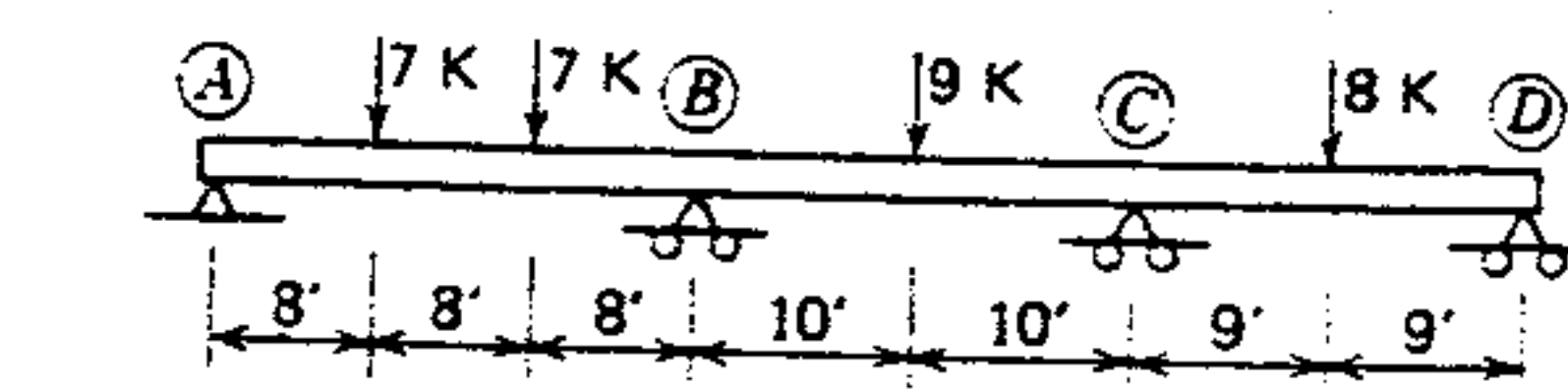
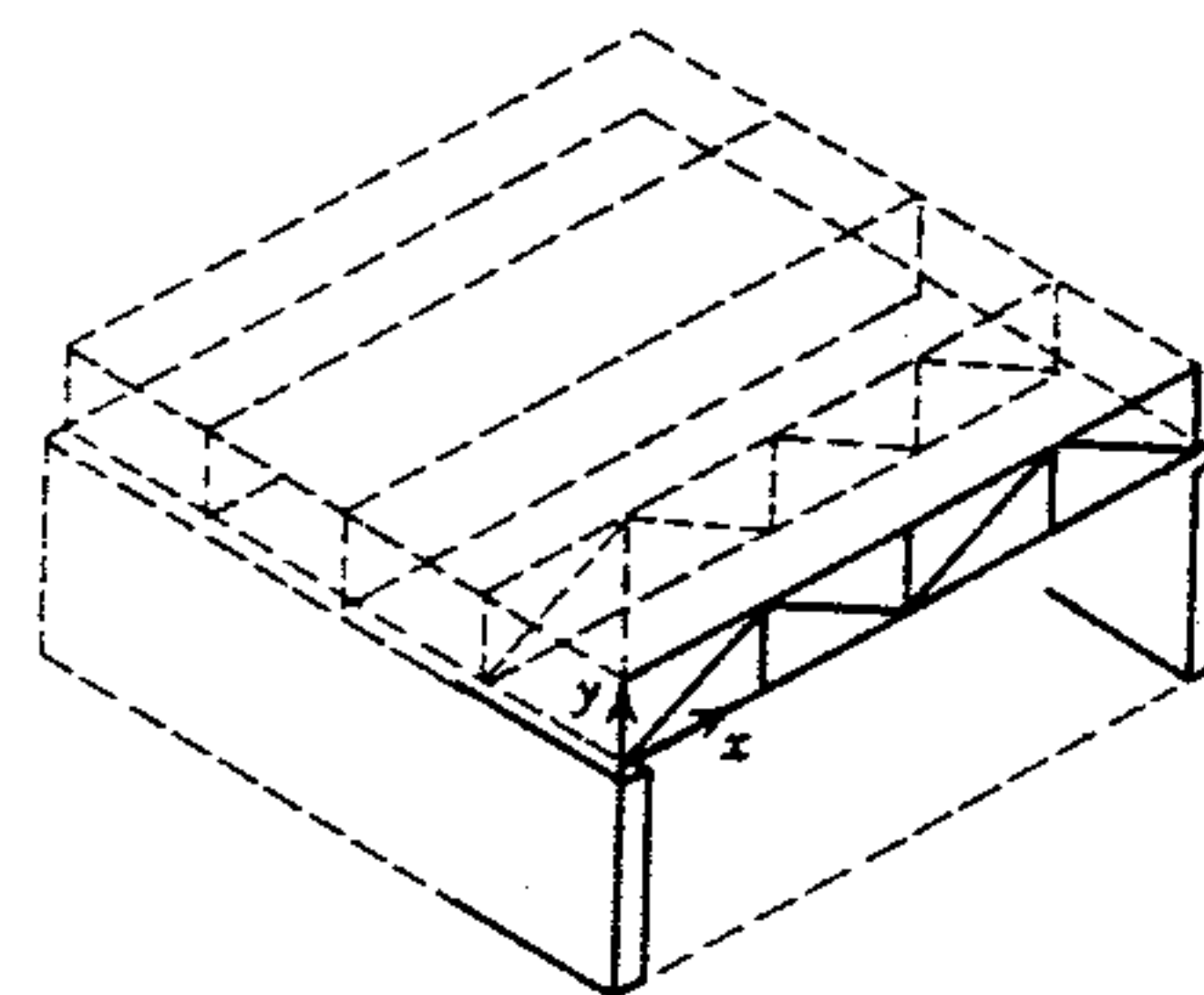
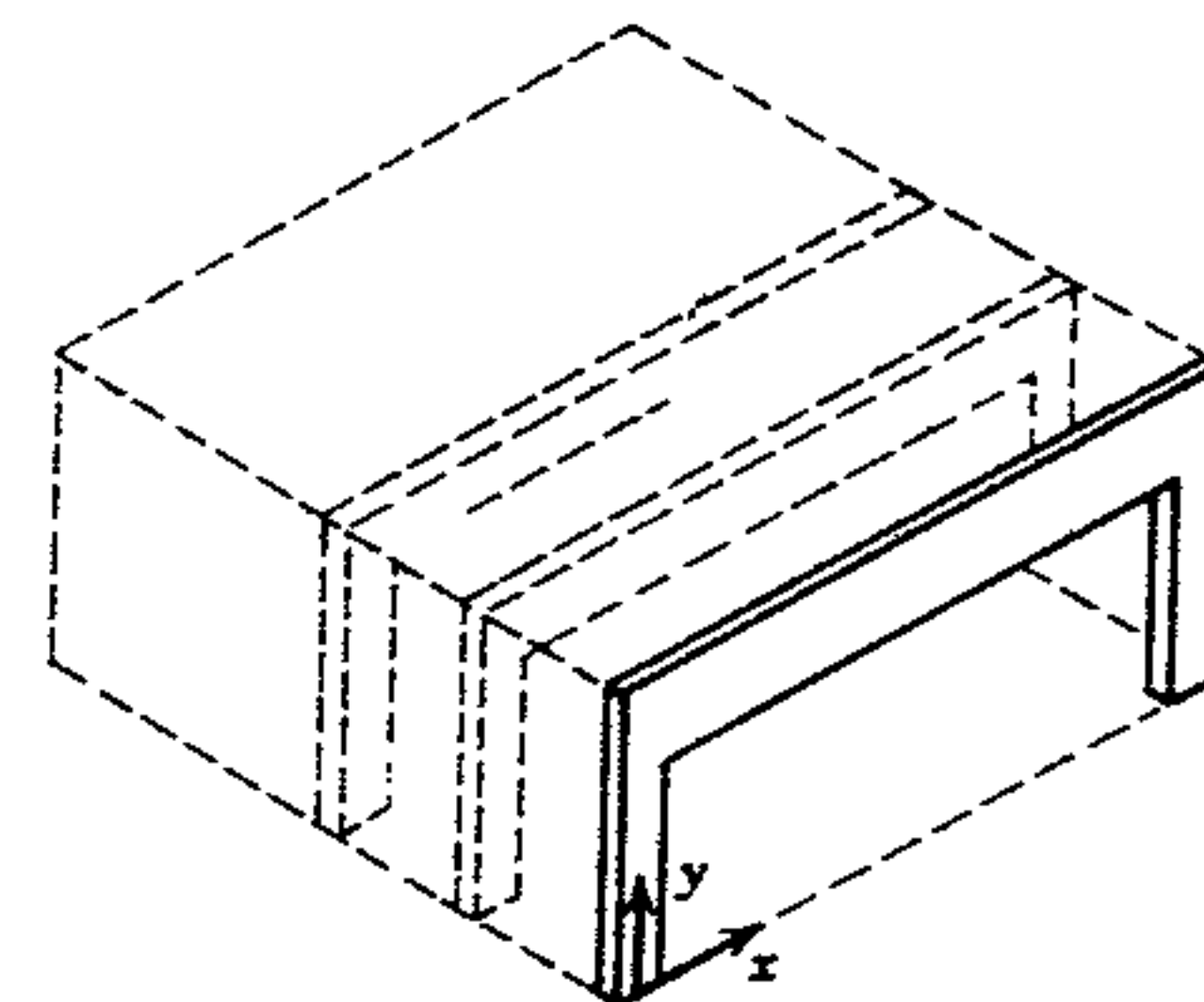


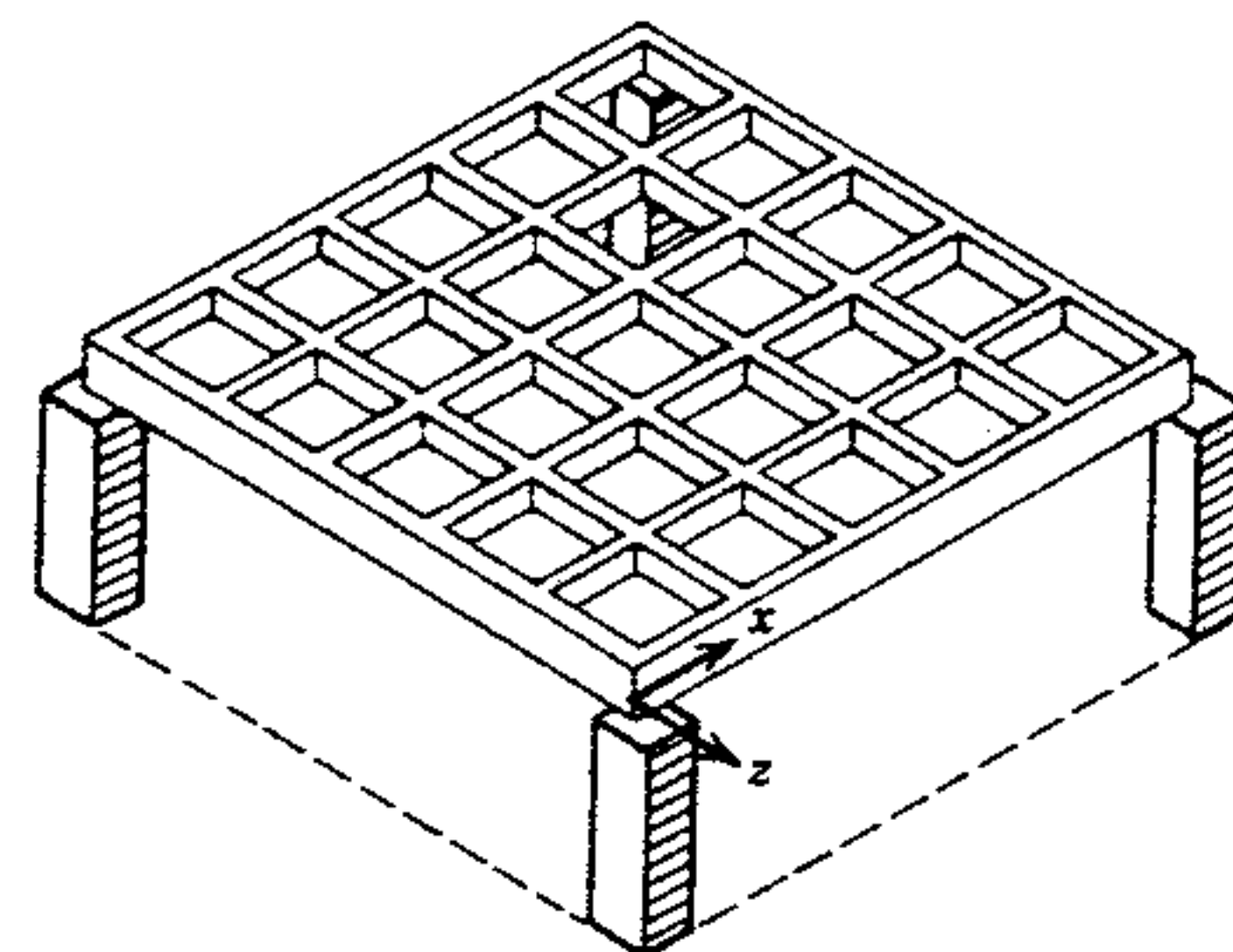
Figura 12.13 Problemas 2 y 4.



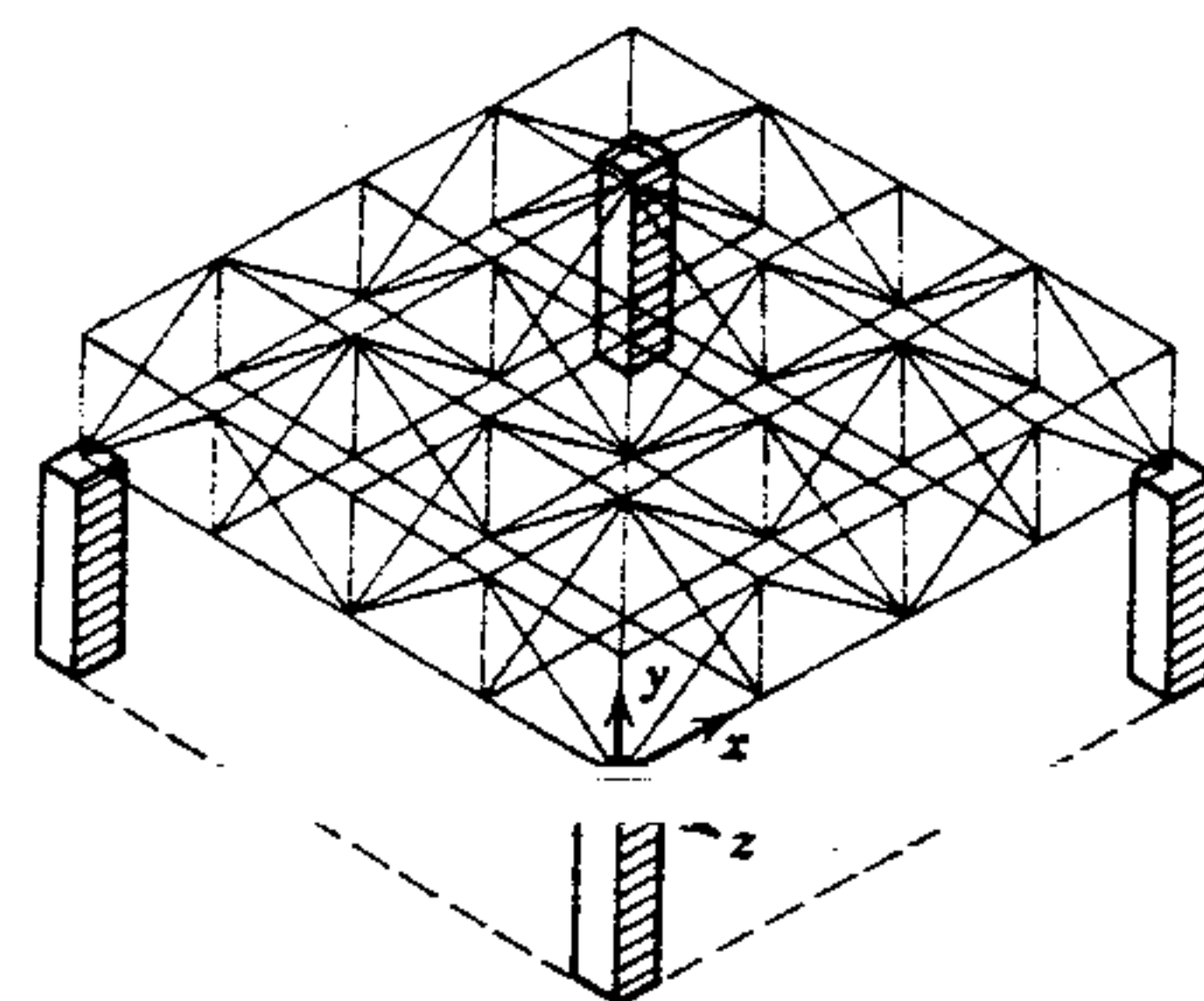
a) Armadura plana



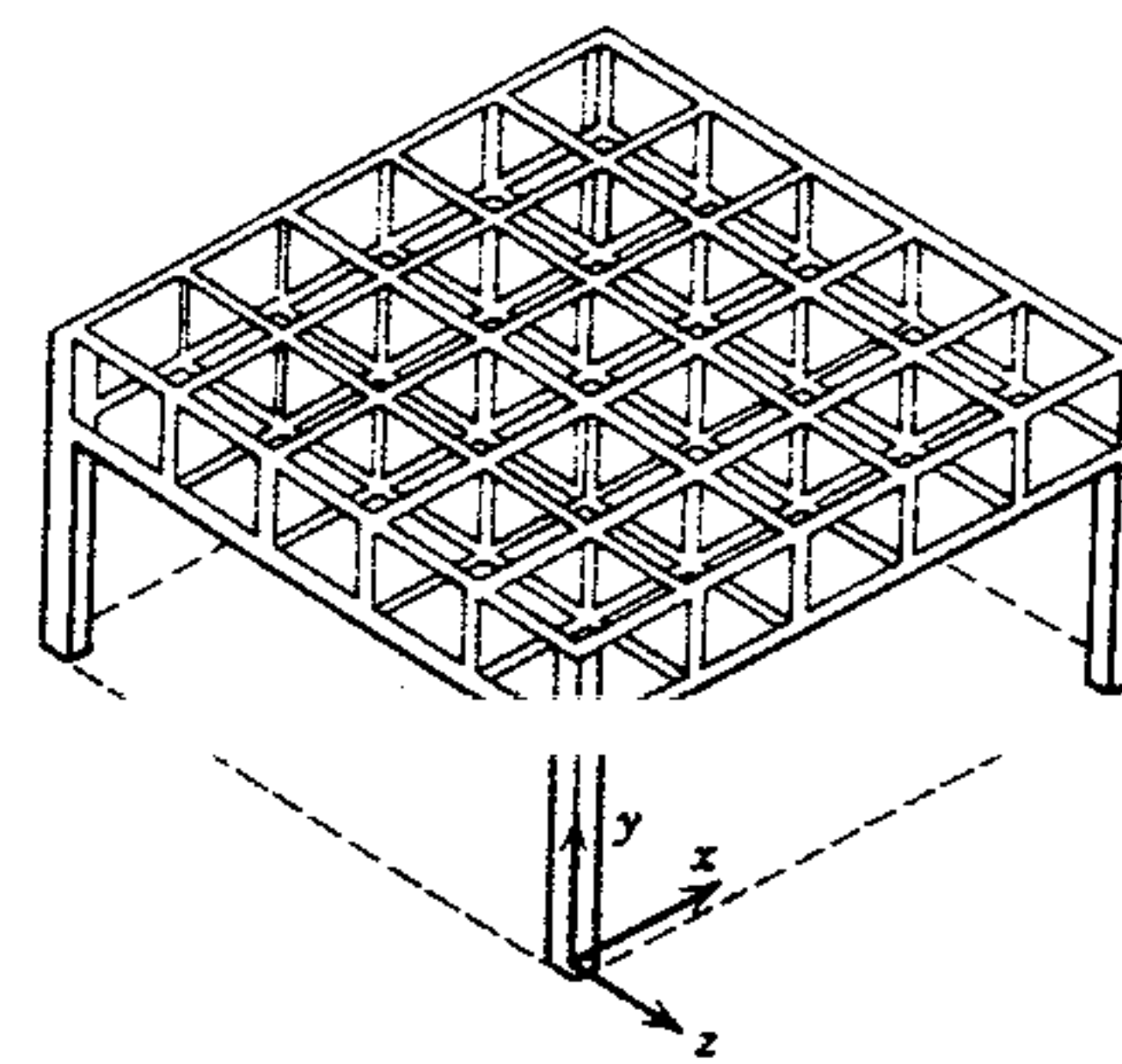
b) Marco plano



c) Retícula



d) Armadura espacial



e) Marco espacial

Figura 12.14 Tipos de estructuras a base de marcos.

3. Resolver el problema 1 por el método de la rigidez.  
4. Resolver el problema 2 por el método de la rigidez.

## 12.6 SISTEMAS ESTRUCTURALES GENERALES

En general todas las estructuras se pueden clasificar como de *membrana* o de *marcos*. Las estructuras de membrana típicas son los cascarones y los globos (neumáticos) donde la propia superficie constituye el elemento soportante de la carga. Por otra parte, las estructuras de marcos consisten en un ensamble de elementos individuales independientes de la cubierta superficial. Estos elementos individuales se conforman de modo que tengan gran longitud en comparación con su área de sección transversal. Las estructuras de marcos son típicas de los edificios de acero.

Hay cinco tipos distintos de estructuras de marcos, cada uno categorizado sobre la base de ciertos aspectos de su forma y grados de libertad presentes en el sistema. Estas estructuras se ilustran en la figura 12.14 y se denominan armadura plana, marco plano, retícula, armadura espacial o marco espacial. Para mayor claridad, todos los elementos de los marcos ilustrados en la figura 12.14 están indicados por una línea recta o con una sección transversal rectangular; sin embargo, en realidad pueden consistir en ángulos dobles, secciones tubulares o en forma de I, o con una sección transversal de cualquier forma. Los tipos de estructuras ilustrados en la figura 12.14 son independientes de las formas de las secciones transversales de los propios elementos.

Cada tipo depende de la distribución física de los elementos dentro de un sistema *coordinado* y de si los elementos están sujetos entre sí por conexiones flexibles (articuladas) o resistentes al momento. Estos dos aspectos (distribución y conexión) se combinan para definir aún más el grado de libertad del sistema.

En la figura 12.14 se ilustra un sistema coordinado para cada tipo. La posición del origen puede estar en cualquier lugar conveniente; no obstante, la posición comúnmente aceptada es donde las

flechas indican direcciones positivas de los ejes coordinados. La armadura espacial y el marco espacial necesitan coordenadas tridimensionales (*x*, *y* y *z*). Cada uno de los nodos (en este caso, las conexiones) se puede localizar e identificar con las dimensiones *x*, *y* y *z*. El eje largo de los elementos individuales no tiene que coincidir necesariamente con los ejes del sistema coordinado, ya que en vez de ellos se pueden utilizar las componentes de los elementos. Esto sucede con los elementos diagonales de la celosía de la armadura espacial (figura 12.14d). Se necesita solamente un sistema de coordenadas bidimensionales para describir el marco plano, la armadura plana y la retícula. Obsérvese que la armadura plana y el marco plano están en el plano *x-y*, mientras que la retícula en el plano *x-z*.

El método de la rigidez de análisis se basa en el desplazamiento de las juntas del sistema (las incógnitas en la matriz). Los desplazamientos de las juntas representan la manera en que la estructura de marcos puede responder *libremente* a las cargas aplicadas. Por lo tanto, el número de las direcciones de las componentes de los desplazamientos que también corresponden a las componentes de fuerzas desconocidas en los extremos de cada elemento viene a ser el grado de libertad en esa junta. Asimismo, el grado de libertad para una estructura entera se define como el número total de desplazamientos desconocidos en las juntas de la estructura.

En sistemas estructurales en que los elementos están sujetos entre sí mediante conexiones resistentes a momento, la componente de momento de la reacción del extremo se debe incluir en el análisis de desplazamiento de juntas; si no, sólo estarán presentes los desplazamientos axiales directos y de fuerzas cortantes. En la figura 12.15 se ilustran las reacciones de componentes en los extremos de elementos (representando el grado de libertad de la junta) para cada tipo de estructura.

Para ser clasificados como marcos espaciales (figura 12.14e), los elementos deben tener conexiones rígidas. Por lo tanto, además de las fuerzas axiales tridimensionales  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$ , están presentes tres momentos, cada uno relacionado con un eje del sistema coordinado.  $M_x$  se produce en el plano



$x$ - $y$ , lo cual causa rotación respecto al eje  $z$ .  $M_y$  está en el plano  $x$ - $z$  causando rotación respecto al eje  $y$ , y  $M_x$  está en el plano  $y$ - $z$  rotando respecto al eje  $x$ . Puesto que hay seis componentes de reacción, el marco espacial tiene seis grados de libertad en cada junta.

La armadura plana está en el plano  $x$ - $y$  y tiene elementos articulados en las juntas (figura 12.15a). Por lo tanto, no hay momentos y tiene sólo dos grados de libertad ( $F_x$  y  $F_y$ ) en cada junta. De

modo similar, el marco plano está en el plano  $x$ - $y$  (figura 12.15b), pero los miembros tienen conexiones resistentes a momento, creando  $M_z$ . Por lo tanto, el marco plano tiene tres grados de libertad en cada junta ( $F_x$ ,  $F_y$  y  $M_z$ ).

La retícula está en el plano  $y$ - $z$ . Tiene conexiones resistentes a momento, pero está cargada y deformada de tal manera que no hay cargas axiales, creándose así tres grados de libertad ( $F_y$ ,  $M_x$  y  $M_z$ ). La armadura espacial (figura 12.15d), que es

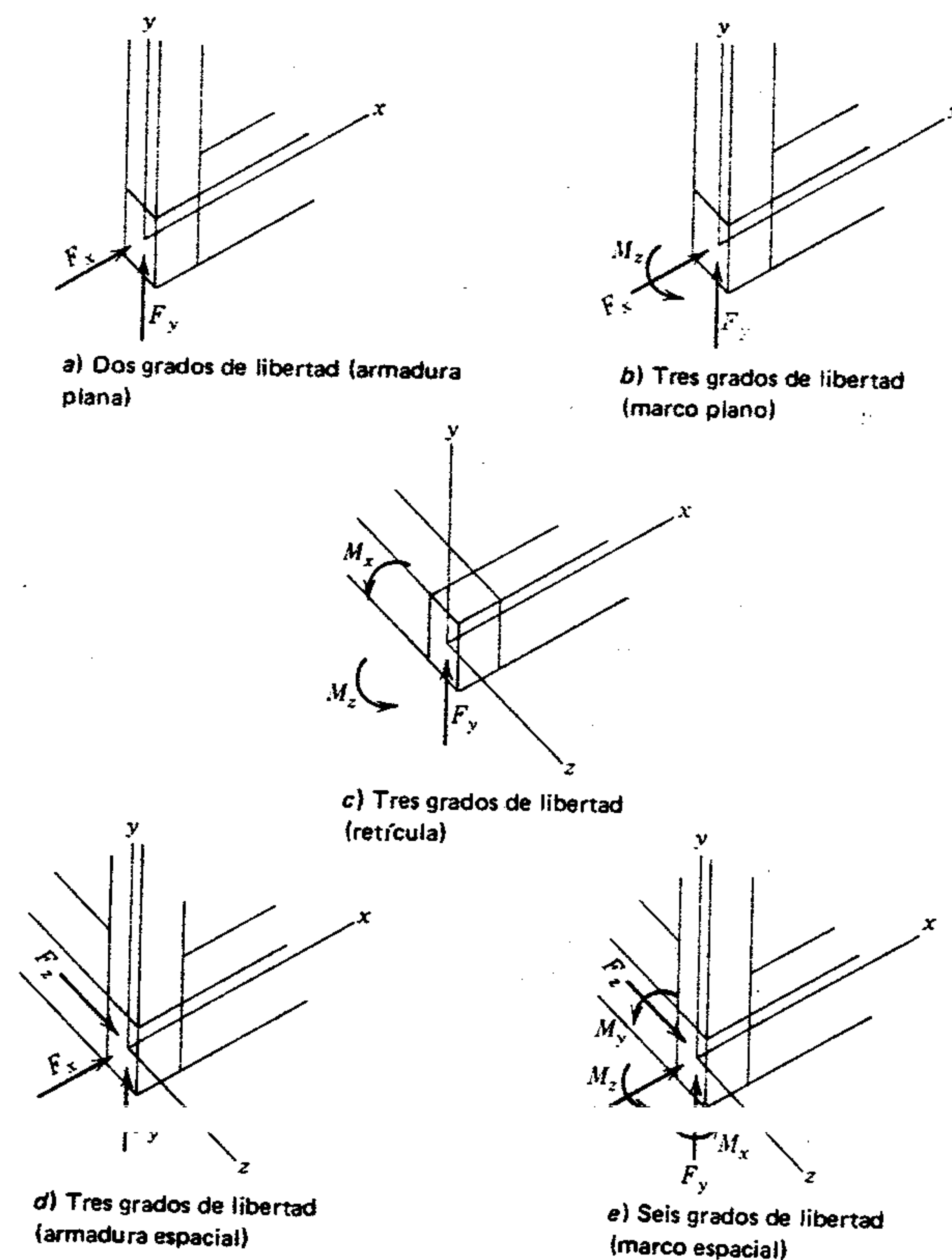


Figura 12.15 Grados de libertad en extremos de miembros para estructuras a base de marcos.

## 12.7 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO DE ARMADURA

En la figura 12.16 se ilustra un elemento típico de una estructura de armadura plana con juntas articuladas. El extremo izquierdo del elemento está marcado con  $A$  y el extremo derecho con  $B$ ; sin embargo, la elección de la marca es arbitraria y podría ser al revés si se desea. Con cada elemento va un conjunto de ejes coordenados ( $x_e$ ,  $y_e$  y  $z_e$ ), denominados *ejes orientados al elemento* o *ejes del elemento*. Cada uno de los ejes tiene su origen en el extremo  $A$  del elemento. El eje positivo  $x_e$  está dirigido a lo largo del elemento hacia el extremo  $B$ , el eje positivo  $y_e$  está dirigido hacia arriba y el eje positivo  $z_e$  está dirigido hacia afuera del plano del papel, formando un sistema coordenado de mano derecha.

Cada elemento de una armadura está relacionado con un juego de ejes del elemento. Las direcciones positivas de estos ejes se establecen una vez designados los extremos  $A$  y  $B$ . Estos ejes del elemento no se deben confundir con los ejes de la estructura que se vieron en la sección 12.6. En la figura 12.17 se ilustran tres ejemplos de ejes de elemento de una armadura.

Viendo de nuevo la figura 12.16, las cantidades  $t_A$  y  $v_A$  denotan las acciones de extremo (fuerzas normal y cortante) en el extremo  $A$  del elemento, y  $t_B$  y  $v_B$  denotan las acciones de extremo en el extremo  $B$ . El desplazamiento del extremo  $A$  en la dirección  $x_e$  está representado por  $\xi_A$ , y el desplazamiento en la dirección  $y_e$  por  $\delta_A$ . Las cantidades correspondientes en el extremo  $B$  están represen-

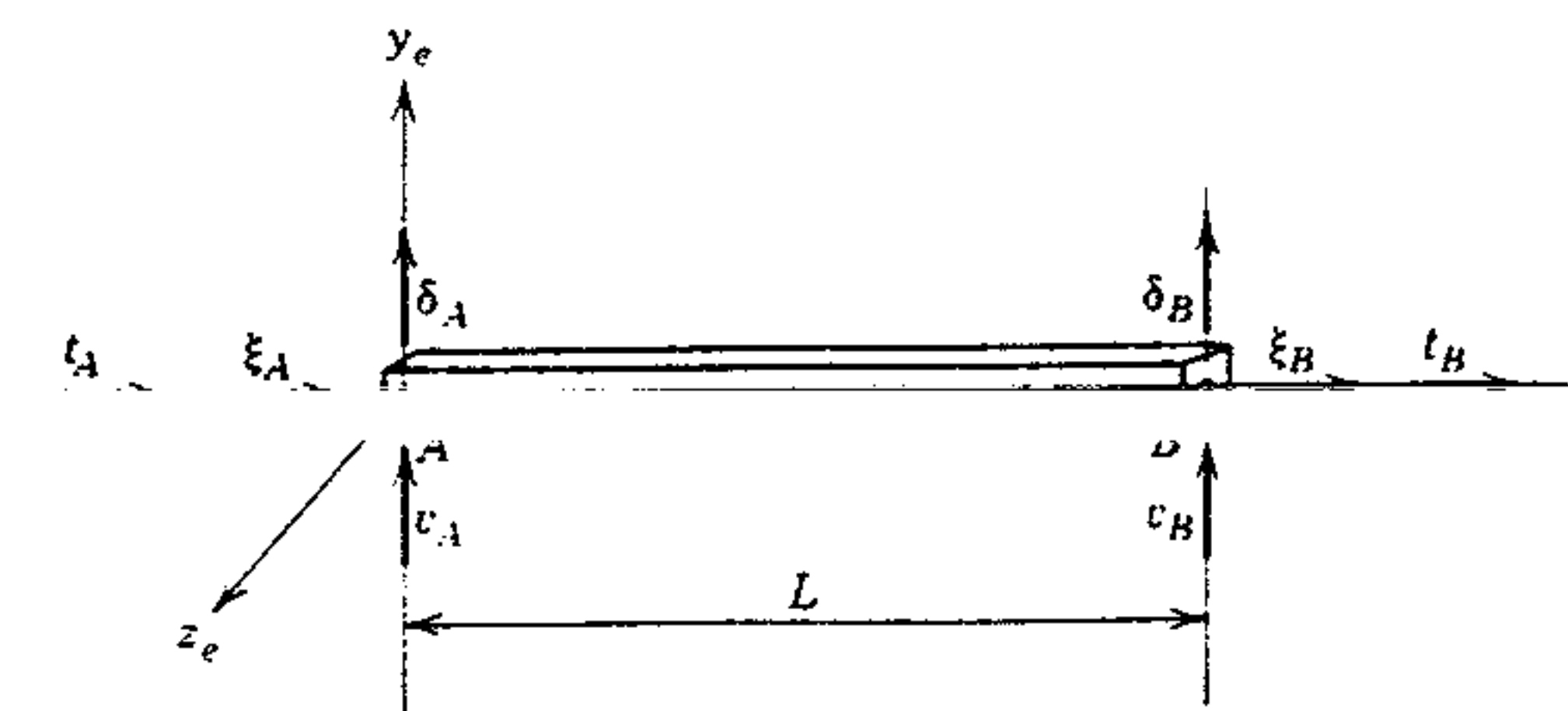


Figura 12.16 Típico elemento de armadura.

tridimensional y con extremos articulados, tiene tres grados de libertad en cada junta ( $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$ ).

Finalmente, sumando el número de grados de libertad para todas las juntas en un sistema estructural se producirán los grados internos de libertad para la estructura entera. También debe mencionarse que en algunas estructuras de marcos es posible tener una combinación de juntas fijas y articuladas, pero su localización en la distribución geométrica debe ser adecuada para que la estructura sea estable.

Las demás secciones de este capítulo tratan principalmente sobre la armadura plana y el marco plano. Las retículas, las armaduras espaciales y los marcos espaciales están referidos a programas de computadora en paquete que se tratan en la sección 12.17.

Para utilizar el método de desplazamiento para el análisis de una estructura de marcos, se necesita primero determinar la rigidez de un solo miembro de la estructura. La rigidez de un miembro se describe mediante una matriz de rigidez, cuyos elementos se conocen como coeficientes de rigidez. Un coeficiente de rigidez típico de un miembro se denotará por el símbolo  $s_{ij}$  y se define como la acción (fuerza o par) inducida sobre el miembro en la línea de acción  $i$  debida a un desplazamiento unitario (desplazamiento lineal o rotación) del miembro en la línea de acción  $j$ , una vez evitados los otros desplazamientos. Una línea de acción puede corresponder a un desplazamiento o a una rotación. En las secciones 12.7 y 12.8 se desarrollarán respectivamente las matrices de rigidez de miembros de armadura y de marco.



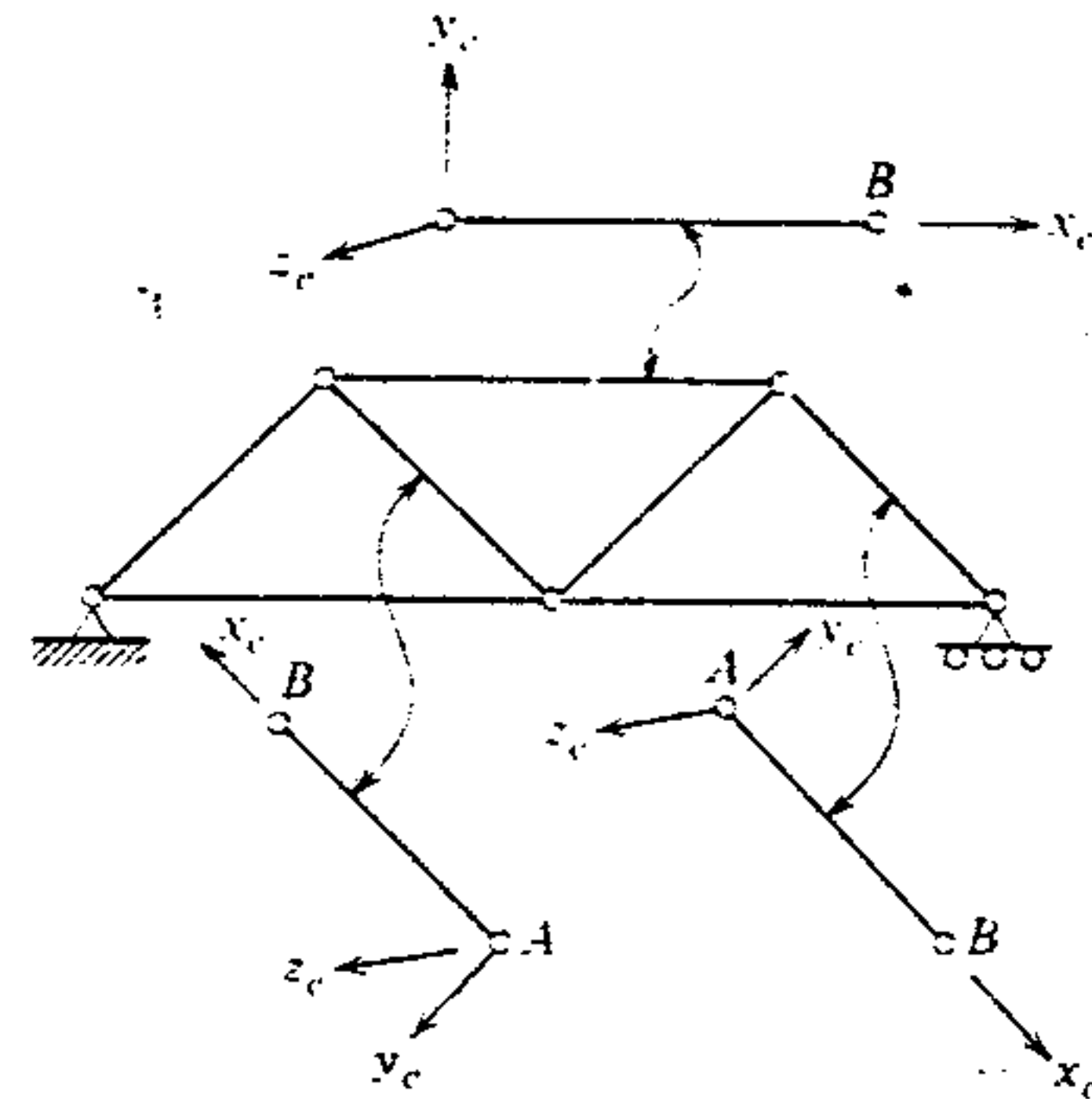


Figura 12.17 Ejemplos de ejes de elementos.

tadas por  $\xi_B$  y  $\delta_B$ . Todas las acciones y desplazamientos se consideran positivos cuando actúan en el sentido positivo de los ejes del elemento.

Se supone que la armadura está cargada sólo en las juntas y, como la armadura tiene juntas articuladas (haciendo que el elemento esté cargado sólo axialmente), los cortantes de extremos  $v_A$  y  $v_B$  son, dentro de las limitaciones de la teoría de primer orden, independientes de los desplazamientos de extremos y siempre son iguales a cero. Sin embargo, los empujes de extremos  $t_A$  y  $t_B$  están relacionados con los desplazamientos de extremos  $\xi_A$  y  $\xi_B$ . Para establecer esta relación se debe considerar el cambio de longitud debido a la fuerza axial del elemento. El cambio axial total de longitud del elemento se representará con una  $\lambda$ , que es igual a la deformación unitaria  $\epsilon$  por la longitud total  $L$ , o sea  $\lambda = \epsilon L$ . Por definición (Apéndice A), la deformación unitaria es igual al esfuerzo unitario dividido entre el módulo de elasticidad ( $E$ ) del elemento. Asimismo, el esfuerzo unitario es igual a la carga axial dividida entre el área transversal del elemento. Así, expresado en forma de ecuación

$$\lambda = \epsilon L = \frac{f_a L}{E} = \frac{PL}{EA}$$

Despejando  $P$  se tiene

$$P = \frac{\lambda AE}{L}$$

Y, como el cambio axial de longitud  $\lambda$  se puede formular en términos de desplazamientos de extremo  $\xi_A$  y  $\xi_B$ , el empuje en el extremo  $A$  se puede expresar como

$$t_A = (\xi_A - \xi_B) \frac{AE}{L}$$

El empuje  $t_B$ , obtenido mediante la consideración del equilibrio estático del elemento, es

$$t_B = -(\xi_A - \xi_B) \frac{AE}{L}$$

Las relaciones entre las acciones de extremos y los desplazamientos de extremos se pueden resumir como sigue:

$$\xi_A \left( \frac{AE}{L} \right) + \xi_B \left( \frac{-AE}{L} \right) = t_A$$

$$\delta_A(0) = v_A$$

$$\xi_A \left( \frac{-AE}{L} \right) + \xi_B \left( \frac{AE}{L} \right) = t_B$$

$$\delta_B(0) = v_B$$

Expresado en forma de matriz, esto se convierte en

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_A \\ \delta_A \\ \xi_B \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_A \\ v_A \\ t_B \\ v_B \end{bmatrix}$$

o bien, en notación de matriz,

$$s_e u_e = a_e$$

<sup>4</sup> El tipo en negritas en esta y las siguientes secciones denota un vector, una submatriz o una matriz.

El índice superior  $k$  en esta ecuación se refiere al  $k$ -ésimo elemento de la armadura, mientras que el subíndice  $e$  se refiere a los ejes del elemento.

La ecuación anterior en forma de matriz expresa las reacciones de los extremos  $t_A$ ,  $v_A$ ,  $t_B$  y  $v_B$  en términos de los desplazamientos de extremos  $\xi_A$ ,  $\xi_B$ ,  $\delta_A$  y  $\delta_B$ . La matriz  $s_e^k$  es la matriz de rigidez de un elemento típico de una armadura plana con juntas articuladas, y los elementos de  $s_e^k$  son los coeficientes de rigidez que describen la rigidez del elemento.

## 12.8 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO DE MARCO

Se puede desarrollar una matriz de rigidez de elemento de marco mediante un procedimiento similar al usado para desarrollar la matriz de elemento de armadura. En la figura 12.18 se ilustra un típico elemento de un marco. Obsérvese que hay tres grados de libertad en cada extremo y que se usa un sistema coordenado de mano derecha consistente con el usado con el elemento de armadura en las secciones anteriores. Igual que antes, estos ejes del elemento no se deben confundir con los ejes de la estructura que se vieron en la sección 12.6.

Las cantidades  $t_A$ ,  $v_A$  y  $m_A$  representan las acciones de extremo (empuje, cortante y momento) en el extremo  $A$  del elemento, y  $t_B$ ,  $v_B$  y  $m_B$  representan las acciones de extremo correspondientes en el extremo  $B$ . El desplazamiento en la dirección  $x_e$  en el extremo  $A$  está representado por  $\xi_A$ , y el desplazamiento en la dirección  $y_e$  por

$\delta_A$ . La rotación respecto al eje  $z$  del extremo  $A$  se representa por  $\theta_A$ . Las cantidades correspondientes en el extremo  $B$  se representan por  $\xi_B$ ,  $\delta_B$  y  $\theta_B$ , respectivamente. Todas las cantidades se muestran en el sentido positivo.

La definición de un coeficiente de rigidez se puede usar como base para desarrollar los elementos de la matriz de rigidez (sección 12.6); es decir, los desplazamientos se pueden imponer, en sucesión, en cada una de las seis líneas de acción en los extremos del elemento y calcular las reacciones de extremo correspondientes. Cuando estas acciones de extremo se inducen por un desplazamiento unitario, son coeficientes de rigidez y se pueden ensamblar en la matriz de rigidez del elemento.

El desarrollo se inicia mediante la imposición de una rotación  $\theta_A$  en el extremo  $A$  mientras se mantienen en cero los desplazamientos de todas las otras líneas de acción. Esta condición se ilustra en la figura 12.19. El momento flexionante en el extremo  $A$ , causado por la rotación  $\theta_A$ , está dado por la expresión

$$m_A = K'_{AB} \theta_A$$

donde  $K'_{AB}$  es el factor de rigidez definido en la sección 10.6. Como se vio en la sección 12.5, el factor de transporte  $C_{AB}^0$  proporciona un medio para expresar la magnitud del momento inducido en el extremo  $B$  como una fracción del momento aplicado en el extremo  $A$ .

$$m_B = K'_{AB} \theta_A C_{AB}^0$$

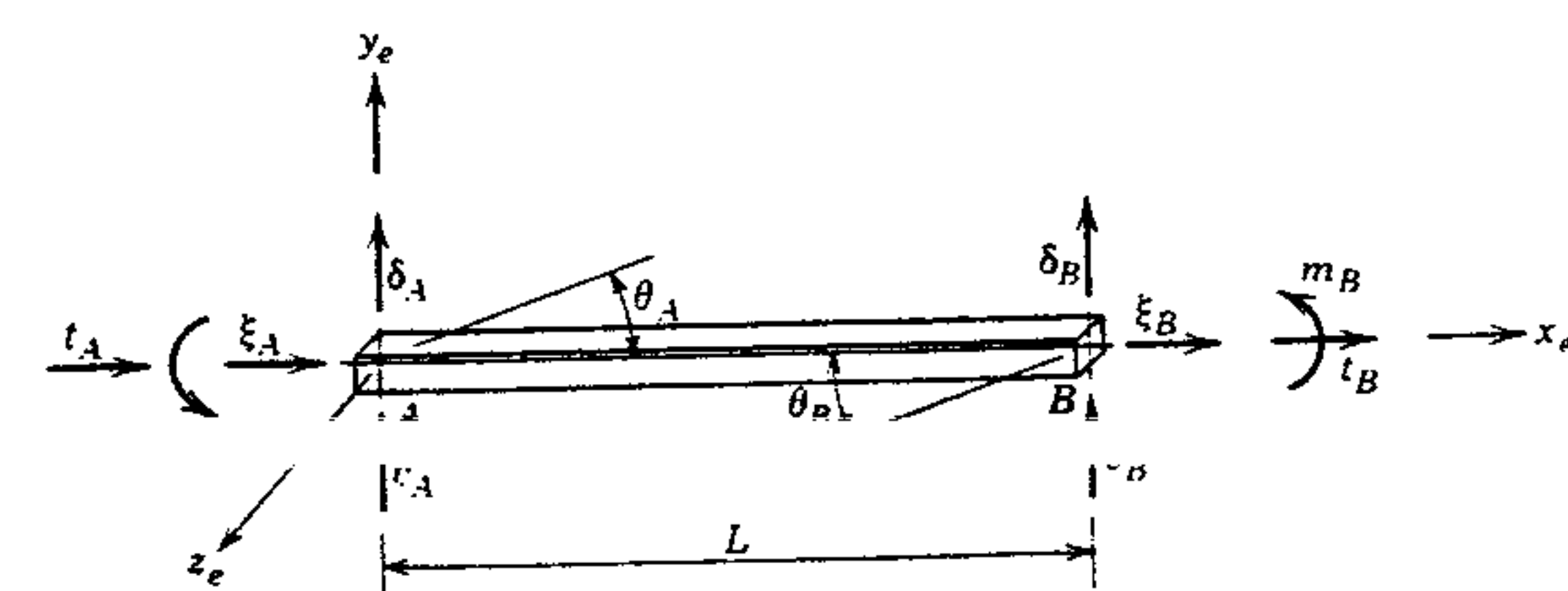


Figura 12.18 Típico elemento de marco.



Para elementos prismáticos, el valor de  $C_{AB}^0$  es de  $\frac{1}{2}$ ; sin embargo, para elementos no prismáticos su valor depende de la variación del momento de inercia con respecto a su longitud.

En la figura 12.19, la aplicación de las ecuaciones de estática dan cortantes de extremos, como sigue:

$$v_A = + \frac{K'_{AB} \theta_B (1 + C_{AB}^0)}{L}$$

$$v_B = - \frac{K'_{AB} \theta_B (1 + C_{AB}^0)}{L}$$

Continuando de la misma manera, se impone una rotación de  $\theta_B$  en el extremo B mientras los desplazamientos se mantienen en cero en todas las demás líneas de acción. Esta condición se ilustra en la figura 12.20. Las expresiones para momentos de extremo y cortantes inducidos por esta rotación son

$$m_B = K'_{BA} \theta_B$$

$$m_A = K'_{BA} \theta_B C_{BA}^0$$

$$v_A = + \frac{K'_{BA} \theta_B (1 + C_{BA}^0)}{L}$$

$$v_B = - \frac{K'_{BA} \theta_B (1 + C_{BA}^0)}{L}$$

Para desarrollar expresiones para acciones de extremo  $m$  y  $v$  debidas a un desplazamiento  $\delta_A$  en la dirección  $y_e$  en el extremo A, es conveniente suponer que el elemento está apoyado en articu-

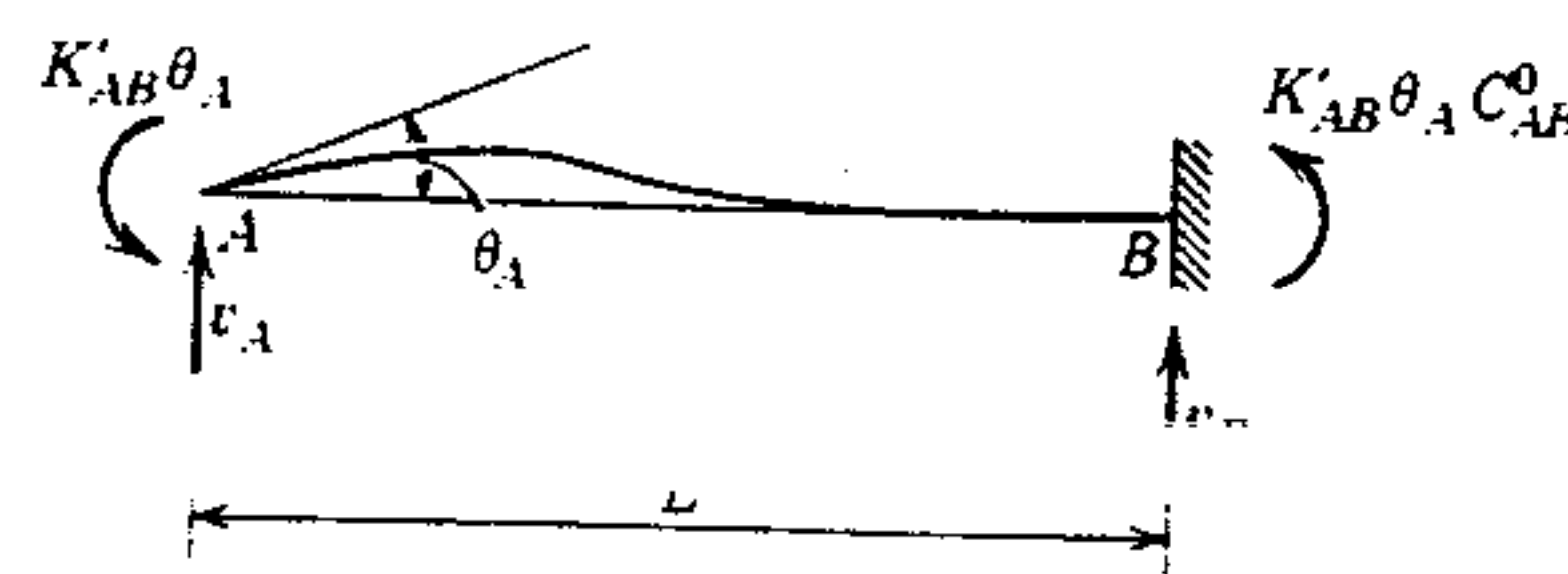


Figura 12.19 Acciones de extremos debidas al desplazamiento  $\theta_A$ .

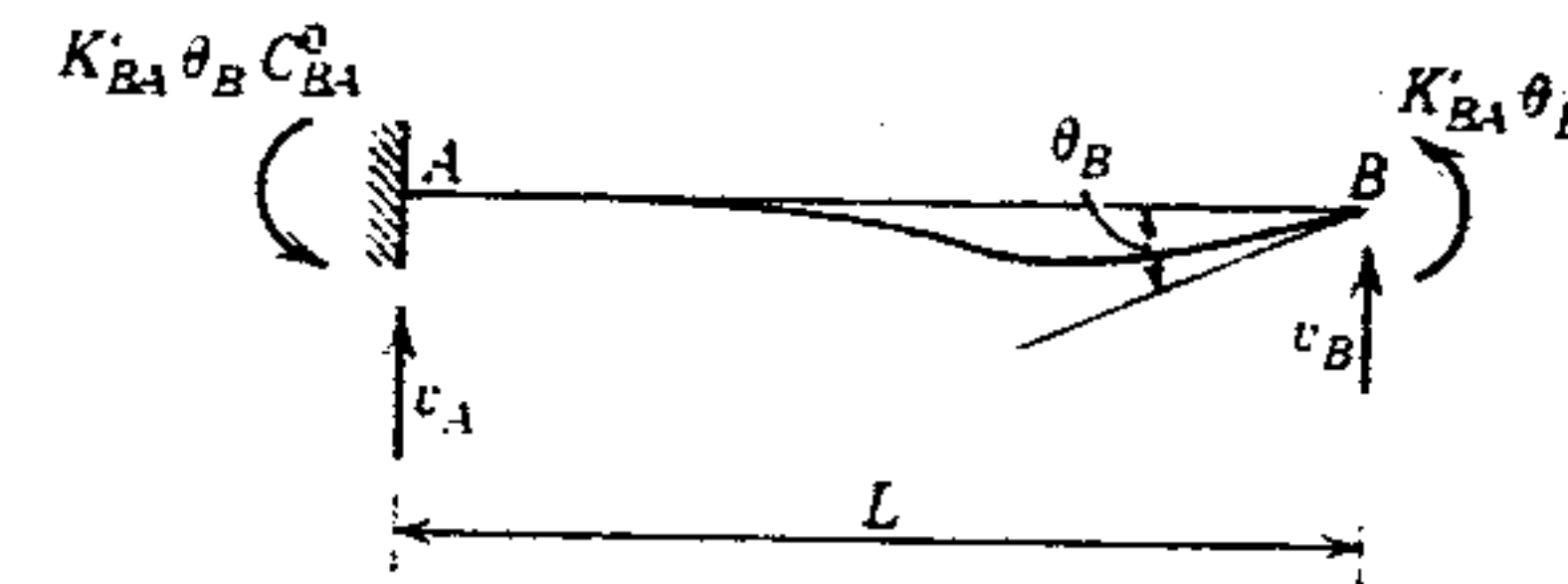


Figura 12.20 Acciones de extremos debidas al desplazamiento  $\theta_B$ .

laciones en cada extremo cuando se impone primero el desplazamiento (figura 12.21a). Este supuesto implica, dentro de las limitaciones de la teoría de deflexión pequeña de primer orden, que no se inducen reacciones de extremos a causa del desplazamiento. Sin embargo, el desplazamiento sí produce rotaciones  $\phi = -\delta_A/L$  en los extremos A y B. Como la definición de un coeficiente de rigidez requiere que sean nulos todos los desplazamientos, excepto el desplazamiento en cuestión, las rotaciones en A y B se deben reducir a cero. Esto se puede hacer suponiendo que ahora los extremos A y B están restringidos contra la rotación y haciendo rotar primero uno (figura 12.21b) y luego el otro (figura 12.21c) un ángulo  $\phi = +\delta_A/L$ . Estas rotaciones producen acciones de extremo que se suman (figura 12.21d) para formar las expresiones para las acciones de extremo inducidas por el desplazamiento  $\delta_A$ . En la figura 12.21b, los cortantes de extremos son

$$v_{A1} = \frac{K'_{AB} \phi (1 + C_{AB}^0)}{L} = -v_{B1}$$

y los cortantes de extremos en la figura 12.21c son

$$v_{A2} = \frac{K'_{BA} \phi (1 + C_{BA}^0)}{L} = -v_{B2}$$

Asimismo, las expresiones para las acciones de extremo inducidas a los desplazamientos  $\delta_A$  (figura 12.21d) son

$$m_A = \frac{(K'_{AB} + K'_{BA} C_{BA}^0) \delta_A}{L}$$

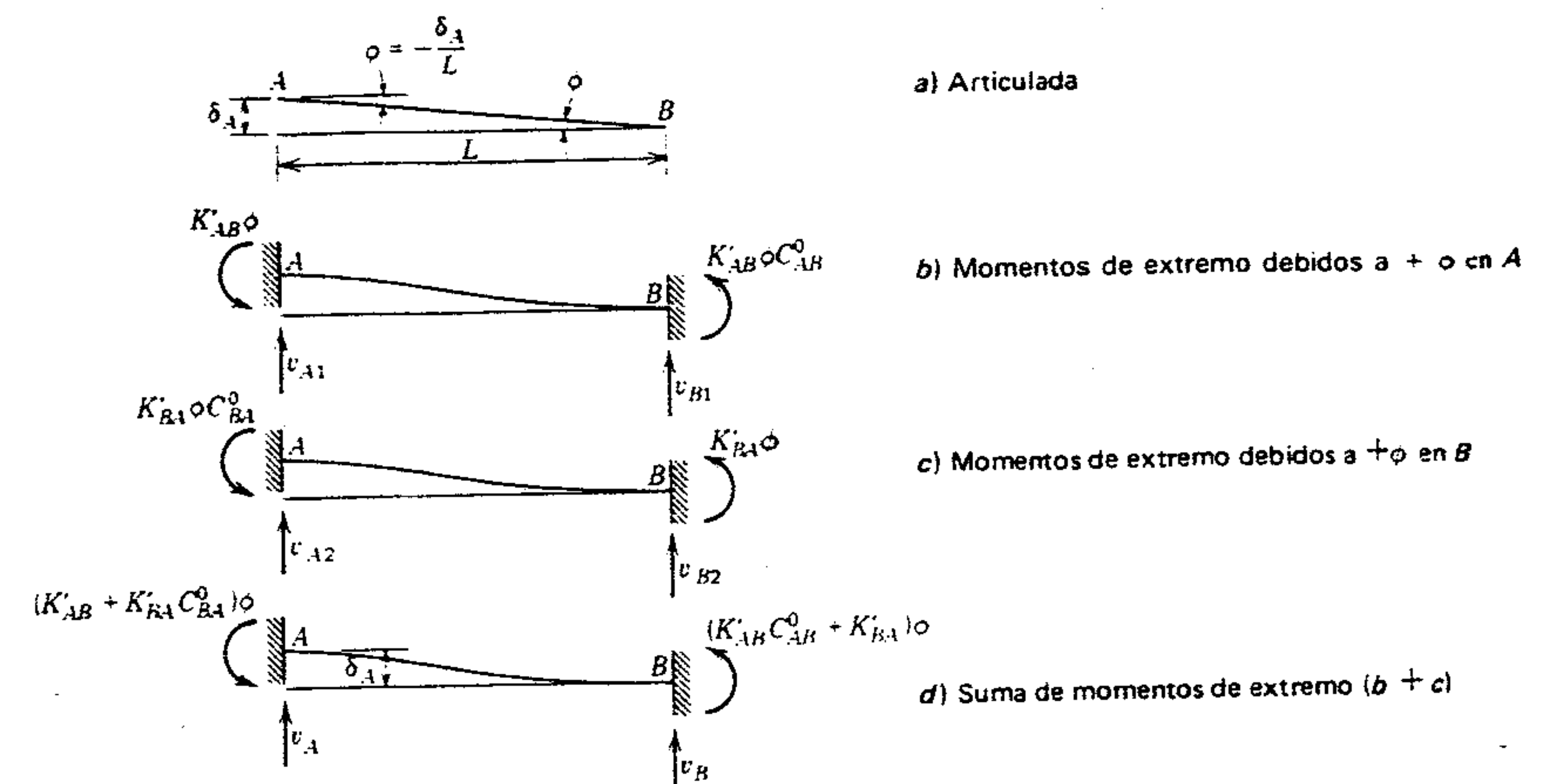


Figura 12.21 Acciones de extremos debidas al desplazamiento  $\delta_A$ .

$$m_B = \frac{(K'_{AB} C_{AB}^0 + K'_{BA}) \delta_A}{L}$$

$$v_A = \frac{(K'_{AB} + K'_{AB} C_{AB}^0 + K'_{BA} + K'_{BA} C_{BA}^0) \delta_A}{L^2}$$

$$v_B = - \frac{(K'_{AB} + K'_{AB} C_{AB}^0 + K'_{BA} + K'_{BA} C_{BA}^0) \delta_A}{L^2}$$

Las expresiones para las acciones de extremo debidas a un desplazamiento  $\delta_B$  en el extremo B (figura 12.22), obtenidas de manera similar a la descrita antes, son

$$m_A = - \frac{(K'_{AB} + K'_{BA} C_{BA}^0) \delta_B}{L}$$

$$m_B = - \frac{(K'_{AB} C_{AB}^0 + K'_{BA}) \delta_B}{L}$$

$$v_A = - \frac{(K'_{AB} + K'_{AB} C_{AB}^0 + K'_{BA} + K'_{BA} C_{BA}^0) \delta_B}{L^2}$$

$$v_B = \frac{(K'_{AB} + K'_{AB} C_{AB}^0 + K'_{BA} + K'_{BA} C_{BA}^0) \delta_B}{L^2}$$

Las líneas de acción para un elemento de marco plano se numeran como se ve en la figura 12.23; es decir,  $t_A$  y  $\xi_A$  se producen a lo largo de la línea de acción 1,  $v_A$  y  $\delta_A$  sobre la línea de acción 2, y  $m_A$  y  $\theta_A$  sobre la línea de acción 3. Las cantidades correspondientes en el extremo B ocurren a lo largo de las líneas de acción 4, 5 y 6, respectiva-

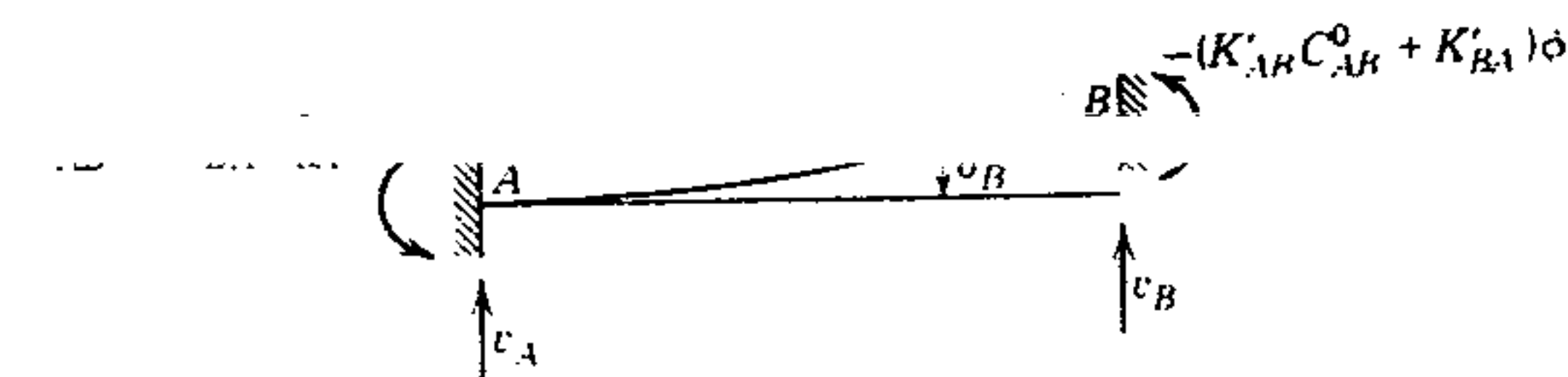


Figura 12.22 Acciones de extremos debidas al desplazamiento  $\delta_B$ .



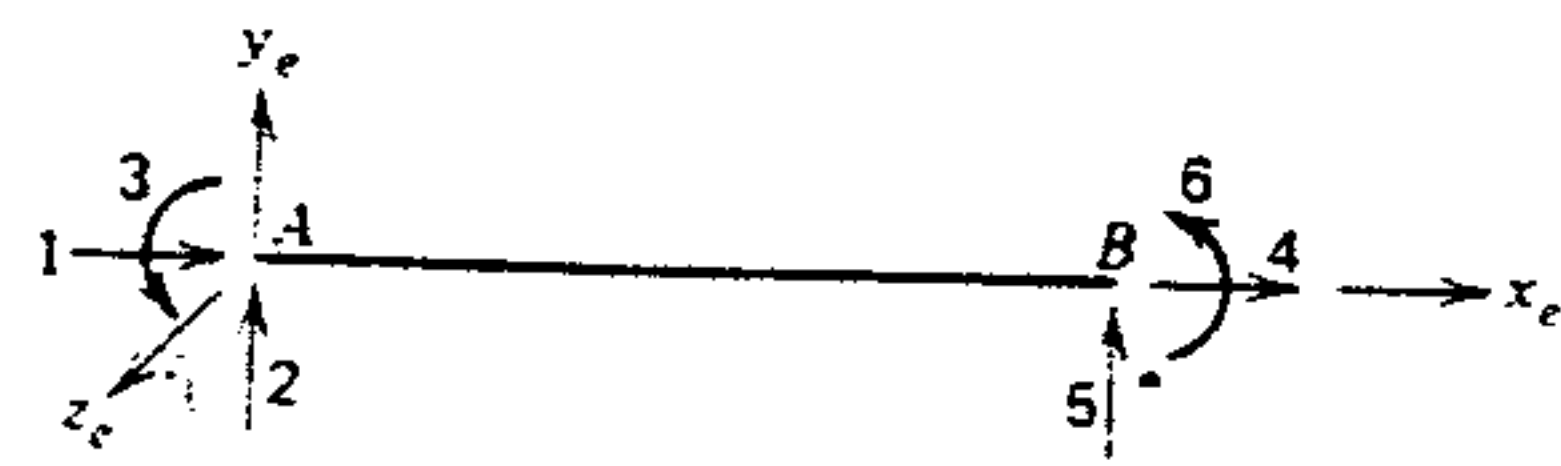


Figura 12.23 Notación para líneas de acción para un elemento de marco plano.

mente. Usando esta notación, las acciones de extremo resultantes de una rotación unitaria ( $\theta_A = 1$ ) en el extremo A se pueden identificar como sigue:

$$s_{23} = \frac{K'_{AB}(1 + C_{AB}^0)}{L}$$

$$s_{33} = K'_{AB}$$

$$s_{53} = -s_{23}$$

$$s_{63} = K'_{AB} C_{AB}^0$$

Estas acciones de extremo son los coeficientes de rigidez, y la notación del subíndice es la misma que la descrita para el método de rigidez fundamental (sección 12.5). En cada una de estas ecuaciones, los subíndices  $ij$  del parámetro  $s$  denotan la línea de acción  $i$  de la acción inducida y la línea de acción  $j$  del desplazamiento impuesto. Por tanto, el desplazamiento impuesto ( $\theta_A = 1$ ) se produce en la línea de acción 3, y las acciones inducidas  $v_A$ ,  $m_A$ ,  $v_B$  y  $m_B$  en las líneas de acción 2, 3, 5 y 6, respectivamente.

De la misma manera se obtienen los coeficientes de rigidez relacionados con los desplazamientos unitarios a lo largo de las líneas de acción 6, 2, y 5. Estos coeficientes se resumen como sigue.

1. Coeficientes de rigidez relacionados a un desplazamiento unitario a lo largo de la línea de acción 6 (es decir,  $\theta_B = 1$ ):

$$s_{26} = \frac{K'_{BA}(1 + C_{BA}^0)}{L}$$

$$s_{36} = K'_{BA} C_{BA}^0$$

$$s_{56} = -s_{26}$$

$$s_{66} = K'_{BA}$$

2. Coeficientes de rigidez relacionados con un desplazamiento unitario a lo largo de la línea de acción 2 (es decir,  $\delta_A = 1$ ):

$$s_{22} = \frac{K'_{AB}(1 + C_{AB}^0) + K'_{BA}(1 + C_{BA}^0)}{L^2}$$

$$s_{32} = \frac{K'_{AB} + K'_{BA} C_{BA}^0}{L}$$

$$s_{52} = -s_{22}$$

$$s_{62} = \frac{K'_{AB} C_{AB}^0 + K'_{BA}}{L}$$

3. Coeficientes de rigidez relacionados con un desplazamiento unitario a lo largo de la línea de acción 5 (es decir,  $\delta_B = 1$ ):

$$s_{25} = -\frac{K'_{AB}(1 + C_{AB}^0) + K'_{BA}(1 + C_{BA}^0)}{L^2}$$

$$s_{35} = -\frac{K'_{AB} + K'_{BA} C_{BA}^0}{L}$$

$$s_{55} = -s_{25}$$

$$s_{65} = -\frac{K'_{AB} C_{AB}^0 + K'_{BA}}{L}$$

Los coeficientes de rigidez desarrollados aquí, dentro de las limitaciones del análisis de primer orden, son independientes de los empujes  $t_A$  y  $t_B$  y los desplazamientos axiales  $\xi_A$  y  $\xi_B$ . Los efectos de los propios empujes y desplazamientos son idénticos a los desarrollados por el elemento de armadura plana que se vio en la sección anterior; por lo tanto, los resultados de ese desarrollo se pueden incorporar, sin modificación, directamente en la presente derivación. Cuando  $\xi_A = 1$ ,

$$s_{11} = \frac{AE}{L}$$

$$s_{41} = -\frac{AE}{L}$$

y cuando  $\xi_B = 1$ ,

$$s_{14} = -\frac{AE}{L}$$

$$s_{44} = \frac{AE}{L}$$

El elemento de marco plano tiene seis grados de libertad. Cada una de las líneas de acción se puede asociar con una fila y una columna de una matriz de  $6 \times 6$ ; por lo tanto, los coeficientes de rigidez se pueden situar en una matriz de rigidez del elemento en que se relacionan acciones de extremos con desplazamientos. Así,

$$\begin{bmatrix} s_{11} & & & s_{14} & & \\ & s_{22} & s_{23} & & s_{25} & s_{26} \\ & s_{32} & s_{33} & & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & & & s_{44} & & \\ & s_{52} & s_{53} & & s_{55} & s_{56} \\ & s_{62} & s_{63} & & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_A \\ \delta_A \\ \theta_A \\ \xi_B \\ \delta_B \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_A \\ v_A \\ m_A \\ t_B \\ v_B \\ m_B \end{bmatrix}$$

o bien, en notación matricial

$$S_e^k d_e^k = a_e^k$$

El índice superior  $k$  en esta ecuación se refiere al  $k$ -ésimo elemento del marco, mientras que el subíndice  $e$  al eje del elemento. Esta ecuación expresa las acciones de extremo  $t_A$ ,  $v_A$ ,  $m_A$ ,  $t_B$ ,  $v_B$  y  $m_B$  en términos de los desplazamientos de extremos  $\xi_A$ ,  $\delta_A$ ,  $\theta_A$ ,  $\xi_B$ ,  $\delta_B$  y  $\theta_B$ . La matriz  $s_e^k$  es la matriz de rigidez de un elemento típico de un marco plano con continuidad entre sus miembros. Los elementos de  $s_e^k$  son los coeficientes de rigidez que describen la rigidez del elemento.

La matriz de  $6 \times 6$  desarrollada arriba, con 20

sentando la matriz de rigidez de un elemento de marco, se puede simplificar aún más. Una relación básica conocida como ley de Maxwell de desplazamientos recíprocos establece que el desplazamiento en algún punto  $a$  producido por una carga uni-

taria aplicada en algún punto  $b$  debe ser igual al desplazamiento en el punto  $b$  producido por la carga unitaria aplicada en el punto  $a$ . Aplicando esta ley a los coeficientes derivados, es claro que  $s_{ij} = s_{ji}$  ( $i \neq j$ ) y que la matriz de rigidez debe ser simétrica respecto a la diagonal principal (izquierda superior a derecha inferior).

La igualdad  $s_{32} = s_{23}$ , resultante de la aplicación de la ley de Maxwell, produce una relación que se puede utilizar para simplificar algunas de las expresiones encontradas en el desarrollo corriente, y con frecuencia es útil cuando se analizan estructuras que contienen miembros no prismáticos por el método de distribución de momentos. Esta relación expresa el requisito de que  $K'_{AB}(C_{AB}^0) = K'_{BA}(C_{BA}^0)$ .

Por la aplicación de la ley de Maxwell se reduce en siete el número de coeficientes de rigidez independientes, mientras que las igualdades previamente identificadas ( $s_{53} = -s_{23}$ ,  $s_{56} = -s_{26}$ ,  $s_{52} = -s_{22}$ , y  $s_{55} = -s_{25}$ ) reducen en cuatro el número de cantidades independientes. Además, se demostró que  $s_{14} = -s_{11}$  y  $s_{44} = s_{11}$ , lo cual reduce en dos las demás cantidades independientes; por lo tanto, solamente quedan siete cantidades de rigidez independientes. Se pueden resumir como sigue: Si la cantidad de rigidez por desplazamiento axial se identifica como  $k_a$ , y las otras seis cantidades independientes se identifican por los símbolos  $k_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ), la matriz de rigidez del elemento se puede expresar como

$$s_e^k = \begin{bmatrix} k_a & & & -k_a & & \\ & k_1 & k_2 & & -k_1 & k_3 \\ & k_2 & k_4 & & -k_2 & k_5 \\ -k_a & & & k_a & & \\ & -k_1 & -k_2 & & k_1 & -k_3 \\ & k_3 & k_5 & & -k_3 & k_6 \end{bmatrix}$$

donde  $k_a$  = cantidad de rigidez por desplazamiento axial, y

$$k_1 = \frac{K'_{AB}(1 + 2C_{AB}^0) + K'_{BA}}{L^2}$$



$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{K'_{AB}(1 + C^0_{AB})}{L} \\ \kappa_3 &= \frac{K'_{AB}C^0_{AB} + K'_{BA}}{L} \\ \kappa_4 &= K'_{AB} \\ \kappa_5 &= K'_{AB}C^0_{AB} \\ \kappa_6 &= K'_{BA} \end{aligned}$$

En la sección 10.6 se describe y desarrolla el factor de rigidez  $K'$  y el factor de transporte  $C^0$  de un elemento prismático, es decir,  $K' = 4EI/L$  y  $C^0 = \frac{1}{2}$ . Así, para un elemento prismático,  $K'_{AB} = K'_{BA}$  y  $C^0_{AB} = C^0_{BA}$ . Sustituyendo estas cantidades y términos en las expresiones derivadas,  $\kappa_1$  a  $\kappa_6$  arriba, y notando que  $\kappa_a = AE/L$ , la matriz de rigidez del elemento se reduce a la forma indicada abajo.

$$s_e^k = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & & & -\frac{AE}{L} & & \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & & & \frac{AE}{L} & & \\ & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Se debe remarcar que esta matriz es válida solamente para elementos prismáticos de marco.

## 12.9 MATRIZ DE ROTACIÓN

En las secciones 12.7 y 12.8 se presentó el concepto de un juego de ejes coordinados asociados con

cada elemento de una estructura (ejes orientados al elemento o ejes del elemento). La orientación de cada uno de estos juegos de ejes depende de la orientación del elemento con que están relacionados. En la sección 12.11 se trató el concepto de otro juego de ejes asociados con la estructura completa (*ejes orientados a la estructura o ejes de la estructura*) y cuya orientación está fija respecto a la estructura. Aquí, el propósito es relacionar la acción de los extremos y las componentes del desplazamiento, que están orientadas con respecto a los ejes del elemento, con las cantidades correspondientes que están orientadas respecto a los ejes de la estructura. En general, para armaduras planas y marcos planos, el eje de elemento  $z_e$  coincide con el eje de la estructura  $z_s$ , mientras que los ejes del elemento  $x_e$  y  $y_e$  se rotan con frecuencia en un ángulo  $\alpha$  con respecto a los ejes de la estructura  $x_s$  y  $y_s$ . Esta relación se ilustra en la figura 12.24.

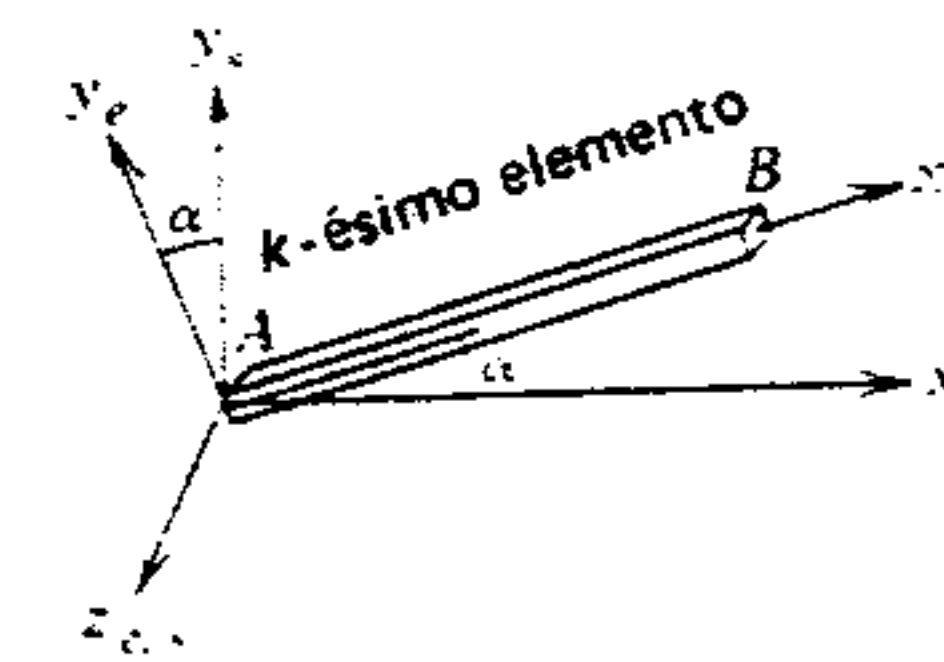


Figura 12.24 Relación de un conjunto de ejes de elemento con los ejes de la estructura.

A. Los símbolos  $a_B^k$  y  $d_B$  representan vectores correspondientes en el extremo B. Igual que antes, el índice superior  $k$  se refiere al  $k$ -ésimo elemento. Cuando se refiere a los ejes del elemento, las coordenadas de  $a_i^k$  son  $t_i$  y  $v_i$  (representando acciones de extremos), mientras que las coordenadas de  $d_i$  son  $\xi_i$  y  $\delta_i$  (representando desplazamientos de extremos). Cuando se refieren a los ejes de la estructura, las coordenadas correspondientes de  $a_i^k$  serán  $T_i$  y  $V_i$  y las de  $d_i$  serán  $\Xi_i$  y  $\Delta_i$ ; sin embargo, para distinguir entre coordenadas pertenecientes a los ejes del elemento y las pertenecientes a los ejes de la estructura, los vectores  $a_i^k$  y  $d_i$  se representarán por los símbolos  $A_i^k$  y  $D_i$ , respectivamente, cuando las coordenadas que representen sean las de los ejes de la estructura. Debe recordarse que el vector representado por  $A_i^k$  es el mismo vector representado por  $a_i^k$  y que el vector representado por  $D_i$  es el mismo vector representado por  $d_i$ . Esto se resume como sigue:

Vector	Coordenadas de ejes del miembro	Coordenadas de ejes de la estructura
$a_i^k$ o $A_i^k$	$\begin{bmatrix} t_i \\ v_i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_i \\ V_i \end{bmatrix}$
	$(i = A \text{ o } B)$	
$d_i$ o $D_i$	$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \delta_i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Xi_i \\ \Delta_i \end{bmatrix}$
	$(i = A \text{ o } B)$	

El propósito de esta notación es representar coordenadas particulares que se refieran ya sea a los ejes del elemento o a los de la estructura. Esta notación es conveniente cuando se efectúan varias de las operaciones del método de análisis de desplazamiento. Estas operaciones, que se desarrollan en secciones subsecuentes, implican con frecuencia un cambio de coordenadas que se refieren a un juego de ejes a coordenadas que se refieren a otro juego. Este cambio se debe hacer eficientemente utilizando una matriz de rotación. Las coordenadas referidas a un juego de ejes, al multiplicarse por una matriz de rotación, se cambian a coordenadas referidas a otro juego de ejes.

Se incluye aquí el desarrollo de matrices de rotación (empleando el tratamiento habitual en textos de matemáticas básicas) para proporcionar un estudio completo del método de análisis de la rigidez.

En la figura 12.26 se ilustra un juego de ejes de estructura o globales y un juego de ejes de elemen-

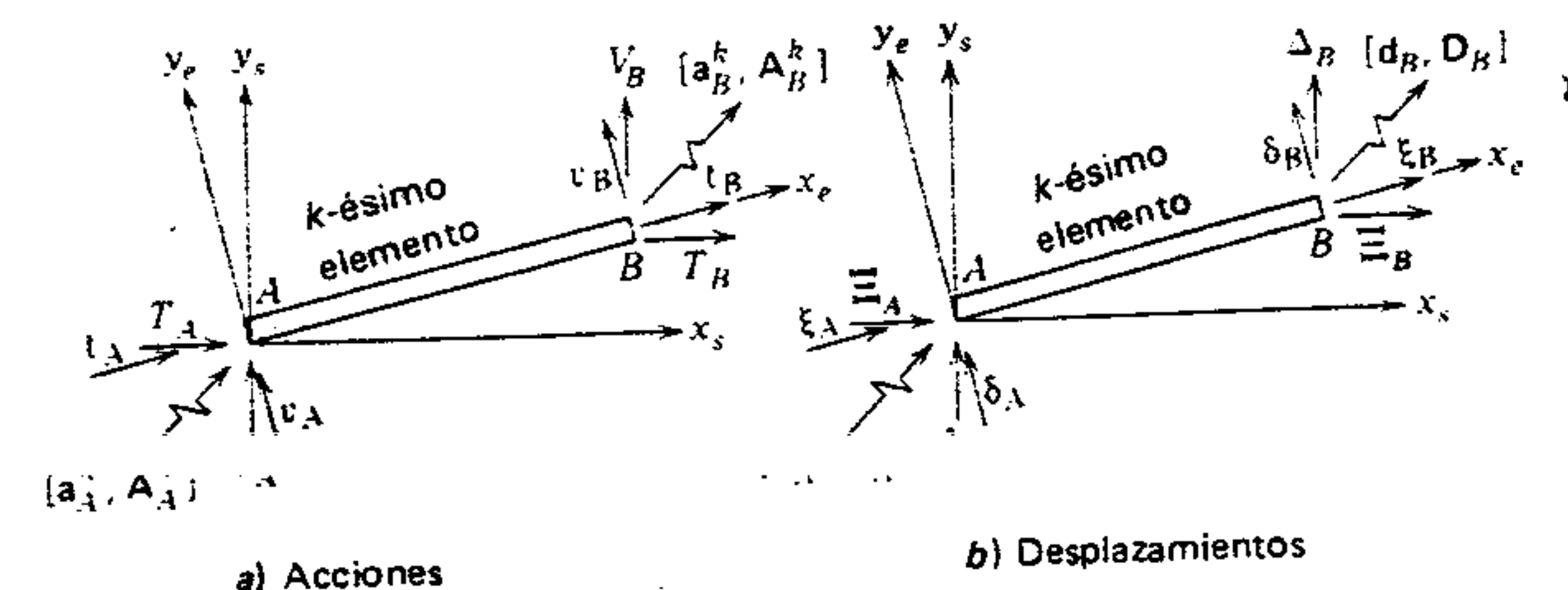


Figura 12.25 Acciones y desplazamientos de extremo representados como vectores.



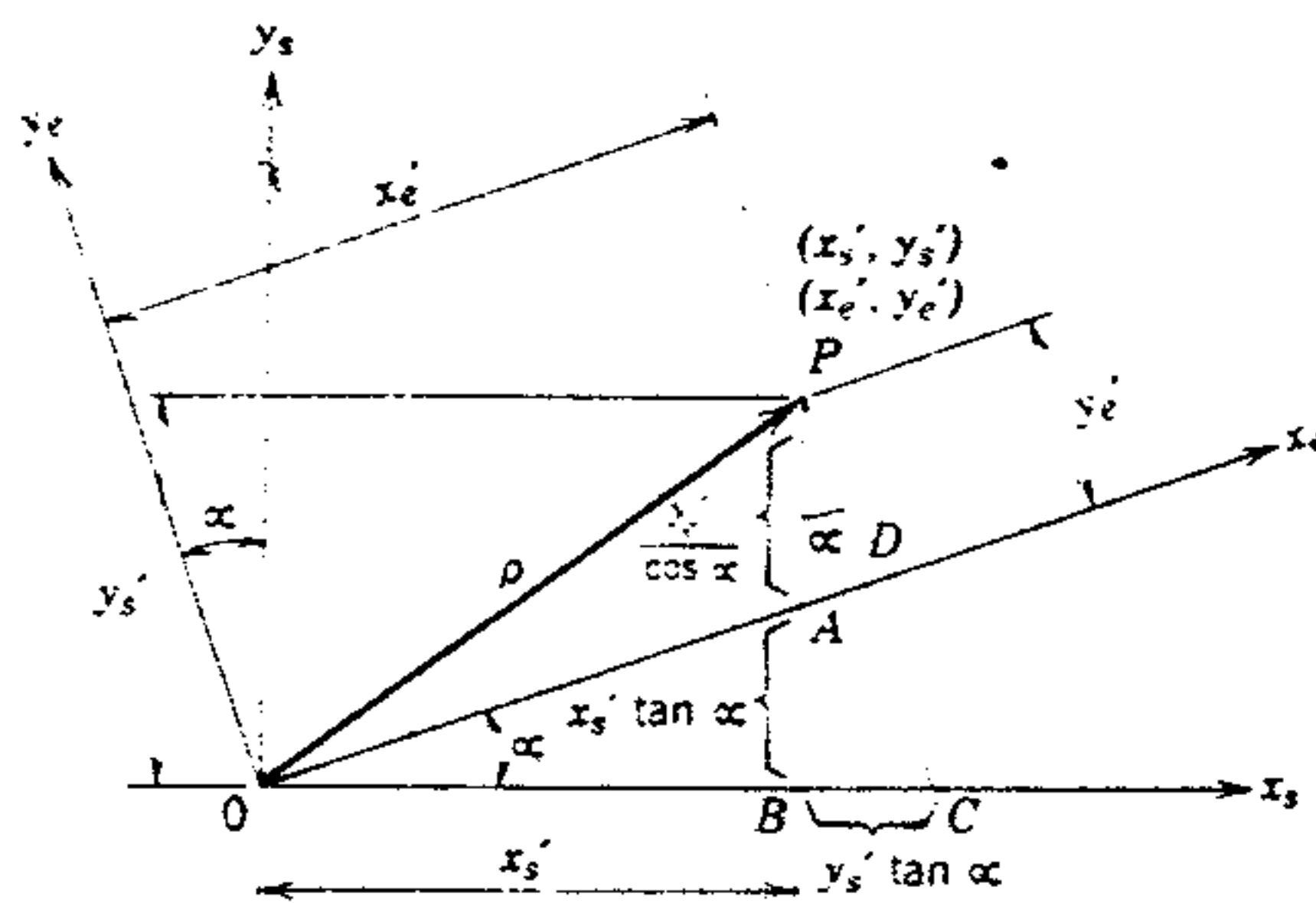


Figura 12.26 Relación de coordenadas de ejes del elemento con las coordenadas del eje de la estructura.

to o locales, rotados en un ángulo  $\alpha$  con respecto a los ejes globales. El eje  $z$  tanto para los ejes locales como para los globales coinciden y son perpendiculares al papel en el origen; por lo tanto, no se ilustran. Se muestra un vector  $\rho$  saliendo del origen y terminando en un punto  $P$  que tiene las coordenadas  $x_s'$  y  $y_s'$  relativos a los ejes globales y las coordenadas  $x_e'$  y  $y_e'$  relativos a los ejes locales. Se han trazado las líneas  $PAB$  (perpendiculares al eje global  $x_s$ ) y  $PDC$  (perpendiculares al eje  $x_e$  local) creando el ángulo  $\alpha$  en el punto  $P$ .

Por geometría se pueden determinar las siguientes relaciones. Longitud de línea  $PA = y_e'/\cos \alpha$ ,  $AB = x_s' \tan \alpha$ , y  $BC = y_s' \tan \alpha$ . Usando estas relaciones, las coordenadas relativas a un eje se pueden expresar en términos de coordenadas relativas a los otros ejes. Por tanto,

$$x_e' = \cos \alpha (x_s' + y_s' \tan \alpha)$$

de donde

$$x_e' = x_s' \cos \alpha + y_s' \sin \alpha$$

asimismo

$$y_s' = \frac{y_e'}{\cos \alpha} + x_s' \tan \alpha$$

de donde

$$y_e' = -x_s' \sin \alpha + y_s' \cos \alpha$$

Estas ecuaciones se pueden expresar matricialmente como sigue:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s' \\ y_s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e' \\ y_e' \end{bmatrix}$$

donde la matriz

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

es la matriz de rotación que transforma las coordenadas de los ejes globales a coordenadas de ejes locales.

Y al contrario, la matriz de rotación que transforma coordenadas de ejes locales a coordenadas de ejes globales es la inversa de la matriz  $R$ .

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Los elementos de armaduras planas tienen dos coordenadas de acciones ( $\{t_i, v_i\}$ ) y dos coordenadas de desplazamientos ( $\{\xi_i, \delta_i\}$ ) en cada extremo de un elemento; por lo tanto, la matriz de rotación  $R$  se puede usar sin modificación para transformar coordenadas de ejes de estructura a ejes del elemento, es decir

$$a_i^k = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (i = A \text{ o } B)$$

y

$$d_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_i \\ \Delta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \delta_i \end{bmatrix} \quad (i = A \text{ o } B)$$

Los elementos de marco plano, por otra parte, tienen tres coordenadas de acciones ( $\{t_i, v_i, m_i\}$ ) y tres coordenadas de desplazamientos ( $\{\xi_i, \delta_i, \theta_i\}$ ) en cada extremo del elemento. Por lo tanto, la matriz de rotación  $R$  se debe modificar antes de usarla. Se observa que las coordenadas de fuerza axial y de fuerza cortante ( $\{t_i, v_i\}$ ), y las coordenadas de desplazamiento axial y desplazamiento transversal ( $\{\xi_i, \delta_i\}$ ), se transforman de la misma manera que las correspondientes coordenadas de acción de armadura plana y de desplazamiento, mientras que las coordenadas de momento y rotación no varían (es decir, no sufren cambio) con respecto a una rotación de los ejes coordenados. Estos requisitos se satisfacen si la matriz de rotación se modifica agregándole una fila y una columna adicionales, cuyos elementos son nulos excepto el último que tiene el valor de uno. Así:

$$a_i^k = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ V_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_i \\ v_i \\ m_i \end{bmatrix} \quad (i = A \text{ o } B)$$

$$\text{o } RA_i^k = a_i^k$$

$$d_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_i \\ \Delta_i \\ \Theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \delta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (i = A \text{ o } B)$$

$$\text{o } RD_i = d_i$$

Las matrices de transformación tanto de los elementos de armadura plana como de los de marco plano se representan por el símbolo  $R$ ; sin embargo, las matrices reales que se usan son las dadas en las expresiones anteriores.

## ELEMENTO TRANSFORMADA

En las secciones anteriores se presentaron las matrices de rigidez para un elemento típico de una armadura y para un marco. Ambas matrices se desarrollaron en función del juego de ejes coordenados

locales, y expresan las acciones de extremos sobre el elemento en términos de los desplazamientos de extremos. Asimismo, en la sección 12.9 se desarrolló una matriz de rotación que se puede usar para cambiar las acciones y los desplazamientos de extremos referidos a los ejes locales a los ejes de la estructura o globales. El objetivo aquí es desarrollar un medio para transformar matrices de rigidez referidas a los ejes coordenados del elemento en matrices referidas a los ejes coordenados de la estructura. Esta forma se denomina matriz de rigidez de elemento transformada. Esta matriz transformada se usa para formular convenientemente las ecuaciones de equilibrio para la estructura.

Para fácil consulta se presenta aquí de nuevo la matriz de rigidez del elemento de una viga que se vio en la sección 12.8, referida a los ejes del elemento.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{22} & S_{23} & S_{14} & S_{25} & S_{26} \\ & S_{32} & S_{33} & & S_{35} & S_{36} \\ \hline S_{41} & & & S_{44} & & \\ & S_{52} & S_{53} & & S_{55} & S_{56} \\ & S_{62} & S_{63} & & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_A \\ \delta_A \\ \theta_A \\ \xi_B \\ \delta_B \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_A \\ v_A \\ m_A \\ t_B \\ v_B \\ m_B \end{bmatrix}$$

Para desarrollar un procedimiento para transformar matrices de rigidez de elemento, es conveniente dividir las matrices con la línea punteada que se muestra. Cada una de las cuatro submatrices pertenece a las acciones en el extremo  $A$  o  $B$  debidas a desplazamientos en el extremo  $A$  o  $B$ . Por ejemplo, la submatriz de tres por tres de la parte superior derecha pertenece a acciones inducidas a lo largo de las líneas de acción 1, 2 y 3 (todas en el extremo  $A$ ) debidas a los desplazamientos unitarios 4, 5 y 6 (todos en el extremo  $B$ ). Estas se identifican con los subíndices para los elementos. Se pueden hacer descripciones similares para las matrices de desplazamientos y momentos en forma de notación de matriz así:

$$\begin{bmatrix} S_{AA}^k & S_{AB}^k \\ S_{BA}^k & S_{BB}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_A \\ d_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_A^k \\ a_B^k \end{bmatrix}$$



donde:

$a_A^k$  = vector de acciones en el extremo A ( $k$ -ésimo elemento).

$a_B^k$  = vector de acciones en el extremo B ( $k$ -ésimo elemento).

$s_{AA}^k$  = submatriz que relaciona las acciones en el extremo A con los desplazamientos en el extremo A ( $k$ -ésimo elemento).

$s_{AB}^k$  = submatriz que relaciona las acciones en el extremo A con los desplazamientos en el extremo B ( $k$ -ésimo elemento).

$s_{BB}^k$  = submatriz que relaciona las acciones en el extremo B con los desplazamientos en el extremo B ( $k$ -ésimo elemento).

$s_{BA}^k$  = submatriz que relaciona las acciones en el extremo B con los desplazamientos en el extremo A ( $k$ -ésimo elemento).

$d_A$  = vector de desplazamientos en el extremo A.  
 $d_B$  = vector de desplazamientos en el extremo B.

tación R. Con la notación que se acaba de presentar (por ejemplo, las letras en negritas se refieren a los ejes de la estructura), estas ecuaciones se pueden expresar en términos que se refieran a los ejes de la estructura:

$$RA_A^k = s_{AA}^k(RD_A) + s_{AB}^k(RD_B)$$

$$RA_B^k = s_{BA}^k(RD_A) + s_{BB}^k(RD_B)$$

Para resolver  $A_i$  ( $i = A$  o  $B$ ) en cada una de las anteriores, es necesario premultiplicar ambos lados de la ecuación por la inversa de R (Apéndice C), es decir,

$$A_A^k = [R^{-1}s_{AA}^k R]D_A + [R^{-1}s_{AB}^k R]D_B$$

$$A_B^k = [R^{-1}s_{BA}^k R]D_A + [R^{-1}s_{BB}^k R]D_B$$

$$\begin{bmatrix} A_A^k \\ A_B^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{AA}^k & s_{AB}^k \\ s_{BA}^k & s_{BB}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \end{bmatrix}$$

El desarrollo se continúa expandiendo esta ecuación (multiplicación de matriz como se explica en el Apéndice C). Así

Esta ecuación también se puede expresar en la forma:

$$A_s^k = S_s^k D_s$$

donde  $A_s^k$  es el vector de las componentes de acción en el extremo y  $D_s$  es el vector de las componentes de desplazamiento de extremo referidos a los ejes de la estructura. El término  $S_s$  es la matriz de rigidez del elemento transformado y se expresa como

$$S_s^k = \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{AA}^k & s_{AB}^k \\ s_{BA}^k & s_{BB}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{AA}^k & S_{AB}^k \\ S_{BA}^k & S_{BB}^k \end{bmatrix}$$

Los términos de acción y desplazamiento en estas ecuaciones se refieren a los ejes del elemento. En la sección 12.9 se mostró que los términos como éstos se pueden cambiar para referirlos a los ejes de la estructura multiplicándolos por una matriz de ro-

Representa las acciones de extremos sobre un elemento típico en términos de los desplazamientos de extremos cuando tanto las coordenadas de acción como de desplazamiento se refieren a los ejes de la estructura.

Tomando la matriz de rigidez para un elemento de armadura articulada (como se vio en la sección 12.7) y premultiplicando por la inversa de la matriz de rotación y posmultiplicando por la matriz de rotación; es decir,

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

producirá la matriz transformada de rigidez del elemento.

$$S_s^k = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & -S_1 & -S_2 \\ & S_3 & -S_2 & -S_3 \\ & & S_1 & S_2 \\ \text{(simétrica)} & & & S_3 \end{bmatrix}$$

y

en donde

$$S_1 = \left(\frac{AE}{L}\right)(\cos^2 \alpha)$$

$$S_2 = \left(\frac{AE}{L}\right)(\sin \alpha)(\cos \alpha)$$

$$S_3 = \left(\frac{AE}{L}\right)(\sin^2 \alpha)$$

De manera similar, la matriz de rigidez para un elemento de marco plano (como se vio en la sección 12.8) se puede premultiplicar por la matriz  $R^{-1}$  y posmultiplicar por la matriz R para producir la matriz transformada de rigidez para un elemento prismático de marco plano. Esta matriz es

$$S_s^k = \begin{bmatrix} S_4 & S_5 & -S_4 & -S_5 & -S_6 & -S_7 \\ & S_6 & S_3 & -S_5 & S_7 \\ & & S_1 & S_2 & S_3 \\ & & & S_4 & -S_5 \\ \text{(simétrica)} & & & & S_6 \end{bmatrix}$$

en donde

$$S_1 = k_a \cos^2 \alpha + k_1 \sin^2 \alpha$$

$$S_2 = (k_a - k_1)(\sin \alpha)(\cos \alpha)$$

$$S_3 = k_2 \sin \alpha$$

$$S_4 = k_a \sin^2 \alpha + k_1 \cos^2 \alpha$$

$$S_5 = k_2 \cos \alpha$$

$$S_6 = k_4$$

$$S_7 = k_5$$

$$k_a = \frac{EA}{L}$$

$$k_1 = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_2 = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_4 = \frac{4EI}{L}$$

$$k_5 = \frac{2EI}{L}$$

## PROBLEMAS

1. Formar la matriz de rigidez del elemento y la matriz transformada de rigidez del elemento para un elemento de armadura plana articulada con una longitud de 6 pies y compuesta de dos ángulos de  $3 \times 3 \times \frac{1}{4}$  pulgadas de acero de A36. Los ejes del elemento se giraron un ángulo de  $-36^\circ$  con respecto a los ejes de la estruc-



- tura. Trazar los dos juegos de ejes y mostrar la posición del elemento.
- Formar la matriz de rigidez de elemento y la matriz transformada de rigidez de elemento para un elemento de marco plano con una longitud de 8 pies 4 pulgadas. El elemento es una W 10 X 39 de acero A36, orientado de modo que el flexionante se produce respecto al eje mayor del elemento. Los ejes del elemento se han girado un ángulo de  $110^\circ$  con respecto a los ejes de la estructura. Trazar los dos juegos de ejes y mostrar la posición del elemento.
  - Calcular las acciones de extremo sobre el elemento del marco plano del problema 2 si los desplazamientos de extremo son:

$$\begin{aligned} \xi_A &= 0 & \xi_B &= -0.0032 \\ \delta_A &= 0 & \delta_B &= -0.2501 \\ \theta_A &= -0.0035 & \theta_B &= -0.0005 \end{aligned}$$

- (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)
- Convertir las acciones de extremo del problema 3 a ejes de estructura. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)

### 12.11 DESCRIPCIÓN ANALÍTICA DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL

Para propósitos de análisis, un marco estructural se divide en componentes denominados "elementos" y "juntas". Un elemento de armadura plana articulada se define como cualquier miembro a tensión o compresión de una armadura, y un elemento de marco plano se define como cualquier viga, columna o miembro secundario de un marco. A menos que los elementos de una armadura estén sujetos de modo que formen triángulos estables, el modelo

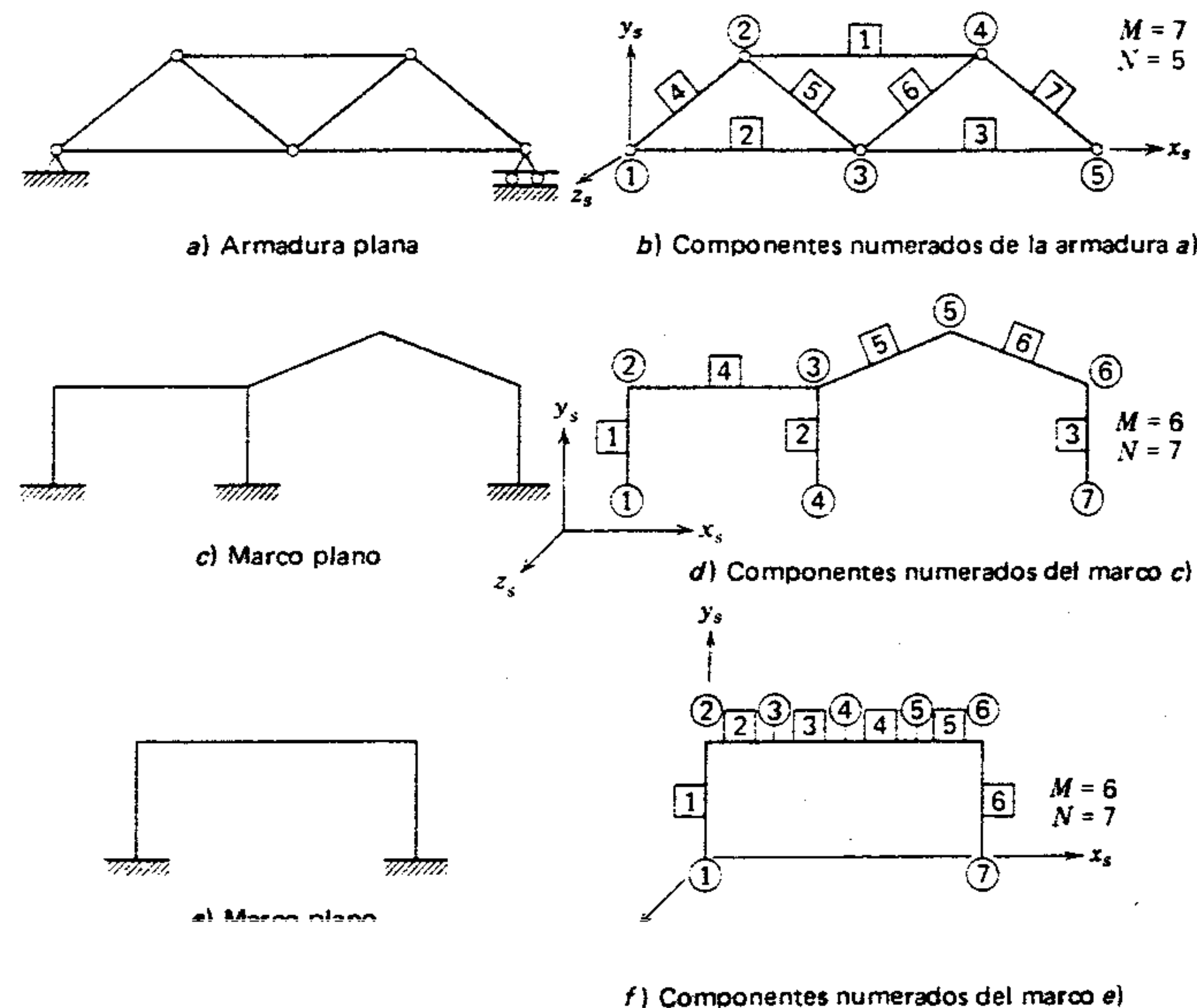


Figura 12.27 División de estructuras de marcos en componentes de "elemento" y de "joint".

estructural es inestable y no es posible hacer un análisis lineal; por lo tanto, los miembros de una armadura no se pueden dividir para analizarlos (por ejemplo, los elementos de una armadura deben corresponder a los miembros reales de una armadura). Sin embargo, los elementos de un marco no están limitados por este requisito de estabilidad; por lo tanto, los miembros de marcos se pueden subdividir en tantos elementos como sea conveniente para el análisis. Una "joint" se define como la unión de dos o más elementos.

Puesto que toda la información que se procesa debe estar digitalizada cuando se emplea el método de desplazamiento, se debe implantar un sistema en que se asignen números con significados específicos asociados con la estructura. Con frecuencia estos números están interrelacionados y no deben ser ambiguos. Los elementos se numeran en serie 1, 2, 3, ...,  $M$ , donde  $M$  es igual al número total de elementos, y las juntas se numeran en serie 1, 2, 3, ...,  $N$ , donde  $N$  es igual al número total de juntas. En la figura 12.27 se ilustra la manera en que tres diferentes estructuras de marco se dividen en componentes analíticos. Los números de las juntas se distinguen mediante pequeños círculos que los encierran, y los números de los elementos están encerrados en pequeños cuadrados. Debe notarse que las juntas se han situado arbitrariamente a lo largo del miembro horizontal del marco de portal de la figura 12.27f. Esta opción se podría usar, por ejemplo, para considerar las cargas concentradas como cargas sobre juntas o para obtener desplazamientos intermedios o resultantes de esfuerzos.

La geometría de una estructura se describe en términos de las coordenadas de las juntas referidas a un juego de ejes coordenados denominados ejes "orientados a la estructura" o ejes de la "estructura", (sección 12.9). Los ejes de la estructura están marcados con los símbolos  $x_s$ ,  $y_s$  y  $z_s$ . Este conjunto de ejes se asocia con la estructura completa, y su posición y orientación están fijas con respecto a la estructura. La localización del origen y la orientación de los ejes son arbitrarias y se pueden elegir convenientemente de modo que todas las coordenadas de las juntas sean positivas y fáciles de determinar. Normalmente se supone que una

estructura plana está en el plano  $x_s$ - $y_s$ . En la figura 12.27 se dan ejemplos de ejes de estructuras.

Un elemento se define de modo único especificando su número y los números de las juntas a que está conectado. Las características estructurales de los elementos se describen en términos de momento de inercia ( $I$ ), área transversal ( $A$ ) y módulo de elasticidad ( $E$ ). También se necesita adoptar un sistema que identifique de modo único todas las líneas de acción en todas las juntas y las enlace a las juntas en que ocurren. Se requieren dos líneas de acción de translación "globales" u "orientadas a la estructura", seleccionadas para que correspondan a las direcciones  $x_s$  y  $y_s$ , en cada junta para identificar las fuerzas ( $\{T_i, v_i\}$ ) y los desplazamientos lineales ( $\{\xi_i, \Delta_i\}$ ) de los extremos de los elementos de la estructura. Además, si la estructura es un marco plano, se requiere una línea de acción rotacional, seleccionada para corresponder a la rotación positiva respecto al eje  $z_s$ , en cada junta para identificar los momentos ( $\{M_i\}$ ) y los desplazamientos angulares ( $\{\theta_i\}$ ) de los extremos de los elementos.<sup>5</sup>

Para identificar las líneas globales de acción en cada junta, es necesario numerarlas de alguna manera sistemática de modo que cada línea de acción en cada junta tenga un número único. Se han propuesto varios esquemas, cada uno con una o más características convenientes, y se pueden usar muy bien en conjunción con el método de análisis de desplazamiento. De éstos, el esquema que parece más adecuado para la computación automática es el que enlaza directamente el número de identificación con el número de la junta. En este esquema, las líneas de acción de translación, en cualquier junta  $j$  en las direcciones  $x_s$  y  $y_s$ , se identifican por los números.

$$[2j - (\beta - 1)] \text{ para } x_s$$

<sup>5</sup> Usualmente los desplazamientos angulares de los extremos de elementos de armadura no están determinados; por lo tanto, estas determinaciones no se incluyen en el procedimiento que se presenta aquí.



y

$$[\beta j - (\beta - 2)] \text{ para } y_s.$$

en donde  $\beta = 2$  para armaduras y  $\beta = 3$  para marcos. La línea de acción rotacional en cualquier junta  $j$  de un marco plano se identifica con el número  $3j$ . En la figura 12.28 se dan ejemplos de líneas globales de acción. Mediante el esquema de numeración descrito aquí, los componentes de acción y desplazamiento en cualquier junta  $j$  se pueden identificar como sigue:

Dirección	Componentes de acción		Componentes de desplazamiento	
	Armadura	Marco	Armadura	Marco
$x_s$	$T_i = A_{[2j-1]}^k$	$T_i = A_{[3j-2]}^k$	$\Xi_i = D_{[2j-1]}$	$\Xi_i = D_{[3j-2]}$
$y_s$	$V_i = A_{[2j]}^k$	$V_i = A_{[3j-1]}^k$	$\Delta_i = D_{[2j]}$	$\Delta_i = D_{[3j-1]}$
rotación	Ninguna	$M_i = A_{[3j]}^k$	Ninguna	$\Theta_i = D_{[3j]}$

En las ecuaciones de arriba (igual que antes), el índice superior  $k$  denota el número del  $k$ -ésimo elemento, y el subíndice  $i$  denota el extremo "A" o

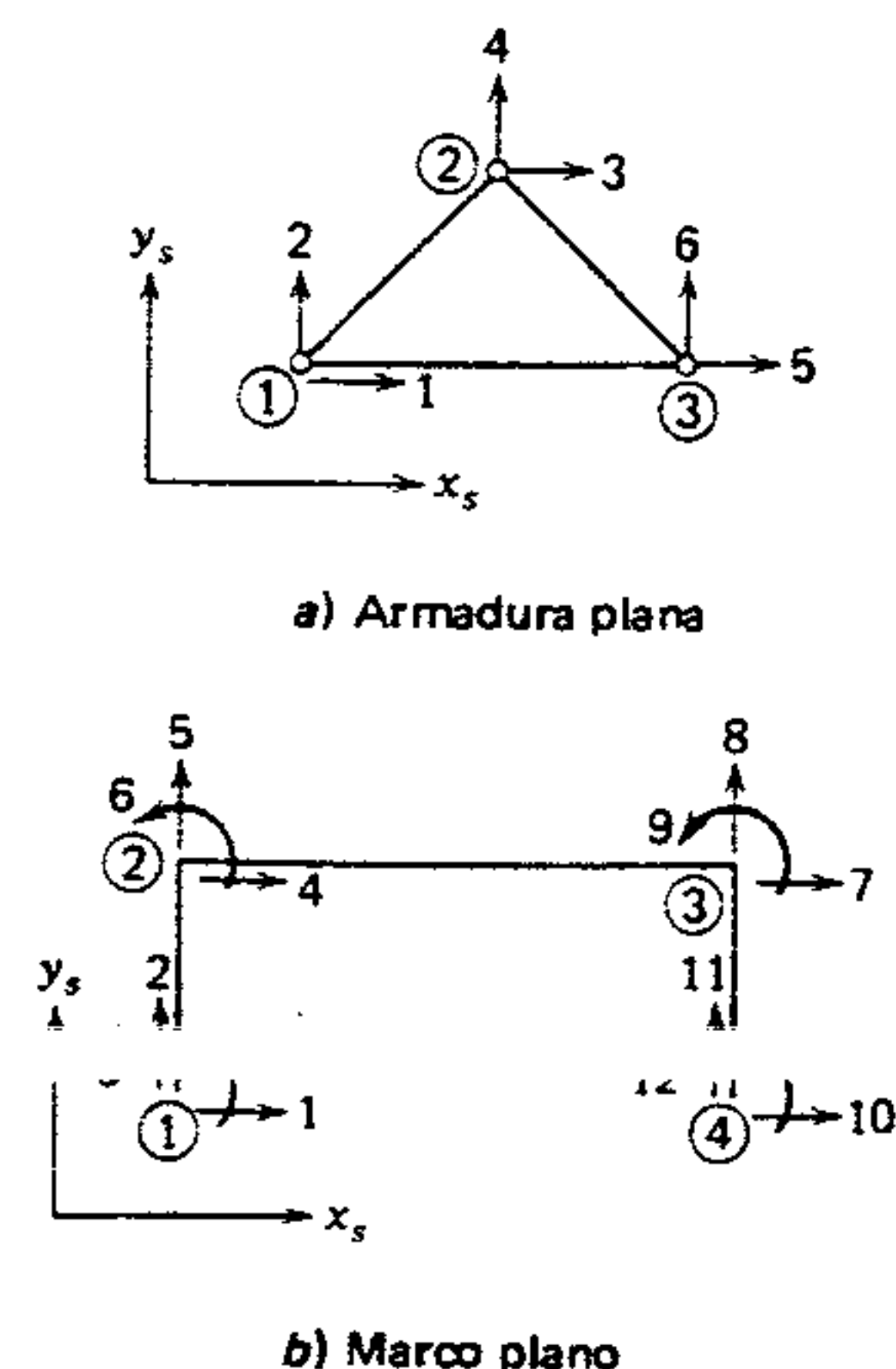


Figura 12.28 Ejemplos de líneas globales de acción.

el extremo "B" del elemento, el cual se puede identificar convenientemente sustituyendo por  $A$  o  $B$  el número de junta correspondiente. Las expresiones dentro del corchete [ ] designan la línea global de acción a lo largo de la cual ocurre la componente de acción o de desplazamiento. Nótese que todos los elementos que llegan a una junta siempre tienen las mismas componentes de desplazamiento pero, en general, tienen diferentes componentes de acción.

## 12.12 FORMULACIÓN DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA

Cada junta de una estructura debe estar en equilibrio bajo la acción de las cargas aplicadas ( $W_j$ ) y las acciones de extremo ( $A_j^k$ ) de los elementos conectados a ella (figura 12.29). En general, las acciones de extremos incluyen efectos de cargas situadas directamente sobre los elementos pero, para propósitos de esta explicación, se supone que las acciones de extremo son el resultado de desplazamientos de extremo solamente. En la sección 12.15 se integrarán a la formulación las cargas situadas directamente sobre los elementos.

En los diagramas de cuerpo libre de las juntas el requisito de equilibrio para la junta de la armadura se expresa mediante la ecuación

$$\begin{bmatrix} W_{[2j-1]} \\ W_{[2j]} \end{bmatrix} - \sum \begin{bmatrix} A_{[2j-1]}^k \\ A_{[2j]}^k \end{bmatrix} = 0$$

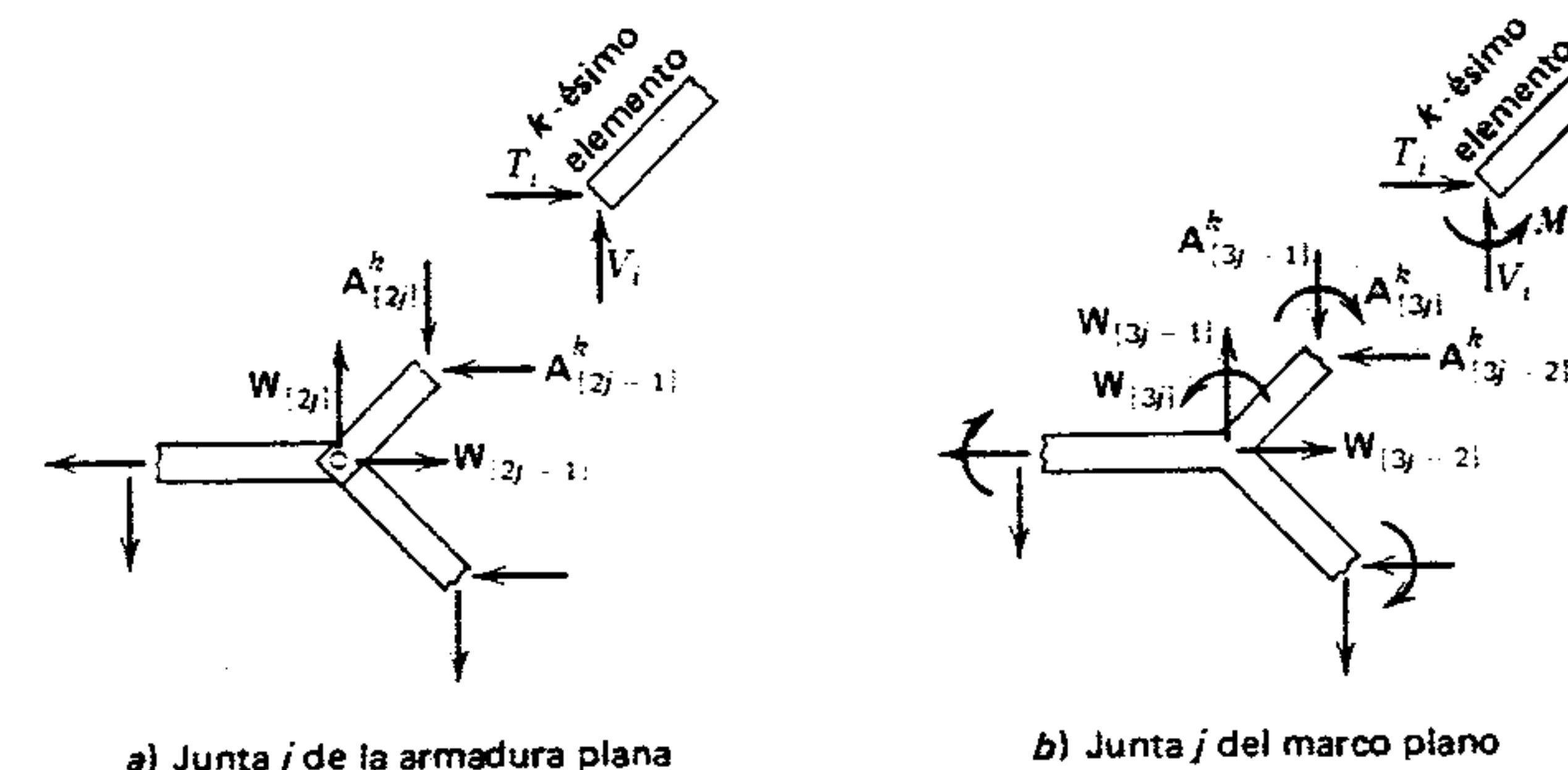


Figura 12.29 Diagramas de cuerpo libre de las acciones de extremo del elemento y cargas sobre juntas.

y, para la junta del marco plano, por la ecuación

$$\begin{bmatrix} W_{[3j-2]} \\ W_{[3j-1]} \\ W_{[3j]} \end{bmatrix} - \sum \begin{bmatrix} A_{[3j-2]}^k \\ A_{[3j-1]}^k \\ A_{[3j]}^k \end{bmatrix} = 0$$

en donde, para ambas ecuaciones, la suma indicada abarca todos los elementos conectados a la junta. Cada una de las anteriores ecuaciones se puede expresar en la forma alternativa

$$W_j - \sum A_j^k = 0$$

donde:

$W_j$  = vector de las cargas de junta aplicadas directamente.

$A_j^k$  = vector de las acciones de extremo del  $k$ -ésimo elemento.

Cuando el extremo  $A$  del  $k$ -ésimo elemento de una estructura ocurre en la junta  $j$ , y el extremo  $B$  en la junta  $i$ , la ecuación que relaciona las acciones de extremo con los desplazamientos de extremo para el  $k$ -ésimo elemento viene a ser

$$\begin{bmatrix} A_j^k \\ A_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{jj}^k & S_{ji}^k \\ S_{ij}^k & S_{ii}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_j \\ D_i \end{bmatrix}$$

Cuando esta ecuación se expande (se llevan a cabo las multiplicaciones), produce dos ecuaciones para acciones de extremo de elemento:

$$A_j^k = S_{jj}^k D_j + S_{ji}^k D_i$$

y

$$A_i^k = S_{ij}^k D_j + S_{ii}^k D_i$$

La primera de éstas pertenece a la junta  $j$  y se puede sustituir en la ecuación de equilibrio. Así,

$$W_j - \sum (S_{jj}^k D_j + S_{ji}^k D_i) = 0$$

La segunda ecuación pertenece a la junta  $i$ , y por supuesto, se sustituiría en la ecuación de equilibrio para esa junta.

La formulación de estas ecuaciones de equilibrio de junta para todas las juntas de una estructura produce un grupo de ecuaciones lineales que expresan la relación entre cargas de juntas y desplazamientos de juntas. Estas ecuaciones se pueden expresar en forma matricial

o

$$S^c D^c = W^c$$



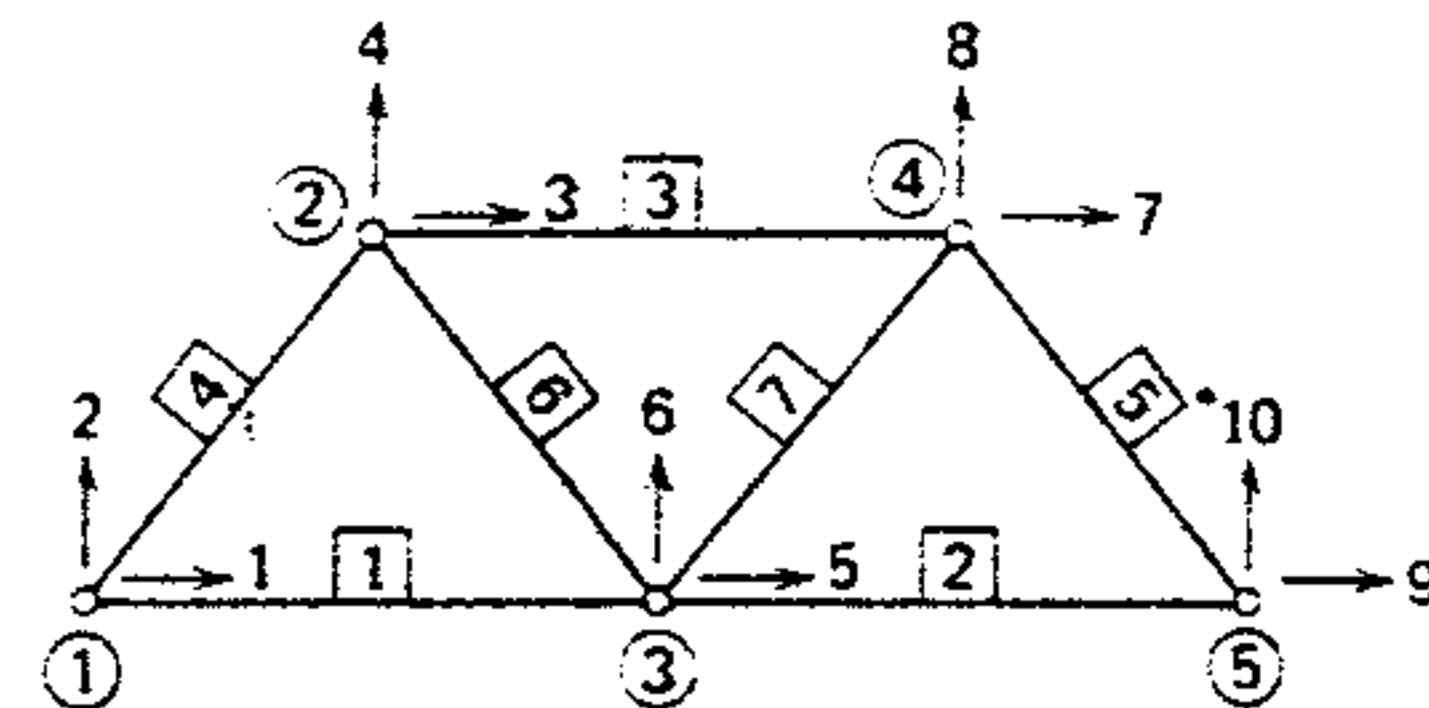


Figura 12.30 Ejemplo simbólico de armadura.

donde  $S^c$  es la matriz de rigidez de la estructura "completa",  $D^c$  es el vector columna para todas las componentes de desplazamiento de juntas, y  $W^c$  es el vector columna de todas las componentes de carga de junta.

Para ilustrar el procedimiento anterior, la matriz de rigidez completa para la armadura de siete miembros ilustrada en la figura 12.30 se formulará de una manera simbólica:

1. Numerar las juntas, encerrar los números en círculos, y colocarlos en la figura.
2. Numerar los miembros, encerrar los números en cuadros, y colocarlos en la figura.
3. Calcular el número de identificación para líneas de acción en cada junta, como se explicó en la sección 12.11. (Los pasos 1, 2, y 3 se ilustran en la figura 12.30).
4. Preparar una tabla de resumen de identificación de los números de elementos y sus extremos A y B.

Elemento	Extremos	
	A	B
1	1	3
2	3	5
3	2	4
4	1	2
5	4	5
7	3	4

5. Escribir la ecuación de rigidez de acción en el extremo para cada elemento de la armadura.

$$\begin{aligned}
 \text{Elemento 1} \quad & A_1^1 = S_{11}^1 D_1 + S_{13}^1 D_3 \\
 & A_3^1 = S_{31}^1 D_1 + S_{33}^1 D_3 \\
 \text{Elemento 2} \quad & A_3^2 = S_{33}^2 D_3 + S_{35}^2 D_5 \\
 & A_5^2 = S_{53}^2 D_3 + S_{55}^2 D_5 \\
 \text{Elemento 3} \quad & A_2^3 = S_{22}^3 D_2 + S_{24}^3 D_4 \\
 & A_4^3 = S_{42}^3 D_2 + S_{44}^3 D_4 \\
 \text{Elemento 4} \quad & A_1^4 = S_{11}^4 D_1 + S_{12}^4 D_2 \\
 & A_2^4 = S_{21}^4 D_1 + S_{22}^4 D_2 \\
 \text{Elemento 5} \quad & A_4^5 = S_{44}^5 D_4 + S_{45}^5 D_5 \\
 & A_5^5 = S_{54}^5 D_4 + S_{55}^5 D_5 \\
 \text{Elemento 6} \quad & A_2^6 = S_{22}^6 D_2 + S_{23}^6 D_3 \\
 & A_3^6 = S_{32}^6 D_2 + S_{33}^6 D_3 \\
 \text{Elemento 7} \quad & A_3^7 = S_{33}^7 D_3 + S_{34}^7 D_4 \\
 & A_4^7 = S_{43}^7 D_3 + S_{44}^7 D_4
 \end{aligned}$$

6. Sustituir las ecuaciones anteriores en las ecuaciones de equilibrio de junta, es decir

$$\text{Junta 1} \quad W_1 - [(S_{11}^1 D_1 + S_{13}^1 D_3) + (S_{11}^4 D_1 + S_{12}^4 D_2)] = 0$$

$$\text{Junta 2} \quad W_2 - [(S_{22}^3 D_2 + S_{24}^3 D_4) + (S_{21}^4 D_1 + S_{22}^4 D_2) + (S_{22}^6 D_2 + S_{23}^6 D_3)] = 0$$

$$\text{Junta 3} \quad W_3 - [(S_{31}^1 D_1 + S_{33}^1 D_3) + (S_{33}^2 D_3 + S_{35}^2 D_5) + (S_{32}^6 D_2 + S_{33}^6 D_3) + (S_{33}^7 D_3 + S_{34}^7 D_4)] = 0$$

$$\text{Junta 4} \quad W_4 - [(S_{42}^3 D_2 + S_{44}^3 D_4) + (S_{44}^5 D_4 + S_{45}^5 D_5) + (S_{43}^7 D_3 + S_{44}^7 D_4)] = 0$$

$$\text{Junta 5} \quad W_5 - [(S_{53}^2 D_3 + S_{55}^2 D_5) + (S_{54}^5 D_4 + S_{55}^5 D_5)] = 0$$

7. Finalmente, ensamblar las ecuaciones de equilibrio de juntas en forma de matriz.

$$\begin{array}{c}
 \text{Junta 1} \quad \text{Junta 2} \quad \text{Junta 3} \quad \text{Junta 4} \quad \text{Junta 5} \\
 \begin{bmatrix}
 S_{11}^1 + S_{11}^4 & S_{12}^4 & S_{13}^1 & S_{14}^3 & S_{15}^2 \\
 S_{21}^4 & S_{22}^3 + S_{22}^4 + S_{22}^6 & S_{23}^6 & S_{24}^3 & S_{25}^2 \\
 S_{31}^1 & S_{32}^6 & S_{33}^1 + S_{33}^2 + S_{33}^6 + S_{33}^7 & S_{34}^3 & S_{35}^2 \\
 S_{41}^3 & S_{42}^3 & S_{43}^7 & S_{44}^3 + S_{44}^5 + S_{44}^7 & S_{45}^5 \\
 S_{51}^2 & S_{52}^2 & S_{53}^2 & S_{54}^5 & S_{55}^2 + S_{55}^5
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 D_1 \\
 D_2 \\
 D_3 \\
 D_4 \\
 D_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 W_1 \\
 W_2 \\
 W_3 \\
 W_4 \\
 W_5
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Matriz de rigidez de la estructura completa

Vector de componentes de desplazamiento de junta

Vector de componentes de carga de junta

Debe recordarse que cada término  $S_{ij}^k$  representa una submatriz de  $2 \times 2$  y cada término  $D_i$  y  $W_i$  representa un vector con dos elementos; por lo tanto, la ecuación de arriba representa un grupo de 10 ecuaciones. Entonces, la matriz de rigidez de la estructura "completa" es una matriz de  $10 \times 10$ . Antes de usar esta matriz, se deben evaluar los elementos de cada submatriz y combinar las submatrices como se indica en la ecuación. También debe notarse que la ley de Maxwell se aplica a la matriz "completa" de rigidez de la estructura; por lo tanto, es simétrica.

### Ejemplo numérico

Formular la matriz de rigidez "completa" para el marco de portal ilustrado en la figura 12.31. Usar

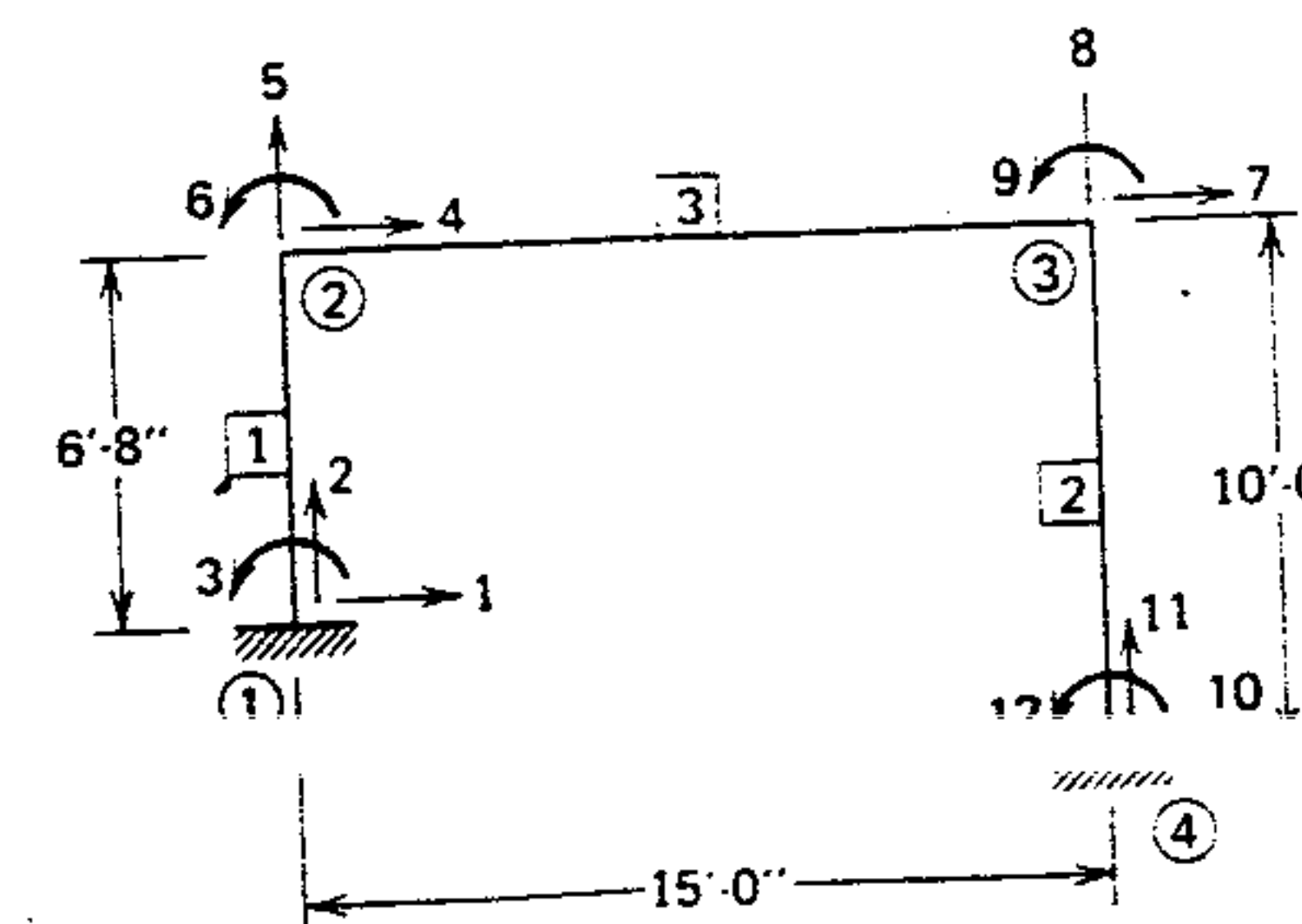


Figura 12.31 Ejemplo numérico.

las siguientes propiedades de miembros para todos los miembros:  $A = 8 \text{ pulg}^2$ ,  $I = 200 \text{ pulg}^4$ , y  $E = 29,000 \text{ k/pulg}^2$ .

### Solución

1. Numerar (en serie) las juntas, elementos y acciones de extremo, y mostrarlos en el marco de portal (figura 12.31).
2. Hacer la tabla para identificar los elementos y el extremo A y el extremo B.

Elemento	Extremos	
	A	B
1	1	2
2	3	4
3	2	3

3. Bosquejar cada elemento mostrando los ejes de éste en relación con los ejes de la estructura conforme al sistema de numeración establecido en los pasos 1 y 2 (figura 12.32).
4. Calcular los coeficientes de rigidez de elementos en relación con los ejes del elemento para cada uno de ellos.

$$K_x = \frac{AE}{L} = \frac{8(29)}{80} = 2.900 \text{ kips/pulg}$$



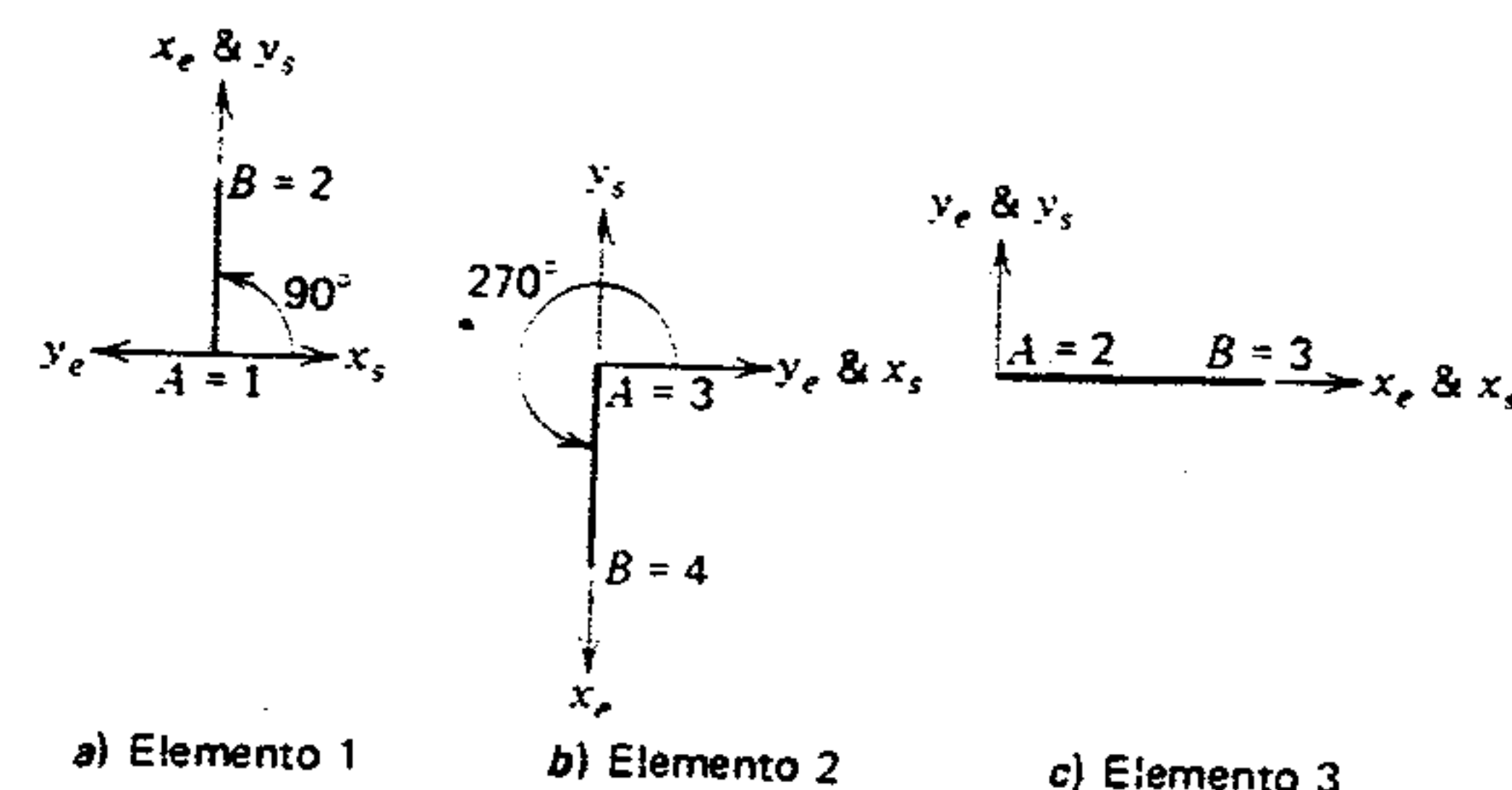


Figura 12.32 Orientaciones del elemento.

$$\kappa_1 = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12(29)200}{80^3} = 0.136 \text{ kips/pulg}$$

$$\kappa_2 = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6(29)200}{80^2} = 5.438 \text{ kips/pulg}$$

$$\kappa_4 = \frac{4EI}{L} = \frac{4(29)200}{80} = 290.000 \text{ kips/pulg}$$

$$\kappa_5 = \frac{2EI}{L} = \frac{2(29)200}{80} = 145.000 \text{ kips/pulg}$$

Elemento 2 (calculado de manera similar a la del elemento 1).

$$\kappa_2 = 1.933 \quad \kappa_1 = 0.040 \quad \kappa_2 = 2.417$$

$$\kappa_4 = 193.333 \quad \kappa_5 = 96.667$$

Elemento 1 del marco

Matriz de rigidez del elemento/1,000,000

$$S_e^1 = \begin{bmatrix} 2.900 & 0.000 & 0.000 & -2.900 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.136 & 5.438 & 0.000 & -0.136 & 5.438 \\ 0.000 & 5.438 & 290.000 & 0.000 & -5.438 & 145.000 \\ -2.900 & 0.000 & 0.000 & 2.900 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.136 & -5.438 & 0.000 & 0.136 & -5.438 \\ 0.000 & 5.438 & 145.000 & 0.000 & -5.438 & 290.000 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Elemento 3

$$\kappa_2 = 1.289 \quad \kappa_1 = 0.012 \quad \kappa_2 = 1.074$$

$$\kappa_4 = 128.889 \quad \kappa_5 = 64.445$$

4. Situar los coeficientes (valores  $k$ ) en la matriz de rigidez del elemento (en relación con los ejes del elemento). Preparar la matriz de rotación para el elemento. Premultiplicar la matriz de rigidez por el inverso de la matriz de rotación y posmultiplicar ese producto por la matriz de rotación. El resultado final de esta multiplicación es la matriz de rigidez del elemento transformada. En lugar de esta multiplicación matricial, los nuevos coeficientes se pueden calcular directamente de las

Matriz de rigidez del elemento transformada/1,000,000

$$S_s^1 = \begin{bmatrix} 0.136 & 0.000 & -5.438 & -0.136 & 0.000 & -5.438 \\ 0.000 & 2.900 & 0.000 & 0.000 & -2.900 & 0.000 \\ -5.438 & 0.000 & 290.000 & 5.438 & 0.000 & 145.000 \\ -0.136 & 0.000 & 5.438 & 0.136 & 0.000 & 5.438 \\ 0.000 & -2.900 & 0.000 & 0.000 & 2.900 & 0.000 \\ -5.438 & 0.000 & 145.000 & 5.438 & 0.000 & 290.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2 del marco

Matriz de rigidez del elemento/1,000,000

$$S_e^2 = \begin{bmatrix} 1.933 & 0.000 & 0.000 & -1.933 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.041 & 2.417 & 0.000 & -0.041 & 2.417 \\ 0.000 & 2.417 & 193.333 & 0.000 & -2.417 & 96.667 \\ -1.933 & 0.000 & 0.000 & 1.933 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.041 & -2.417 & 0.000 & 0.041 & -2.417 \\ 0.000 & 2.417 & 96.667 & 0.000 & -2.417 & 193.333 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez del elemento transformada/1,000,000

$$S_s^2 = \begin{bmatrix} 0.041 & 0.000 & 2.417 & -0.041 & 0.000 & 2.417 \\ 0.000 & 1.933 & 0.000 & 0.000 & -1.933 & 0.000 \\ 2.417 & 0.000 & 193.333 & -2.417 & 0.000 & 96.667 \\ -0.041 & 0.000 & -2.417 & 0.041 & 0.000 & -2.417 \\ 0.000 & -1.933 & 0.000 & 0.000 & 1.933 & 0.000 \\ 2.417 & 0.000 & 96.667 & -2.417 & 0.000 & 193.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{33}^2 & S_{34}^2 \\ S_{43}^2 & S_{44}^2 \end{bmatrix}$$

Elemento 3 del marco

Matriz de rigidez del elemento/1,000,000

$$S_e^3 = \begin{bmatrix} 1.289 & 0.000 & 0.000 & -1.289 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.012 & 1.074 & 0.000 & -0.012 & 1.074 \\ 0.000 & 1.074 & 128.889 & 0.000 & -1.074 & 64.445 \\ -1.289 & 0.000 & 0.000 & 1.289 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.012 & -1.074 & 0.000 & 0.012 & -1.074 \\ 0.000 & 1.074 & 64.445 & 0.000 & -1.074 & 128.889 \end{bmatrix}$$



Matriz de rotación

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez del elemento transformada/1,000,000

$$S_3^3 = \begin{bmatrix} 1.289 & 0.000 & 0.000 & -1.289 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.012 & 1.074 & 0.000 & -0.012 & 1.074 \\ 0.000 & 1.074 & 128.889 & 0.000 & -1.074 & 64.445 \\ -1.289 & 0.000 & 0.000 & 1.289 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.012 & -1.074 & 0.000 & 0.012 & -1.074 \\ 0.000 & 1.074 & 64.445 & 0.000 & -1.074 & 128.889 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{22}^3 & S_{23}^3 \\ S_{32}^3 & S_{33}^3 \end{bmatrix}$$

fórmulas desarrolladas en la sección 12.10. Subdividir esta matriz de rigidez transformada de elemento (6 X 6) en cuatro submatrices de 3 X 3 e identificar estas submatrices con respecto a sus acciones de extremo (con

los subíndices de los coeficientes se localizan las posibilidades de los elementos en la matriz de rigidez de estructura completa). Repetir este paso para cada uno de los tres elementos del marco.

5. Formar la matriz de rigidez de la estructura completa. Puede ser útil formar primero simbólicamente esta matriz, sobreponiendo las submatrices de 3 X 3 de las matrices del elemento, es decir

$$S^c = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} \text{Junta} & & & \\ \text{No. 1} & \text{No. 2} & \text{No. 3} & \text{No. 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 & & \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 + S_{22}^3 & S_{23}^3 & \\ & S_{32}^3 & S_{33}^2 + S_{33}^3 & S_{34}^2 \\ & & S_{43}^2 & S_{44}^2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Junta No. 1} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Matriz de rigidez de la estructura completa

0.136	0.000	-5.438	-0.136	0.000	-5.438				
0.000	2.900	0.000	0.000	-2.900	0.000				
-5.438	0.000	290.000	5.438	0.000	145.000				
-0.136	0.000	5.438	1.425	0.000	5.438	-1.289	0.000	0.000	
0.000	-2.900	0.000	0.000	2.912	1.074	0.000	-0.012	1.074	
-5.438	0.000	145.000	5.438	1.074	418.889	0.000	-1.074	64.445	
			0.000	-0.012	-1.074	0.000	1.945	-1.074	0.000
			0.000	1.074	64.445	2.417	-1.074	322.222	-2.417
						-0.041	0.000	-2.417	0.041
						0.000	-1.933	0.000	1.933
						2.417	0.000	96.667	-2.417
									193.333

## 12.13 ECUACIONES DE RESTRICCIÓN

La ecuación final desarrollada en la sección anterior ( $S^c D^c = W^c$ ), que relaciona los desplazamientos de juntas y las cargas de juntas en una estructura entera, no tiene una solución significativa tal como se plantea (es decir, implica que la estructura está libre en el espacio). Obviamente la estructura debe estar sujeta a una cimentación adecuada. Este requisito también es evidente cuando se intenta una solución matemática. Para obtener una solución para los desplazamientos, ambos lados de la ecuación se deben multiplicar por el inverso de la matriz de rigidez de la estructura completa ( $[S^c]^{-1}$ , es decir,

$$D^c = [S^c]^{-1} W^c$$

Un estudio más a fondo muestra que no es posible una solución única a esta ecuación debido a que la matriz de rigidez de la estructura completa ( $S^c$ ) siempre es singular (sección C11); por lo tanto, su inverso ( $[S^c]^{-1}$ ) no existe.

No obstante, se puede obtener una solución cuando la ecuación se modifica tomando en cuenta un número suficiente de restricciones que eviten que la estructura se mueva como un cuerpo rígido cuando se le aplican cargas externas. En una estructura plana se evita un movimiento de cuerpo rígido si la estructura se restringe a lo largo de cuando menos tres líneas de acción, de tal modo que se eviten las translaciones en el sentido de los ejes  $x_s$  y  $y_s$  y la rotación del cuerpo rígido respecto al eje  $z_s$ . La existencia de estas restricciones está comprendida por las conocidas ecuaciones que expresan las condiciones para el equilibrio estático (sección 2.4).

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

En general, el número de restricciones que se pueden imponer a una estructura plana no está limitado

tricción a lo largo de cualquiera de las líneas de acción, o bien, se pueden imponer mediante relaciones especiales entre las fuerzas y las relaciones especificadas entre desplazamientos. Las ecuaciones que expresan las diversas condiciones de res-

tricción se conocen como *ecuaciones de restricción*. Todas estas ecuaciones se deben considerar al resolver la ecuación  $S^c D^c = W^c$ .

Si los desplazamientos de una estructura se definen en términos de  $m$  componentes de desplazamiento ( $m = 2j$  para armaduras y  $m = 3j$  para marcos), de las cuales algunas o todas están relacionadas por  $r$  ecuaciones de restricción, entonces  $r$  de los componentes se pueden expresar en términos de las restantes  $m - r$  componentes. Estas  $m - r$  componentes se denominan componentes de desplazamiento independientes.

Para ilustrar los conceptos presentados, las ecuaciones de restricción para el marco plano de la figura 12.33 se formulan y ensamblan en forma de matriz.

La condición de apoyo expresada en la junta ① indica que no se espera movimiento a lo largo de las líneas de acción 1, 2 y 3; sin embargo, para dar un ejemplo más general, se supone que, debido a las pobres condiciones de cimentación, ocurre un asentamiento de 1 pulgada a lo largo de la línea de acción 2 y se produce una rotación en el sentido de las manecillas del reloj de 0.004 radianes a lo largo de la línea de acción 3. Por lo tanto, las condiciones en la junta ① se pueden expresar con las ecuaciones

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ D_2 &= -1 \text{ pulgada} \\ D_3 &= -0.004 \text{ radianes} \end{aligned}$$

La junta ④ es un "rodillo" que sólo puede trasladarse a lo largo de un plano inclinado. La rotación de la junta respecto al eje  $z$  no está restringida, y el momento en la junta 4 es igual a cero. Asimismo, debido a que la translación de la junta debe producirse en el plano, las componentes de desplazamiento  $D_{10}$  y  $D_{11}$  deben relacionarse de modo que su resultante siempre quede dentro del plano. Este requisito se satisface si la relación de las dos componentes se iguala a la tangente del ángulo entre el plano inclinado y el eje  $x_s$ , es decir

$$\frac{D_{11}}{D_{10}} = \tan(30^\circ)$$



$$D_{11} = 0.577D_{10}$$

La condición de apoyo del "rodillo" en la junta ④ también requiere una componente de reacción nula paralela al plano inclinado. En otras palabras, la componente inclinada de  $F_{11}$  se debe anular por la componente inclinada de  $F_{10}$  (figura 12.33b), y el cortante en el extremo B del elemento ④ es igual a cero. Este requisito se puede expresar en forma de ecuación

$$F_{11} \sin(30^\circ) + F_{10} \cos(30^\circ) = v_B = 0$$

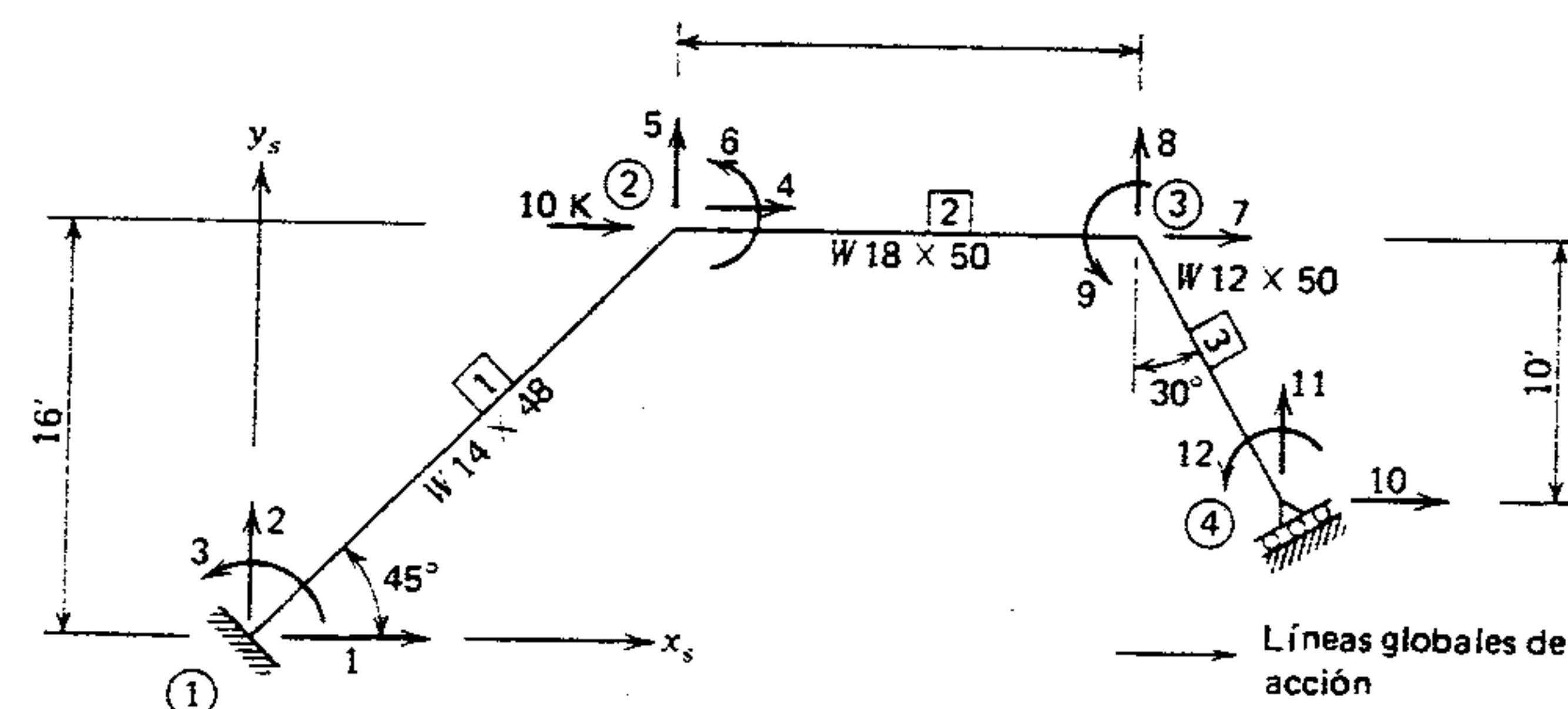
Esta condición de acción de extremo para el elemento 3 se puede expresar en términos de los coe-

ficientes de rigidez del elemento y las componentes de desplazamiento. En la sección 12.8 se desarrolló la matriz de rigidez del elemento que relaciona acciones de extremo con desplazamientos de extremo. Eliminando de la matriz los coeficientes que pertenecen al cortante de extremo ( $v_B$ ).

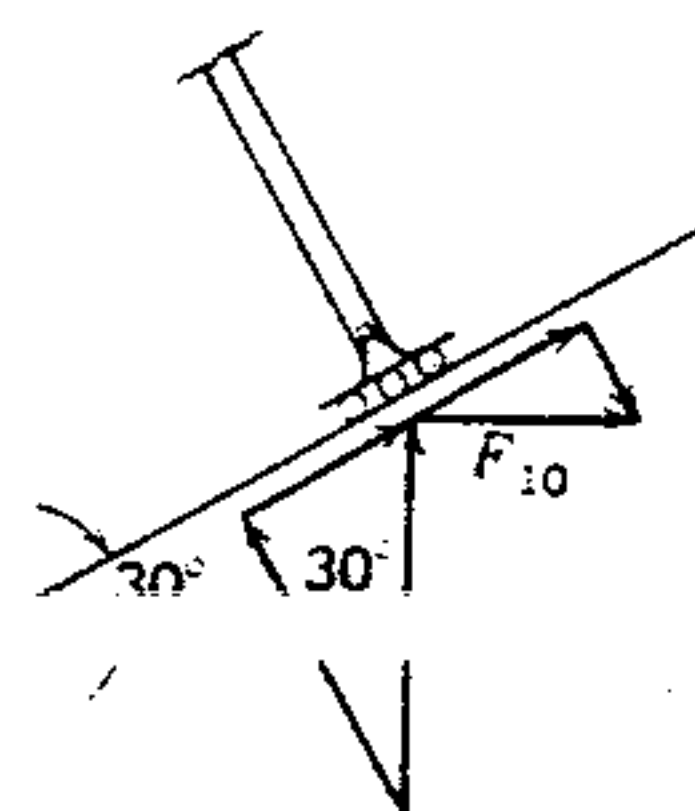
$$v_B = s_{52} \delta_A + s_{53} \theta_A + s_{55} \delta_B + s_{56} \theta_B = 0$$

y sustituyendo en los coeficientes de rigidez derivados,

$$v_B = \left[ \frac{-12EI}{L^3} \right] \delta_3 + \left[ \frac{-6EI}{L^2} \right] \theta_3 + \left[ \frac{12EI}{L^3} \right] \delta_4 + \left[ \frac{-6EI}{L^2} \right] \theta_4 = 0$$



a) Marco con números de identificación



b) Restricciones de reacción en la junta 4.

Elemento	Extremos A B	A pulg <sup>2</sup>	I <sub>x</sub> pulg <sup>4</sup>	E kilolibras
1	1 2	14.1	485.0	29.0
2	2 3	14.7	800.0	29.0
3	3 4	14.7	394.0	29.0

propiedades físicas de elementos.

Figura 12.33 Marco de portal con columnas inclinadas.

lo cual se simplifica a

$$\delta_3 - \delta_4 + \left[ \frac{L}{2} \right] \theta_3 + \left[ \frac{L}{2} \right] \theta_4 = 0$$

Estas relaciones se derivaron con respecto a los ejes del elemento y se deben transformar para referirlas a los ejes de la estructura. La matriz para esta transformación se desarrolló en la sección 12.9 y, eliminando de la matriz los términos pertenecientes al cortante de extremo, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\delta_i = \Xi_i (-\sin \alpha) + \Delta_i \cos \alpha$$

Sustituyendo en esta ecuación los términos y cantidades apropiadas pertenecientes a las juntas ③ y ④ de la estructura bajo consideración, se obtiene

$$\delta_3 = -D_7 \sin(-60^\circ) + D_8 \cos(-60^\circ)$$

$$\delta_4 = -D_{10} \sin(-60^\circ) + D_{11} \cos(-60^\circ)$$

Asimismo

$$\left[ \frac{L}{2} \right] \theta_3 = \left[ \frac{120}{2 \cos(30^\circ)} \right] D_9$$

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = -1 \text{ pulg.}$$

$$D_3 = -0.004 \text{ radianes.}$$

$$D_{10} = 0.750D_7 + 0.433D_8 + 60.000D_9 + 60.000D_{12}$$

$$D_{11} = 0.433D_7 + 0.250D_8 + 34.641D_9 + 34.641D_{12}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_{10} \\ D_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.750 & 0.433 & 60.000 \\ 0 & 0 & 0.433 & 0.250 & 34.641 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -0.004 \\ 60.000 \\ 34.641 \end{bmatrix}$$



Los desplazamientos del marco completo de la figura 12.33 se definen en términos de 12 componentes de desplazamiento (3 en cada junta), algunas de las cuales están relacionadas por las 5 ecuaciones de restricción que se acaban de desarrollar; por lo tanto, conforme a la relación recién presentada, hay 7 componentes de desplazamiento independientes. El grupo completo de 12 componentes de desplazamiento se puede expresar en forma de matriz en términos de estas 7 componentes y los desplazamientos reales en la junta ①. En estas ecuaciones se incluyen igualdades como  $D_4 = D_4$ ,  $D_5 = D_5$ , etc., para todas las componentes independientes. La matriz que relaciona estas componentes se denomina matriz de restricción y se ilustra a continuación:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.000 \\ -0.004 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} & S_{39} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} & S_{49} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} & S_{69} \\ S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} & S_{79} \\ S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} & S_{89} \\ S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \end{bmatrix}$$

## 12.14 PROCESO DE SOLUCIÓN

Una vez planteadas las ecuaciones de restricción y expresado el grupo completo de componentes de desplazamiento en términos de componentes de desplazamiento independientes (como se vio en la sección anterior), se puede continuar la solución de la ecuación desarrollada en la sección 12.12 ( $S^c D^c = W^c$ ). Para ilustrar este proceso supóngase que los desplazamientos del marco de la figura 12.34 se definen en términos de nueve componentes de desplazamiento. Entonces,  $S^c$  (la matriz de rigidez de la estructura "completa"),  $D^c$  (el vector columna de todas las componentes de desplazamiento de junta) y  $W^c$  (el vector columna de todas las componentes de carga de junta).

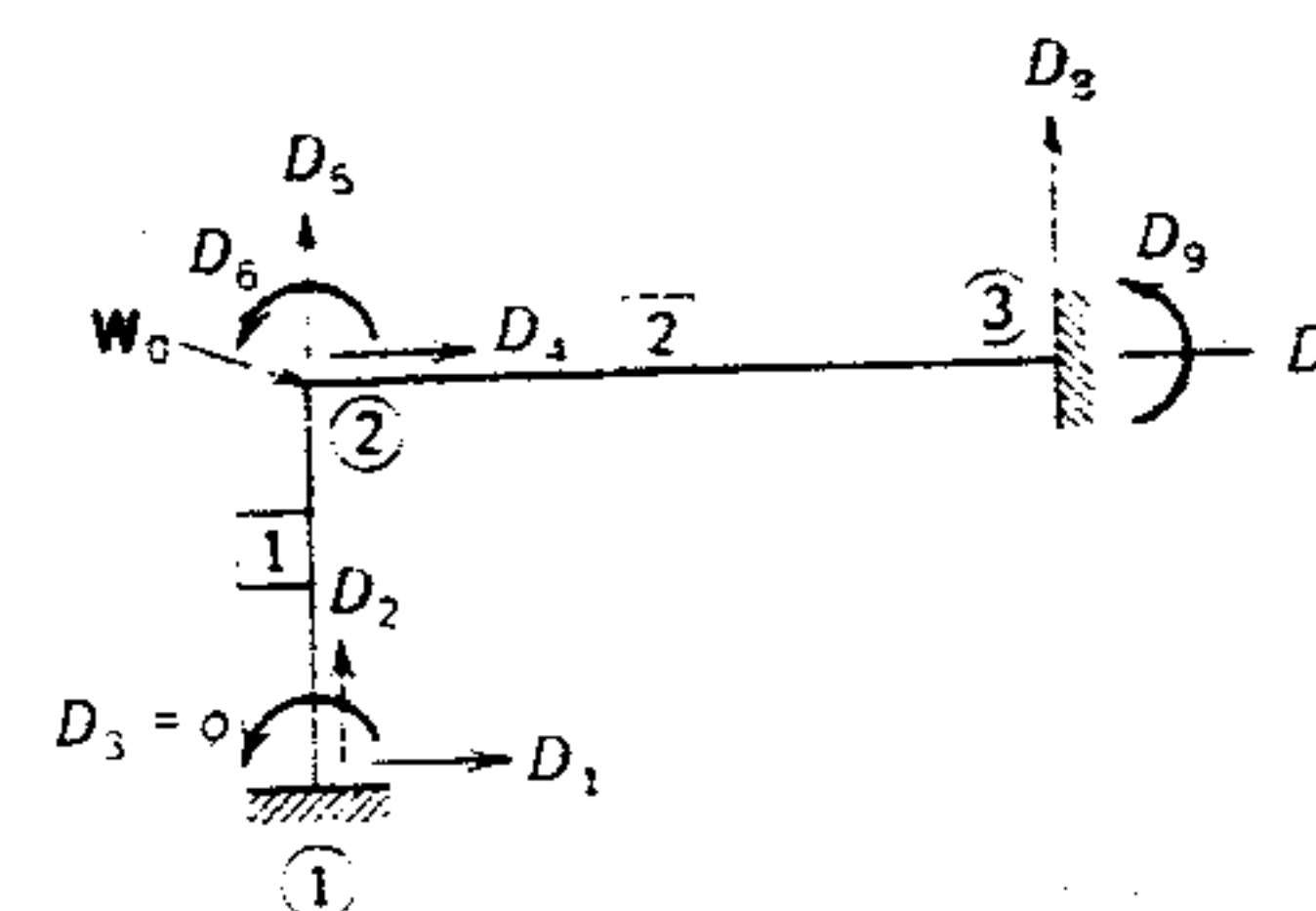


Figura 12.34 Marco de rodilla simple con carga en la rodilla.

ta) se pueden representar simbólicamente por las siguientes matrices. Se pueden formular seis ecuaciones de restricción para la estructura, expresando las condiciones de apoyo en las juntas ① y ③. Estas ecuaciones son

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} & S_{39} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} & S_{49} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} & S_{69} \\ S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} & S_{79} \\ S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} & S_{89} \\ S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = 0$$

$$D_3 = \phi$$

$$D_7 = 0$$

$$D_8 = 0$$

$$D_9 = 0$$

El conjunto completo de componentes de desplazamiento, expresadas en forma de matriz en términos de las componentes independientes y el desplazamiento impuesto en la junta ①, es

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} \\ C_{71} & C_{72} & C_{73} & C_{74} \\ C_{81} & C_{82} & C_{83} & C_{84} \\ C_{91} & C_{92} & C_{93} & C_{94} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

o

$$D^c = CD^i$$

donde  $D^i$  es el vector de desplazamientos impuestos y de componentes de desplazamiento independientes, y  $C$  es la matriz que relaciona  $D^c$  con  $D^i$ . La matriz  $C$  se denominará *matriz de restricción*.

El producto  $CD^i$  se puede sustituir en las ecuaciones  $S^c D^c = W^c$ . Así,  $S^c D^c = S^c CD^i = W^c$ .

El proceso de solución se continúa posmultiplicando  $S^c$  por  $C$ . Esta operación, cuyos resultados se muestran a continuación, produce una matriz que se llamará *matriz producto*.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} \\ P_{61} & P_{62} & P_{63} & P_{64} \\ P_{71} & P_{72} & P_{73} & P_{74} \\ P_{81} & P_{82} & P_{83} & P_{84} \\ P_{91} & P_{92} & P_{93} & P_{94} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \end{bmatrix}$$



El siguiente paso consiste en considerar el desplazamiento conocido multiplicándolo por los elementos de la primera columna de la matriz producto, transfiriendo los términos resultantes  $P_{i1}\phi$  al lado derecho de la ecuación, y restándolos algebraicamente de los términos correspondientes del vector de carga. Cuando se completa esta operación, el vector de carga se llamará *vector de carga aumentada* y la matriz del producto se denominará *matriz del producto condensada*. Si se han impuesto varios desplazamientos sobre la estructura, cada uno se multiplicaría por una columna correspondiente de la *matriz producto* y los términos resultantes se transferirían al lado derecho de la ecuación. Los resultados de esta operación son

$$\begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{42} & P_{43} & P_{44} \\ P_{52} & P_{53} & P_{54} \\ P_{62} & P_{63} & P_{64} \\ P_{72} & P_{73} & P_{74} \\ P_{82} & P_{83} & P_{84} \\ P_{92} & P_{93} & P_{94} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 - P_{11}\phi \\ W_2 - P_{21}\phi \\ W_3 - P_{31}\phi \\ W_4 - P_{41}\phi \\ W_5 - P_{51}\phi \\ W_6 - P_{61}\phi \\ W_7 - P_{71}\phi \\ W_8 - P_{81}\phi \\ W_9 - P_{91}\phi \end{bmatrix}$$

En este punto es necesario examinar la naturaleza de las componentes de carga de junta que se toman en cuenta en el vector de carga completo. Estas componentes provienen de tres fuentes: 1) cargas aplicadas directamente en las juntas; 2) cargas aplicadas directamente sobre los elementos, y 3) fuerzas de reacción actuando sobre líneas restringidas de acción. Las cargas sobre juntas producidas por cargas sobre elementos se trataron en la sección 12.15 y no son pertinentes en la presente explicación; sin embargo, las cargas sobre juntas provenientes de las líneas de acción restringidas influyen en el proceso de solución debido a que constituyen una cantidad conocida.

que se deben determinar mediante el proceso.

En cada línea global de acción, se debe especificar *ya sea* la componente de desplazamiento, o *bien*, la componente de carga; pero no ambas. Así, las ecuaciones de restricción también implican una

relación entre componentes de fuerza que corresponden a las componentes de desplazamiento restringido.

Si el símbolo  $W_i$  se usa para denotar sólo cargas sobre juntas aplicadas directamente y el símbolo  $F_i$  para denotar sólo fuerzas de reacción actuando sobre líneas de acción restringidas, la carga total actuando a lo largo de cualquier línea restringida de acción se puede expresar como

$$W_i^* = W_i + F_i + \chi_i$$

donde  $\chi_i$  representa los términos de carga equivalente resultantes de las componentes de desplazamiento impuestas. Con esta notación, la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{42} & P_{43} & P_{44} \\ P_{52} & P_{53} & P_{54} \\ P_{62} & P_{63} & P_{64} \\ P_{72} & P_{73} & P_{74} \\ P_{82} & P_{83} & P_{84} \\ P_{92} & P_{93} & P_{94} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^* \\ W_2^* \\ W_3^* \\ W_4 - P_{41}\phi \\ W_5 - P_{51}\phi \\ W_6 - P_{61}\phi \\ W_7^* \\ W_8^* \\ W_9^* \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones se pueden separar en dos grupos, uno de ellos perteneciente a las componentes de desplazamiento incógnitas y el otro a las componentes de reacción incógnitas, es decir,

$$\begin{bmatrix} P_{42} & P_{43} & P_{44} \\ P_{52} & P_{53} & P_{54} \\ P_{62} & P_{63} & P_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4 - P_{41}\phi \\ W_5 - P_{51}\phi \\ W_6 - P_{61}\phi \end{bmatrix}$$

o

$$SD = W$$

donde  $S$  es la *matriz de rigidez de la estructura*,  $D$  es el vector de las componentes de desplazamiento independientes (*vector de desplazamiento*) y  $W$  el vector de las componentes de carga de juntas especificadas (*vector de carga*). Entonces

$$\begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{72} & P_{73} & P_{74} \\ P_{82} & P_{83} & P_{84} \\ P_{92} & P_{93} & P_{94} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^* \\ W_2^* \\ W_3^* \\ W_7^* \\ W_8^* \\ W_9^* \end{bmatrix}$$

o

$$QD = W$$

El primer grupo se puede resolver en función de las componentes de desplazamiento incógnitas usando los métodos algebraicos apropiados de matrices que se ven en el Apéndice C. Por ejemplo, usando el concepto de la matriz inversa, se puede indicar una solución como sigue:

$$D = S^{-1}W$$

Después de resolver las componentes de desplazamiento incógnitas, el segundo grupo se puede resolver con las componentes de reacción incógnitas.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{72} & P_{73} & P_{74} \\ P_{82} & P_{83} & P_{84} \\ P_{92} & P_{93} & P_{94} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_1 + \chi_1 \\ W_2 + \chi_2 \\ W_3 + \chi_3 \\ W_7 + \chi_7 \\ W_8 + \chi_8 \\ W_9 + \chi_9 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las acciones de extremo de elementos se pueden evaluar para cada elemento posmultiplicando la matriz de rigidez del elemento por el vec-

Elemento 1 del marco (figura 12.35)

$$\begin{aligned} A &= 14.100 \text{ PULG}^2 \\ I &= 485.000 \text{ PULG}^4 \\ E &= 29.000 \text{ K/PULG}^2/1,000 \end{aligned}$$

$$\text{ALFA} = 45.000 \text{ GRADOS}$$

tor de las componentes locales de desplazamiento que se producen en los extremos del elemento.

### Ejemplo

Se ilustrará el proceso de solución completo mediante la determinación de las componentes de desplazamiento, las componentes de reacción y las acciones de extremos de elementos para el marco de portal con columnas inclinadas ilustrado en la figura 12.33. Este marco de portal se usó como problema de ejemplo en la sección 12.13 para ilustrar el proceso de formulación de ecuaciones de restricción.

### Solución

1. Preparar la matriz de rigidez de elemento transformada para cada elemento de la estructura conforme al método descrito en

la sección 12.12; o sea, calcular los coeficientes de elemento (valores  $k$ ) y colocarlos en la matriz de rigidez ( $s_e^k$ ) referida a

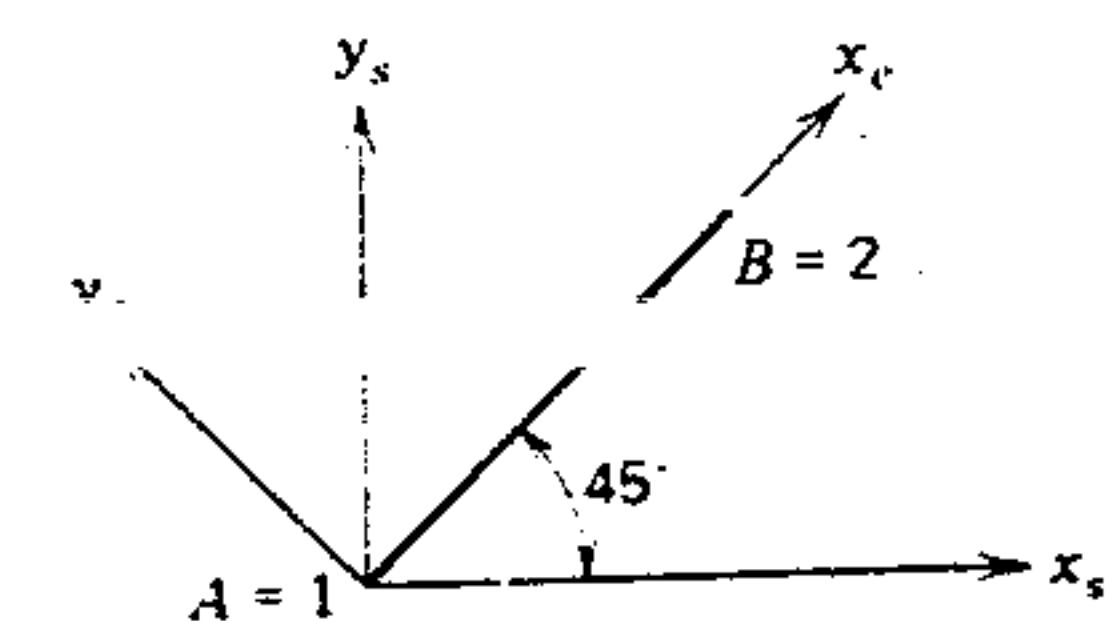


Figura 12.35 Elemento 1.



los ejes del elemento, bosquejar la rotación del elemento y preparar la matriz de rotación, y preparar la matriz de rigidez del elemento.

mento transformada ( $S_s^k$ ) y dividirla en submatrices de acuerdo con las acciones y desplazamientos de extremos.

Matriz de rigidez del elemento/1,000,000

$$S_e^1 = \begin{bmatrix} 1.506 & 0.000 & 0.000 & -1.506 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.008 & 1.145 & 0.000 & -0.008 & 1.145 \\ 0.000 & 1.145 & 207.197 & 0.000 & -1.145 & 103.599 \\ \hline -1.506 & 0.000 & 0.000 & 1.506 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.008 & -1.145 & 0.000 & 0.008 & -1.145 \\ 0.000 & 1.145 & 103.599 & 0.000 & -1.145 & 207.197 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación

$$R = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0.000 \\ -0.707 & 0.707 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez del elemento transformada/1,000,000

$$S_s^1 = \begin{bmatrix} 0.757 & 0.749 & -0.809 & -0.757 & -0.749 & -0.809 \\ 0.749 & 0.757 & 0.809 & -0.749 & -0.757 & 0.809 \\ -0.809 & 0.809 & 207.197 & 0.809 & -0.809 & 103.599 \\ \hline -0.757 & -0.749 & 0.809 & 0.757 & 0.749 & 0.809 \\ -0.749 & -0.757 & -0.809 & 0.749 & 0.757 & -0.809 \\ -0.809 & 0.809 & 103.599 & 0.809 & -0.809 & 207.197 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2 del marco (figura 12.36)

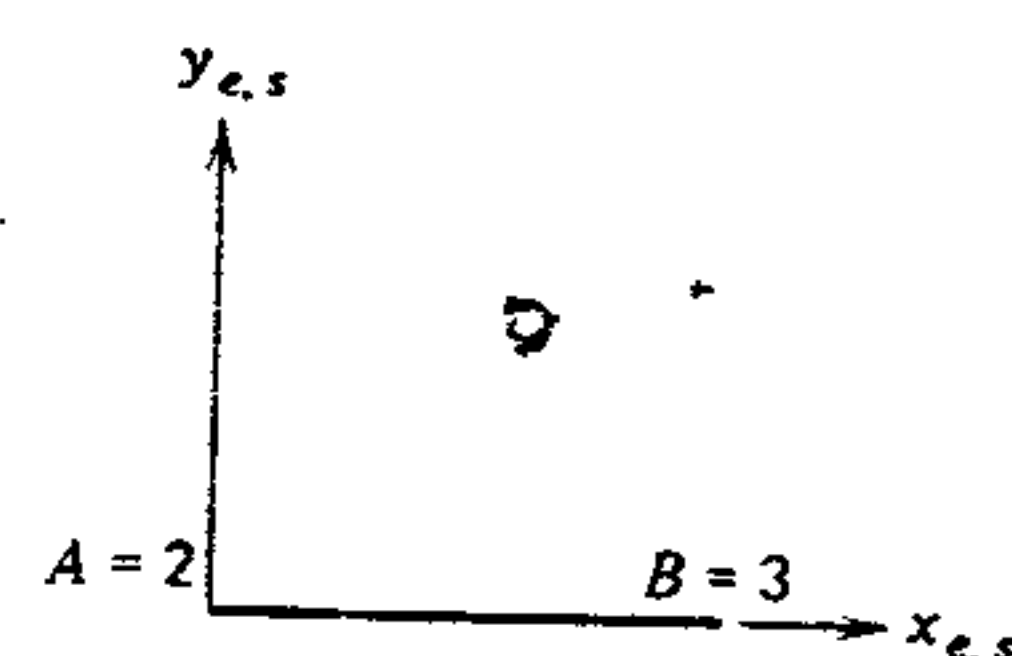
L = 216.000 PULGADAS  
A = 14.700 PULG\*\*2  
I = 800.000 PULG\*\*4  
E = 29.000 K/PULG<sup>2</sup>/1,000

ALFA = 0.000 GRADOS

Figura 12.36. Elemento 2.

Matriz de rigidez del elemento/1,000,000

$$S_e^2 = \begin{bmatrix} 1.974 & 0.000 & 0.000 & -1.974 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.028 & 2.984 & 0.000 & -0.028 & 2.984 \\ 0.000 & 2.984 & 429.630 & 0.000 & -2.984 & 214.815 \\ \hline -1.974 & 0.000 & 0.000 & 1.974 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.028 & -2.984 & 0.000 & 0.028 & -2.984 \\ 0.000 & 2.984 & 214.815 & 0.000 & -2.984 & 429.630 \end{bmatrix}$$



Matriz de rotación

$$R = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Matriz transformada de rigidez del elemento/1,000,000

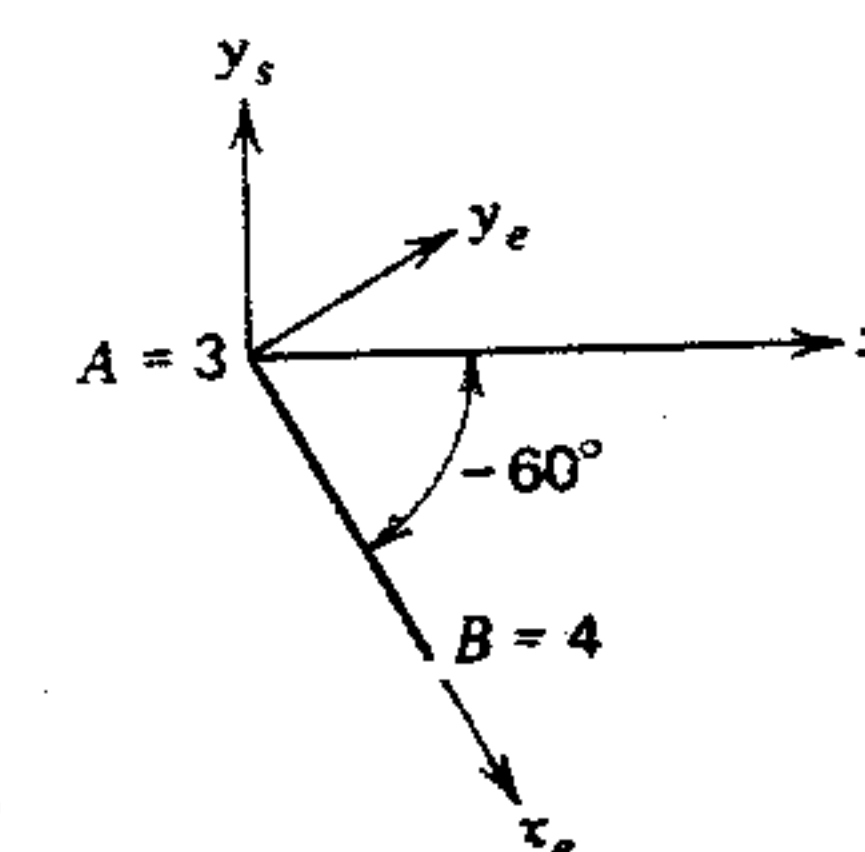
$$S_s^2 = \begin{bmatrix} 1.974 & 0.000 & 0.000 & -1.974 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.028 & 2.984 & 0.000 & -0.028 & 2.984 \\ 0.000 & 2.984 & 429.630 & 0.000 & -2.984 & 214.815 \\ \hline -1.974 & 0.000 & 0.000 & 1.974 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.028 & -2.984 & 0.000 & 0.028 & -2.984 \\ 0.000 & 2.984 & 214.815 & 0.000 & -2.984 & 429.630 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{22}^2 & S_{23}^2 \\ S_{32}^2 & S_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Elemento 3 del marco (figura 12.37)

L = 138.567 PULGADAS  
A = 14.700 PULG\*\*2  
I = 394.000 PULG\*\*4  
E = 29.000 K/PULG<sup>2</sup>/1,000

ALFA = 300.000 GRADOS

Figura 12.37 Elemento 3.



Matriz de rigidez del elemento

$$S_e^3 = \begin{bmatrix} 3.077 & 0.000 & 0.000 & -3.077 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.052 & 3.571 & 0.000 & -0.052 & 3.571 \\ 0.000 & 3.571 & 329.840 & 0.000 & -3.571 & 164.920 \\ \hline -3.077 & 0.000 & 0.000 & 3.077 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.052 & -3.571 & 0.000 & 0.052 & -3.571 \\ 0.000 & 3.571 & 164.920 & 0.000 & -3.571 & 329.840 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación

$$R = \begin{bmatrix} 0.500 & -0.866 & 0.000 \\ 0.866 & 0.500 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Matriz transformada de rigidez del elemento/1,000,000

$$S_s^3 = \begin{bmatrix} 0.808 & -1.310 & 3.092 & -0.808 & 1.310 & 3.092 \\ 0.000 & 0.000 & 1.785 & 0.000 & 0.000 & 1.785 \\ 3.092 & 1.785 & 329.840 & -3.092 & -1.785 & 164.920 \\ \hline -0.808 & 1.310 & -3.092 & 0.808 & -1.310 & -3.092 \\ 1.310 & -2.320 & -1.785 & -1.310 & 2.320 & -1.785 \\ 3.092 & 1.785 & 164.920 & -3.092 & -1.785 & 329.840 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{33}^3 & S_{34}^3 \\ S_{43}^3 & S_{44}^3 \end{bmatrix}$$



2. Formar la matriz de rigidez completa combinando las submatrices para todos los elementos como lo indica la división.

$$S^c = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 & & \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 + S_{22}^2 & S_{23}^2 & \\ & S_{32}^2 & S_{33}^2 + S_{33}^3 & S_{34}^3 \\ & & S_{43}^3 & S_{44}^3 \end{bmatrix}$$

$$S^c = (1,000,000) \begin{bmatrix} 0.757 & 0.749 & -0.809 & -0.757 & -0.749 & -0.809 & & & \\ 0.749 & 0.757 & 0.809 & -0.749 & -0.757 & 0.809 & & & \\ -0.809 & 0.809 & 207.197 & 0.809 & -0.809 & 103.599 & & & \\ -0.757 & -0.749 & 0.809 & 2.731 & 0.749 & 0.809 & -1.974 & 0.000 & 0.000 \\ -0.749 & -0.757 & -0.809 & 0.749 & 0.785 & 2.174 & 0.000 & -0.028 & 2.984 \\ -0.809 & 0.809 & 103.599 & 0.809 & 2.174 & 636.827 & 0.000 & -2.984 & 214.815 \\ & & & -1.974 & 0.000 & 0.000 & 2.781 & -1.310 & 3.092 \\ & & & 0.000 & -0.028 & -2.984 & -1.310 & 2.348 & -1.198 \\ & & & 0.000 & 2.984 & 214.815 & 3.092 & -1.198 & 759.470 \\ & & & & & & -0.808 & 1.310 & -3.092 \\ & & & & & & 1.310 & -2.320 & -1.785 \\ & & & & & & 3.092 & 1.785 & 164.920 \end{bmatrix}$$

3. Formular las ecuaciones de restricción y preparar la matriz de restricción. (Este paso se usó en el problema ilustrativo de la sección 12.13.)

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.750 & 0.433 & 60.000 & 60.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.433 & 0.250 & 34.641 & 34.641 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.000 \\ -0.004 \\ & & & & & & & & & & \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ & & & & & & & & & & \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ & & & & & & & & & & \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

4. Preparar la matriz de producto condensada. Esto se hace posmultiplicando la matriz de rigidez completa ( $S^c$ ) por la matriz de restricción ( $C$ ) para producir la matriz producto ( $P$ ). Luego se eliminan de la matriz los coeficientes de la matriz producto asociados con los desplazamientos impuestos (las primeras dos columnas en este ejemplo), dejando la matriz producto condensada.

$$\text{Matriz producto condensada} = (1,000,000) \begin{bmatrix} -0.757 & -0.749 & -0.809 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.749 & -0.757 & 0.809 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.809 & -0.809 & 103.599 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 2.731 & 0.749 & 0.809 & -1.974 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.749 & 0.785 & 2.174 & 0.000 & -0.028 & 2.984 & 0.000 \\ 0.809 & 2.174 & 636.827 & 0.000 & -2.984 & 214.815 & 0.000 \\ -1.974 & 0.000 & 0.000 & 2.743 & -1.332 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.028 & -2.984 & -1.332 & 2.335 & -2.984 & 0.000 \\ 0.000 & 2.984 & 214.815 & 0.000 & -2.984 & 512.090 & -82.460 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.769 & 1.332 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.332 & -2.307 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -82.460 & 82.460 \end{bmatrix}$$

5. Construir el vector de carga aumentado. Las primeras dos columnas de coeficientes eliminados de la matriz producto del paso 4 se posmultiplican por los desplazamientos impuestos y se suman a las cargas aplicadas, como sigue:

$$\begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.010 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} + (1,000,000) \begin{bmatrix} -0.749 & 0.809 \\ -0.757 & -0.809 \\ -0.809 & -207.197 \\ 0.749 & -0.809 \\ 0.757 & 0.809 \\ -0.809 & -103.599 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.000 \\ -0.004 \end{bmatrix} = (1,000,000) \begin{bmatrix} 0.746 \\ 0.760 \\ 1.638 \\ -0.736 \\ -0.760 \\ 1.224 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Cargas aplicadas      Columnas 1 y 2 de la matriz producto      Vector de carga aumentado

6. La matriz producto condensada y el vector de carga aumentado se separan en dos grupos de ecuaciones. El primer grupo pertenece a los siete desplazamientos de juntas desconocidos. Como se dijo antes, esta matriz se conoce comúnmente como matriz de rigidez.

$$(1,000,000) \begin{bmatrix} 2.731 & 0.749 & 0.809 & -1.974 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.749 & 0.785 & 2.174 & 0.000 & -0.028 & 2.984 & 0.000 \\ 0.809 & 2.174 & 636.827 & 0.000 & -2.984 & 214.815 & 0.000 \\ -1.974 & 0.000 & 0.000 & 2.743 & -1.332 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.028 & -2.984 & -1.332 & 2.335 & -2.984 & 0.000 \\ 0.000 & 2.984 & 214.815 & 0.000 & -2.984 & 512.090 & -82.460 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -82.460 & 82.460 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{12} \end{bmatrix} = (1,000,000) \begin{bmatrix} -0.736 \\ -0.760 \\ 1.224 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez      Desplazamientos de incógnitas      Vector de carga



El segundo grupo pertenece a las componentes de reacción y se usa en el paso 8. Esta matriz es la matriz  $Q$ , la cual se definió antes.

$$(1,000,000) \begin{bmatrix} -0.757 & -0.749 & -0.809 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.749 & -0.757 & 0.809 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.809 & -0.809 & 103.599 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.769 & 1.332 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.332 & -2.307 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{12} \end{bmatrix} = (1,000,000) \begin{bmatrix} 0.746 \\ 0.760 \\ 1.638 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_{10} \\ F_{11} \end{bmatrix}$$

Matriz  $Q$                       Desplazamientos                      Vector fuerzas de carga reacción

7. Resolver los desplazamientos de junta incógnitas usando las ecuaciones del primer grupo en el paso 6. En el Apéndice C se explican estos procedimientos. En este ejemplo, la solución se obtiene dividiendo la matriz de rigidez y luego generando la inversa de la matriz de rigidez. Luego esta inversa se posmultiplica por el vector de carga.

$$\begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.733 & -29.994 & 0.041 & 30.655 & 17.583 & 0.310 & 0.310 \\ -29.994 & 30.583 & -0.042 & -29.916 & -17.156 & -0.311 & -0.311 \\ 0.041 & -0.042 & 0.002 & 0.042 & 0.025 & -0.001 & -0.001 \\ 30.655 & -29.916 & 0.042 & 31.083 & 17.830 & 0.311 & 0.311 \\ 17.583 & -17.156 & 0.025 & 17.830 & 10.661 & 0.181 & 0.181 \\ 0.310 & -0.311 & -0.001 & 0.311 & 0.181 & 0.006 & 0.006 \\ 0.310 & -0.311 & -0.001 & 0.311 & 0.181 & 0.006 & 0.018 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.736 \\ -0.760 \\ 1.224 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa de rigidez

8. En esta etapa del proceso de solución general se conocen ya todos los desplazamientos de junta. Usualmente conviene agrupar todos los desplazamientos de junta y colocarlos como sigue:

Deflexiones			
Junta	D(X) (PULG)	D(Y) (PULG)	ROTACIÓN (RADIANES)
1	0.0000	-1.0000	-0.00400
2	0.2539	-1.2463	0.00394
3	0.2528	0.1436	0.00769
4	1.1747	0.6783	0.00769

9. Resolver las fuerzas de reacción. Esto se hace reacomodando el segundo grupo de ecuaciones preparadas en el paso 6 y sustituyendo en los valores conocidos ahora del desplazamiento de juntas.

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_{10} \\ F_{11} \end{bmatrix} = (1,000,000) \begin{bmatrix} -0.749 & -0.757 & 0.809 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.809 & -0.809 & 103.599 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.769 & 1.332 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.332 & -2.307 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.246 \\ 0.004 \\ 0.253 \\ 0.144 \\ 0.008 \\ 0.008 \end{bmatrix} - (1,000,000) \begin{bmatrix} 0.746 \\ 0.760 \\ 1.638 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

10. Distribuir en forma tabular las fuerzas de reacción, como sigue:

Reacciones			
Junta	R(X) (kips)	R(Y) (kips)	PAR (kip/pulg)
1	-7.845	-3.732	-1.347
4	-2.154	3.732	

11. El último paso en el proceso de solución es calcular y distribuir en forma tabular todas las acciones de extremos de elementos. Se deben calcular con respecto a los ejes locales del elemento; por lo tanto, es necesario transformar primero las componentes de desplazamiento de extremo de un elemento dado a componentes según los ejes del elemento. Esto se obtiene posmultiplicando la matriz de rotación por los desplazamientos de junta calculados en el paso 7. Los siguientes cálculos son para el elemento número 1.

Los desplazamientos en el extremo A son:

$$\begin{bmatrix} \xi_A \\ \delta_A \\ \theta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0.000 \\ -0.707 & 0.707 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -0.004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.707 \\ -0.707 \\ -0.004 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos en el extremo B son:

$$\begin{bmatrix} \xi_B \\ \delta_B \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0.000 \\ -0.707 & 0.707 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.254 \\ -1.246 \\ 0.004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.702 \\ -1.061 \\ 0.004 \end{bmatrix}$$

Las acciones de extremos se obtienen posmultiplicando cada matriz de rigidez de elemento ( $s_e^f$ ) por el vector de desplazamiento de extremo, es decir,  $a_e^k = s_e^k d_e$ . Este procedimiento se vio en la sección 12.8. Los cálculos siguientes son para el elemento número 1.

Se asocia un factor de 1,000,000 con la matriz de rigidez de elemento que aparece abajo. Cuando este factor se incluye en el cálculo, las unidades de las acciones de extremo son libras y pulg/lb. Sin embargo, este factor se puede omitir y ajustar después las unidades cuando las respuestas finales se pongan en forma tabular.

$$\begin{bmatrix} t_A \\ v_A \\ m_A \\ t_B \\ v_B \\ m_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.506 & 0.000 & 0.000 & -1.506 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.008 & 1.145 & 0.000 & -0.008 & 1.145 \\ 0.000 & 1.145 & 207.197 & 0.000 & -1.145 & 103.599 \\ -1.506 & 0.000 & 0.000 & 1.506 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.008 & 1.145 & 0.000 & 0.008 & -1.145 \\ 0.000 & 1.145 & 103.599 & 0.000 & -1.145 & 207.197 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.707 \\ -0.707 \\ -0.004 \\ -0.702 \\ -1.061 \\ 0.004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.00819 \\ 0.00291 \\ -0.01616 \\ 0.00819 \\ -0.00291 \\ 0.80004 \end{bmatrix}$$

Las acciones de extremo para los elementos 2 y 3 se calculan de modo similar.

Finalmente, las unidades se convierten a kips (multiplicando por 1000) y kips/pies (multiplicando por 1000/12) y las respuestas se colocan en forma tabular.



Acciones de extremos de miembros						
Miembro	T(A) (kips)	V(A) (kips)	M(A) (k-pie)	T(B) (kips)	V(B) (kips)	M(B) (k-pie)
1	-8.186	2.909	-1.347	8.186	-2.909	67.170
2	2.155	-3.732	-67.170	-2.155	3.732	0.000
3	4.309	0.000	0.000	-4.311	0.000	0.000

## 12.15 CARGAS SOBRE EL ELEMENTO

En el proceso de solución general tratado en las secciones anteriores se trata solamente con cargas aplicadas sobre las juntas. Con frecuencia, las cargas se aplican directamente sobre los propios elementos y se deben considerar de dos maneras en el proceso de solución. Las cargas se expresan primero en términos de *acciones de extremo fijo* equivalentes en los extremos de los elementos. Estas acciones de extremo deben ser: 1) consideradas como cargas adicionales sobre las juntas, y 2) sumadas a las acciones de extremo del elemento causadas por el desplazamiento de juntas.

Para considerar las acciones de extremo fijo como carga de junta, es necesario tomar el *negativo* de las acciones, transformarlas a ejes orientados a la estructura y luego sumarlas al vector de *componentes de carga de junta* que se presentó en las secciones 12.12 y 12.14. La transformación se efectúa posmultiplicando la matriz inversa de rotación ( $R^{-1}$ ) por el vector de acciones de extremo fijo (sección 12.9).

Utilizando las expresiones desarrolladas antes para acciones de extremo en términos de la matriz de rigidez del miembro y desplazamientos de extremo, los valores finales para las acciones de extremo se pueden expresar en forma de matriz para elementos de armadura<sup>6</sup> como

$$\begin{bmatrix} t_A \\ v_A \\ t_B \\ v_B \end{bmatrix} = [s_e^k][d_e] + \begin{bmatrix} FEt_A \\ FEv_A \\ FEt_B \\ FEv_B \end{bmatrix}$$

<sup>6</sup> El programa PLTRUSS presentado en el Apéndice D no acepta cargas sobre los elementos.

y para elementos de marco como

$$\begin{bmatrix} t_A \\ v_A \\ m_A \\ t_B \\ v_B \\ m_B \end{bmatrix} = [s_e^k][d_e] + \begin{bmatrix} FEt_A \\ FEv_A \\ FEm_A \\ FEt_B \\ FEv_B \\ FEm_B \end{bmatrix}$$

donde los símbolos  $FEt_A$ ,  $FEv_A$  y  $FEm_A$  expresan la fuerza normal de extremo fijo, la fuerza cortante y el momento flexionante, respectivamente, en el extremo A, y  $FEt_B$ ,  $FEv_B$  y  $FEm_B$  las cantidades correspondientes en el extremo B.

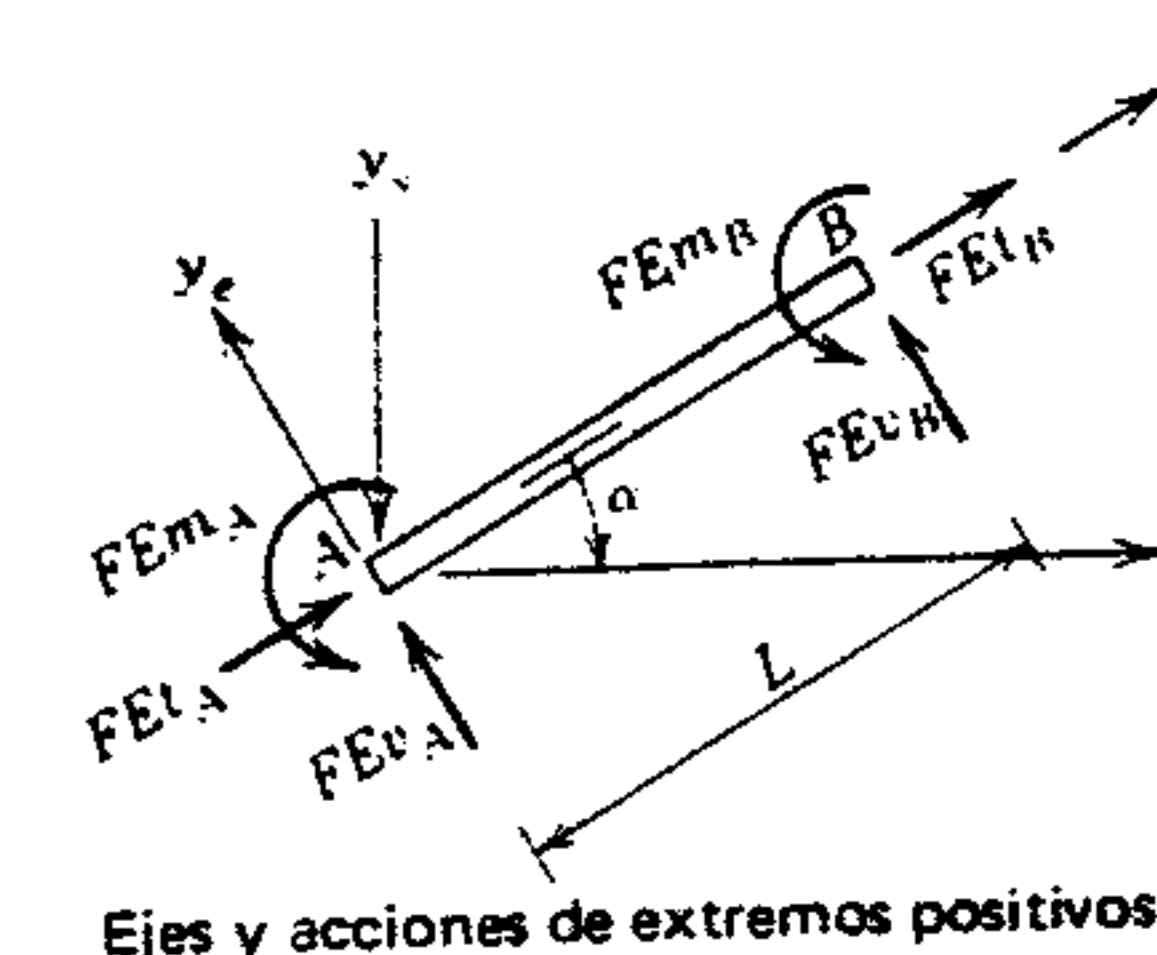
Las acciones de extremo fijo se pueden encontrar por métodos estándar bien conocidos de análisis como el método de momento de área presentado en la sección 4.2 y explicado en la sección 10.2. Para fácil referencia, en la tabla 12.1 se dan las fórmulas para acciones de extremo fijo para elementos prismáticos de marco para seis condiciones de carga. Usando el principio de superposición, estas seis condiciones se pueden combinar de diversas formas para representar casi cualquier condición práctica de carga.

Con mucha frecuencia las cargas sobre elementos están orientadas respecto a los ejes de la estructura. Estas se pueden transformar en cargas orientadas respecto a los ejes del elemento usando las fórmulas de transformación de cargas dadas en la tabla 12.2. Una vez hecho esto, las acciones de extremo fijo se pueden calcular usando las fórmulas de la tabla 12.1.

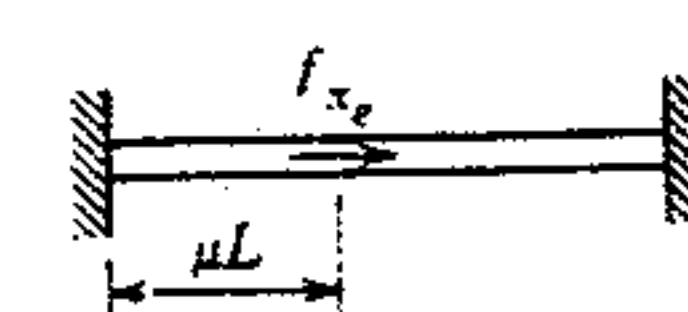
## PROBLEMAS

1. Preparar las matrices de rigidez y resolver las cargas axiales y desplazamientos de juntas para

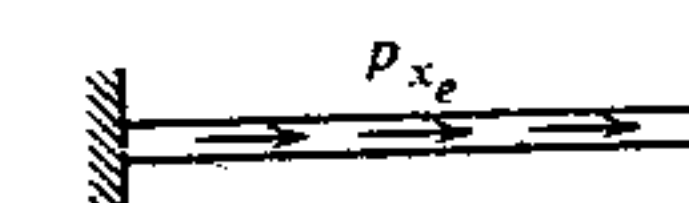
Tabla 12.1 Acciones de extremo fijo para elementos prismáticos de marco.



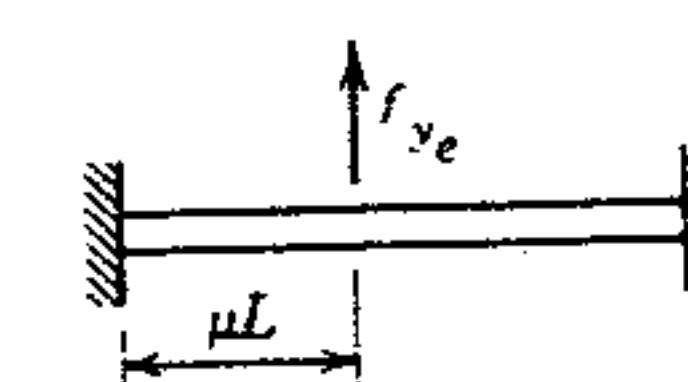
Ejes y acciones de extremos positivos



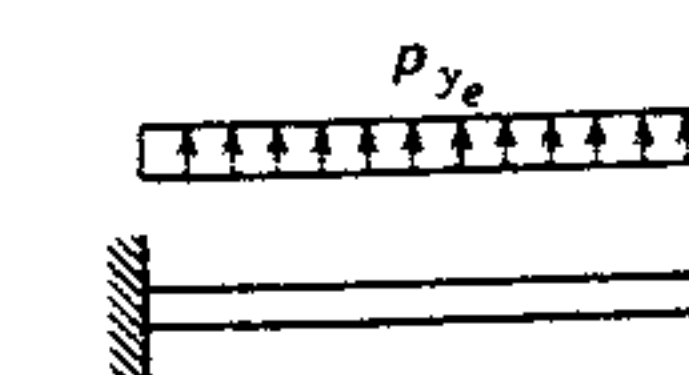
$$\begin{aligned} FEt_A &= -(f_{xe})(1 - \mu) \\ FEv_A &= 0 \\ FEm_A &= 0 \\ FEt_B &= -(f_{xe})\mu \\ FEv_B &= 0 \\ FEm_B &= 0 \end{aligned}$$



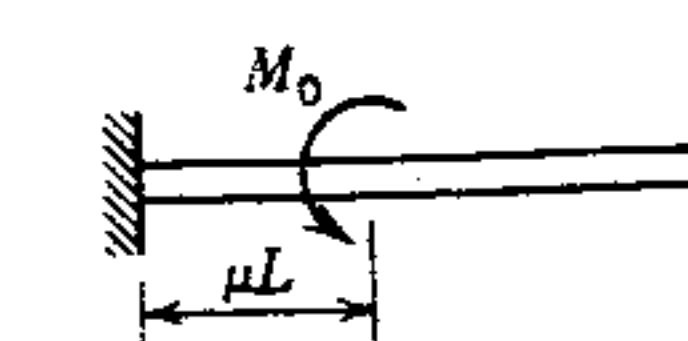
$$\begin{aligned} FEt_A &= -(p_{xe})L/2 \\ FEv_A &= 0 \\ FEm_A &= 0 \\ FEt_B &= -(p_{xe})L/2 \\ FEv_B &= 0 \\ FEm_B &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} FEt_A &= 0 \\ FEv_A &= -(f_{ye})(1 + 2\mu)(1 - \mu)^2 \\ FEm_A &= -(f_{ye})L\mu(1 - \mu)^2 \\ FEt_B &= 0 \\ FEv_B &= -(f_{ye})\mu^2(3 - 2\mu) \\ FEm_B &= (f_{ye})L\mu^2(1 - \mu) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} FEt_A &= 0 \\ FEv_A &= -(p_{ye})L/2 \\ FEm_A &= -(p_{ye})L^2/12 \\ FEt_B &= 0 \\ FEv_B &= -(p_{ye})L/2 \\ FEm_B &= (p_{ye})L^2/12 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} FEt_A &= 0 \\ FEv_A &= 0 \\ FEm_A &= -M_0(1 - 4\mu + 3\mu^2) \\ FEt_B &= 0 \\ FEv_B &= -(6M_0\mu/L)(1 - \mu) \\ FEm_B &= M_0\mu(2 - 3\mu) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} FEt_A &= 0 \\ FEv_A &= 0 \\ FEm_A &= 0 \\ FEt_B &= 0 \\ FEv_B &= -m_0 \\ FEm_B &= 0 \end{aligned}$$



la armadura de la figura 12.38. Suponer que las cuerdas superior e inferior son de 4.5 pulg<sup>2</sup> y las diagonales de 3.0 pulg<sup>2</sup>. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)

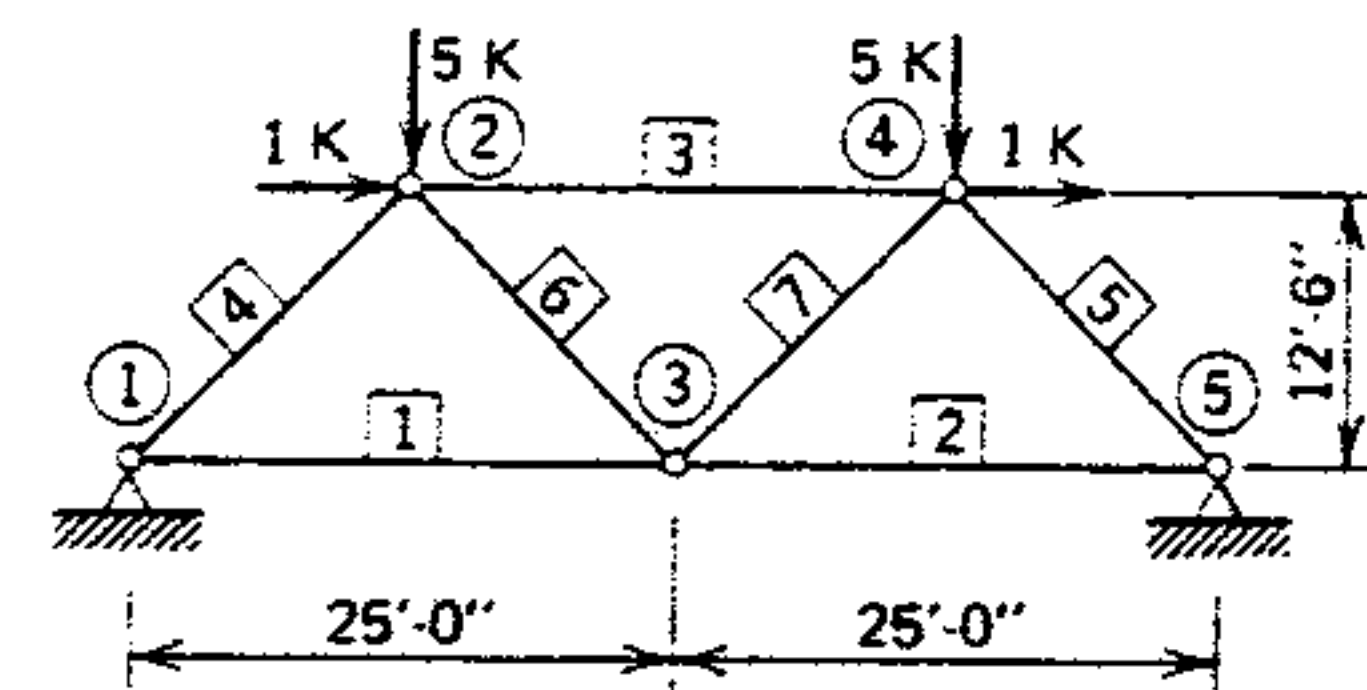


Figura 12.38

2. Preparar las matrices de rigidez y resolver las reacciones, las acciones de extremo y los des-

plazamientos de juntas para el marco ilustrado en la figura 12.39. Suponer que todos los elementos tienen un área de 8 pulg<sup>2</sup> y un momento de inercia de 200 pulg<sup>4</sup>. (Las respuestas se dan en el Apéndice G.)

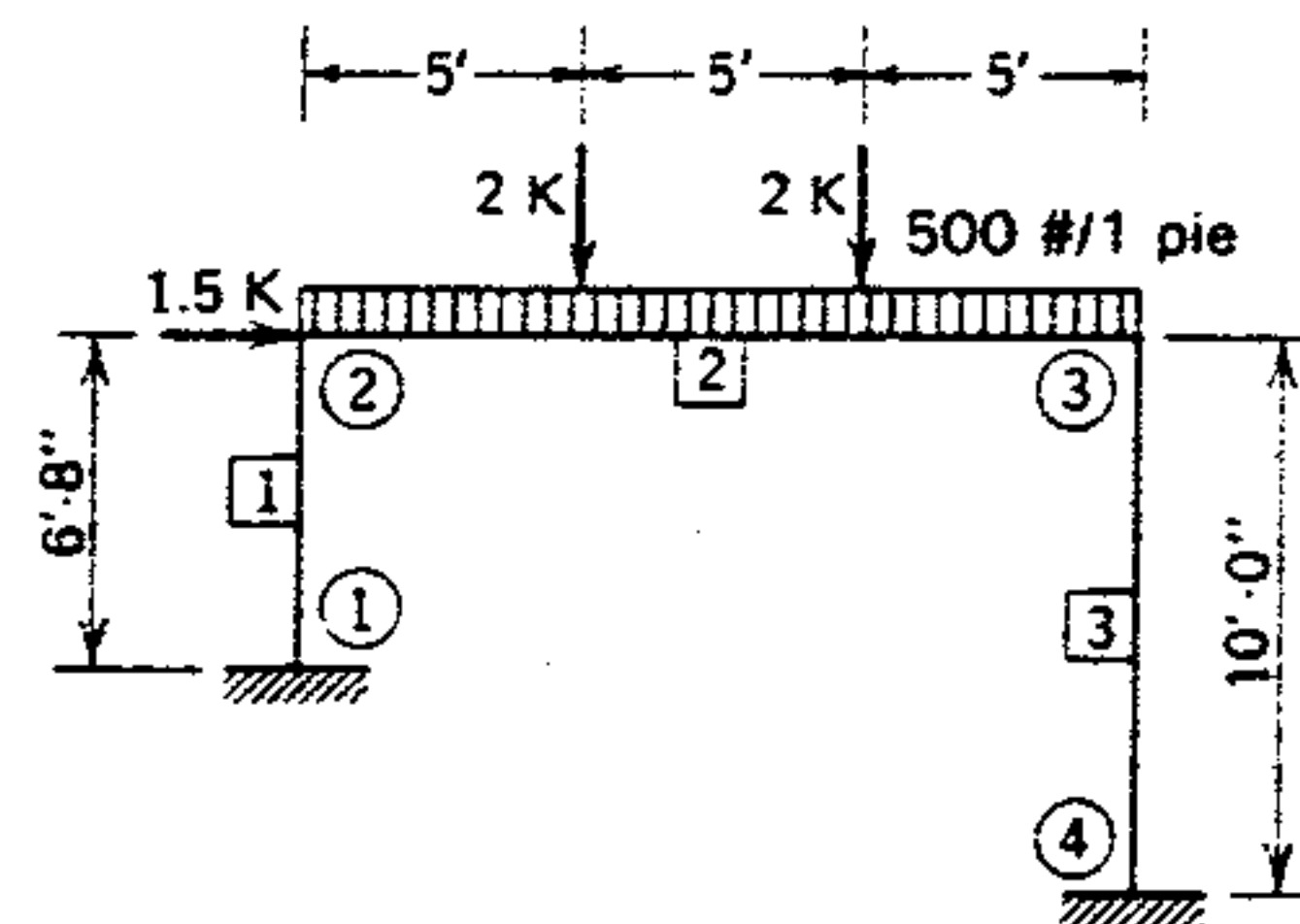


Figura 12.39

Tabla 12.2 Fórmulas de transformación de cargas.

	$\begin{bmatrix} f_{x_s} \\ f_{y_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_e} \\ f_{y_e} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} p_{x_s} \\ p_{y_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_e} \text{ABS}(\sin \alpha) \\ p_{y_e} \text{ABS}(\cos \alpha) \end{bmatrix}$ <p>donde ABS( ) representa el valor absoluto de la expresión entre paréntesis.</p>
	<p>Para cargas muertas del elemento Cargas de gravedad: <math>p_{x_e} = -A\gamma \sin \alpha</math> <math>p_{y_e} = -A\gamma \cos \alpha</math></p> <p>donde A es el área de la sección transversal del elemento y <math>\gamma</math> es el peso por volumen unitario del material de elemento. Las cantidades A y <math>\gamma</math> se deben expresar en unidades congruentes.</p>

## 12.16 UTILIZACIÓN DE COMPUTADORAS

El método de análisis de desplazamiento (rigidez) desarrollada en las secciones anteriores es un método muy general que, con modificaciones apropiadas, proporciona un enfoque unificado y extenso para la solución de cualquier tipo de estructura de marcos. Es sistemático y ordenado, y no requiere decisiones analíticas para definir las incógnitas para problemas individuales. Además, el método comprende sólo operaciones discretas, que están localizadas en sus efectos. Aunque se puede usar efectivamente junto con métodos de cálculo manuales (similares a los usados con la distribución de momentos), la característica más importante del método es su gran idoneidad para usarlo junto con una computadora digital electrónica automática. Sin embargo, para usar el método en una computadora digital, éste se debe expresar en forma algorítmica. Un algoritmo se define como un procedimiento matemático formalizado en que los resultados deseados se obtienen siguiendo una secuencia de operaciones prescrita y no ambigua. Cuando la secuencia de operaciones prescrita se escribe en forma que se pueda implantar en una computadora,<sup>7</sup> se conoce como programa.<sup>8</sup> Para comprender y apreciar mejor la formulación del programa, es conveniente poseer conocimientos sobre algunas de las maneras en que se pueden usar las computadoras; por lo tanto, ahora se presentará una breve explicación de los conceptos fundamentales de la utilización de la computadora.

En términos sencillos, una computadora digital electrónica es un instrumento que acepta un programa y (usualmente) uno o más conjuntos de

<sup>7</sup> Existen muchas excelentes referencias sobre la utilización de la computadora digital electrónica.

Operation, Freedman, 1972; y *Elementary Computer Applications: In Science, Engineering and Business*; Barrodale, Roberts y Ehle, 1971, ambos en John Wiley and Sons, Nueva York.

En los Apéndices D y E se presentan programas para la solución de armaduras planas y marcos planos, respectivamente.

datos para procesarlos.<sup>9</sup> Luego la computadora procede automáticamente, bajo el control del programa, a operar sobre los datos efectuando en secuencia las operaciones definidas por el programa. Los resultados finales se obtienen cuando se completa la secuencia de operaciones para cada conjunto de datos.

Aunque el desarrollo de computadoras digitales electrónicas automáticas modernas se inició con la Harvard Mark I (completada en 1944) bajo la dirección del Dr. Howard Aiken, los aspectos básicos de estas máquinas se derivan de los conceptos y la obra pionera de Charles Babbage, el matemático inglés del siglo XIX.

Aparentemente, Babbage visualizó claramente los conceptos fundamentales que se usan actualmente, y diseñó y empezó a construir una computadora durante la década de 1820.<sup>10</sup> Sus trabajos, que continuaron por varios años, produjeron algunos resultados limitados; pero, debido a las limitaciones de la tecnología de la época, no tuvieron generalmente buen éxito. La Harvard Mark I era una combinación de componentes mecánicos y eléctricos. Con cambios en el alambrado, podía usarse para resolver varios tipos de problemas. La primera computadora completamente electrónica, denominada *Integrador y computador numérico electrónico* o ENIAC, fue desarrollada por John Mauchley y J. P. Eckert en 1946. Después del desarrollo de la ENIAC, la evolución de las computadoras electrónicas avanzó rápidamente, y, en la actualidad, se dispone de computadoras electrónicas que proporcionan una amplia gama de capacidades de cálculo.

La esencia de una computadora está comprendida por sus dos componentes primarios, que se denominan *unidad de memoria* o *almacenamiento* y *unidad de procesamiento central* (CPU). La interrelación de estos dos componentes se bosqueja en la figura 12.40a.

<sup>9</sup> La palabra *proceso*, tal como se usa aquí, es un término genérico que se refiere a todas las operaciones que ejecuta la computadora con los datos.

<sup>10</sup> Este dispositivo está actualmente, en exhibición en el South Kensington Museum, Londres, Inglaterra.



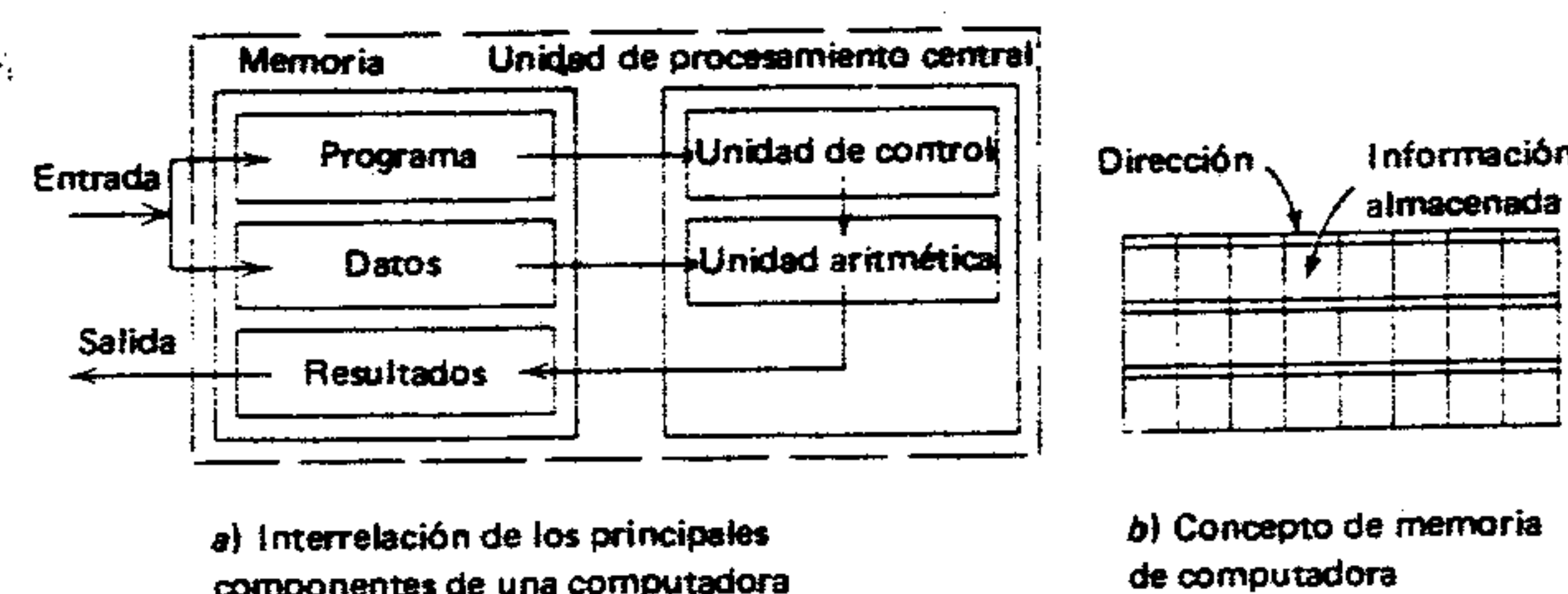


Figura 12.40 Componentes de una computadora.

La función de la unidad de memoria es almacenar el programa, los datos y los resultados intermedios y finales. Puede estar compuesta de núcleos y/o espacios magnetizados en tambores, discos y cintas; sin embargo, por conveniencia, se puede concebir como integrada por un gran número de compartimientos (figura 12.40b), y cada uno de éstos con un *número de localización o dirección* y la capacidad para almacenar una parte de información, que se localiza mediante especificación de la dirección.

En general, la CPU tiene dos partes separadas. Una de ellas, la *unidad de control*, obtiene e interpreta instrucciones del programa que está almacenado en la memoria, mientras que la otra, la *unidad aritmética*, ejecuta los cálculos numéricos reales.

Típicamente, las instrucciones que obtiene e interpreta la unidad de control contiene dos ítems de información: el primero especifica la operación que la unidad aritmética va a ejecutar, mientras el segundo da la dirección de la localización de memoria que contiene los datos sobre los que se va a ejecutar la operación. Estas instrucciones están codificadas en secuencias únicas de dígitos bina-

conjunto completo de palabras de máquina que una computadora puede interpretar se conoce como *lenguaje de máquina* de la computadora. Para procesarlas, todas las instrucciones del pro-

grama se deben expresar en lenguaje de máquina de la computadora que se va a usar.

La codificación de un programa en lenguaje de máquina es una operación increíblemente tediosa y tardada que usualmente requiere los servicios de un programador muy talentoso y capacitado, que debe entender no sólo el programa que se va a codificar sino también las operaciones internas de la computadora. Sin embargo, por fortuna, se han desarrollado sistemas que permiten al programador expresar un programa en un lenguaje de alto nivel que se traduce después por procesamiento de computadora al lenguaje de máquina apropiado. El más fundamental de estos lenguajes, conocido como *lenguaje de montaje*, está estrechamente relacionado con el lenguaje de máquina. Los lenguajes más avanzados se conocen como *lenguajes algorítmicos*. Estos lenguajes de alto nivel son mucho más fáciles y rápidos de usar y, exceptuando el lenguaje de montaje, no requieren conocimiento alguno del lenguaje de máquina. El programa de computadora que traduce el lenguaje de montaje a lenguaje de máquina se llama *programa de montaje*, mientras que los programas que traducen el lenguaje algorítmico a lenguaje de máquina se co-

ladores los proporciona el fabricante de computadoras y ocasionalmente los modifican y mejoran el personal de instalación de la computadora individual. La versión del lenguaje algorítmico del

programa se conoce como *programa fuente*, mientras que la versión del lenguaje de máquina producida por el compilador se conoce como *programa objeto*.

Se han desarrollado algunos lenguajes algorítmicos como BASIC, FORTRAN, PL/I y ALGOL.<sup>11</sup> Este desarrollo fue motivado en parte por el deseo de producir un *lenguaje algorítmico universal*; es decir, un lenguaje que fuera igualmente adecuado para usarlo en todas las computadoras sin importar el modelo, el fabricante o la instalación de la computadora. Desafortunadamente, esta meta, aunque sumamente conveniente, no se ha alcanzado aún. Aunque la mayoría de los lenguajes algorítmicos son más o menos adecuados para su uso en muchas computadoras, cada computadora tiene sus propias excepciones y mejoras. Por lo tanto, antes de usar cualquier lenguaje se debe consultar la literatura de la computadora particular que se va a usar.

La información se comunica a una computadora o se recibe de una computadora a través de instrumentos de *entrada-salida* (ES) que están conectados a la computadora. Los instrumentos de entrada-salida incluyen unidades de tarjetas, unidades de cinta de papel, unidades de cinta magnética, impresoras de línea,<sup>12</sup> y teclados *en línea*, teclados de teletipo y unidades de tubos de rayos catódicos (TRC). Estos instrumentos se pueden instalar en el lugar de la computadora (*sitio central*) cerca de la propia computadora, o a alguna distancia de la instalación (*sitio remoto*), en cuyo caso se denominan *estaciones remotas o terminales remotas*.

<sup>11</sup> Se puede encontrar información general respecto a estos lenguajes en las siguientes referencias: *Basic Programming*, 2da. ed., J. G. Kemeny y T. E. Kurtz; *FORTRAN With Engineering Applications*, D. D. McCracken; *PL/I Programming*, J. K. Hughes; y *A guide to ALGOL Programming*, N. Metcalfe.

<sup>12</sup> Los impresores de línea producen una línea completa de impresión a la vez, a velocidades de hasta 2000 líneas por minuto.

Típicamente, las estaciones remotas envían información a la computadora a través de líneas especiales, líneas telefónicas públicas o circuitos de microondas. La conexión de una estación remota a una línea telefónica pública se puede hacer mediante un esquema de alambrado indirecto conocido como *circuito de acceso de datos* (CAD),<sup>13</sup> o mediante un *acoplador acústico* que transmite señales entre el instrumento de (ES) y un teléfono mediante ondas sonoras audibles.

Las unidades de tarjeta y las unidades de cinta de papel procesan información que es representada por patrones únicos de perforaciones hechas con punzones de precisión en tarjetas Hollerith<sup>14</sup> y cinta de papel. Las unidades de cinta magnética procesan información que es representada de manera similar mediante puntos magnetizados (véase la figura 12.41). Estos patrones de agujeros o de puntos magnéticos se usan para representar información tanto alfabética como numérica. A medida que pasan las tarjetas o la cinta a través de una unidad de entrada,<sup>15</sup> se detectan e interpretan los patrones, y la información se transmite mediante señales eléctricas a la memoria de la computadora donde se almacena hasta que el programa se ejecute. De modo similar, pero a la inversa, la información se recibe de la computadora a través de una unidad de salida que traduce la información y, dependiendo del tipo de unidad, produce tarjetas o cinta perforada, cinta magnética o datos impresos.

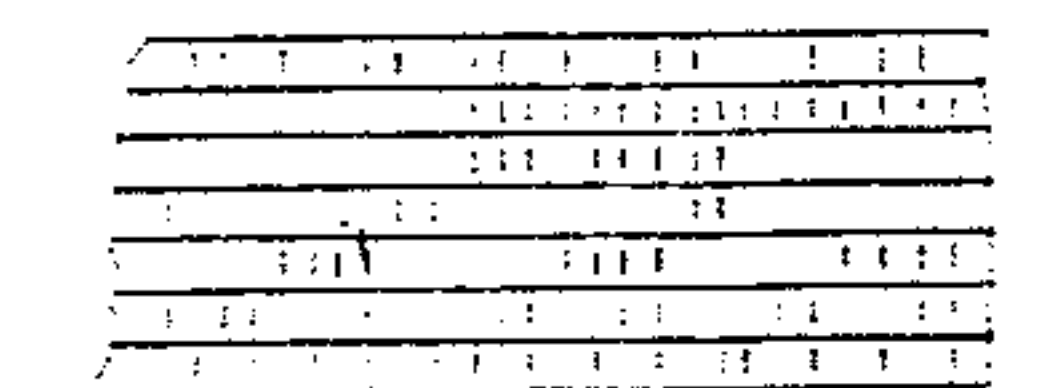
Las impresoras en línea, las impresoras de teletipo y las unidades de tubos de rayos catódicos in-

<sup>13</sup> Se puede obtener información sobre dispositivos (CAD) por medio del representante de la compañía telefónica local.

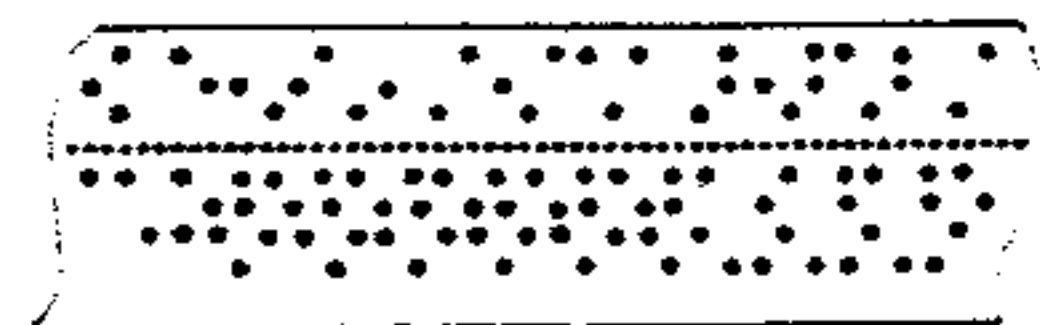
<sup>14</sup> Llevan el nombre del Dr. Herman Hollerith, quien desarrolló tarjetas similares para usarlas con máquinas tabuladoras que se usaron en la compilación del censo de 1890.

<sup>15</sup> Las tarjetas Hollerith y la cinta de papel se pueden preparar usando perforadoras de tarjetas *fuera de línea* y perforadoras de cinta de papel. Normalmente, la cinta magnética se prepara solamente por medio de alguna forma de procesamiento de computadora.

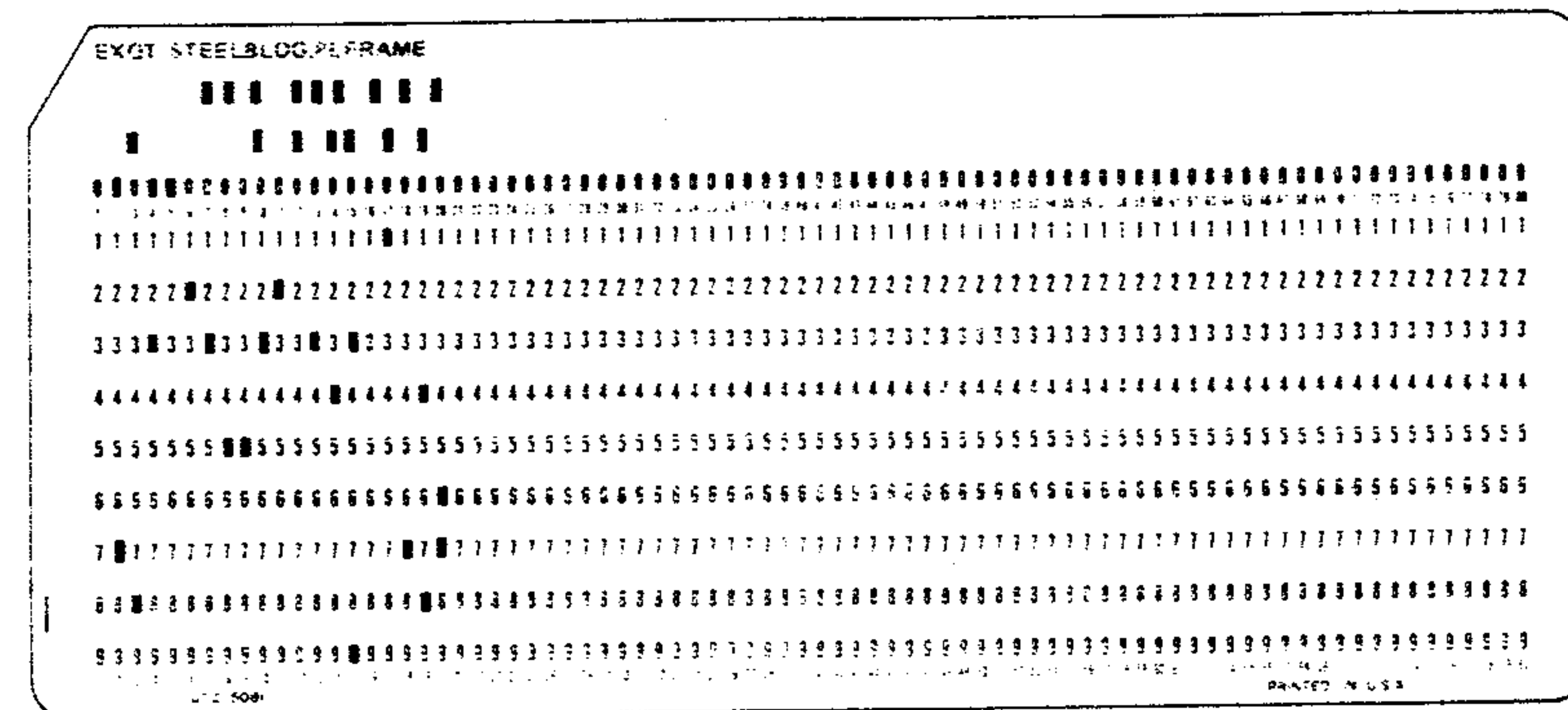




a) Segmento de cinta magnética



b) Segmento de cinta de papel



c) Tarjeta Hollerith

Figura 12.41 Métodos típicos de entrada-salida (los puntos negros representan perforaciones o segmentos magnetizados).

teractúan con la computadora de modo similar a la descrita antes. Pero las señales eléctricas transmitidas a la computadora por estas unidades se activan primariamente por entradas de teclado o por algunas unidades de (TRC) mediante impulsos de alguna de las distribuciones de mecanismos mecánicos y/o fotosensibles que se pueden conectar a las (TRC). La información recibida de la computadora por estas unidades normalmente presentan visualmente en forma de datos impresos; sin embargo, muchas unidades de (TRC) tienen la capacidad de presentar también gráficamente la información.

A menudo, las unidades de entrada y salida se combinan en un solo dispositivo como son el lector de tarjetas combinado, la perforadora de tarjetas o el impresor de línea. Con frecuencia, las unidades pequeñas de cinta de papel y cinta magnética se acoplan con impresoras de teletipo y unidades de (TRC). Además, se dispone de una variedad de graficadoras automáticas *fuera de línea* y se pueden usar para transformar resultados de salida de computadora en forma gráfica.

Una computadora se puede operar de uno de dos *modos* básicos, dependiendo de su construc-

ción interna (*arquitectura*), de su equipo periférico (unidades de ES, almacenamiento auxiliar, etc.) y, lo más importante, su *programa de ejecución*.<sup>16</sup> Estos modos se conocen como *partidas* o *programación múltiple*.<sup>17</sup> Típicamente, las computadoras más antiguas se pueden operar solamente del modo en partidas, mientras que las más nuevas de uno u otro modo.

En el modo por partidas, los programas y los datos o *tareas* relacionados se introducen a la computadora de una manera secuencial. Durante el procesamiento se ejecuta sólo una tarea, se procesa completamente y los resultados se transmiten a una unidad de salida antes de que se accese la siguiente tarea. En la forma más sencilla de operación por partidas, las unidades de ES se localizan junto a la computadora y proporcionan el único medio de comunicación con la computadora. No obstante, las operaciones más complejas por partidas admiten cierto número de unidades remotas de ES, además de las unidades de ES de la central. Las operaciones de este tipo se denominan operaciones por partidas de acceso múltiple.

Las operaciones por partidas también se pueden clasificar como operaciones *en línea* o *fuera de línea* (figura 12.42). El término *en línea* se aplica a operaciones en que las tareas se transmiten directamente a la computadora desde una *cola de tareas* establecida en una unidad lectora de tarjetas o una unidad equivalente de entrada, y los resultados del procesamiento se transmiten directamente de la computadora a una unidad perforadora de tarjetas, a un impresor de línea o a una unidad equivalente de salida. El término *fuera de línea* se aplica a las operaciones en que solamente unidades de ES de cinta magnética tienen acceso a la computadora. En estas operaciones, la cola de tareas se transfiere primero a una cinta magnética mediante un equipo fuera de línea. Esta cinta se denomina *cinta de entrada*. Luego la información conteni-

da en la cinta de entrada se transmite por medio de una unidad de cinta magnética en línea a la computadora para su procesamiento. Los resultados del procesamiento se escriben en una segunda cinta magnética que se llama *cinta de salida*. Después, la información en la cinta de salida se puede transformar por medio de equipo fuera de línea en una salida perforada, impresa o gráfica. Las unidades de ES de cinta magnética operan más rápidamente que las unidades de ES de tarjetas o que los impresores de línea; por lo tanto, la velocidad de transferencia de información entre la computadora y las unidades de ES conectadas directamente es más alta para el modo fuera de línea que para el modo en línea. Esta mayor velocidad de transferencia de información reduce el tiempo ocioso de la computadora; por lo tanto, se puede efectuar más trabajo en la computadora en un período dado. Las operaciones por partidas, antes descritas e ilustradas en la figura 12.42, se ha ido reemplazando rápidamente por las operaciones de programación múltiple.

A diferencia de la operación por partidas, la de programación múltiple permite que haya varias tareas al mismo tiempo en la memoria de la computadora y/o el almacenamiento auxiliar, con una cantidad ya sea fija o variable de almacenamiento hecho para cada tarea. Estas tareas se reciben de las unidades de ES de la central y, usualmente, de una o más de cierto número de estaciones remotas de ES. Normalmente, los resultados del procesamiento se regresan a la misma unidad de ES de la que emana la tarea; sin embargo, según lo desee el usuario, algunos o todos los resultados se pueden enviar a otras unidades de ES en otros lugares, o bien, se pueden enviar al almacenamiento auxiliar en la central y mantenerlos allí para su uso futuro. Las tareas se procesan permitiendo que ingrese una a la vez a la unidad de procesamiento central por un pequeño incremento de tiempo. En los esquemas más sencillos, los incrementos de tiempo de acceso de UPC son constantes para cada tarea, sin embargo, los esquemas más complejos permiten mayores o menores incrementos de tiempo, dependiendo del tipo de tarea y de su prioridad. Así, el procesamiento de todas las ta-

<sup>16</sup> Un programa de ejecución es un programa específico cuya función es manejar automáticamente conjuntos de programas en espera de su procesamiento (*cola de tareas*).  
<sup>17</sup> El término *tiempo compartido* se usa ocasionalmente para indicar programación múltiple.



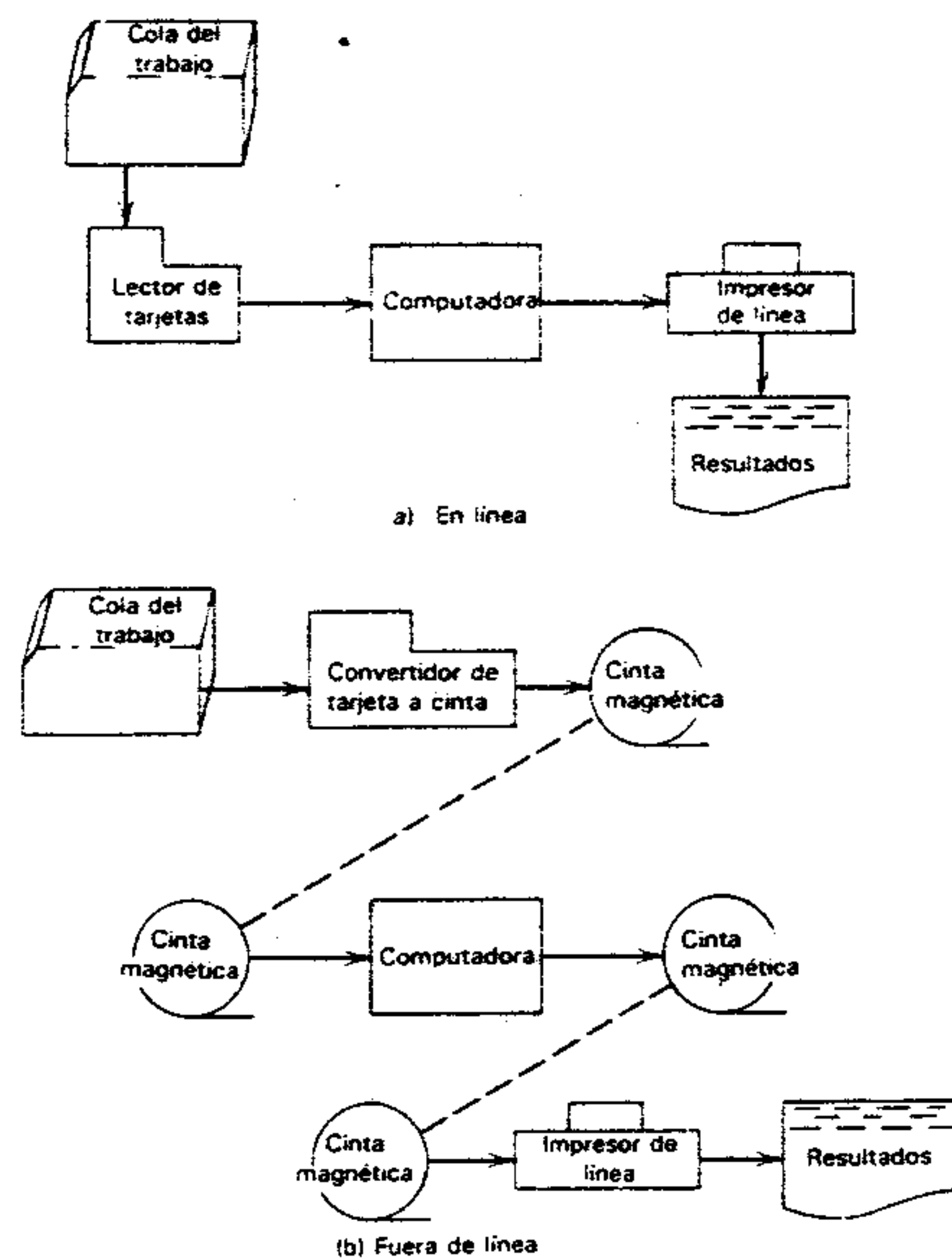


Figura 12.42 Típicas operaciones en partidas en línea y fuera de línea.

reas se hace más o menos concurrentemente con los recursos de la computadora compartidos por todas las tareas. A medida que se completan las tareas individuales, los resultados finales se transmiten a las unidades de ES apropiadas y se libera la memoria y/o almacenamiento usado por la tarea. Alguna o todas las tareas se pueden mover o *permutar* muchas veces entre la memoria de la computadora y el almacenamiento auxiliar durante el período de procesamiento. Es obvio que algunas tareas más cortas se pueden completar mientras se están procesando una o más tareas más largas.

Los programas de computadora se pueden clasificar en general en programas *por partidas* o lotes o programas *interactivos*, dependiendo de la manera en que se proveen las instrucciones y/o los datos al programa. Los programas por partidas se pueden procesar usualmente en computadoras que

operan por partidas o por programación múltiple. Sin embargo, los programas interactivos están restringidos generalmente a usuarios en computadoras especiales o en computadoras que operan en el modo de programación múltiple. Normalmente, no se permite la interacción entre el usuario y la computadora durante el procesamiento por partidas; por lo tanto, todas las instrucciones y/o datos que se van a usar en un programa por partidas deben estar predeterminados e ingresarse a la computadora junto con el programa. En los Apéndices D y E se presentan ejemplos de la for-

partidas, junto con los programas PLTRUSS y PLFRAME. A diferencia del procesamiento por partidas, se permite rutinariamente la interacción entre el usuario y la computadora durante el procesamiento de programación múltiple; por lo tanto, las instrucciones y/o datos se pueden prede-

CREATE OR MODIFY STRUCTURE: &gt;MODIFY

STRUCTURE FILE NAME: &gt;SADSY1

STRUCTURE IDENTIFICATION

 DEMONSTRATION FRAME  
 STRUCTURAL ENGINEERING CONFERENCE  
 JANUARY 17, 1975

GEOMETRY, LOADING, DESIGN, OR ANALYSIS: &gt;ANALYSIS

 \* \* \* \* \*  
 \* ANALYSIS \*  
 \* \* \* \* \*

EXPAND CORE TO 52090 DECIMAL WORDS

INCLUDE MEMBER WEIGHTS? &gt;NO

ANALYSIS COMPLETED...

WEIGHT OF STRUCTURE: 7.321 TONS

OUTPUT RESULTS TO LINE PRINTER? &gt;NO

GEOMETRY, LOADING, DESIGN, OR ANALYSIS: &gt;D

 \* \* \* \* \*  
 \* DESIGN \*  
 \* \* \* \* \*

GROUP: &gt;3

BEAM NUMBER: &gt;32

(DO) OPTION/S (FOR) CONTROL ACTION: &gt;SELECT FOR MC/AMAX

## LIVE LOAD PATTERN

 BEAM/S: 102  
 201  
 202  
 204  
 301  
 303

## COGNATE ACTIONS

 T(A) = 18.167 KIPS  
 V(A) = -11.426 KIPS  
 M(A) = -74.400 KIP-Feet

 T(B) = -17.854 KIPS  
 V(B) = 11.426 KIPS  
 M(B) = 74.400 KIP-Feet

M(C) = 74.400 KIP-Feet .000 FEET FROM A END

 K(X) (ESTIMATED) 1.176: >OK  
 RECOMMENDED SECTION: W 14 x 30

Figura 12.43 Diálogo típico del programa de conversación SADSYS; los datos a la derecha del signo (&gt;) son entradas hechas por el usuario.



terminar e ingresar a la computadora mientras se está procesando el programa.

La interacción entre un usuario y la computadora es uno de los aspectos más atractivos y útiles del procesamiento por programación múltiple. Los programas interactivos se pueden escribir de tal manera que el programa solicite instrucciones y/o datos inmediatamente después de que los resultados se han presentado al usuario. Por supuesto, estos resultados los puede utilizar el usuario para determinar una respuesta apropiada a la petición del programa. Por ejemplo, el procesamiento de un programa interactivo se podría iniciar con una cantidad mínima de datos que luego se podrían usar para calcular algunos resultados preliminares. Estos se enviarían al usuario junto con una petición de instrucciones y/o datos adicionales. En este punto la computadora suspendería el procesamiento del programa hasta que el usuario transmitiera los datos adicionales. Al proporcionar estos datos, el usuario evaluaría los resultados preliminares y proporcionaría instrucciones y/o datos que determinarían no sólo la selección del segmento del programa que se iría a ejecutar en seguida, sino también el flujo de control dentro del propio segmento. Se podría activar un procedimiento similar después de la ejecución de cada segmento del programa.

El tipo de interacción descrita arriba se podría concebir como una conversación entre el usuario y la computadora, puesto que la información proporcionada por uno influye en la siguiente acción del otro. Debido a esta analogía, a los programas interactivos también se les denomina programas de *conversación*. En la figura 12.43 se muestra una parte del diálogo de un programa de conversación.<sup>18</sup>

En la figura 12.44 se da un ejemplo de un programa gráfico interactivo,<sup>19</sup> es decir, una fotogra-

<sup>18</sup> SADSYS An Interactive Computer-aided Structural Analysis System, W. O. Carter y B. W. Santana; trabajo presentado en el International Symposium of Structural Mechanics Software, College Park, MD, 1974.  
<sup>19</sup> Este programa, denominado FRAME, fue preparado inicialmente por Stanley W. Crawley en la Graduate School of Architecture, University of Utah. Los usan esencialmente los estudiantes para verificar soluciones de problemas resueltos por métodos manuales.

fía de la presentación visual en un tubo de rayos catódicos. Este tubo está conectado a una mini-computadora. Se preparó un programa, se ingresó vía impresora de teletipo y se almacenó en el almacenamiento auxiliar. El tubo y la computadora se operan de un modo interactivo. Una señal del teclado pone el programa en la memoria de la computadora, y en el tubo aparece una presentación visual inicial. Todos los datos para un programa cualquiera dado se ingresan directamente en el tubo de rayos catódicos por medio de un inscriptor y una tableta. Los datos se ingresan señalando la caja apropiada presentada en el "menú" del lado derecho del tubo de rayos catódicos. Una secuencia ordenada de señales describirá la planta del marco, el cual se presentará visualmente (a escala) después junto con los otros parámetros del diseño lo suficientemente detallados para resolver el problema y presentar visualmente los resultados. El programa está dispuesto para aceptar rápidamente cualquier información o modificaciones nuevas o adicionales para su procesamiento inmediato y la presentación visual de resultados.

Un programa interactivo proporciona un medio conveniente para incorporar en el proceso de solución las múltiples decisiones subjetivas que implica un diseño profesional cuando se busca una solución factible económica a un problema determinado; por lo tanto, proporciona una herramienta ideal para mejorar el proceso de diseño. Los aspectos adicionales que no se relacionan normalmente con las operaciones por partidas, pero obtenibles mediante las operaciones de programación múltiple, incluye el acceso inmediato a la computadora sin importar la distancia, bibliotecas públicas amplias en línea de funciones estándar apoyadas y mantenidas, procedimientos y programas, y almacenamiento auxiliar que se pueden usar para mantener una biblioteca privada de programas y datos.

Como se señaló ya, los dos programas de los Apéndices D y E (PLTRUSS y PLFRAME) están preparados como programas por partidas. Se podrían usar en una instalación de computadora operando en partidas o programación múltiple. Para usar estos programas, la instalación de computadora debe tener un compilador FORTRAN. El programa entero junto con los conjuntos de datos

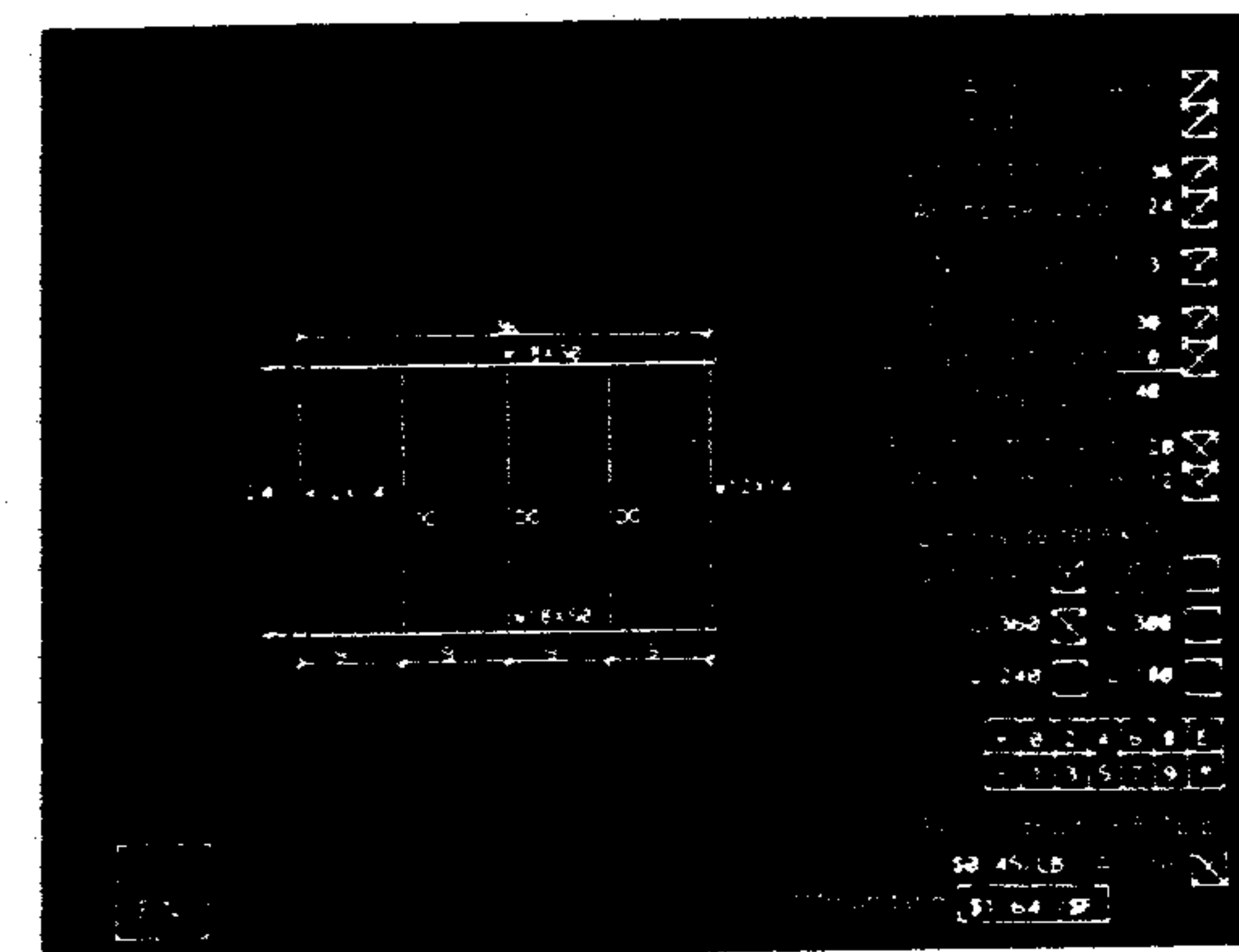


Figura 12.44 Presentación visual de tubo de rayos catódicos.

se podrían perforar en tarjetas (como se ve en los ejemplos ilustrativos) y luego transmitirlos a la computadora utilizando una de las unidades de ES de tarjetas que se mencionaron antes. Como se ve en el ejemplo, los resultados subsecuentes los imprimiría la computadora.

También se puede ingresar el programa en un archivo privado en una unidad de almacenamiento auxiliar de la computadora y mantenerlo allí para uso frecuente. En algunas instalaciones de computadora esto se puede hacer usando unidades de ES remotas. Subsecuentemente, los datos para un problema específico se podrían suministrar de una manera similar. Luego, por medio de un mando apropiado, el programa y los datos se podrían traer a la UPC para procesamiento con los resultados impresos en un dispositivo de salida seleccionado.

## 12.11 PROGRAMAS DE COMPUTADORA PARA EL ANÁLISIS Y EL DISEÑO ESTRUCTURAL

Como se dijo anteriormente, en los Apéndices D y E se presentan dos programas para análisis estructural (PLTRUSS y PLFRAME). Estos programas

son relativamente cortos y fáciles de usar; pero se pueden acomodar a una estructura muy grande. Además, su operación es poco costosa. Se dispone corrientemente de un gran número de programas de computadora para el análisis estático y dinámico de estructuras, y, además, existen varios que incorporan una selección de miembros muy eficiente y rutinas de optimización (del diseño). En general, también se dispone de manuales para el usuario y otras formas de documentación que explican cómo usar efectivamente los programas; por lo tanto, los programas se pueden usar con éxito aun cuando no se esté familiarizado con toda la teoría matemática subyacente. En la tabla 12.3<sup>20</sup> se presenta una lista parcial de programas disponibles a un costo mínimo. Estos programas se pueden usar en casi cualquier computadora de fabricación reciente; pero para operarlos correctamente se requiere hacer alguna alteración y/o modificación.

<sup>20</sup> Además, varios programas útiles para el análisis de estructuras a base de marcos, que son particularmente adecuados para principiantes, se dan en *Computer Programs for Structural Analysis*, W. Weaver, Jr., D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1966.



Tabla 12.3 Programas de análisis y diseño estructurales.

Programa	Autor(es)	Fuente
Programa de computadora para el diseño de columnas de acero CDA 1-69	AISC	American Institute of Steel Construction, Inc. 1221 Avenue of the Americas New York, NY 10020
Programa de computadora para el diseño de vigas, trabes y estructuras de piso CDA 2-72	AISC	American Institute of Steel Construction, Inc. 1221 Avenue of the Americas New York, NY 10020
AUTOTIER	Diseño automático de edificios reticulados	Agaskar, V.L. y Weaver, Jr., W.
DYNATIER	Análisis dinámico de edificios reticulados con muros de cortante, arriostramiento y retallos	Brandow, G. E., Nelson M. F., Manning, T. A., y Weaver, Jr., W.
SOILTIER	Interacción suelo-estructura para edificios reticulados durante movimientos sísmicos	Brandow, G. E., y Weaver, Jr., W.
INELASTIER	Análisis inelástico de edificios reticulados	Bockholt, J. L., y Weaver, Jr., W.
TABS	Análisis tridimensional de sistemas de edificios	Wilson, E. L., y Dovey, H. H.
SAP IV	Un programa de análisis estructural para respuestas estática y dinámica de sistemas lineales	Bathe, K. J., Wilson, E. L., y Peterson, F. E.
SHAKE	Análisis de respuesta sísmica de suelos estratificados horizontalmente	Schnabel, P. B., Lysmer, John, y Seed, H. B.
DRAIN-2D	Respuesta dinámica inelástica de estructuras planas	Kanaan, A. E., y Powell, G. H.

Tabla 12.3 Programas de análisis y diseño estructurales (continúa).

Programas	Autor(es)	Fuente
SADSYS	Un sistema interactivo computarizado de diseño y análisis estructurales para marcos planos elásticos de acero	Carter, W. O., y Santana, B. W. UU/CC Merrill Engineering Building University of Utah Salt Lake City, UT 84112

Tabla 12.4 Empresas que prestan servicios de computación para análisis y diseño estructurales.

Empresa	Domicilio
BCS—Boeing Computer Services, Inc.	Eastern States: P.O. Box 708 Dover, New Jersey 07801 Western States: P.O. Box 24346 Seattle, Washington 98124
Control Data Corporation Cybernet Service McDonnell Douglas Automation Company	8100 34th Ave, South Minneapolis, Minnesota 55440 Box 516 St. Louis, Missouri 63166

y en seguida una revisión completa por personal experimentado.

Varias empresas suministran diversos servicios de computación para uso profesional en los Estados Unidos. Cada una de estas empresas mantiene una o más computadoras. Típicamente, están situadas en diferentes ciudades y están interconectadas en forma de red. Las computadoras operan en el modo de programación múltiple y generalmente son accesibles tanto por medio de una central como de una estación remota. Las empresas mantienen amplias bibliotecas de excelentes programas para el uso de sus clientes. Los programas pueden ir desde los de pequeña escala y un solo objetivo, hasta los programas de gran escala y propósitos múltiples, como NASTRAN, STARDYNE

normalmente son ya sea demasiado grandes para moverlos convenientemente, o bien, de marca registrada; por lo tanto, se deben usar en las computadoras de la empresa. En la tabla 12.4 se dan los datos de tres de estas empresas.

Una vez adquiridos los conocimientos de las técnicas fundamentales del método de análisis de desplazamientos presentado en las secciones anteriores<sup>22</sup> y se tenga una apreciación de cómo se pueden implantar estas técnicas en una computadora digital, se tendrá a la disposición una poderosa herramienta como auxiliar en el proceso de diseño. Los programas PLTRUSS y PLFRAME se pueden usar como fundamentos de una biblioteca de programas, que se puede ampliar con la adición de otros programas de uso general adaptados de los

<sup>21</sup> La revisión crítica de varios programas de análisis estructural en gran escala, disponibles en esta manera, se presentan en *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Part II*, S. J. Fenves, N. Perrone, A. R. Robinson y W. C. Schnobrich, eds., Academic Press, Nueva York, 1973.

<sup>22</sup> Un desarrollo completo del método de análisis de desplazamiento, referido a estructuras a base de marcos, se puede encontrar en cualquiera de varios excelentes textos de referencia. Véase, por ejemplo, *Analysis of Framed Structures*, J. M. Gere y W. Weaver, Jr., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1965.



que se encuentran en el dominio público o desarrollados en particular para aplicaciones específicas. Sin embargo, debe recordarse que los programas de computadora del dominio público no están, en

general, certificados; por lo tanto, la responsabilidad por su uso adecuado y por la validez de los resultados producidos recae en el profesional del diseño y no en los autores de los programas.

## 13

### Proyecto de diseño de un edificio

*Los procedimientos y cálculos de diseño se basan en la Especificación AISC 1978.*

#### 13.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos 9 y 10 se trataron principalmente sistemas de marcos de un solo claro y un solo piso: sistemas con armaduras con claros entre muros o pilares; marcos arriostrados y marcos rígidos, pero aún falta aplicar los principios y métodos de diseño desarrollados hasta aquí al diseño de un sistema reticular de marcos con vanos y pisos múltiples (figuras 5.39 y 13.12). Por lo tanto, este capítulo final se dedicará al diseño de un edificio típico de mediana altura mediante este tipo de construcción.

Debe señalarse el hecho de que existe una fuerte competencia económica entre los sistemas de marcos de acero, concreto reforzado y de combinaciones de acero y concreto reforzado, es decir, en edificios de 3 a 14 pisos. Sin embargo, en edificios más altos aumentan las ventajas del acero sobre las del concreto reforzado a medida que aumenta la altura. Esto se debe principalmente a las relaciones relativas entre resistencia y peso entre los dos tipos de construcción y a la velocidad y facilidad de construcción del primero.

Como se dijo antes, el diseño total del edificio se inicia con una cuidadosa consideración de la función y la selección del lugar de la obra, y con frecuencia, de un presupuesto restringido. Las dos primeras consideraciones establecen los requisitos ambientales internos y externos, y la segunda, los límites económicos entre los que se debe buscar una solución.

La función esencial del diseñador consiste en crear una arquitectura que satisfaga y exprese estéticamente estos requisitos. Raras veces el diseñador

también raras veces podrá lograr todo lo que él o el cliente desea. Con frecuencia, su libertad de elección se verá afectada por limitaciones de tiempo y materiales, y limitaciones impuestas por reglamentos públicos que tienen el propósito de proteger la salud



y la seguridad pública y en cierta medida, la propiedad, además de varias otras. Asimismo, el diseñador debe afrontar cada vez más la necesidad de proporcionar una estructura que tenga una inherente adaptabilidad a cambiar e, incluso, de diferentes requisitos funcionales.

La retícula de planeación básica es uno de los auxiliares de la planeación más importantes que han surgido como una respuesta parcial a esta disposición exigente de requisitos y limitaciones. Es decir, una vez tomada la decisión de usar un material estructural o una combinación de materiales determinados, por ejemplo, acero, concreto reforzado, concreto reforzado y acero combinados, o madera, se establece una retícula de planeación que refleje los límites del margen económico de ese material o combinación de materiales y la capacidad estructural de los entrepisos y miembros de apoyo verticales que lo acompañan. Usualmente, en esta retícula se define uno o más patrones de espacios rectangulares o cuadrados en la planta, con columnas situadas en todos o la mayoría de los puntos de intersección de la retícula. Toda la planeación arquitectónica se hace dentro de estas líneas imaginarias de la retícula o cuadrícula. Las ventajas adicionales obvias son la posibilidad de mantener un control dimensional entre los pisos y la posibilidad de obtener economías mediante la repetición de tamaños de miembros para cualquier piso y, con frecuencia, para todos excepto el techo y la planta baja.

Algunos diseñadores piensan todavía que el uso de una retícula, y definitivamente, la disciplina adicional del dimensionamiento modular, restringe en gran medida su libertad de creación y su individualidad. Sin embargo, para la mayoría de las estructuras, las ventajas parecen más numerosas que estas pretendidas desventajas. Por ejemplo, en la figura 13.1 se ilustra la planta de cimentación de un edificio cuyo carácter la mayoría de los diseñadores consideraría es individualista,<sup>1</sup> bien diseñado (figu-

evidente el patrón reticular definido, constituido

<sup>1</sup> Oficina de la Quinta Avenida en Nueva York de Manufacturers Hanover Trust Company, diseñado en 1953 por Skidmore, Owings y Merrill, arquitectos, y Weiskopf y Pickworth, ingenieros estructurales.

por los espaciamientos entre columnas. Al nivel del primer piso (figura 13.3) se obtiene una mayor área de piso mediante miembros de claros más largos, y en los pisos superiores se regresa a una retícula más económica.

Es obvio que entre más grande sea un edificio y más repetitivos sean los tamaños de los vanos y las cargas, mayor será el grado de economía y eficiencia obtenibles.

### 13.2 PROBLEMA DE DISEÑO

Las demás secciones de este capítulo se dedicarán al diseño de un edificio comercial pequeño y deliberadamente simplificado. Se dará énfasis al desarrollo del sistema de marcos, cálculo de cargas, determinación de fuerzas cortantes, momentos flexionantes y cargas directas o normales, y al diseño de miembros estructurales típicos.

Normalmente, los documentos contractuales para la presupuestación y construcción son los planos del terreno y los planos arquitectónicos, estructurales, mecánicos/eléctricos, junto con las especificaciones. Sin embargo, para este ejemplo bastará algo menos que un juego completo de planos y especificaciones. Por ejemplo, los planos arquitectónicos de las figuras 13.4 a 13.10 son adecuados para mostrar un edificio que puede servir para un pequeño negocio al menudeo o como edificio de oficinas con un espacio comercial en el primer piso. Se supondrá que el edificio está situado en un área suburbana con mucho terreno en los tres lados para entrada y salida. El lado oeste da a la vía pública; no obstante, la entrada del público se localizará en el lado sur, que es más accesible desde el área de estacionamiento situada en el lado este. Asimismo, la entrada de servicio en el lado norte también es accesible a través del área de estacionamiento. Como no hay estructuras inmediatamente adya-

ría contra el fuego.

**Planos.** La planta del sótano se ilustra en la figura 13.7. El elevador de carga y pasajeros empieza en este nivel, y el equipo hidráulico está situado junto al pozo del elevador. El principal cuarto de instala-

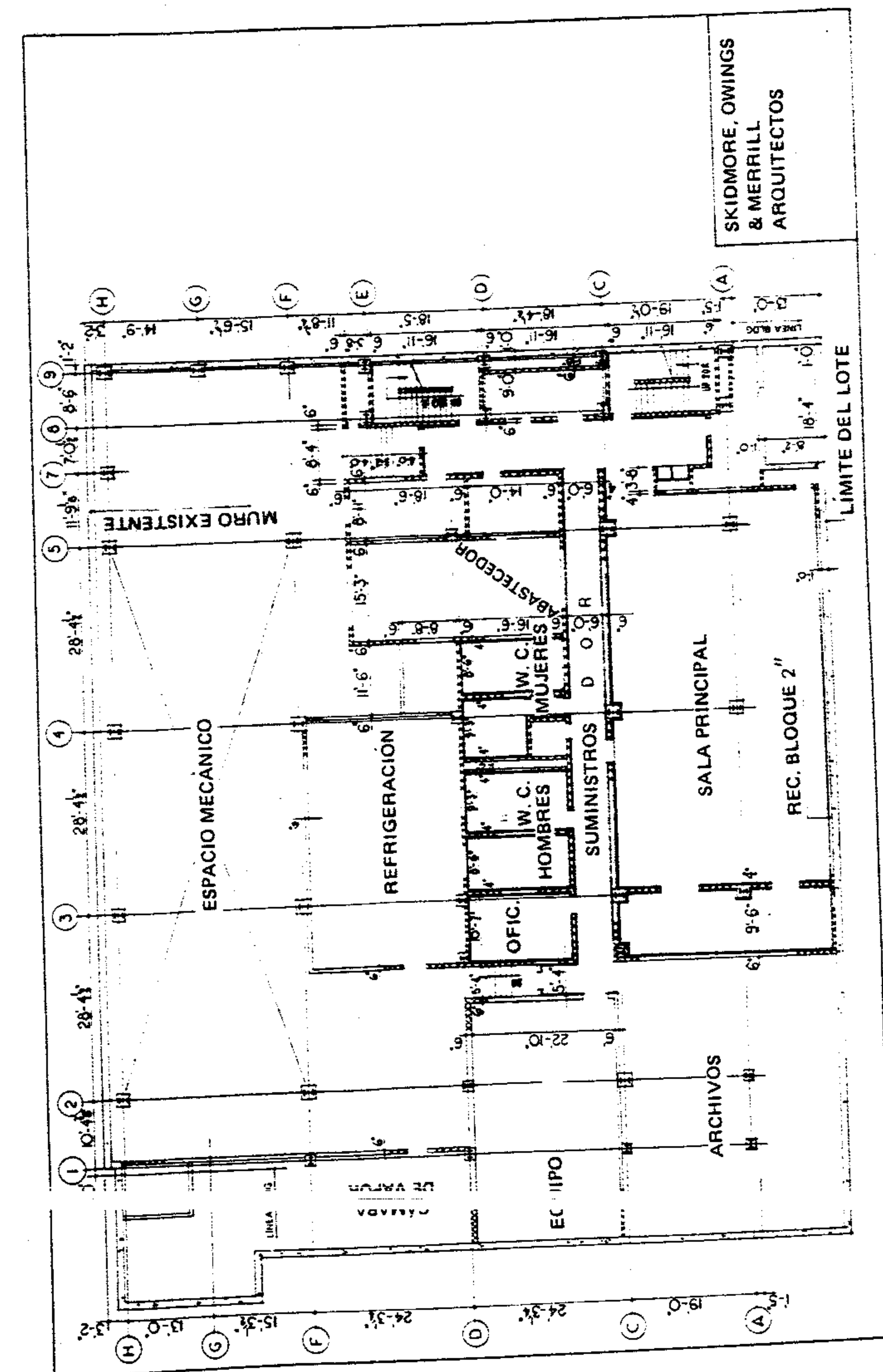


Figura 13.1 Planta de la cimentación.



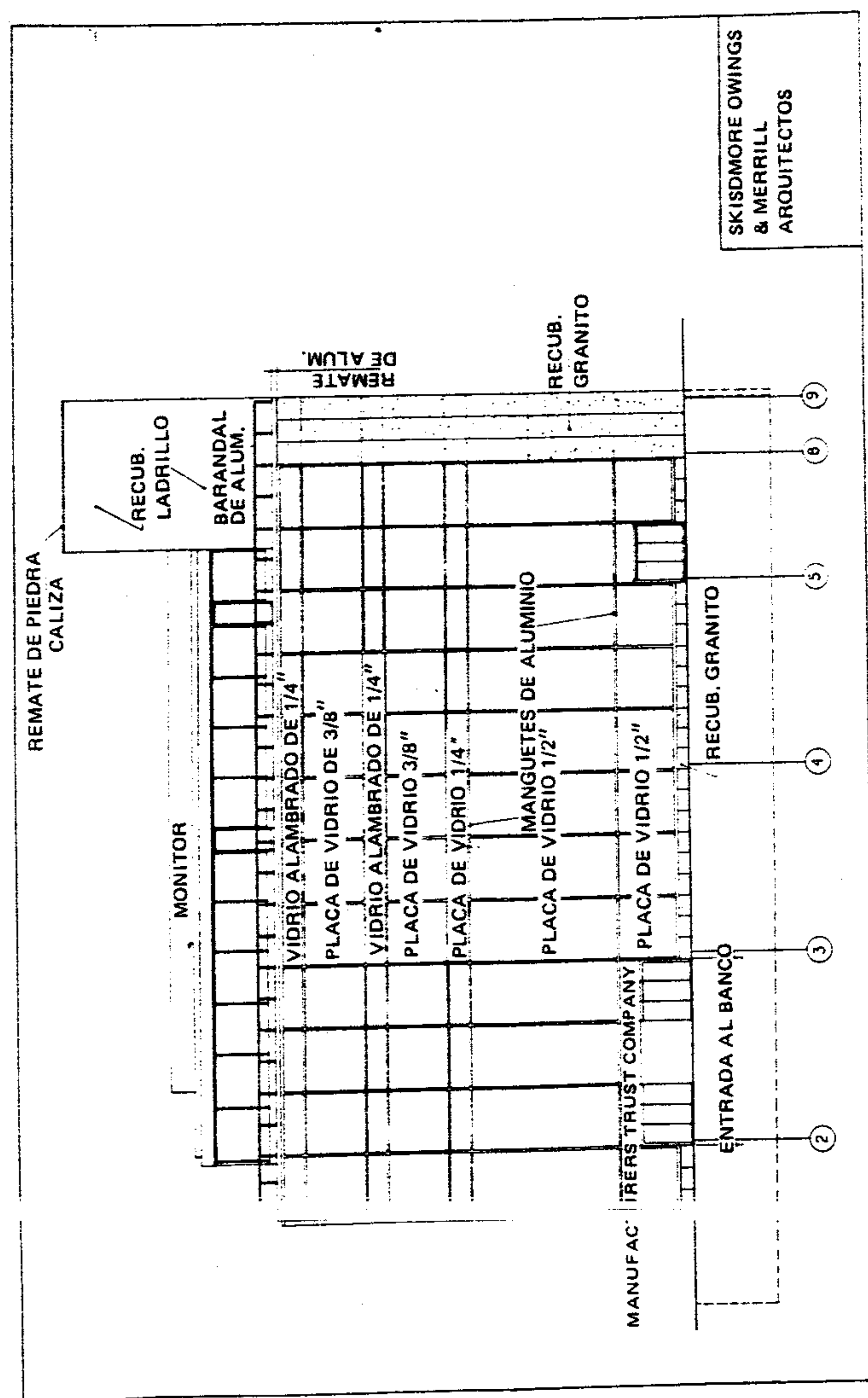


Figura 13.2 Elección norte.

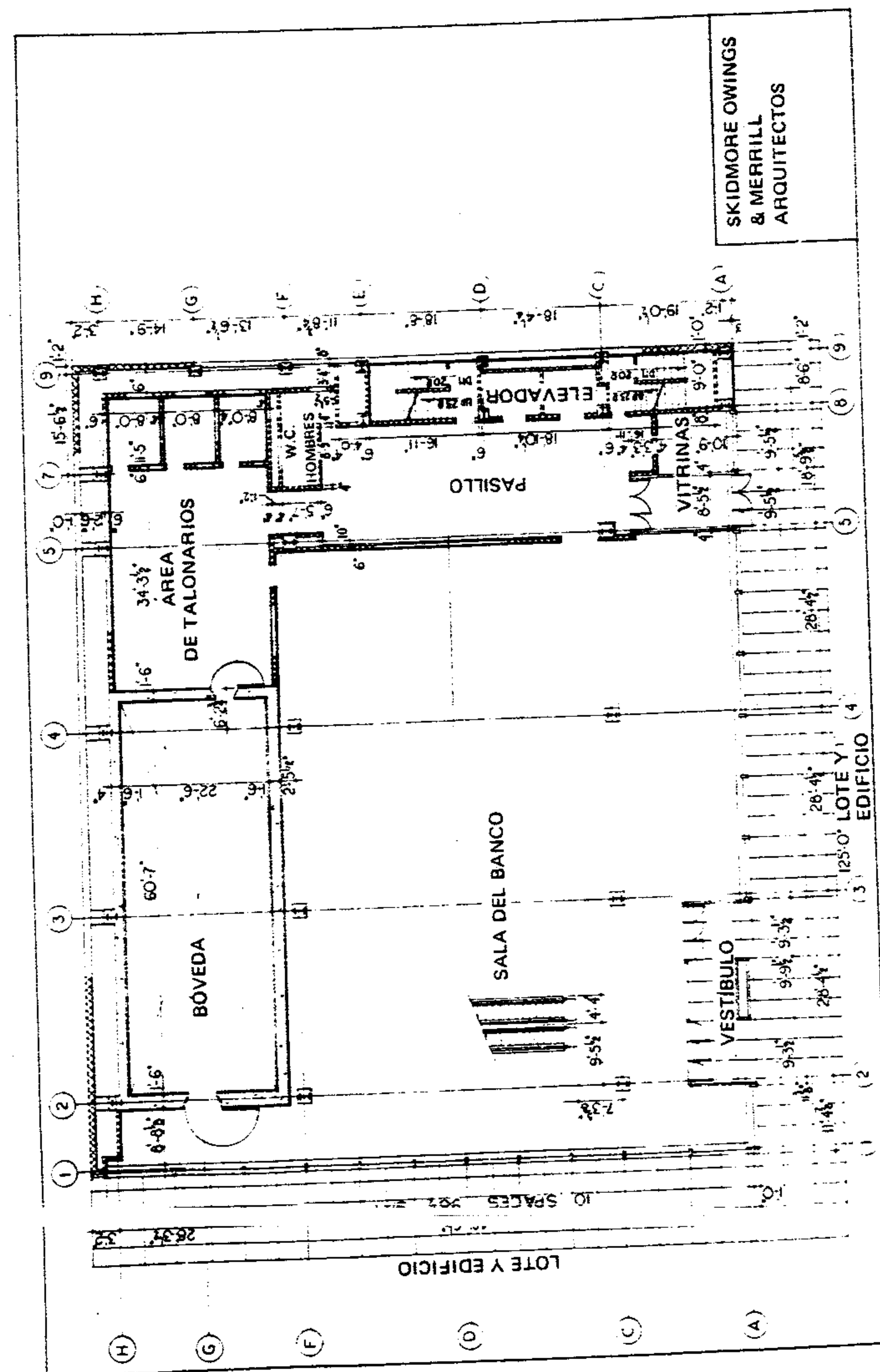


Figura 13.3 planta del primer piso.



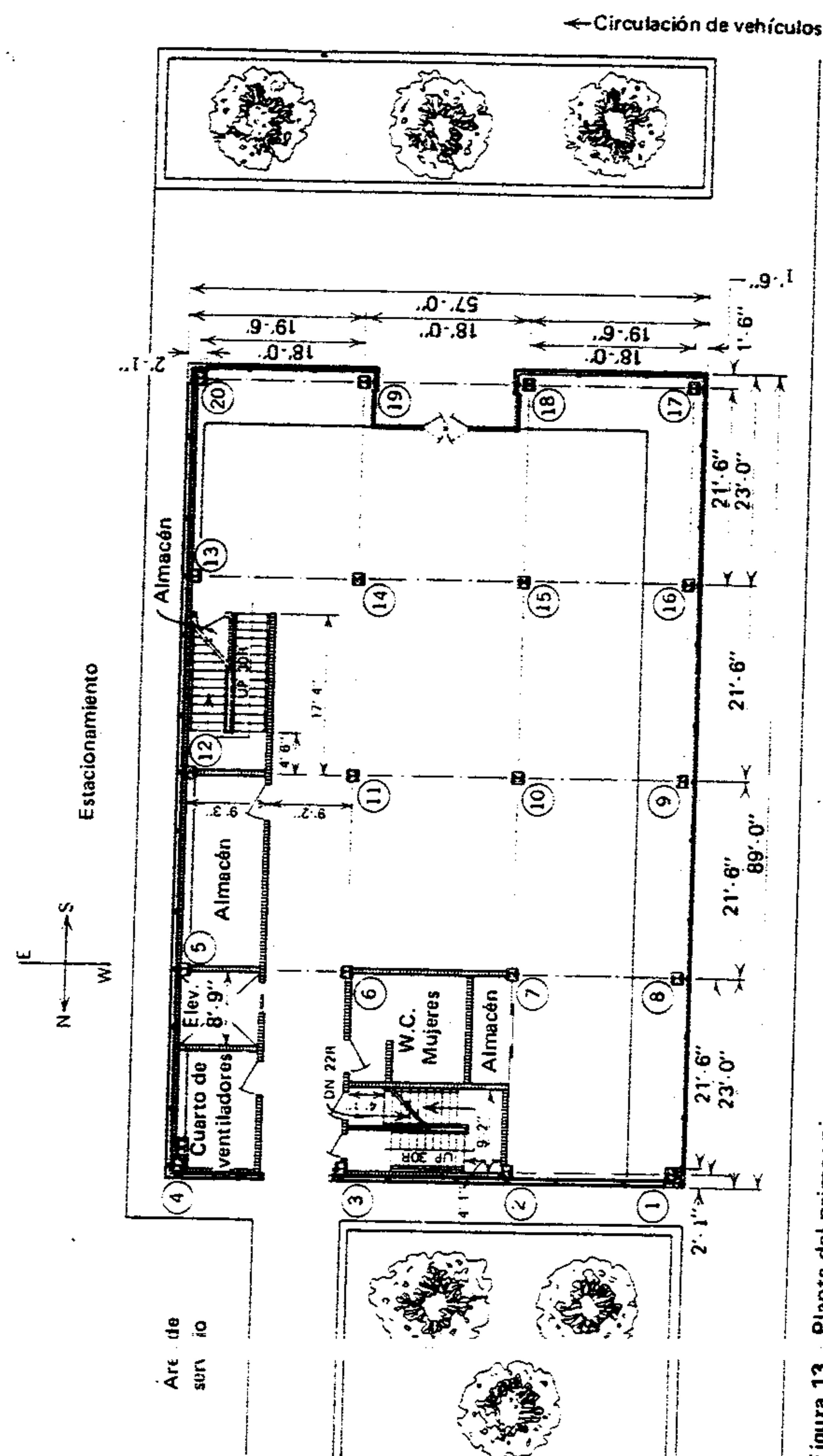


Figura 13. Planta del primer piso.

(Nota: Debido al espacio disponible y a la necesidad de mostrar aspectos selectos, todas las plantas y elevaciones están a una escala solamente aproximada y aparecen detalles limitados. Sin embargo, se pueden derivar detalles arquitectónicos adecuados).

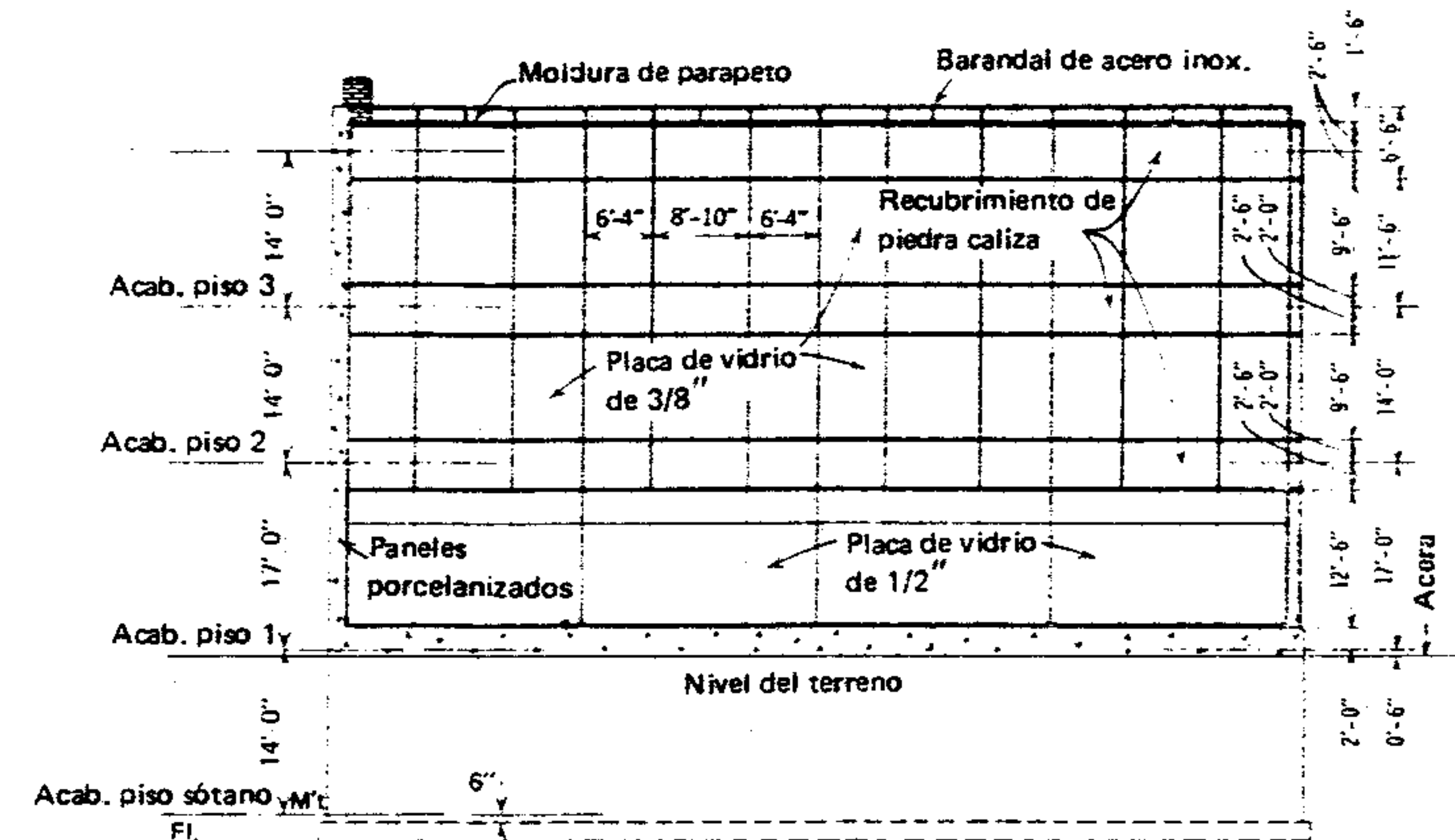


Figura 13.5 Elevación oeste.

ciones mecánicas (calentador) se localiza también en este nivel; sin embargo, el cuarto de ventiladores está situado inmediatamente arriba en el primer piso para permitir la salida del aire usado al área de servicio. Los espacios para almacenamiento pesado

y mantenimiento del edificio también están situados en el sótano.

Para este y todos los demás pisos se ha establecido una retícula de planeación básica de 18 pies X 21 pies 6 pulg. Con esta retícula se simplifi-

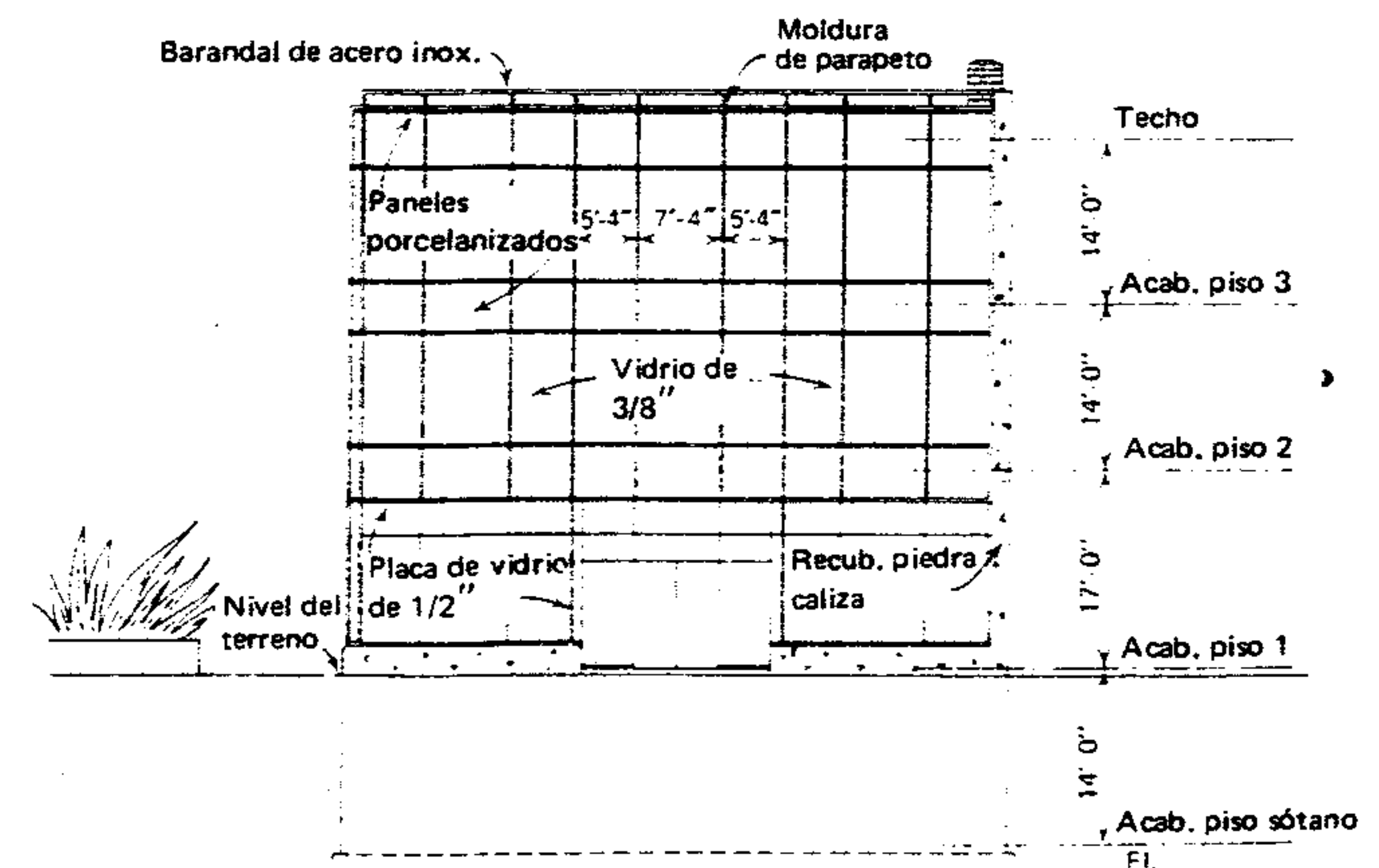


Figura 13.6 Elevación sur.



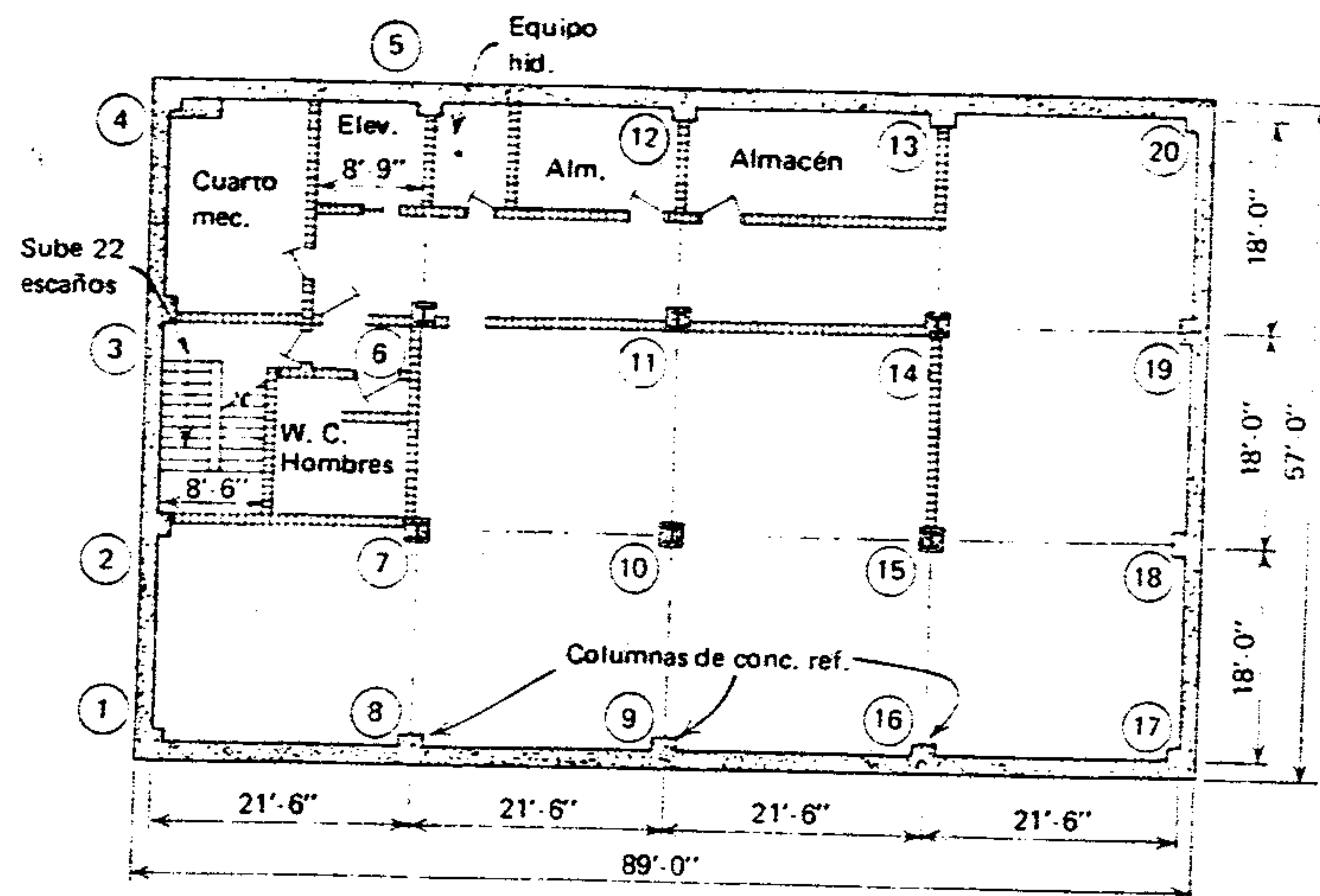


Figura 13.7 Planta del sótano.

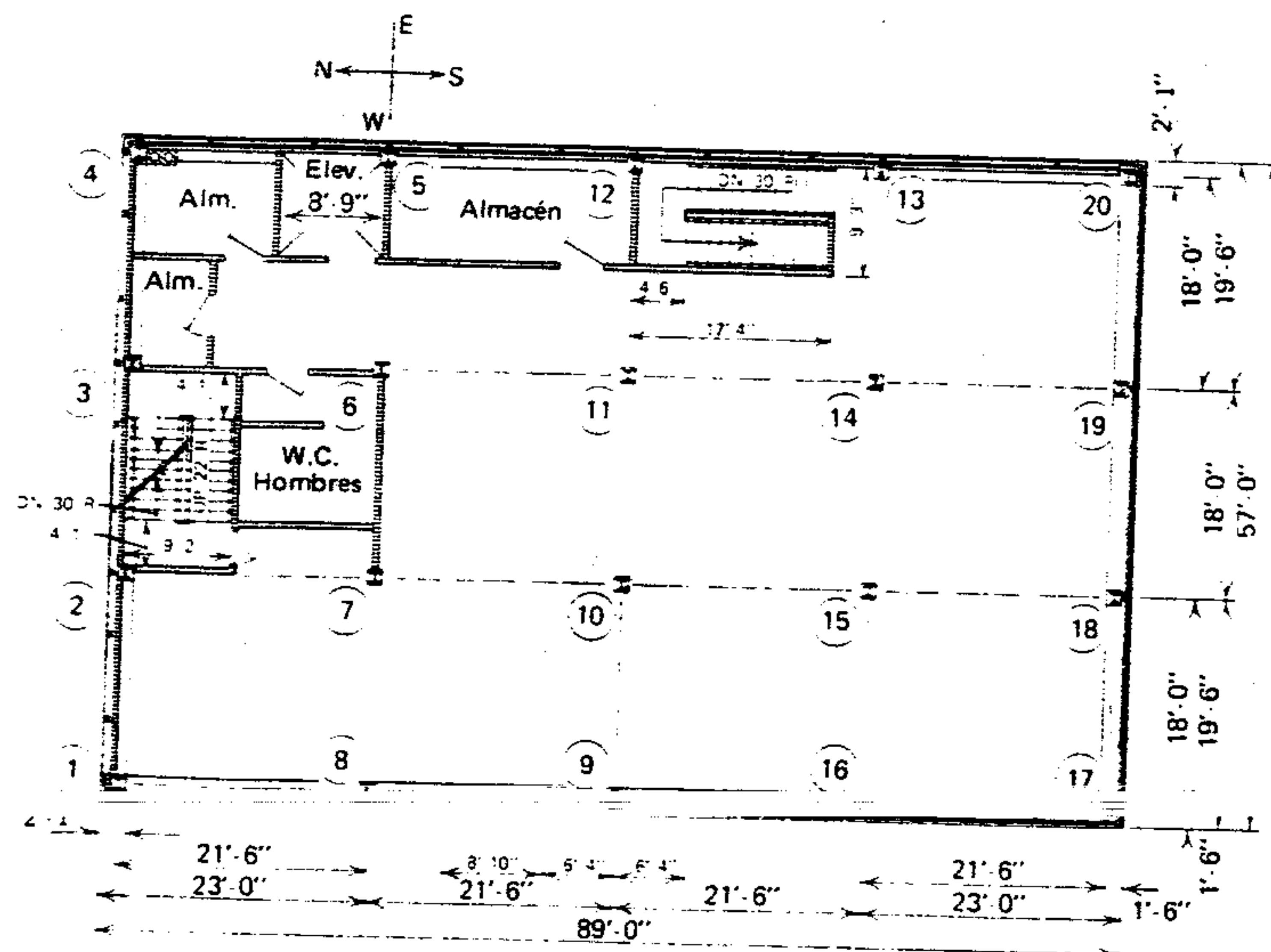


Figura 13.8 Planta del segundo piso.

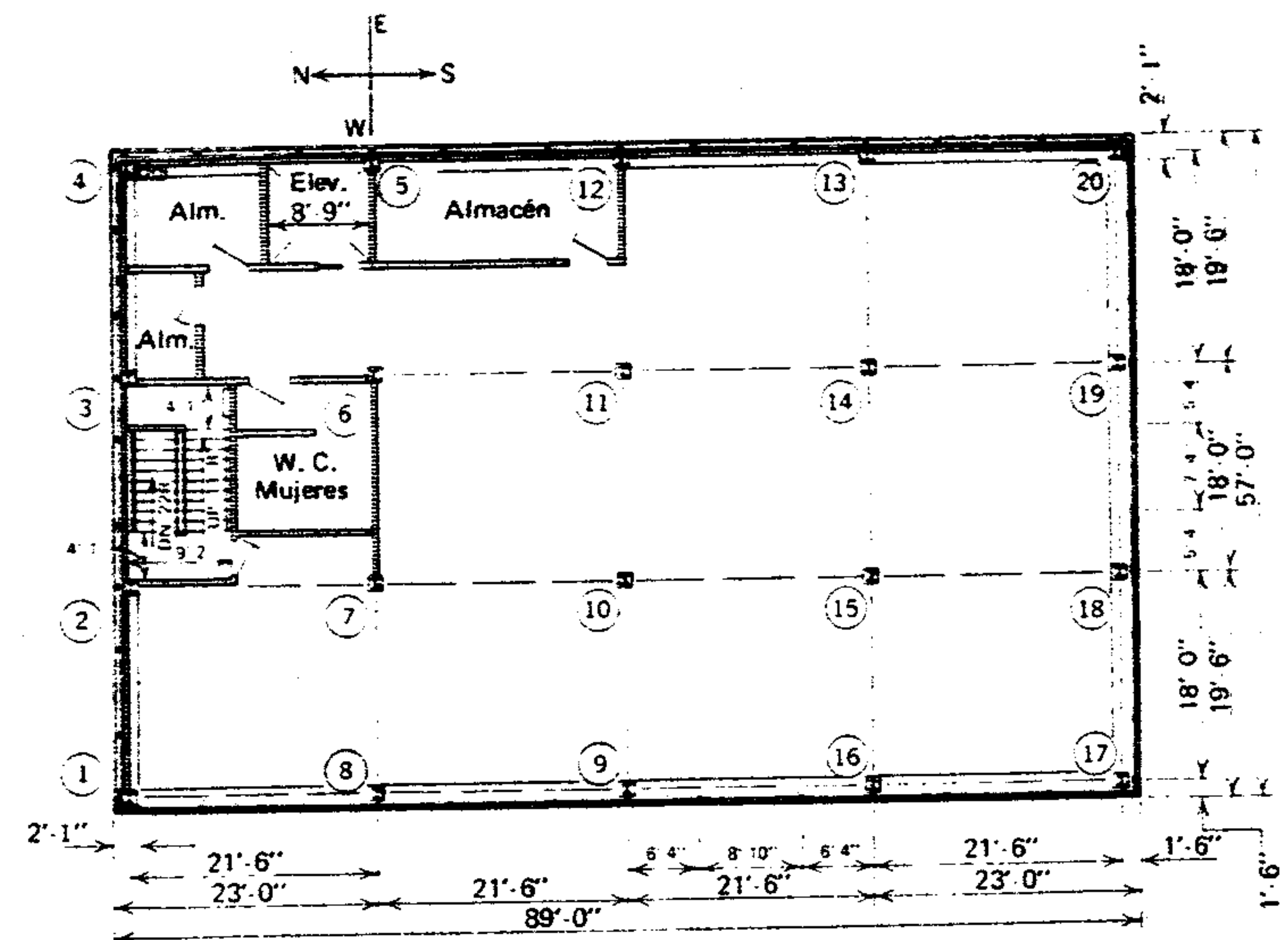


Figura 13.9 Planta del tercer piso.

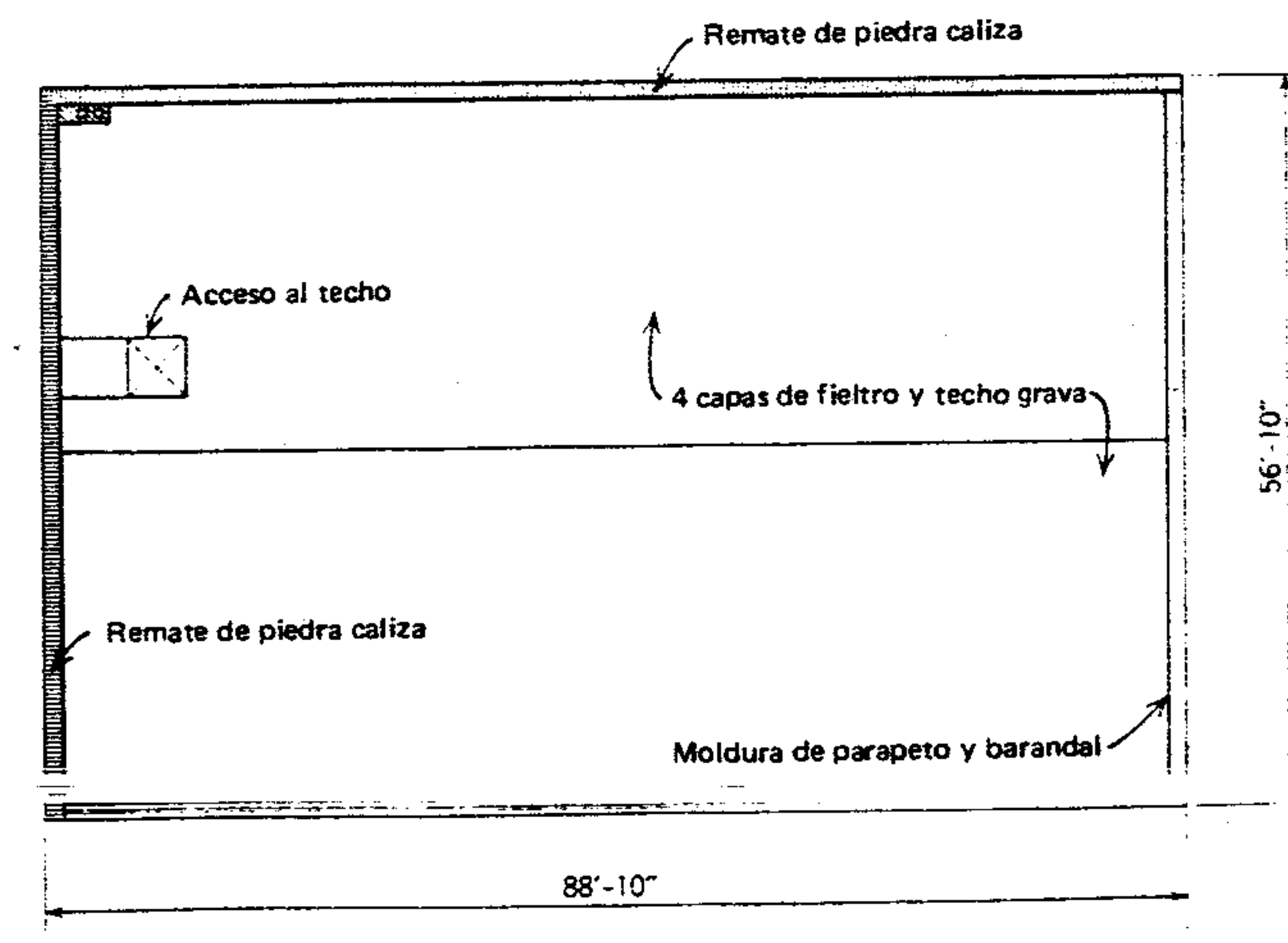


Figura 13.10 Planta del techo.



cará el marco y usará un número considerable de miembros repetidos. Mediante las anteriores decisiones de planeación se logra una mayor simplificación, es decir, colocando en el sótano las cargas más pesadas y menos uniformes. Por ejemplo, usando un elevador hidráulico, no se necesitará levantar cargas de equipo hasta la parte superior del pozo del elevador. La profundidad necesaria del pozo del elevador se reduce al mínimo localizando el equipo hidráulico junto al pozo del elevador en el sótano. Además, se ha eliminado la necesidad de una torre de penthouse y enfriamiento al nivel del techo, mediante la localización de las actividades de mantenimiento y el equipo mecánico pesado en el sótano con el equipo mecánico de ventilación un poco menos pesado arriba (al nivel del primer piso). Finalmente, mediante una losa de concreto reforzado directamente sobre el suelo (es decir, sobre un relleno especial), las columnas interiores se pueden apoyar directamente en zapatas independientes debajo de la losa, liberándolas así de estas cargas del piso del sótano. Por supuesto, aquí se han tomado estas decisiones de simplificación para que el problema de diseño se resuelva dentro de los límites de este capítulo. Sin embargo, no son irrazonables para el tipo de edificio que se está considerando.

En la planta del sótano se notará también que la escalera de incendio sobre el lado norte también empieza en este nivel, pero no así la escalera principal.

Las plantas del primero, segundo y tercer pisos (figuras 13.4, 13.8 y 13.9) son muy similares entre sí. Los aspectos especiales en el primer piso son el cuarto de ventiladores ya mencionado, una salida protegida del cubo de la escalera del lado norte al área de servicio, entrada principal y plataformas elevadas de exhibición a lo largo de los muros sur y poniente. En el tercer piso, la diferencia principal es la falta de escalera frontal.

En los planos mencionados hasta aquí, se notará que las instalaciones de baños interiores ventilados para hombres y mujeres están localizadas en pisos alternados.

La figura 13.10 muestra una superficie drenada rodeada por un muro de parapeto e interrumpida solamente por un tragaluz y un acceso al techo sobre el cubo posterior de escaleras.

**Muros exteriores.** Los muros de cimentación exteriores bajo el nivel del terreno son de concreto reforzado tipo membrana impermeable, apoyados sobre zapatas corridas. Las columnas exteriores en el piso del sótano, parcialmente dentro de los muros de cimentación, también son de concreto reforzado (figura 13.7).

La estructuración del primer piso que incide sobre los muros de cimentación exteriores es como sigue:

1. Las columnas de acero se llevan por abajo de las trabes y vigas transversales que se intersectan y están ligadas a sus bases que descansan sobre las columnas reforzadas del piso del sótano.
2. No hay vigas de fachada; las vigas intermedias (muros norte y sur) se apoyan en y están ligadas directamente a los muros de cimentación de concreto reforzado. (Véase la sección 13.7 para una definición de vigas intermedias).
3. Las trabes de fachada (muros este y oeste) se apoyan en y están ligadas directamente a los muros de concreto reforzado.
4. La losa de piso está volteada hacia abajo para juntarse e integrarse al muro de concreto reforzado.

Con las conexiones de acero a acero totalmente flexibles en el nivel del primer piso, y con bases de columnas interiores articuladas al nivel de piso del sótano pero con columnas continuas desde el sótano hasta el segundo piso, el efecto de la citada construcción de muro exterior en y abajo del primer piso consiste en crear un diafragma rígido al nivel del primer piso, liberando la construcción abajo de este nivel de los efectos del viento. Las columnas no sobresalen del nivel del techo.

Los muros exteriores norte y este, desde el muro de cimentación al casco del parapeto, son muros de cortina de acero porcelanizados y sin ventanas, con un resaldo de bloques de 4 pulgadas de concreto de agregado ligero y enyesados en los espacios interiores (excepto en el pozo del elevador).

En los muros oeste y sur (figuras 13.5 y 13.6), se usa un revestimiento de piedra caliza de 4 pulgadas

abajo de las ventanas de exhibición. Este revestimiento se extiende hacia arriba en la fachada del edificio, en las esquinas extremo este y norte y regresa una distancia igual a lo largo de los costados este y norte. Sin embargo, este revestimiento se apoya sobre los muros de cimentación y está ligado solamente a las columnas para soporte lateral, es decir, el peso se transmite directamente a los cimientos. El resto de los muros sur y oeste al nivel del primer piso es para la entrada y los escaparates de vidrio.

Los muros sur y oeste en y sobre el nivel del segundo piso consisten en muros de cortina de acero porcelanizado con partes de vidrio en cada piso. Cuando se usan, los respaldos (figura 13.28) son de bloques de escoria volcánica recubiertos con loseta partida de 2 pulgadas y aplanada.

El muro de parapeto a nivel del techo (figuras 13.5, 13.6 y 13.10) se extiende a 2 pies 6 pulg sobre la parte superior de la losa del techo, y tiene un casquete metálico y barandal en todo el perímetro. El tragaluz está rodeado por un parapeto bajo, pero como se señaló ya, el marco estructural no se extiende por encima del nivel del techo, éste es un detalle introducido aquí para simplificar el marco para propósitos de análisis de viento.

La distancia exacta desde el eje central de las columnas exteriores a la cara exterior de los muros dependerá del detallado de la fachada; no obstante, se tomará la distancia de 18 pulg para propósitos de diseño.

**Muros divisorios fijos.** Los muros divisorios fijos que se ven en la planta, cerrando el pozo del elevador, los cubos de escaleras y los cuartos de instalaciones mecánicas, serán de bloque de yeso de 6 pulg de espesor y recubiertos con un aplanado ( $\frac{3}{4}$  pulg); todos los otros se considerarán móviles y como parte de la carga viva.

**Piso y techo.** La losa del basamento será una losa de cimentación sobre el suelo, de concreto refor-

tercer pisos consistirán en losas de concreto de piedra, de 4 pulgadas, reforzadas con tela de alambre, apoyadas en vigas de acero espaciadas a no más de 8 pies entre sí, habiéndose determinado que este

espaciamiento es el más económico para este tipo de losa (figura 13.11). Tendrán un relleno de escoria volcánica de 3 pulgadas y un fino de cemento de 1 pulg sobre la parte superior de la losa de cada piso, y las superficies inferiores de todas las losas de piso irán sin acabado. Sin embargo, las losas del segundo y tercer pisos soportarán un plafón de yeso con tela metálica y accesorios remetidos de iluminación.

La losa del techo también tendrá un espesor de 4 pulgadas, recubierta con una capa de escoria volcánica de 3 pulg en promedio sobre toda el área de techo, para poder darle una ligera pendiente para drenaje en la superficie terminada, y cubierta con 4 capas de fieltro y grava. Esta losa también soportará un plafón colgante igual a los del segundo y tercer pisos.

**Protección contra incendio.** Se supondrá que el reglamento exige una protección contra el fuego en todo el acero estructural expuesto. Esta se hará recubriendo todos los miembros estructurales, horizontales y verticales, con un mínimo de 2 pulg de concreto (figura 13.11).

**Cargas vivas unitarias.** Sobre la losa del sótano, la carga viva será de 200 lb/pie<sup>2</sup> excepto en el cuarto del calentador, donde será de 300 lb/pie<sup>2</sup>. Sobre el primer piso, para su ocupación del comercio al menudeo, la carga viva será de 100 lb/pie<sup>2</sup> y sobre el segundo y tercero de 80 lb/pie<sup>2</sup>, permitiendo también su uso como oficina. Se supondrá que el techo soportará una carga de nieve y viva de 40 lb/pie<sup>2</sup>. Todas las escaleras se diseñarán para una carga viva de 100 lb/pie<sup>2</sup> de proyección horizontal.

Se supondrá que el edificio tendrá carga de viento básica de 20 lb/pie<sup>2</sup> y esté situado en una zona sísmica cero.

**Referencias.** Las anteriores cargas vivas, y los pesos de los materiales del edificio usados al calcular las cargas muertas, están tomados de ANSI A58.1-1982.<sup>2</sup> El diseño estructural se ajustará a la Especi-

<sup>2</sup> Algunos valores en esta y otras secciones subsecuentes están a punto más bajo de la gama de pesos de materiales, y otros están en el punto alto o intermedio. En el diseño real, los valores seleccionados deben estar de acuerdo con los materiales especificados para el trabajo.



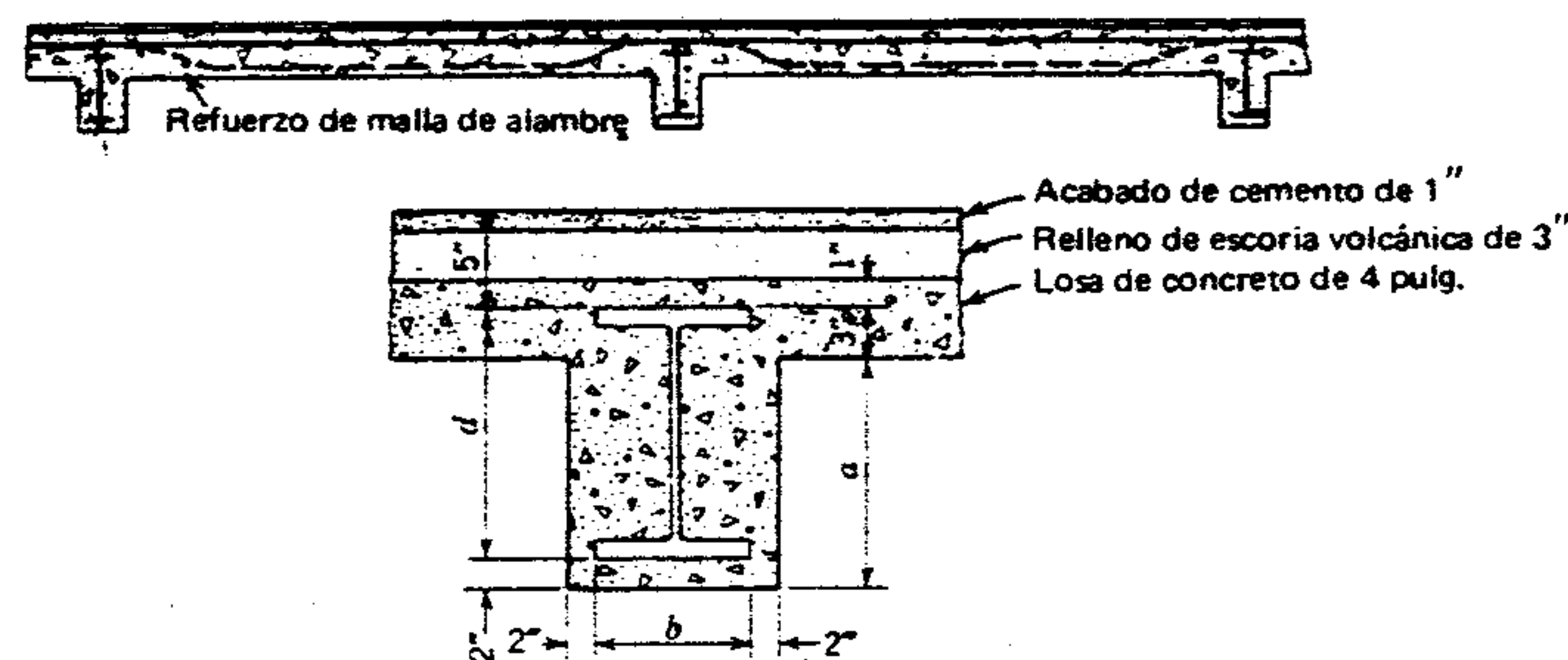


Figura 13.11 Típico recubrimiento de protección contra el fuego en una viga.

ficación AISC 1978, a menos que se indique otra cosa, usando acero A36.

### 13.3 CARGAS DE PISOS

La carga de diseño en libras por pie cuadrado que soporta la estructura de cualquier piso es igual a la suma de las cargas vivas y muertas sobre ese piso. Por ejemplo, la carga viva sobre el primer piso es de 100 lb/pie<sup>2</sup>. El peso del concreto de piedra es de 144 libras por pie cúbico. Como la losa tiene 4 pulg de espesor, su peso por pie cuadrado de área de piso es  $\frac{4}{12} (144) = 48$  lb/pie<sup>2</sup>. El relleno de escoria volcánica y el acabado de cemento de 1 pulg pesan 15 y 12 lb/pie<sup>2</sup>, respectivamente. Por lo tanto, la carga de diseño básica para el primer piso es

Carga viva	100
Losa, relleno, acabado	
(48 + 15 + 12)	75
<b>Carga total por pie cuadrado</b>	<b>175</b>

La carga básica de diseño para el segundo y tercer pisos es

Carga viva	80
Losa, relleno y acabado	75
Plafón colgante terminado, tela metálica y aplanado de yeso	10
<b>Carga total por pie cuadrado</b>	<b>165</b>

La carga de diseño para el techo es

Carga viva	40
Losa de concreto de 4 pulg	48
Relleno de 3 pulg de escoria volcánica	15
Cubierta de techo de 4 capas de fieltro y grava	6
Plafón colgante, tela metálica y aplanado de yeso	10
<b>Carga total por pie cuadrado</b>	<b>119</b>

El peso de las escaleras de acero con peldaños de concreto o terrazo varía según el tipo que se emplee, pero es suficiente una tolerancia de 50 lb/pie<sup>2</sup> de proyección horizontal. Usando este valor, la carga de diseño para las escaleras es

Carga viva	100
Carga muerta	50
<b>Carga total por pie cuadrado</b>	<b>150</b>

### 13.4 CARGAS DE MUROS

El peso de muros y muros divisorios fijos por pie cuadrado de superficie también se puede calcular y tabular para referencia. Por ejemplo, el peso de 1 pie cuadrado de muro exterior sin ventanas se determina como sigue.

El peso del bloque de 4 pulg de concreto con agregado ligero con aplanado en una cara es de 25 lb/pie<sup>2</sup>, y el peso del muro de cortina es de 17.5 lb/pie<sup>2</sup>. Por lo tanto, el peso de los muros exteriores sin ventanas es de  $25 + 17.5 = 42.5$  lb/pie<sup>2</sup> de superficie.

Los pesos de este y otros muros típicos<sup>3</sup> y muros divisorios se calculan de modo similar, y todos se registran a continuación.

#### Muros exteriores

Muro de cortina solo	17.5 lb/pie <sup>2</sup>
Mampostería de respaldo de bloque de concreto de agregado ligero de 8 pulg	40
Loseta de recubrimiento de 2 pulgadas	8.5
Aplanado	5
<b>Peso total</b>	<b>53.5 lb/pie<sup>2</sup></b>
Bloque de concreto de agregado ligero de 4 pulg	20 lb/pie <sup>2</sup>
Aplanado	5
<b>Peso total</b>	<b>25 lb/pie<sup>2</sup></b>

<sup>3</sup> Se usa un respaldo de ladrillo para el muro de parapeto encima del nivel del techo y se calcula por separado en la sección 13.23.

Vidrio y marco	
placa de $\frac{1}{2}$ pulg	10 lb/pie <sup>2</sup>
placa de $\frac{3}{8}$ pulg	8 lb/pie <sup>2</sup>

#### Muros divisorios fijos

Bloque de yeso de 4 pulg	10 lb/pie <sup>2</sup>	10 lb/pie <sup>2</sup>
Aplanado (dos caras)	10	—
Aplanado (una cara)	—	5
<b>Peso total</b>	<b>20 lb/pie<sup>2</sup></b>	<b>15 lb/pie<sup>2</sup></b>
Bloque de yeso de 6 pulg		15 lb/pie <sup>2</sup>

### 13.5 PESO DE LA ESTRUCTURA DE PISO

El área del tablero de piso soportado por cualquier viga es igual a la longitud del claro multiplicada por la suma de la mitad de las distancias a las vigas adyacentes. Como usualmente las dimensiones del tablero se miden de centro a centro de los miembros soportantes, el producto obtenido al multiplicar la carga de diseño en libras por pie cuadrado por el área de tablero da la carga total transmitida a la viga. Sin embargo, esta carga no incluye el peso propio de la viga ni la parte de la protección contra incendio que se proyecta hacia abajo de la cara inferior de la losa.

Como el peso de vigas y trabes, junto con su recubrimiento contra fuego, no se conoce sino hasta haber diseñado los miembros, se debe adoptar algún sistema para estimar estos pesos. Un método consiste en incluir el peso de vigas y protecciones contra fuego en la carga de diseño suponiendo una carga equivalente por pie cuadrado actuando sobre el área del piso. El valor de la carga equivalente depende de la distribución estructural general. En cualquier caso se determina dividiendo el peso total del acero estructural y la protección contra fuego de un piso típico de un edificio de construcción similar entre el



área del piso. Con este método se debe aplicar el criterio para obtener resultados exactos, ya que condiciones especiales de estructuración requieren a menudo vigas de mayor peso que el considerado por la carga equivalente.

Debido a que el peso de los miembros de acero recubiertos de concreto es muy grande, se usará el método alternativo de cálculo real de estos pesos. En la figura 13.11 se ilustra una sección W rolada típica que soporta la losa convencional reforzada con malla de alambre. El área transversal de la

**Tabla 13.1** Peso de la protección de concreto contra el fuego por pie lineal para algunas secciones S, M y W.

Sección	Peralte de viga (pulg) <sup>a</sup>	Ancho de patín b (pulg) <sup>a</sup>	Peso (lb/pie lineal)
W 8 x 13	8	4	56
S 8 x 18.4	8	4	56
W 8 x 18	8½	5½	65
W 8 x 24	8	6½	84
W 10 x 15	10	4	72
W 10 x 45	10½	8	110
W 10 x 54	10½	10	128
W 10 x 68	10½	10½	132
W 12 x 22	12½	4	90
W 12 x 26	12	6½	115
W 12 x 40	12	8	132
W 12 x 53	12	10	154
W 12 x 79	12½	12½	183
M 14 x 18	14	4	104
W 14 x 22	13½	5	115
W 14 x 26	13½	5	116
W 14 x 30	13½	6½	140
W 14 x 43	13½	8	152
W 16 x 26	15½	5½	139
W 16 x 36	15½	7	164
W 16 x 40	16	7	165
W 16 x 50	16½	7½	170
W 18 x 46	18	6	194
W 18 x 50	18	7½	196
W 18 x 60	18½	7½	198
W 21 x 44	20½	6½	206
W 21 x 62	21	8½	245

<sup>a</sup> Tomado del Manual AISC, Dimensiones para detallado.

cubierta protectora es  $a(b + 4)$ , donde  $b$  es el ancho del patín y  $a$  es la proyección de la viga recubierta abajo de la losa. Colocando el patín superior 1 pulg abajo de la superficie de la losa estructural.

$$a = d + 2 - 3 = (d - 1)$$

y

$$(d - 1)(b + 4) = FP \text{ área transversal.}$$

Aunque los pesos del concreto de piedra son del orden de 150 lb/pie<sup>2</sup>, se acostumbra suponer un valor de 144 para facilitar el cálculo. Entonces, el peso de la cubierta de protección por pie lineal es

$$W_{FP} = \frac{(d - 1)(b + 4)}{144} (1)144$$

o

$$W_{FP} = (d - 1)(b + 4) \text{ plf}$$

Se pueden desarrollar fórmulas similares para diferentes condiciones de encoframiento y, por supuesto, las áreas y el peso se pueden calcular para casos específicos.

En la tabla 13.1 aparecen los pesos por pie lineal, calculados y registrados, de vigas rodeadas de un mínimo de 2 pulgadas de concreto, usando el anterior método de cálculo, para la especificación de protección contra el fuego para este edificio.

### 13.6 ELECCIÓN DE SECCIONES

En general, se encontrará que las secciones de patín ancho y las diversas vigas ligeras son más satisfactorias que las vigas y los canales estándar; por

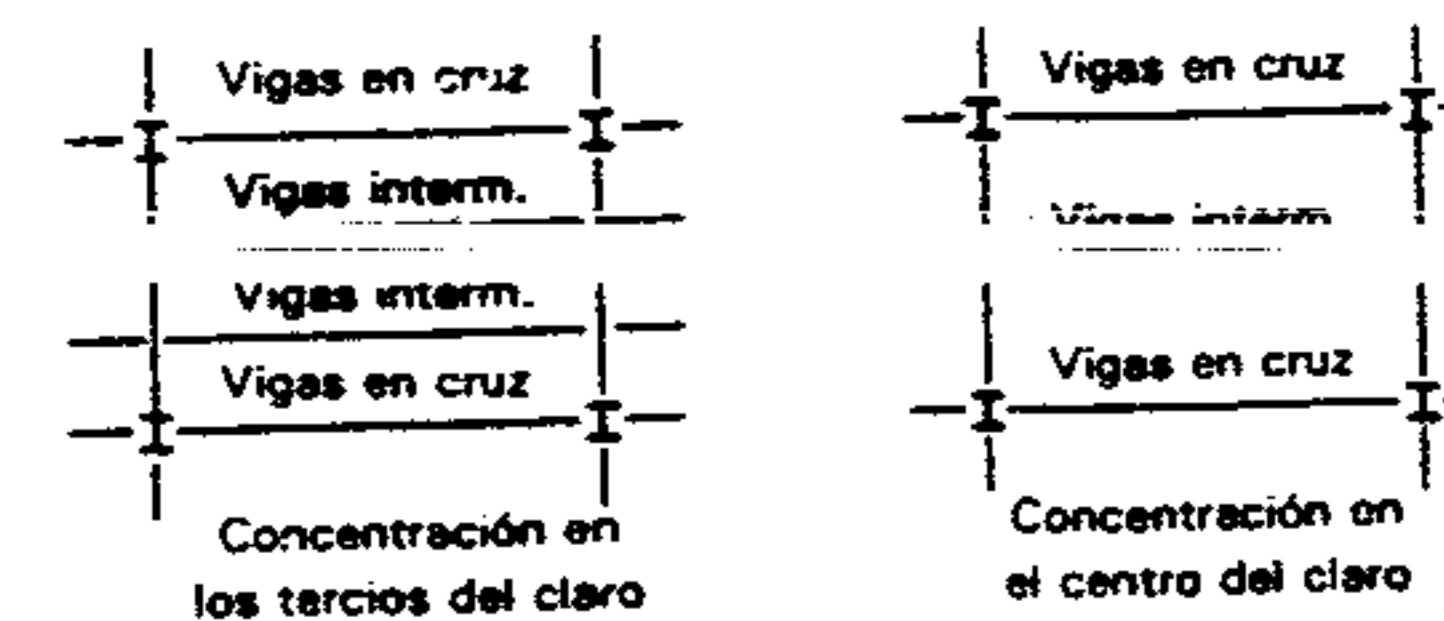
necesidades básicas de estructuración. Como se señala en la tabla 13.1, el sistema de designación de formas estructurales en los planos es el que se usó en los capítulos anteriores y son recomendados por el AISC.

### 13.7 SISTEMA ESTRUCTURAL; CONSIDERACIONES GENERALES

Dos sistemas comunes de conexión entre vigas y trabe son los que tienen concentraciones en las terceras partes del claro (figura 13.12) y en el centro del claro. Las trabes se muestran conectadas a las columnas y las vigas intermedias a las trabes. Las vigas transversales se conectan a las almas de las columnas sobre las líneas de la retícula. Cuando el claro de una trabe es mucho mayor que 16 pies, es conveniente la concentración por lo menos en los tercios del claro. Como se dijo en la sección 13.5, el área de piso soportada por cualquier viga se encuentra multiplicando la longitud del claro por la suma de la mitad de las distancias a las vigas adyacentes. Generalmente, las longitudes del claro se toman de centro a centro de los miembros soportantes, excepto cuando los miembros se conectan por patín a columnas muy grandes.

La distancia entre vigas, establecida para este diseño, está regida tanto por las cargas impuestas como por las limitaciones propias del claro debidas a las losas de concreto de 4 pulg con refuerzo de malla de alambre que se van a usar. En este ejemplo, se usa un máximo de 6 pies dos pulg para el supuesto inicial. (Si se usara acero y concreto reforzado, el espaciamiento se basaría en un equilibrio económico entre el piso de losa y el tamaño de los miembros soportantes).

Como se dijo al tratar los muros exteriores, todas las conexiones entre vigas intermedias y trabes, y de viga transversal y trabe a columna en el nivel del primer piso son flexibles, es decir, soportarán sólo cargas de gravedad y por tanto no crean ni transfieren momentos de extremos. Esto se justifica haciendo que la construcción del primer piso sea un diafragma horizontal rígido.



**Figura 13.12** Sistemas de estructuración de piso.

Sin embargo, en los niveles de segundo, tercer piso y techo, todas las conexiones entre viga transversal y columna, y entre trabe y columna serán rígidas. Las conexiones entre viga intermedia y trabe, debido a que no necesitan resistir carga lateral (de viento), serán flexibles igual que en el nivel del primer piso. En general, las conexiones flexibles son más económicas que las conexiones resistentes a momentos.

Un grupo de columnas correrá desde el piso del sótano (donde se supone que están articuladas) hasta un empalme resistente a momento inmediatamente arriba del segundo piso. Esto creará una condición de continuidad en los niveles de primer y segundo pisos (figura 13.13). El otro grupo de columnas correrá continuo desde el segundo piso, a través del tercero y hasta el nivel del techo, produciendo una continuidad también en los niveles del tercer piso y el techo. Sin embargo, como se señaló antes, las columnas exteriores no se prolongarán hacia abajo del muro de cimentación.

### 13.8 PLANTA ESTRUCTURAL

En la figura 13.15 se ilustra la planta de cimentación y en la figura 13.16 la estructuración del primer piso. La distribución más adecuada de vigas y columnas se determina mediante un estudio de la planta arquitectónica (figura 13.4). En la práctica, las dimensiones exactas no se registran en los planos estructurales hasta haber diseñado la mayoría de los miembros, ya que las tolerancias alrededor del pozo del elevador, las escaleras, etc, necesitan con frecuencia ligeros cambios en las colocaciones de las vigas. En este problema, se han registrado varias dimensiones en los planos estructurales con el fin de facilitar los cálculos. Debe tenerse presente también que los pequeños cambios dimensionales se pueden hacer después sin rediseñar los miembros.

Usualmente no se numeran las vigas y las trabes en los planos estructurales, ya que después se asignan números a los miembros en los planos de taller que prepara el fabricante. Sin embargo, los diseñadores usan a veces planos *clave* separados con números en las vigas. En este problema, las vigas bajo diseño se designan por su posición en relación con



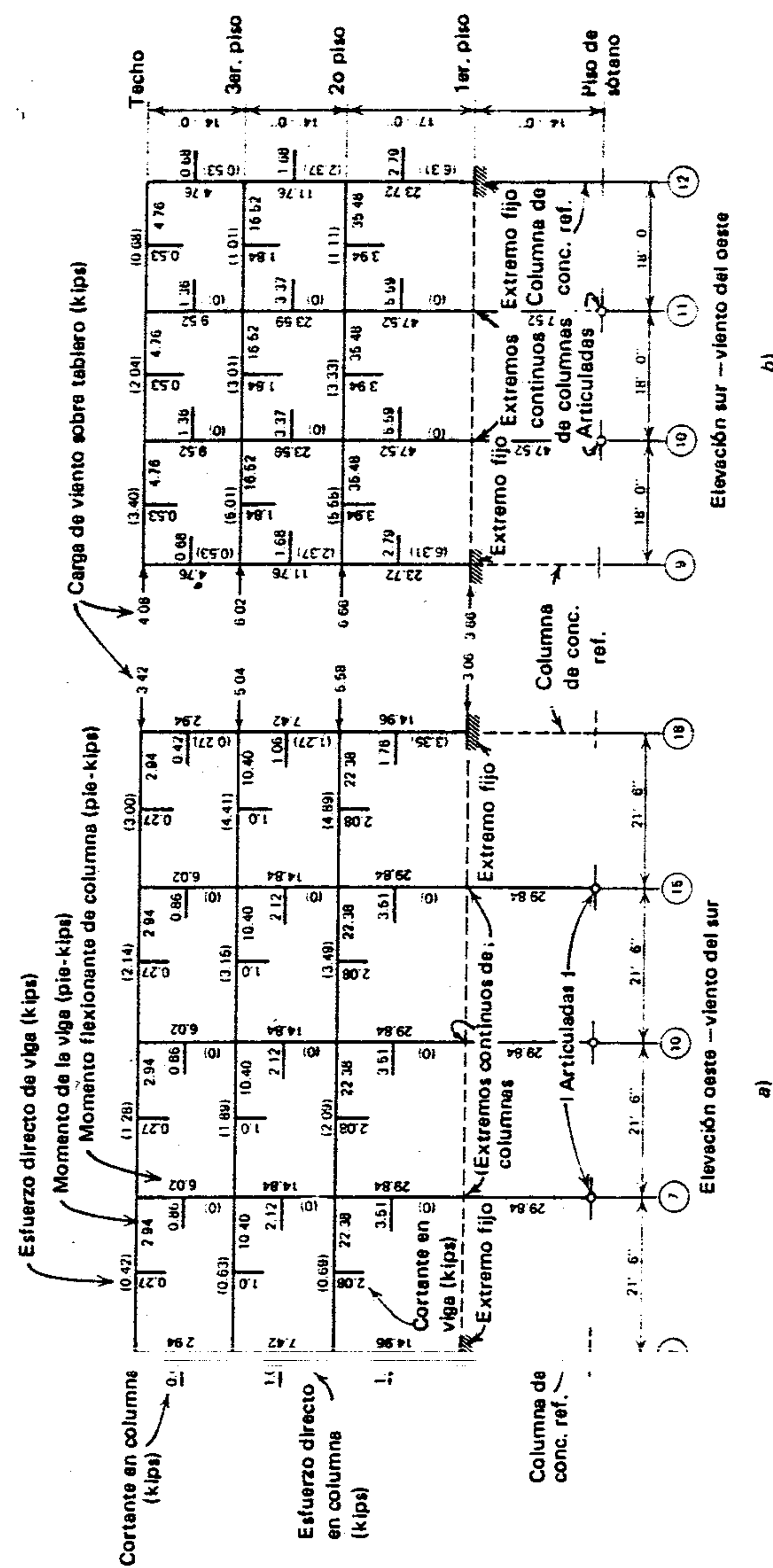


Figura 13.13 Análisis por cargas de viento.

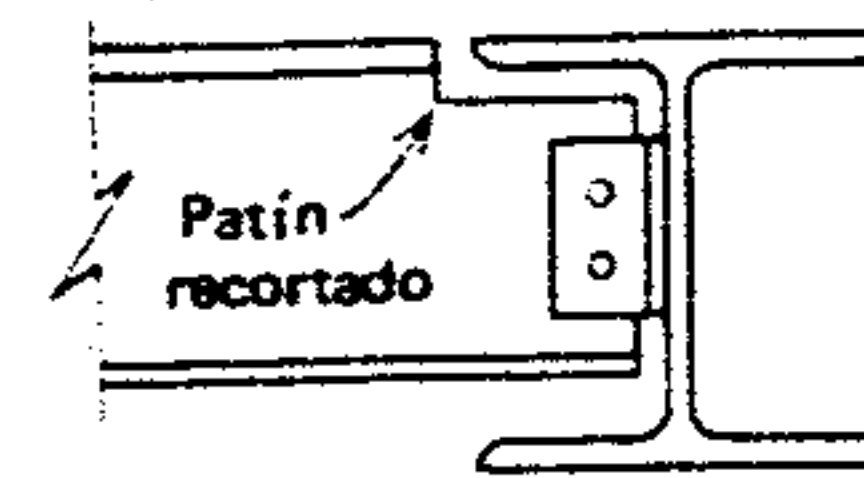


Figura 13.14 Detalle de viga.

las columnas. Por ejemplo, la viga transversal entre las columnas 7 y 10 se designa con 7-10. La viga intermedia directamente abajo, cuando se ve desde el borde inferior del plano se designa con 7-10.

En todos los casos, la línea con la flecha indica el miembro bajo consideración.

A menos que se indique otra cosa, las partes superiores de todas las vigas y trabes de piso se situarán a 5 pulg abajo de la elevación del piso termina-

do, como se ve en la figura 13.11, con las vigas descopetadas como se ve en la figura 13.14 donde se conectan a las trabes. Las vigas y trabes de techo, con los patines superiores enrasados, se conectan 1 pulg por debajo de la superficie superior de la losa estructural de concreto.

Se harán los cálculos de diseño solamente para ciertos miembros típicos. Los tamaños correctos de algunas otras vigas y trabes se registrarán en los planos, y muchos otros quedarán en blanco para usarlos en problemas específicos.

### 13.9 DISEÑO EN FUNCIÓN DEL VIENTO; CONSIDERACIONES GENERALES

Como introducción al diseño de miembros típicos, será necesario desarrollar esfuerzos de viento que luego se sumarán a los resultantes por cargas de gravedad. Un método aproximado para esto es el "método del portal", que se presentó en la sección 9.40.

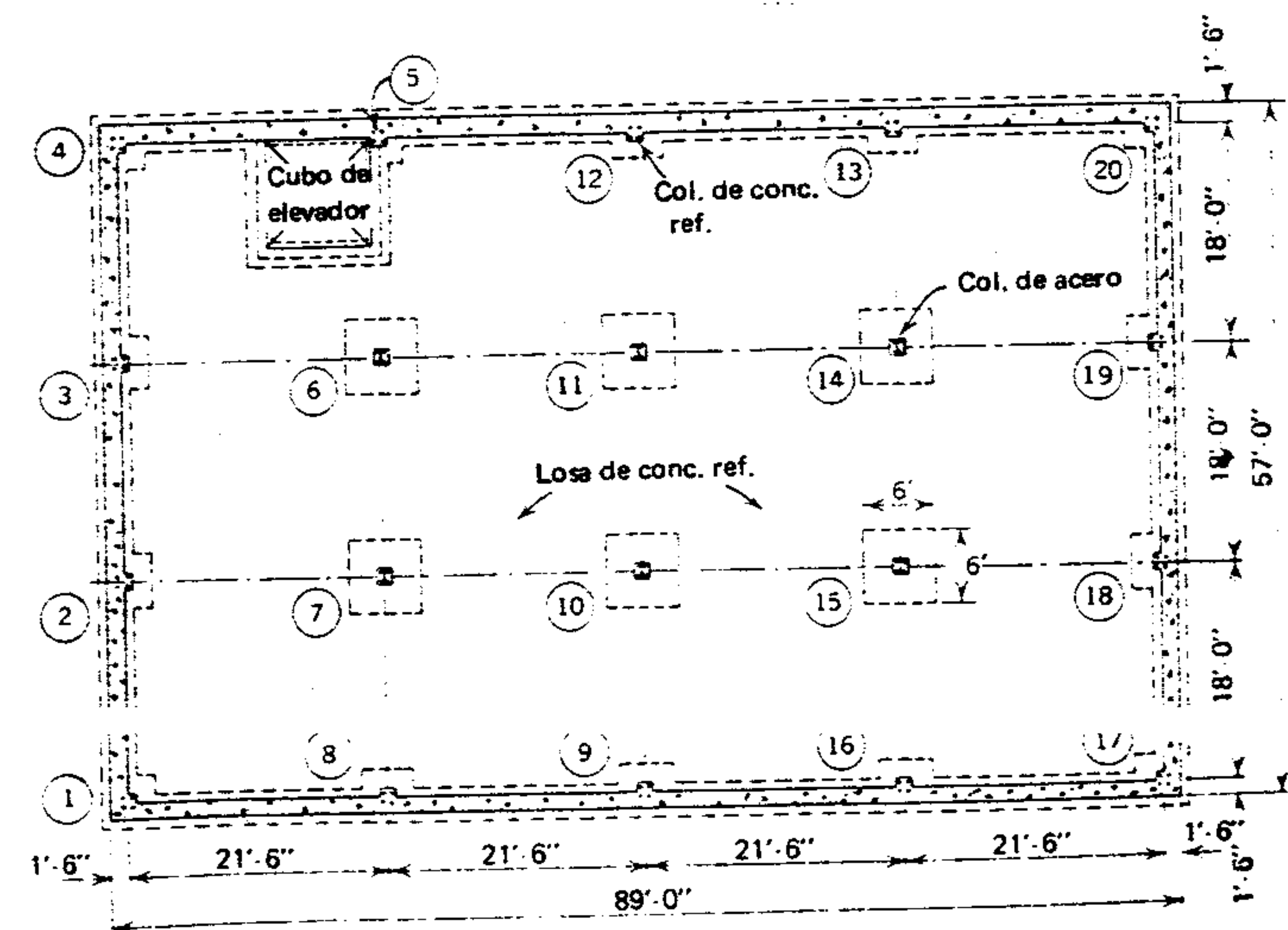


Figura 13.15 Planta de la cimentación.



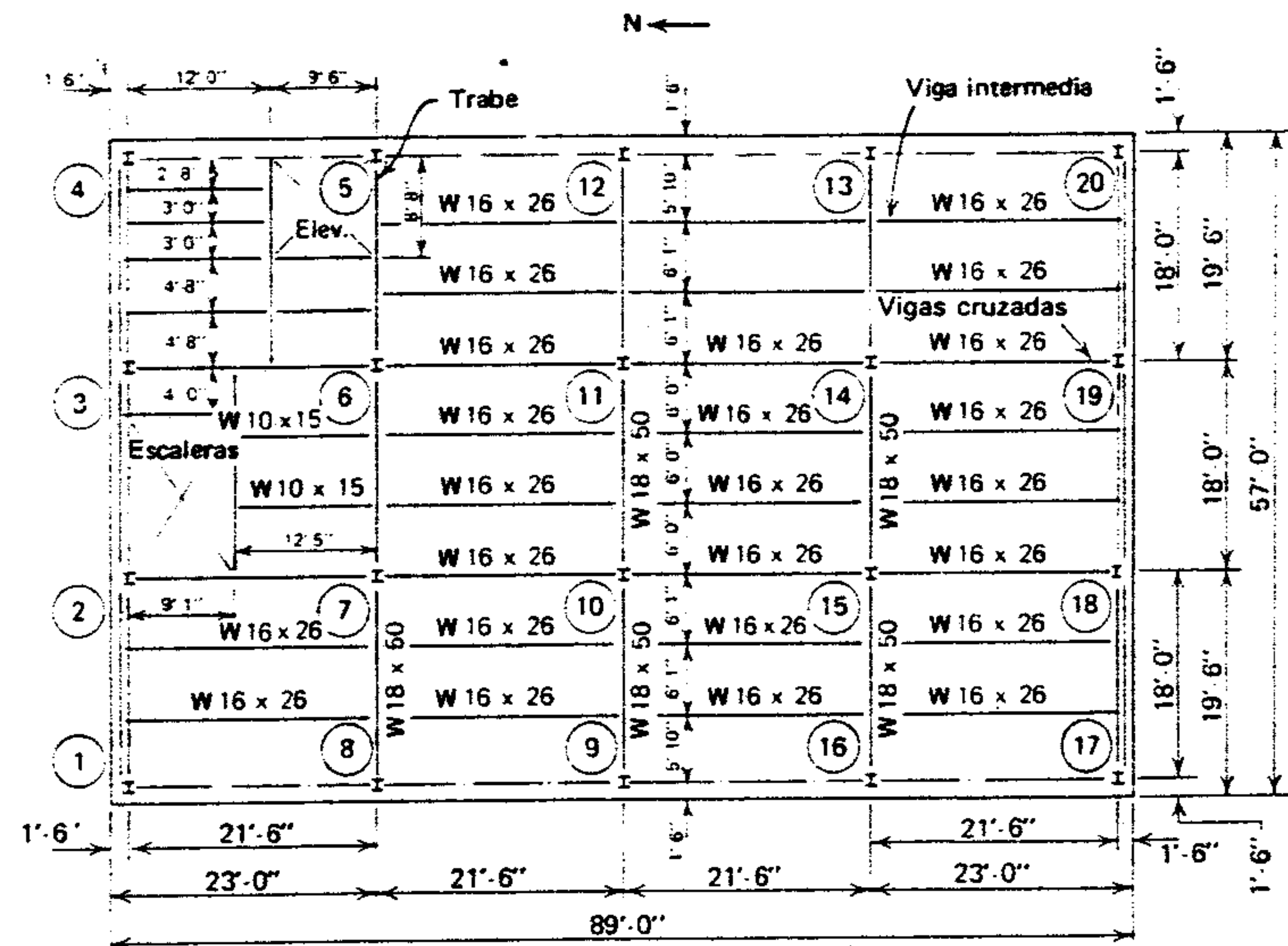


Figura 13.16 Planta estructural del primer piso.

En este ejemplo de edificio, las cargas de piso de los principales miembros horizontales son uniformes generalmente, y las cargas horizontales sobre las columnas se aplican en el plano de las vigas y las trabes. Las columnas interiores soportan una carga de gravedad mucho mayor que las columnas exteriores. Por lo tanto, los supuestos básicos del método de portal son razonables.

### 13.10 CARGAS DE VIENTO SOBRE TABLEROS

En las figuras 13.13a) y b) se ilustran elevaciones lineales del lado corto y el lado largo de la estructura de marcos. También servirán como secciones lineales a través del edificio en los marcos típicos específicos que se van a diseñar, designados por número de columna en las plantas, es decir, (3), (7), (10), (15), (18), y (9), (10), (11), (12).

Como todas las cargas de viento llegan a las columnas a los niveles de pisos, la magnitud de la carga se determina calculando primero el área de tablero, la mitad de las distancias entre marcos sobre cualquier lado de la columna, por la mitad de la distancia entre pisos abajo y arriba del piso en cuestión (figuras 13.5 y 13.6). Luego se multiplica esta área por la carga de viento de 20 lb/pie<sup>2</sup> (nótese que aun cuando las vigas están realmente 5 pulg abajo de los niveles del piso, esta pequeña discrepancia se omitirá para facilitar el cálculo). Así, se usa el siguiente procedimiento:

#### 1. Nivel del primer piso y abajo de éste

No hay carga de viento abajo del primer piso porque no hay exposición al viento en la construcción bajo el nivel del terreno. Asimismo, la carga de viento representada por la presión del viento sobre la mitad inferior de la altura del primer piso se transferirá directamente al diafragma rígido creado por

la construcción del primer piso y desde este diafragma a los cimientos, por lo cual no hay efecto de viento en o abajo del nivel del primer piso.

#### 2. Nivel del segundo piso

Columnas (8), (9) y (16) sobre el lado oeste:

$$21.5 \left( \frac{17}{2} + \frac{14}{2} \right) = 333 \text{ pie}^2$$

$$333(20) = 6660 \text{ lb}$$

Columnas (1) y (17) sobre el lado oeste:

$$\frac{22.5}{2} \left( \frac{17}{2} + \frac{14}{2} \right) = 174 \text{ pie}^2$$

$$174(20) = 3480 \text{ lb}$$

Columnas (18) y (19) sobre el lado sur:

$$18 \left( \frac{17}{2} + \frac{14}{2} \right) = 279 \text{ pie}^2$$

$$279(20) = 5580 \text{ lb}$$

Columnas (17) y (20) sobre el lado sur:

$$\frac{19}{2} \left( \frac{17}{2} + \frac{14}{2} \right) = 147 \text{ pie}^2$$

$$147(20) = 2940 \text{ lb}$$

#### 3. Nivel del tercer piso

Columnas (8), (9) y (16) sobre el lado oeste:

$$21.5 \left( \frac{14}{2} + \frac{14}{2} \right) = 301 \text{ pie}^2$$

$$301(20) = 6020 \text{ lb}$$

Columnas (1) y (17) sobre el lado oeste:

$$\frac{22.5}{2} \left( \frac{14}{2} + \frac{14}{2} \right) = 158 \text{ pie}^2$$

$$158(20) = 3160 \text{ lb}$$

Columnas (18) y (19) sobre el lado sur:

$$18 \left( \frac{14}{2} + \frac{14}{2} \right) = 252 \text{ pie}^2$$

$$252(20) = 5040 \text{ lb}$$

Columnas (17) y (20) sobre el lado sur:

$$\frac{19}{2} \left( \frac{14}{2} + \frac{14}{2} \right) = 133 \text{ pie}^2$$

$$133(20) = 2660 \text{ lb}$$

#### 4. Techo

Columnas (8), (9) y (16) sobre el lado oeste:

$$21.5 \left( \frac{14}{2} + 2.5 \right) = 204 \text{ pie}^2$$

$$204(20) = 4080 \text{ lb}$$

Columnas (1) y (17) sobre el lado oeste:

$$\frac{22.5}{2} \left( \frac{14}{2} + 2.5 \right) = 107 \text{ pie}^2$$

$$107(20) = 2140 \text{ lb}$$

Columnas (18) y (19) sobre el lado sur:

$$18 \left( \frac{14}{2} + 2.5 \right) = 171 \text{ pie}^2$$

$$171(20) = 3420 \text{ lb}$$

Columnas (17) y (20) sobre el lado sur:

$$\frac{19}{2} \left( \frac{14}{2} + 2.5 \right) = 90 \text{ pie}^2$$

$$90(20) = 1800 \text{ lb}$$

a) y b) para los marcos que corren a través de la columna (10) que se usará más adelante para ilustrar el diseño de columnas. (Se necesitarían cálculos similares para cada marco longitudinal y transversal).



### 13.11 FUERZAS CORTANTES EN COLUMNAS

Refiriéndose de nuevo a la sección 9.40, se supone que las columnas interiores absorberán el doble de cortante del tomado por las columnas exteriores. Entonces

#### 1. Para el viento proveniente del sur (elevación oeste)

Cortante en las columnas del tercer piso:

Cortante total en el tercer piso = 3.42 kips  
Cortante en las columnas exteriores (2) y (18)  
=  $3.42/8 = 0.42$  kips  
Cortante en las columnas interiores (7), (10) y (15)  
=  $3.42/4 = 0.86$  kips

Cortante en las columnas del segundo piso:

Cortante total en el segundo piso =  $3.42 + 5.04 = 8.46$  kips  
Cortante en las columnas exteriores (2) y (18)  
=  $8.46/8 = 1.06$  kips  
Cortante en las columnas interiores (7), (10) y (15)  
=  $8.46/4 = 2.12$  kips

Cortante en las columnas del primer piso:

Cortante total en el primer piso =  $3.42 + 5.04 + 5.58 = 14.04$  kips  
Cortante en las columnas exteriores (2) y (18)  
=  $14.04/8 = 1.76$  kips  
Cortante en las columnas interiores (7), (10) y (15)  
=  $14.04/4 = 3.51$  kips

#### 2. Para viento proveniente del oeste (elevación sur)

Cortante en las columnas del tercer piso:

Cortante total en el tercer piso = 4.08 kips  
Cortante en las columnas exteriores (9) y (12)  
=  $4.08/6 = 0.68$  kips  
Cortante en las columnas interiores (10) y (11)  
=  $4.08/3 = 1.36$  kips

Cortante en las columnas del segundo piso:

Cortante total en el segundo piso  
=  $4.08 + 6.02 = 10.10$  kips

Cortante en las columnas exteriores (9) y (12)  
=  $10.10/6 = 1.68$  kips  
Cortante en las columnas interiores (10) y (11)  
=  $10.10/3 = 3.37$  kips

Cortante en las columnas del primer piso:

Cortante total en el primer piso  
=  $4.08 + 6.02 + 6.66 = 16.76$  kips

Cortante en columnas exteriores (9) y (12)  
=  $16.76/6 = 2.79$  kips  
Cortante en las columnas interiores (10) y (11)  
=  $16.76/3 = 5.59$  kips

### 13.12 ESFUERZO DIRECTO EN VIGAS Y TRABES

El esfuerzo de compresión directo en las vigas o trabes del piso, dependiendo de si se analiza el marco norte-sur o el marco este-oeste, que distribuye la carga en forma de cortante a las columnas lejanas al punto de carga en el muro exterior, se encuentra mediante la deducción de la parte de la carga absorbida por cada columna desde el punto de aplicación de la carga hasta la columna más lejana sobre el lado lejano del edificio.

#### • Techo -elevación oeste

Esfuerzo directo en la viga 18-15  
=  $3.42 - 0.42 = 3.00$  kips  
Esfuerzo directo en la viga 15-10  
=  $3.00 - 0.86 = 2.14$  kips  
Esfuerzo directo sobre la viga 10-7  
=  $2.14 - 0.86 = 1.28$  kips  
Esfuerzo directo sobre la viga 7-2  
=  $1.28 - 0.86 = 0.42$  kips

#### • Tercer piso -elevación oeste

Esfuerzo directo en la viga 18-15  
=  $5.04 - 0.63 = 4.41$  kips  
Esfuerzo directo en la viga 15-10  
=  $4.41 - 1.26 = 3.15$  kips  
Esfuerzo directo en la viga 10-7  
=  $3.15 - 1.26 = 1.89$  kips  
Esfuerzo directo en la viga 7-2  
=  $1.89 - 1.26 = 0.63$  kips

(Nótese que se usa solamente la carga sobre el tablero y no el cortante acumulativo proveniente de los pisos superiores).

#### • Segundo piso, elevación oeste

Esfuerzo directo en la viga 18-15  
=  $5.58 - 0.60 = 4.89$  kips  
Esfuerzo directo en la viga 15-10  
=  $4.89 - 1.40 = 3.49$  kips  
Esfuerzo directo en la viga 10-7  
=  $3.49 - 1.40 = 2.09$  kips  
Esfuerzo directo en la viga 7-2  
=  $2.09 - 1.40 = 0.69$  kips

#### • Techo, elevación sur

Esfuerzo directo en la trabe 9-10  
=  $4.08 - 0.68 = 3.40$  kips  
Esfuerzo directo en la trabe 10-11  
=  $3.40 - 1.36 = 2.04$  kips  
Esfuerzo directo en la trabe 11-12  
=  $2.04 - 1.36 = 0.68$  kips

#### • Tercer piso, elevación sur

Esfuerzo directo en la trabe 9-10  
=  $6.02 - 1.01 = 5.01$  kips  
Esfuerzo directo en la trabe 10-11  
=  $5.01 - 2.00 = 3.01$  kips  
Esfuerzo directo en la trabe 11-12  
=  $3.01 - 2.00 = 1.01$  kips

#### • Segundo piso, elevación sur

Esfuerzo directo en la trabe 9-10  
=  $6.66 - 1.11 = 5.55$  kips  
Esfuerzo directo en la trabe 10-11  
=  $5.55 - 2.22 = 3.33$  kips  
Esfuerzo directo en la trabe 11-12  
=  $3.33 - 2.22 = 1.11$  kips

Estos esfuerzos aparecen entre paréntesis directamente arriba de cada viga o trabe en el centro del claro.

### 13.13 MOMENTO FLEXIONANTE EN COLUMNAS

El momento flexionante en las partes superior e inferior de cada columna (suponiendo un punto de inflexión en el centro de la columna) es igual al cortante en la columna por la mitad de la altura del piso. El momento flexionante en una columna interior es el doble del de las columnas exteriores. Por ejemplo, para las columnas del tercer piso de la elevación sur:

Columnas (9) y (12):  $M = 0.68 (7) = 4.76$  pie-kips  
Columnas (10) y (11):  $M = 1.36 (7) = 9.52$  pie-kips

El resto de los momentos se calculan de manera similar y se registran a un lado de la mitad de la altura de las columnas.

### 13.14 MOMENTO FLEXIONANTE EN VIGAS Y TRABES

Los momentos flexionantes en los extremos de vigas y trabes de piso son iguales a la suma de los momentos en las columnas exteriores inmediatamente arriba y abajo del piso bajo consideración. Los momentos en vigas y trabes del mismo piso son iguales e independientes del ancho del pasillo. Por ejemplo, para la columna (12), elevación sur:

Momento de la trabe de techo  
=  $4.76 + 0 = 4.76$  pie-kips  
Momento de la trabe del tercer piso  
=  $4.76 + 11.76 = 16.52$  pie-kips  
Momento de la trabe del segundo piso  
=  $11.76 + 23.72 = 35.48$  pie-kips

Estos momentos se muestran inmediatamente abajo de cada trabe.

### 13.15 FUERZAS CORTANTES EN VIGAS Y TRABES

Las fuerzas cortantes en vigas y trabes se calculan a partir del hecho de que de iguales cortantes de extremo resultarán momentos de viga simple; por lo tanto, el cortante es igual al momento dividido entre la mitad del claro, por ejemplo, en la elevación sur:

Cortante en las trabes del techo  
=  $4.76/9 = 0.53$  kips  
Cortante en las trabes del tercer piso  
=  $16.52/9 = 1.84$  kips  
Cortante en las trabes del segundo piso  
=  $35.48/9 = 3.94$  kips



Estos valores se escriben verticalmente abajo del centro de cada viga o trabe (que es el punto supuesto de contraflexión). Para la elevación oeste, usar el momento dividido por entre  $= 21.5/1 = 10.75$ .

### 13.16 ESFUERZO DIRECTO EN COLUMNAS

El esfuerzo directo en columnas se calcula directamente a partir del cortante de la viga o trabe. Como los cortantes de la viga o trabe en cualquier piso son iguales cuando los pasillos tienen el mismo ancho, no hay esfuerzo directo en las columnas interiores.

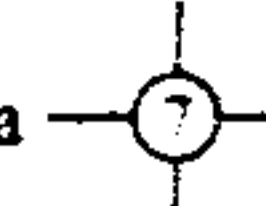
En la elevación oeste, el esfuerzo directo en la columna ⑮ es de tensión, y en la columna ②, de compresión. De modo similar, en la elevación sur, el esfuerzo directo en la columna ⑨ es de tensión, y en la columna ⑫ de compresión. Estos valores se registran entre paréntesis verticalmente en cada columna, por ejemplo, para la columna ⑨ en la elevación sur:

Columna del tercer piso = 0.53 kips  
 Columa del segundo piso  
 $= 0.53 + 1.84 = 2.37$  kips  
 Columa del primer piso  
 $= 2.37 + 3.94 = 6.31$  kips

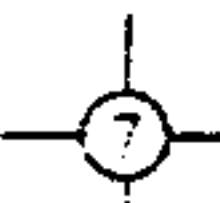
### DISEÑO DE LOS MIEMBROS

#### 13.17 MIEMBROS TÍPICOS; PRIMER PISO

Los miembros típicos son aquellos que se repiten con mayor frecuencia en el diseño. Esto es evidente de un estudio de la planta del primer piso de la figura 13.16, donde las condiciones que rigen el di-

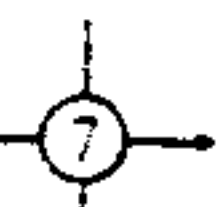
seño de la viga  se aplican también a varios

otros miembros. Por lo tanto, esta viga se diseñará primero. Debe notarse el hecho de que la estructuración del primer piso será a base de conexiones flexibles y por tanto se diseñará solamente en función de la carga de gravedad. Esto se aplica a las trabes, las vigas intermedias y las vigas transversales,

incluyendo la viga  anotada aquí.

Como se vio en la sección 13.12 y se ilustró en la figura 13.6, no hay vigas de fachada en el nivel del primer piso. Los tableros sobre los muros oeste y este serán un poco más anchos que 6 pies, 0 pulg, pero esta ligera diferencia no se tomará en cuenta.

Claro = 21.5 pies

Viga  Área de piso soportada  
 $= 6(21.5) = 129$  pie<sup>2</sup>

Carga (sección 13.3) =  $175(129) = 22,600$  lb

La constante de carga uniforme necesaria es

$$W_c = WL = 22.6(21.5) = 486$$

En la tabla de constantes de carga uniforme del AISC, seleccionar una viga de prueba que tenga una constante mayor que 486. Se necesita más grande para considerar el peso de la viga y del recubrimiento contra fuego. Seleccionar una W 14 X 30. Este valor listado de  $W_c$  es 672; por lo tanto, esta viga puede tomar una carga total de

$$W = \frac{672}{21.5} = 31.3 \text{ kips}$$

El peso de la viga y su recubrimiento contra fuego (tabla 13.1) es

$$20 + 140 = 170 \text{ lb/pie lineal}$$

haciendo un peso total de

$$170(21.5) = 3660 \text{ lb}$$

Por lo tanto, la carga total de gravedad a soportar es

$$22,600 + 3660 = 26,260$$

o

$$26.3 < 31.3 \text{ kips} \quad \text{CORRECTO}$$

Sin embargo, la siguiente sección de peso más ligero es una W 16 X 26, con una  $W_c = 614$ . La carga total que puede soportar es

$$W = \frac{614}{21.5} = 28.6 \text{ kips}$$

En la tabla 13.1, el peso de esta sección y su recubrimiento contra el fuego es

$$26 + 139 = 165 \text{ lb/pie lineal}$$

El peso total es

$$165(21.5) = 3550 \text{ lb}$$

La carga total es

$$22,600 + 3550 = 26,150 < 28,600 \text{ lb}$$

Por lo tanto, la sección W 16 X 26 es la más económica.

Esta sección se registra en la planta estructural sobre todas las vigas sujetas a similares condiciones de carga. Cada reacción de extremo es de 13.1 kips. En la tabla de módulo de sección elástica del AISC, se notará que la sección W 16 X 26 está marcada con tipos negros y es compacta para acero A36.

Como se explicó en el capítulo 5, la importancia de la deflexión por carga viva en el diseño se determina por su efecto potencial sobre los materiales integrales o adyacentes y en función de su influencia estética o psicológica. La deflexión de las vigas encofradas en concreto e integradas con una losa de concreto de piso recibirán la influencia de la rigidez de la construcción total. Sin embargo, es razonable suponer que la deflexión por carga

viva ( $\Delta$ ) se debe limitar a  $L/360$  o  $21.5(12)/360 = 0.72$  pulg. La carga viva total es

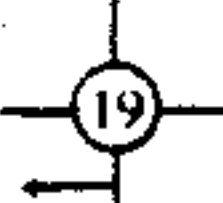
$$100(129) = 12,900 \text{ lb}$$

y

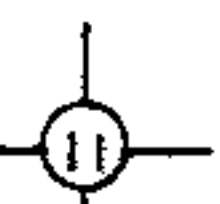
$$\begin{aligned} I_{\text{requerida}} &= \frac{SWL^3}{384EA} \\ &= \frac{5(12,900)21.5^3(1728)}{384(29,000,000)(0.72)} \\ &= 138 \text{ pulg}^4 \end{aligned}$$

Para la sección W 16 X 26,  $I = 301 > 138 \text{ pulg}^4$ , es satisfactoria.

En esta construcción es aparente que la carga viva no constituye un porcentaje suficientemente grande de la carga total para crear condiciones críticas o cercanas a las críticas.

El claro de la viga  y vigas similares será

unas pulgadas mayor que 21.5 pies, debido a la falta de alineación con el eje central de la columna en el muro sur para el empotramiento en el muro de cimentación. Sin embargo, como esta distancia será un poco menor que 6 pulg, no se tomará en cuenta y se acepta una sección W 16 X 26 igual que antes. Las reacciones de extremos son 13.1 kips, como antes.

Claro de la trabe 

= 18 pies (de centro a centro de columnas)

La trabe soporta dos vigas típicas en cada tercera parte del claro. Como cada una de las reacciones de la viga son de 13.1 kips, la carga en cada tercera parte es de 26.1 kips. El diagrama de carga se ilustra en la figura 13.20. El peso de la trabe y su encoframiento contra el fuego se agregará más adelante al que se muestra.

El momento máximo debido a las cargas de gravedad es en el centro y es

$$\begin{aligned} M &= Pa = 26,100(6) = 156,000 \text{ pie-lb} \\ &\text{o } 1,880,000 \text{ pulg-lb} \end{aligned}$$



El módulo de sección requerido es

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{1,880,000}{24,000} = 78.3 \text{ pulg}^3$$

En la tabla de módulo de sección elástico del AISC, seleccionar una W 21 X 44 como sección de prueba, con un módulo de sección de 81.6 pulg<sup>3</sup>. Esta sección es compacta en acero A36 y también está restringida lateralmente porque tiene su patín superior empotrado en la losa del piso. El peso total de la trabe y el encoframiento (tabla 13.1) es

$$18(44 + 206) = 4500 \text{ lb}$$

El momento flexionante debido al peso de la trabe y el encoframiento es

$$M = \frac{WL}{8} = \frac{4500(18)12}{8} = 122,000 \text{ pulg-lb}$$

El momento total es de 122,000 + 1,800,000 = 2,002,000 pulg-lb.

El módulo de sección total requerido es

$$S = \frac{M}{F_b} = \frac{2,002,000}{24,000} = 83.3 > 81.6 \text{ pulg}^3$$

Será necesario usar el siguiente tamaño más económico, W 18 X 50, que también es una sección compacta. Las reacciones de extremos son

$$26.1 + \left[ \frac{18(50 + 196)}{2} \right] = 28.3 \text{ kips}$$

Revisando la sección W 18 X 50 por deflexión bajo carga viva con una  $\Delta$  permisible =  $L/360$ .

$$\Delta_{\text{permitida}} = \frac{L}{360} = \frac{18(12)}{360} = 0.60 \text{ pulg}$$

$$I_{\text{requerida}} = \frac{23PL^3}{648EA} \quad (\text{Fig. 4.15})$$

$$I = \frac{23(12.9)18^3(1728)}{648(29,000)(0.60)} = 265 < 800 \text{ pulg}^4 \text{ proporcionada}$$

La viga  $\text{---}\textcircled{6}\text{---}$  del primer piso, se diseña como sigue:

$$\text{Claro} = 12.33 \text{ pies}$$

$$\text{Área de piso soportada} = 6.08(12.33) = 75.0 \text{ pie}^2$$

$$\text{Carga (sección 12.3)} = 175(75) = 13,100 \text{ lb} = 13.1 \text{ kips}$$

$$W_c = 13.1(12.33) = 162$$

En la tabla de constantes de carga uniforme del AISC, una sección W 10 X 15, compacta en acero A36, soportará una carga uniformemente distribuida de  $221/12.33 = 17.9$  kips sobre un claro de 12.33 pies. Nótese que la siguiente sección más ligera de 8 pulg de peralte es una W 8 X 13 y no tiene la capacidad de carga adecuada, sobre todo cuando se agregan el peso de la viga y el encoframiento (tabla 13.1) dando un total de 850 lb, es decir,  $13.95 > 12.9$  kips. Además, no será adecuada por deflexión.

La sección W 10 X 15 agrega  $15 + 72 = 87$  lb/pie lineal por su propio peso más el encoframiento contra fuego, o sea un total de

$$87(12.33) = 1070 \text{ lb} = 1.1 \text{ kips}$$

entonces

$$13.1 + 1.1 = 14.2 < 17.9 \text{ kips}$$

Revisando la deflexión por carga viva,

$$\Delta_{\text{permitida}} = \frac{L}{360} = \frac{12.33(12)}{360} = 0.41 \text{ pulg}$$

$$I_{\text{requerida}} = \frac{5}{384} \left[ \frac{7.5(12.33)^3 1728}{29,000(0.41)} \right] = 26.6 < 68.9 \text{ pulg}^4 \text{ provista}$$

Las reacciones de extremos son  $14.2/2 = 7.1$  kips.

### 13.18 VIGAS INTERMEDIAS TÍPICAS: SEGUNDO Y TERCER PISOS (FIGURAS 13.17 y 13.18)

Debido a que las vigas intermedias no están en el plano de los marcos que resisten las cargas de viento,

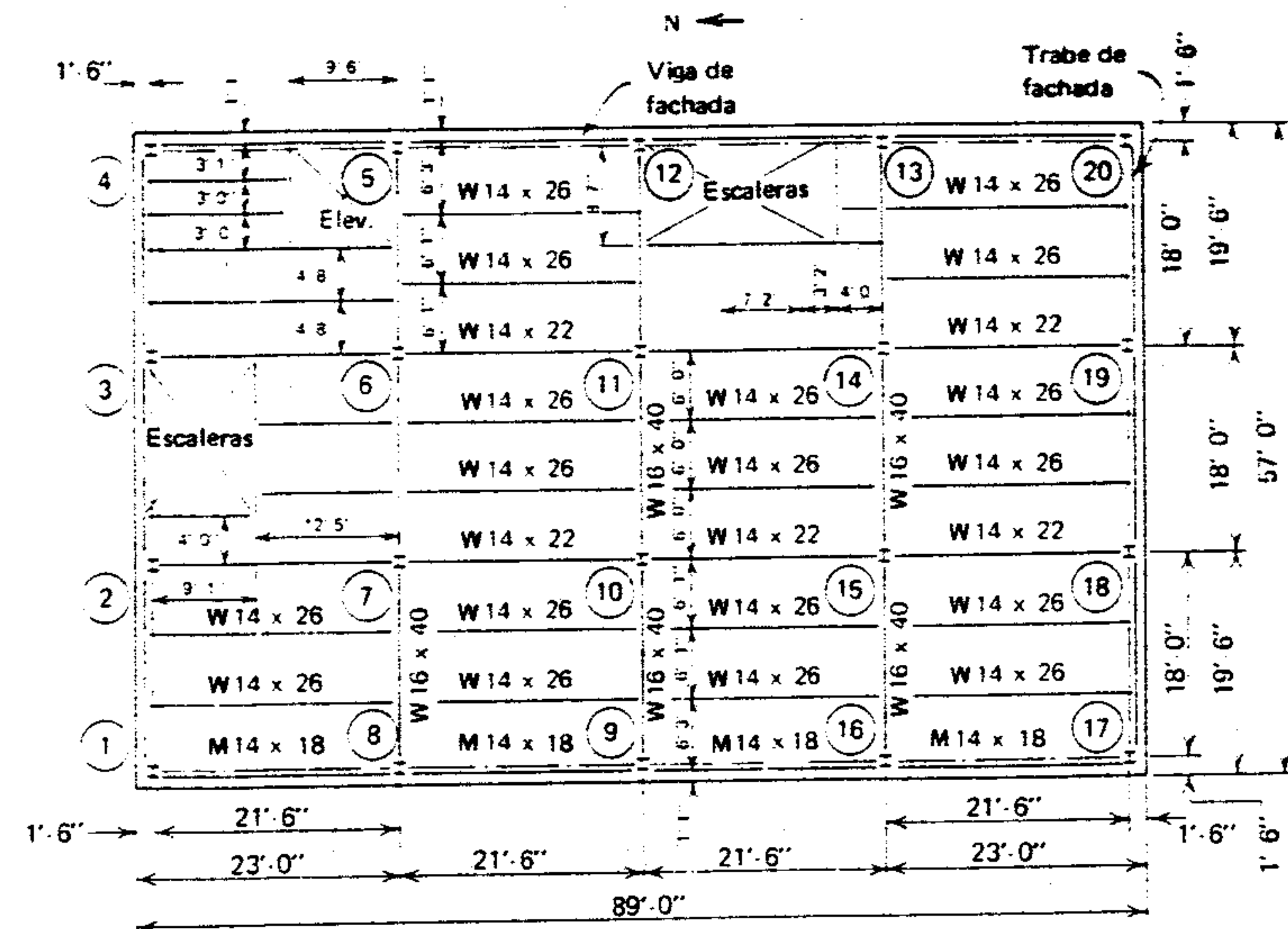


Figura 13.17 Planta estructural del segundo piso.

se conectarán a sus miembros soportantes respectivos (generalmente, las trabes) con conexiones flexibles y de este modo se espera que sólo soporten cargas de gravedad. La carga de gravedad total en el segundo y tercer pisos (sección 13.3) es de 165 lb/pie<sup>2</sup>, la cual es sólo ligeramente menor que la del primer piso. Por lo tanto, los tamaños de los miembros serán probablemente los mismos o un poco menores. Sin embargo, se necesitará calcular con exactitud las reacciones de extremos.

$$\text{Claro} = 21.5 \text{ pies}$$

Viga  $\text{---}\textcircled{7}\text{---}$  Área de piso soportada

$$= 6(21.5) = 129 \text{ pie}^2$$

En la tabla de Constantes de Carga Uniforme del AISC para acero A36, dejando una tolerancia para el peso propio de la viga y la protección, se encuen-

tra que una W 14 X 26 puede soportar una carga uniformemente distribuida de 26.3 kips sobre un claro de 21.5 pies. El peso de la viga y la protección (tabla 13.1) es

$$26 + 116 = 142 \text{ lb/pie lineal}$$

$$W_t = 142(21.5) = 3050 \text{ lb}$$

Entonces la carga total es

$$3050 + 21,300 = 24,350 \text{ lb} = 24.4 < 26.3 \text{ kips}$$

y las reacciones son  $24.4/2 = 12.2$  kips. Revisando la deflexión por carga viva,

$$\text{Carga viva} = 80(129) = 10,320 \text{ lb}$$

$$I_{\text{requerida}} = \frac{5}{384} \left[ \frac{10.3(21.5)^3 1728}{29,000(0.72)} \right] = 110 \text{ pulg}^4$$



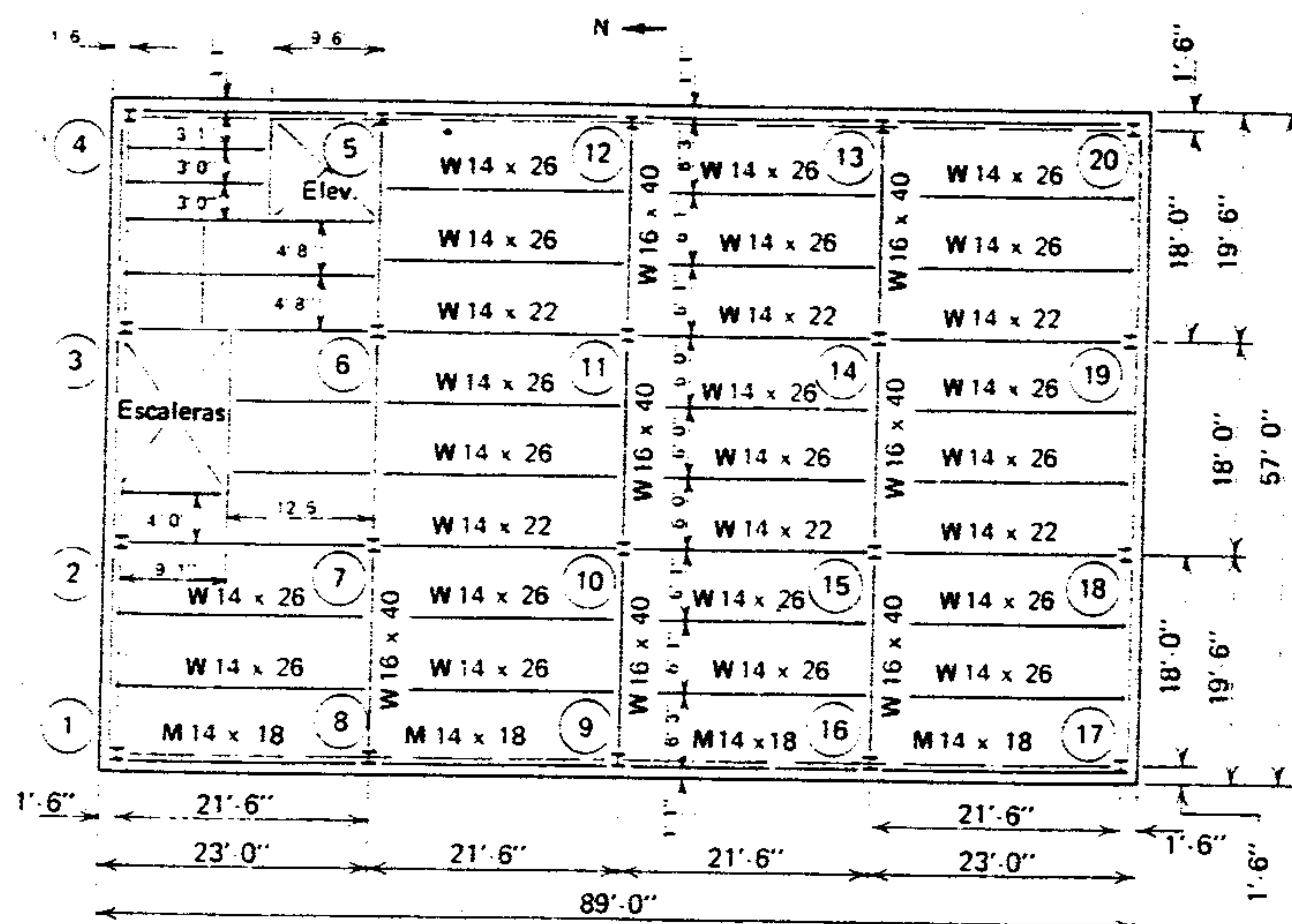


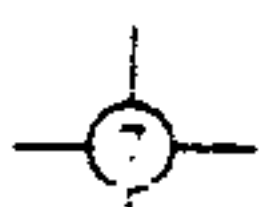
Figura 13.18 Planta estructural del tercer piso.

La sección W 14 X 26 proporciona un  $I = 245 > 110 \text{ pulg}^4$ . Usar la W 14 X 26 para vigas intermedias en el segundo y tercer pisos (como se verá en las figuras 13.17 y 13.18).

### 13.19 VIGAS INTERMEDIAS TÍPICAS; TECHO (FIGURA 13.19)

Estos miembros se diseñan de la misma manera que las vigas intermedias del segundo y tercer pisos excepto que la carga de diseño de piso de 119 lb/pie<sup>2</sup> es considerablemente menor (sección 13.3).

Una sección W 14 X 22 será adecuada para vigas

como la  con reacciones de 9.15 kips.

### 13.20 ESTRUCTURA DE ESCALERA

El diseño de las vigas que rodean el cubo de la escalera no presentan dificultad especial, pero es muy

probable que el trabajo sea tedioso debido a los espacios y las cargas irregulares. Las escaleras de acero se pueden apoyar ya sea en viguetas que transmiten toda la carga a las vigas en los extremos del cubo o tirantes y puntales soportados por las vigas laterales. Usualmente el sistema a usar en cualquier caso es indeterminado cuando se están preparando los planos estructurales. Por lo tanto se necesita diseñar la estructura del cubo de la escalera de modo que la carga se pueda apoyar ya sea en las vigas laterales o en las de los extremos.

Cuando hay dos descansos en cada tramo, como es el caso de la escalera trasera de este edificio, se debe tener cuidado de proporcionar apoyos para ambos descansos.

### 13.21 VIGAS TRANSVERSALES Y TRABES TÍPICAS; SEGUNDO, TERCER PISOS Y TECHO (FIGURAS 13.17, 13.18 y 13.19)

La carga de gravedad en el segundo y tercer piso es de 165 lb/pie<sup>2</sup> y sobre el techo de 119 lb/pie<sup>2</sup>

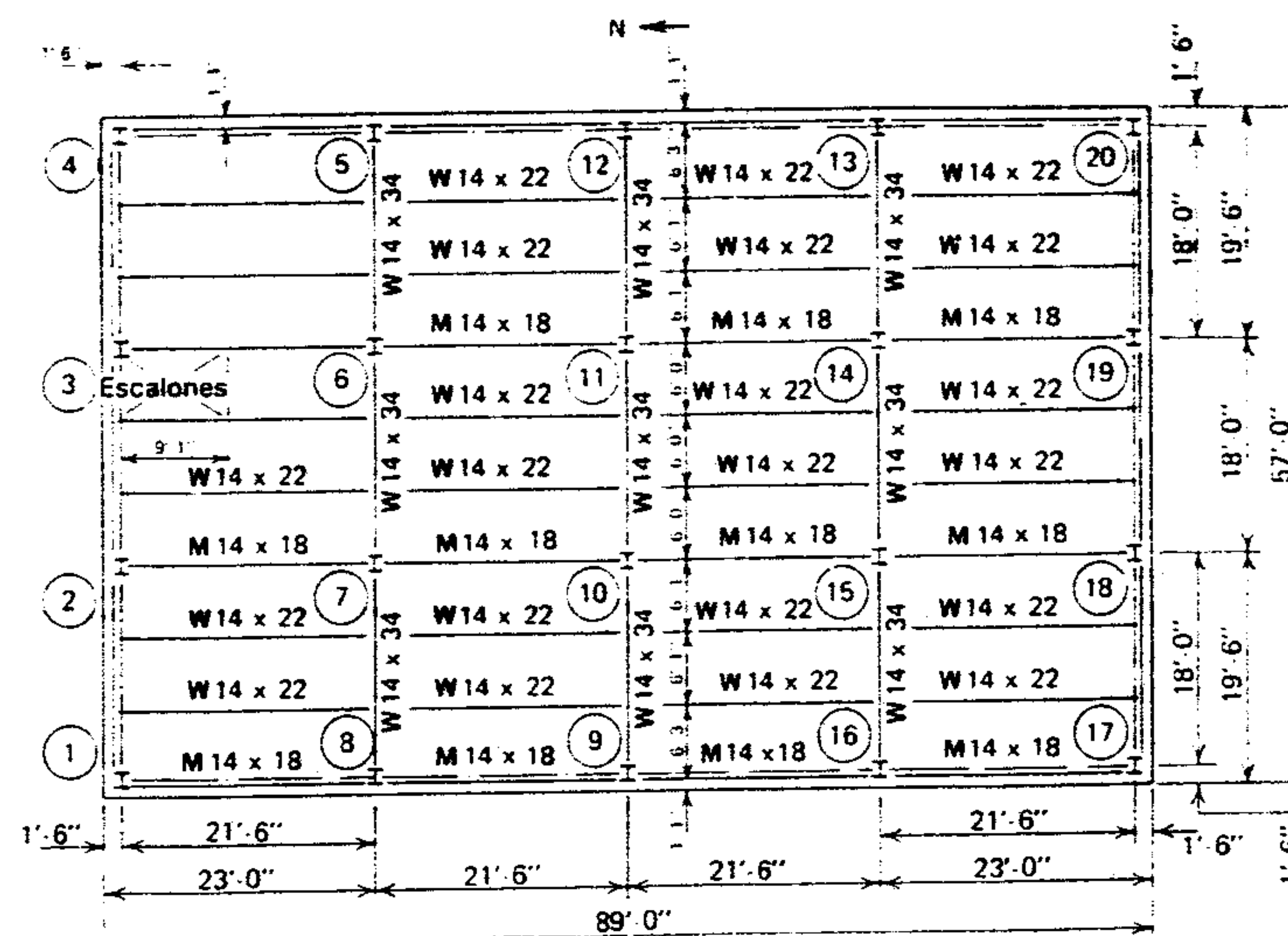
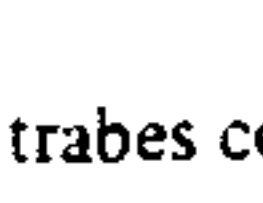
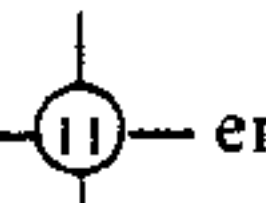


Figura 13.19 Planta estructural del techo.

(sección 13.3). Sin embargo, como se vio en las secciones 13.18 y 13.19, se pueden diseñar sólo vigas

intermedias como la  en estos niveles sólo

para cargas de gravedad, como lo fueron todos los miembros del nivel del primer piso (sección 13.17). Por supuesto, la razón es que las vigas transversales

como la  y las trabes como la  en el

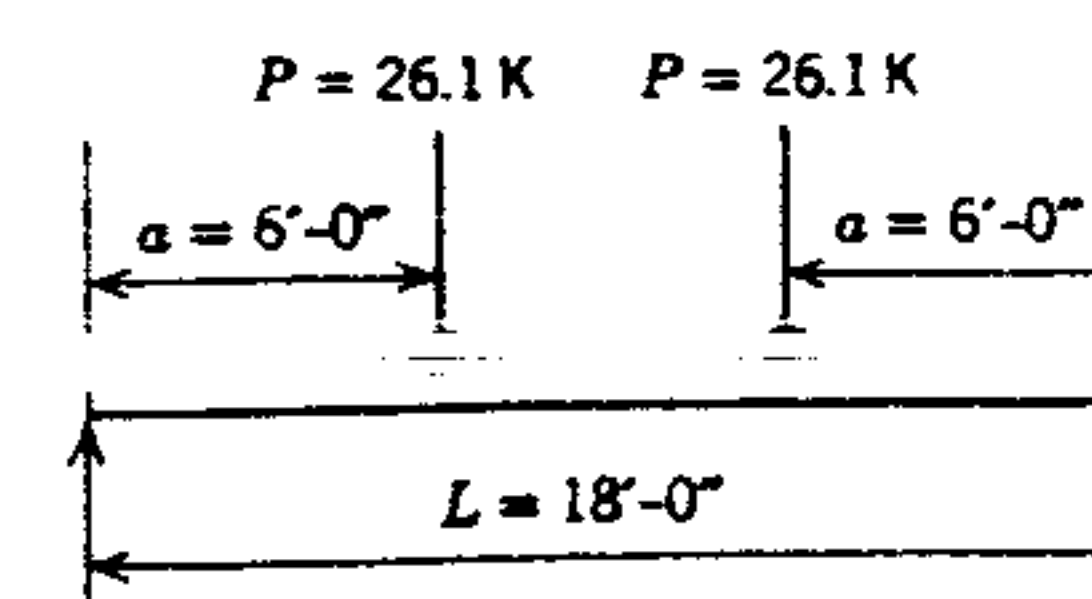


Figura 13.20 Trabe del primer piso.

segundo y tercer piso y el techo estarán conectados rígidamente a columnas y por tanto forman parte integral de los marcos de viento a través del edificio. Estos miembros se deben diseñar para cargas laterales (de viento), así como para cargas de gravedad. Además, las conexiones rígidas a las columnas que se usarán para conectar entre sí los marcos y desarrollar resistencia a la carga lateral también crearán empotramientos en extremos de vigas y trabes por cargas de gravedad.

Por lo tanto, en este punto del análisis y el diseño, será necesario tratar los marcos norte-sur y este-oeste de tres pisos sobre el nivel del primero (figura 13.13) como unidades integrales y volver a métodos indeterminados de análisis (capítulo 10).

Antes del análisis de los marcos y del diseño de

1. Como se señaló anteriormente, se usará una sola sección de columna desde el piso del sótano hasta el nivel del segundo piso, excepto




en el exterior donde las columnas se apoyan en las columnas del muro de cimentación inmediatamente abajo del nivel del primer piso. Se usará una segunda sección desde el nivel del segundo piso hasta el techo. Se supondrá que los extremos de las columnas están restringidos en los niveles de los pisos, es decir, en el primero, segundo, tercer pisos y el techo. Debido a que se usan sólo dos secciones de columna, el empalme ocurrirá en el segundo piso — en realidad a poco más o menos 18 pulg sobre el nivel del segundo piso. Se supondrá que no se desarrollarán momentos significativos en ningún nivel de piso, debidos a cargas de gravedad en cualquier otro nivel de piso.

- No se investigarán cargas vivas en claros alternados. Este "patrón de cargas" regirá pocas veces el diseño, cuando la relación entre carga viva y carga muerta es menor que 3.
- Como los marcos son simétricos, y debido a las suposiciones (1) y (2) anteriores, se puede hacer una distribución directa de momentos sin corrección por desplazamiento lateral para las cargas de gravedad (capítulo 10).

Se necesitarán tres análisis separados para cada uno de los dos marcos típicos elegidos para el análisis aquí (figura 13.13), uno para el nivel de techo y otro para los niveles del tercer y segundo pisos.


En el capítulo 10 se ve que primero se deben establecer factores de distribución relativa ( $I/L$ ) para cada miembro. Para hacerlo se deben obtener aproximaciones de los tamaños de los miembros. Esto se puede hacer de diversas maneras para lograr el grado deseado de exactitud. Cuando se completan los análisis y se diseñan los miembros, es necesario revisar de nuevo estos últimos en función de estos supuestos. Si la diferencia es significativa, se deben plantear nuevos supuestos y repetir el proceso.

### Ejemplo 1

Cada viga transversal del techo como la  debe soportar una carga de gravedad de  $119(6)21.5 =$

$15,350 \text{ lb} = 15.4 \text{ kips}$ . Suponer un peso de viga más el peso de la protección  $= 140(21.5) = 3010 \text{ lb} = 3.0 \text{ kips}$ . El esfuerzo directo de la viga debido al viento (figura 13.13) es de  $3.0 \text{ kips}$ . El total  $= 15.4 + 3.0 + 3.0 = 21.4 \text{ kips}$ .<sup>4</sup> En las tablas de constantes de carga uniforme del AISC, para acero A36, se ve que una sección  $W 14 \times 22$  soportará  $21.6 \text{ kips}$  sobre un claro de  $21.5 \text{ pies}$ , simplemente apoyada y uniformemente cargada. Su peso propio más el de la protección es  $115 + 22 = 137 < 140 \text{ lb/pie lineal}$ , supuestos. Usar la  $W 14 \times 22$  como sección de prueba.

### Ejemplo 2

Cada trabe del segundo piso como la  debe soportar 4 reacciones de vigas intermedias de  $12.2 \text{ kips}$  cada una. La carga concentrada equivalente es  $2.67P = 2.67(24.4) = 65.1 \text{ kips}$ . Suponer un peso de la trabe más el de la protección  $= 230(18) = 4.14 \text{ kips}$ . El esfuerzo directo de la trabe (figura 13.13) es de  $3.33 \text{ kips}$ . El total es entonces  $= 65.1 + 4.1 + 3.1 = 72.3 \text{ kips}$ .<sup>4</sup> De nuevo, en las tablas de constante de carga uniforme del AISC, una sección  $W 18 \times 46$  soporta  $70 \text{ kips}$  sobre un claro de  $18 \text{ pies}$ , un poco menos que los  $72.3 \text{ kips}$ . Su peso más el de la protección es  $194 + 45 = 239 \text{ lb/pie lineal}$ .

En resumen, en la siguiente tabla se suponen tamaños de miembros y, por tanto, valores  $I/L$ .

<sup>4</sup> Debe observarse que las cargas de gravedad y el esfuerzo directo (viento) no son realmente aditivos (véase la sección 1.6.1, Especificación AISC). Aquí se suman para la selección de una sección de prueba, simplemente para permitir la posibilidad de que los momentos por carga de gravedad y por carga de viento (que son aditivos) puedan conducir más adelante a una sección mayor y se requiera un rediseño. Como se verá en la sección 13.26, sólo se afectarán las vigas transversales del segundo piso por la aplicación del aumento en el esfuerzo permisible debido al viento. En este

siendo adecuada. Se podrían aplicar las estipulaciones de la sección 1.6.1 o simplemente ignorar el esfuerzo directo debido al viento si es pequeño, como sucede aquí, al seleccionar las secciones de prueba.

Miembro	Sección	$I/L^2$
Vigas transversales de techo	W 14 × 22	$199/21.5 = 9.2 \rightarrow 1.0$
Vigas transversales del tercer piso	W 14 × 22	$199/21.5 = 9.2 \rightarrow 1.0$
Vigas transversales del segundo piso	W 14 × 30	$291/21.5 = 13.5 \rightarrow 1.5$
Trabes del techo	W 14 × 30	$291/18 = 16.1 \rightarrow 1.0$
Trabes del tercer piso	W 16 × 36	$448/18 = 24.8 \rightarrow 1.5$
Trabes del segundo piso	W 18 × 46	$712/18 = 39.6 \rightarrow 2.4$
Columnas exteriores del tercero y segundo pisos	W 10 × 45	$248/14 = 17.8 \rightarrow 1.1 \text{ x-x}$
		$53.4/14 = 3.8 \rightarrow 0.4 \text{ y-y}$
Columnas exteriores del primer piso	W 10 × 68	$394/17 = 23.2 \rightarrow 1.4 \text{ x-x}$
		$134/17 = 7.9 \rightarrow 0.8 \text{ y-y}$
Columnas interiores del tercer y segundo pisos	W 10 × 54	$303/14 = 21.8 \rightarrow 1.4 \text{ x-x}$
		$103/14 = 7.4 \rightarrow 0.8 \text{ y-y}$
Columnas interiores del primer piso (y sótano)	W 12 × 79	$662/17 = 39 \rightarrow 2.4 \text{ x-x}$
		$216/17 = 12.7 \rightarrow 1.4 \text{ y-y}$

<sup>a</sup> Nota: Si  $I/L$  para las vigas transversales del techo se iguala a uno, y los valores de columna (y-y) del tercer y segundo piso se proporcionan correspondientemente, los valores de la derecha se obtienen, es decir,  $x = 13.5/9.2 = 1.47 \approx 1.5$ . De modo similar, los valores de trabe y columna (x-x) se ajustan dividiendo entre  $16.1$ .

Estos valores se registran en el marco norte-sur a lo largo de las columnas ②, ⑦, ⑩, ⑮ y ⑱ (figura 13.21) y en el marco este-oeste a través de las ⑨, ⑩, ⑪ y ⑫ (figura 13.21b).

El análisis se iniciará con el marco este-oeste (figura 13.21). Los momentos de empotramiento son como sigue:

- Trabes del techo —  $W 14 \times 30$ :  
Peso de la trabe más el de la protección contra fuego (tabla 13.1)  
 $= 30 + 140 = 170 = 0.17 \text{ kip/pie}$ .  
Reacciones de vigas intermedias  
 $= 9.15 + 9.15 = 18.3 \text{ kips}$   
En la figura 10.8,  
$$M^F = \frac{wL^2}{12} + \frac{2PL}{9} = \frac{0.17(18)^2}{12} + \frac{2(18.3)18}{9}$$
$$= 77.8 \text{ pie-kips}$$

- Trabes del tercer piso —  $W 16 \times 36$ :  
Peso de la trabe más el de la protección contra fuego:

$$= 36 + 164 = 200 = 0.2 \text{ kip/pie}$$

$$\text{Reacciones de vigas intermedias}$$

$$= 12.2 + 12.2 = 24.4 \text{ kips}$$

$$M^F = \frac{wL^2}{12} + \frac{2PL}{9} = \frac{0.2(18)^2}{12} + \frac{2(24.4)18}{9}$$

$$= 103 \text{ pie-kips}$$

- Trabes del segundo piso —  $W 18 \times 46$ :

$$M^F = 104 \text{ pie-kips}$$

- Vigas transversales del techo —  $W 14 \times 22$ :  
Peso de la viga más el de la protección contra fuego  
 $= 22 + 115 = 137 \text{ lb} \approx 0.14 \text{ kips/pie}$   
Carga viva + carga muerta  $= 119(6) = 714$   
 $= 0.71 \text{ kip/pie}$

$$M^F = \frac{wL}{12} = \frac{0.14 + 0.71}{12}$$

$$= 32.7 \text{ pie-kips}$$



## 5. Vigas transversales del tercer piso—W 14 X 22:

$$M^F = 43.5 \text{ pie-kips}$$

## 6. Vigas transversales del segundo piso—W 14 X 30:

$$M^F = 44.7 \text{ pie-kips}$$

El análisis por distribución de momentos sigue el procedimiento presentado en el capítulo 10. Se usan tres ciclos. No se hace transporte a los extremos fijos de las columnas ya que no servirían a ningún propósito. En la figura 13.21 y revisando el procedimiento para determinar factores de distribución (FD) para cualquier miembro dado es igual a su valor  $K'$  dividido entre  $\Sigma K'$  de todos los miembros que se conectan en la junta. Comenzando con la junta de la izquierda (elevación sur, figuras 13.21 y 13.22),

## • Para la junta exterior del techo

$$\Sigma K' = 1.1 + 1.0 = 2.1$$

$$FD = \frac{K'}{\Sigma K'} = \frac{1.1}{2.1} = 0.52$$

$$FD = \frac{K'}{\Sigma K'} = \frac{1.0}{2.1} = 0.48$$

	1.0	1.0	1.0	1.0	
0.4	1.0	0.8	1.0	0.8	0.4
0.4	0.8	1.5	0.8	1.5	0.4
0.8	1.4	1.4	1.4	1.4	0.8
2	7	10	15	18	

a)

## • Para la junta interior primera

$$\Sigma K' = 1.4 + 1.0 + 1.0 = 3.4$$

$$FD = \frac{K'}{\Sigma K'} = \frac{1.0}{3.4} = 0.29$$

$$FD = \frac{1.4}{3.4} = 0.41 \approx 0.42$$

$$FD = \frac{1.0}{3.4} = 0.29$$

Los valores de los FD para otras juntas se calculan de manera similar.

En las figuras 13.22 a la 13.27 se ilustran las distribuciones de momento para las trabes y las vigas transversales de los dos marcos de la figura 13.21. Abajo de cada diagrama de distribución, se muestran los diagramas de cuerpo libre, de fuerza cortante y momento flexionante.

### 13.22 DISEÑO DE TRABES Y VIGAS TRANSVERSALES DEL SEGUNDO Y TERCER PISOS Y EL TECHO, SOLAMENTE POR CARGA DE GRAVEDAD

Haciendo la tabulación de los momentos máximos calculados y refiriéndose a los diagramas del AISC

	1.0	1.0	1.0		Techo
1.1	1.5	1.4	1.4	1.5	1.1
1.1	2.4	2.4	2.4	2.4	1.1
1.4	2.4	2.4	2.4	2.4	1.4
9	10	11	12		

b)

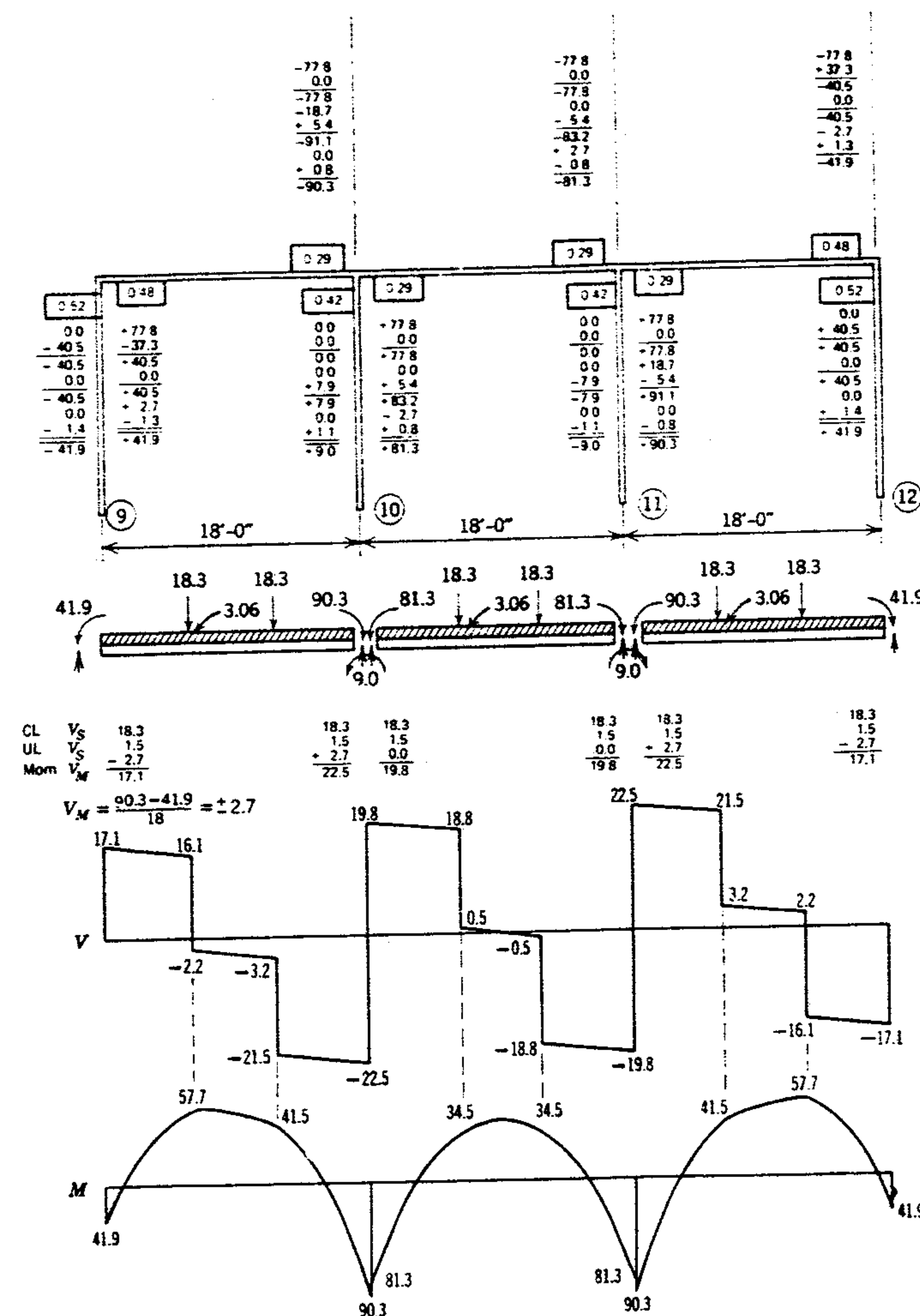
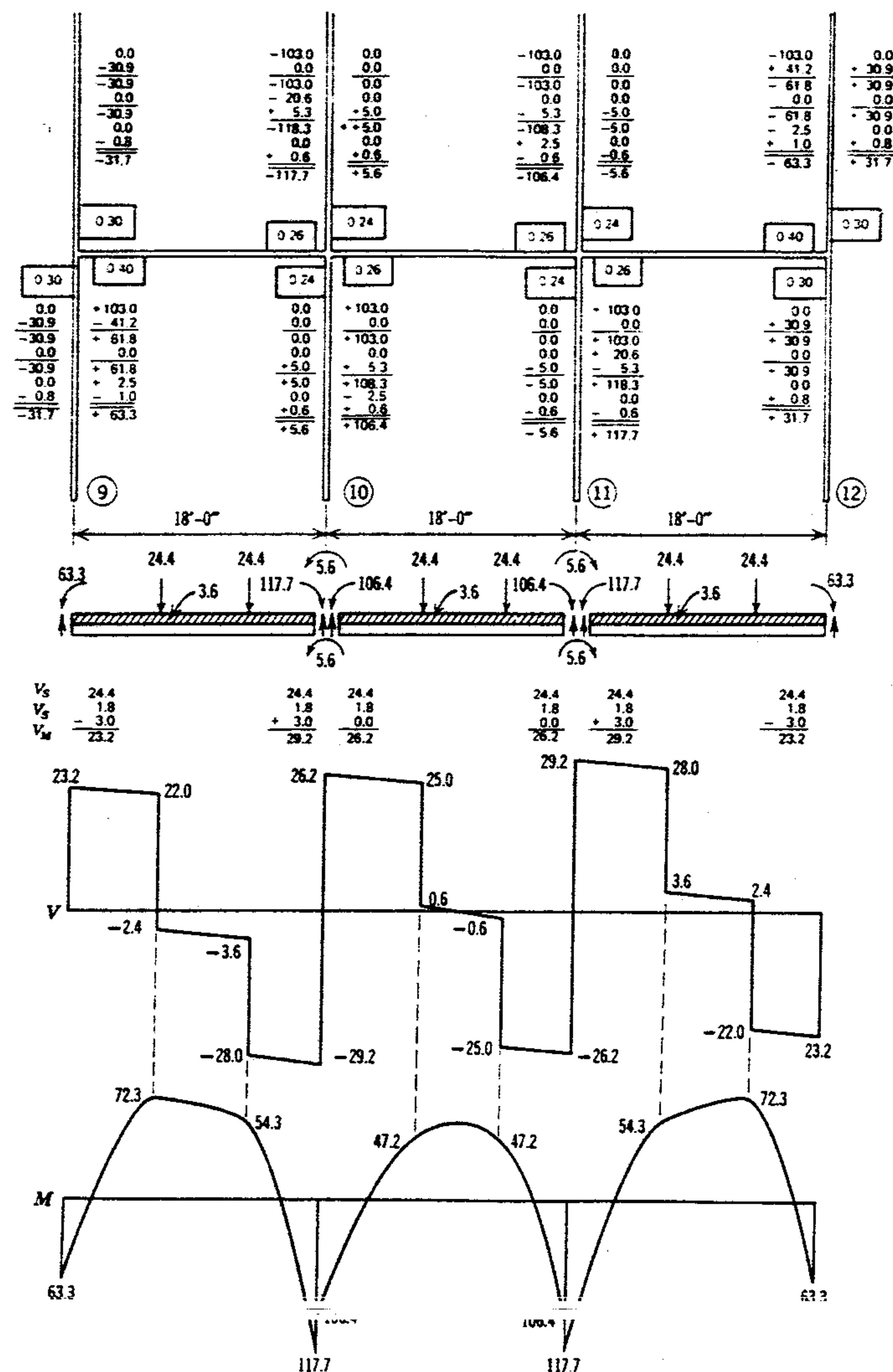
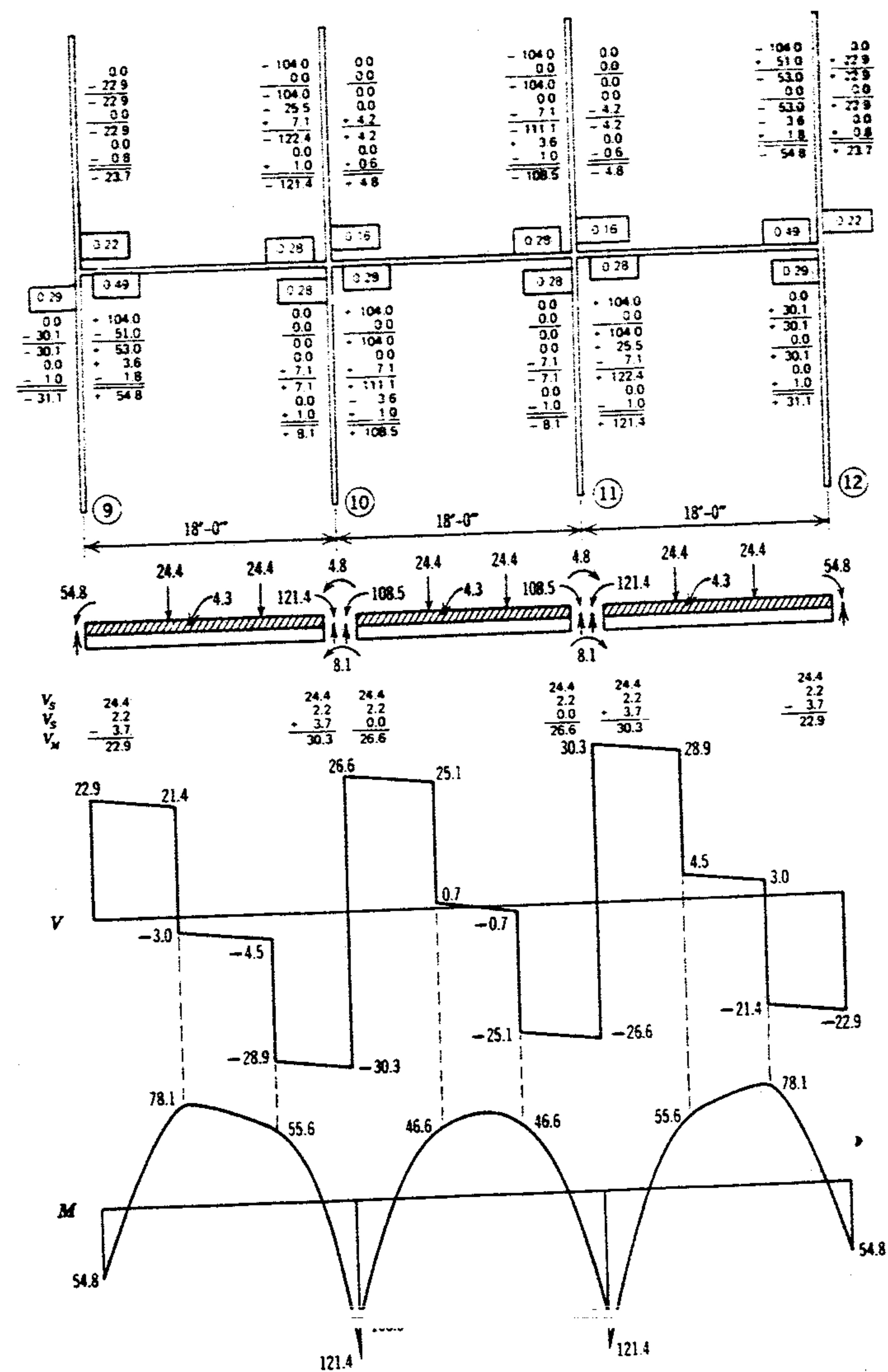
Figura 13.21 Valores  $I/L$  relativos.

Figura 13.22 Trabes del techo.





**Figura 13.23** Trabes del tercer piso.



**Figura 13.24** Trabes del segundo piso.



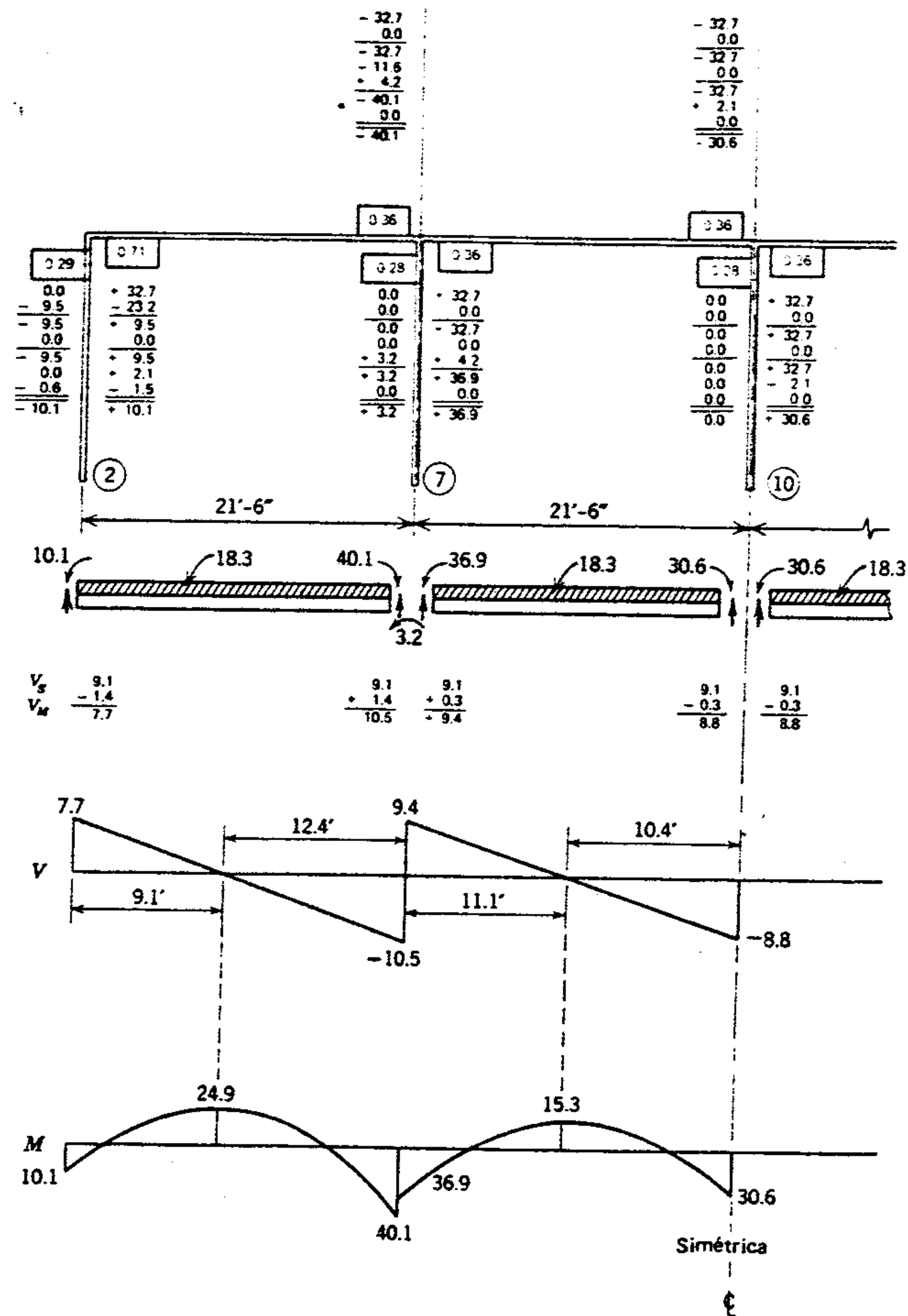


Figura 13.25 Vigas transversales del techo.

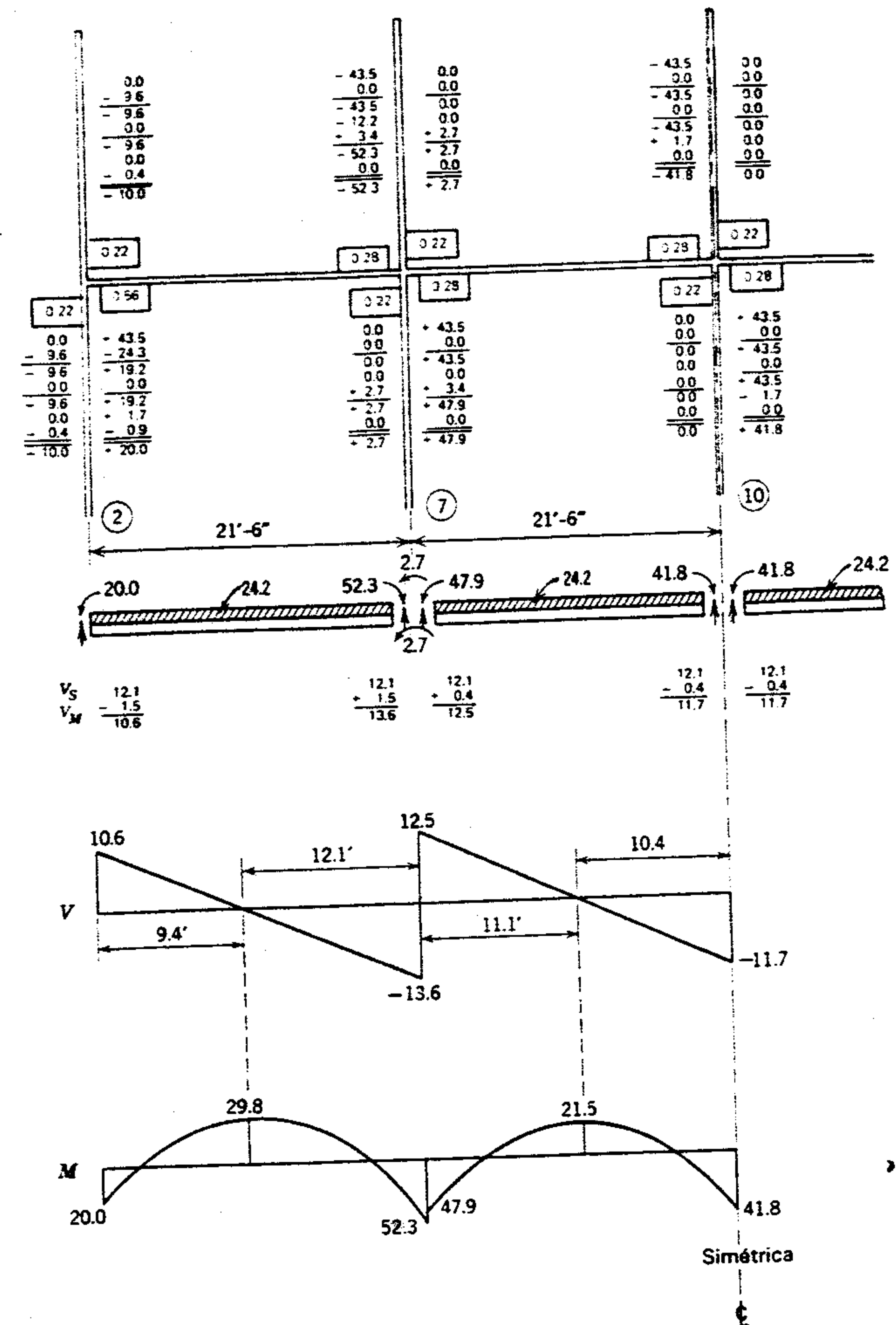


Figura 13.26 Vigas transversales del tercer piso.



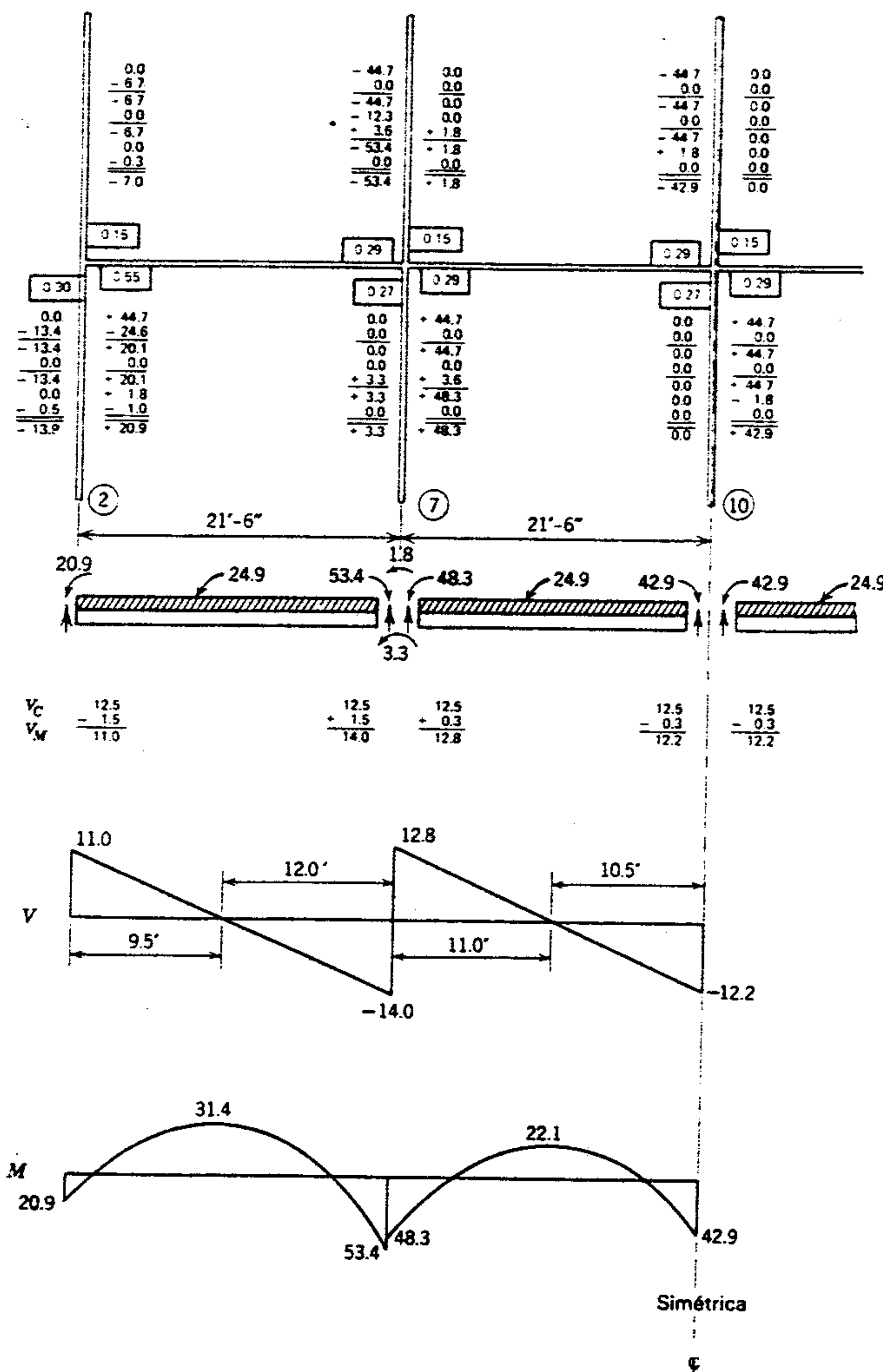


Figura 13.27 Vigas transversales del segundo piso.

	Momento máximo (pie-kips)	Sección	Sección supuesta
Trabes del techo	90.3	W 16 x 31	W 14 x 30
Trabes del tercer piso	117.7	W 16 x 40	W 16 x 36
Trabes del segundo piso	121.4	W 16 x 40	W 18 x 46
Vigas transversales del techo	40.1	M 14 x 18	W 14 x 22
Vigas transversales del tercer piso	52.3	W 14 x 22	W 14 x 22
Vigas transversales del segundo piso	53.4	W 14 x 22	W 14 x 30

de momentos permisibles en vigas, se puede hacer una revisión preliminar sobre la idoneidad de los supuestos originales de tamaños de miembros. Debido a que tanto las trabes como las vigas están embebidas en la losa, pueden ser consideradas arriostradas lateralmente en toda su longitud en cada caso.

Los tamaños supuestos son suficientemente cercanos para proseguir. Después del diseño de la columna se hará una revisión final de la idoneidad de todos los supuestos sobre tamaños de miembros.

### 13.23 DISEÑO DE VIGAS Y TRABES DE FACHADA PARA EL SEGUNDO Y TERCER PISOS Y EL TECHO

Las vigas de fachada se diseñan como cualquier otra viga, una vez dibujado el diagrama de carga.

Como se mencionó anteriormente, las vigas de fachada en el primer piso se han eliminado al unir la losa y el muro de cimentación en los muros este y oeste.

Viga de fachada típica — 8 — Segundo piso. En

la figura 13.28 se ve que el muro de cortina recibe su soporte primario de la losa de cimentación, y el secundario a 6 pies 4 pulg de cada columna (figura 13.5), de los ángulos zeta atornillados a la viga de fachada. Horizontalmente, la carga del

muro de cortina se dividirá entre los cuatro puntos de soporte, es decir, uno en cada columna y uno a 6 pies 4 pulg de cada columna. (Por seguridad, los soportes de columnas y los miembros horizontales del muro de cortina también se diseñarán para soportar toda la carga, si fuera necesario).

Verticalmente, el muro de cortina no se extiende hacia abajo del segundo piso, es decir, no se soporta carga de muro de cortina en el primer piso. El peso de las ventanas de escaparate del primer piso unidas con el muro de cortina (figura 13.28) se transmite directamente a la losa del primer piso y por tanto a los muros de cimentación.

El recubrimiento de bloque de escoria volcánica y loseta de 2 pies 4 pulgadas de alto entre las columnas (figura 13.28) se apoya directamente sobre la viga de fachada. El relleno de 3 pulgadas y la cubierta de cemento de una pulgada sobre la losa del piso del sótano no se extiende hacia la viga de fachada. Sin embargo, no se hará reducción ni se agregará carga por el carril de cortina, ni cimbra ni equipo mecánico o por el espesor extra de la protección de concreto contra fuego por debajo de la viga de fachada.

En la figura 13.29 se ilustra el diagrama de cargas para esta viga de fachada, y las cargas son como sigue (secciones 13.3 y 13.4). Las dimensiones en pulgadas se reducen a decimales de pie, por conveniencia. Área  $A$  = carga de piso (uniforme);  $B$  = peso del muro de cortina abajo de la parte superior de la losa de base y sobre el exterior del respaldo (concentrada);  $C$  = peso del respaldo (uniforme);  $D$  = parte del muro de cortina con ventana de vidrio arriba del respaldo (concentrada).



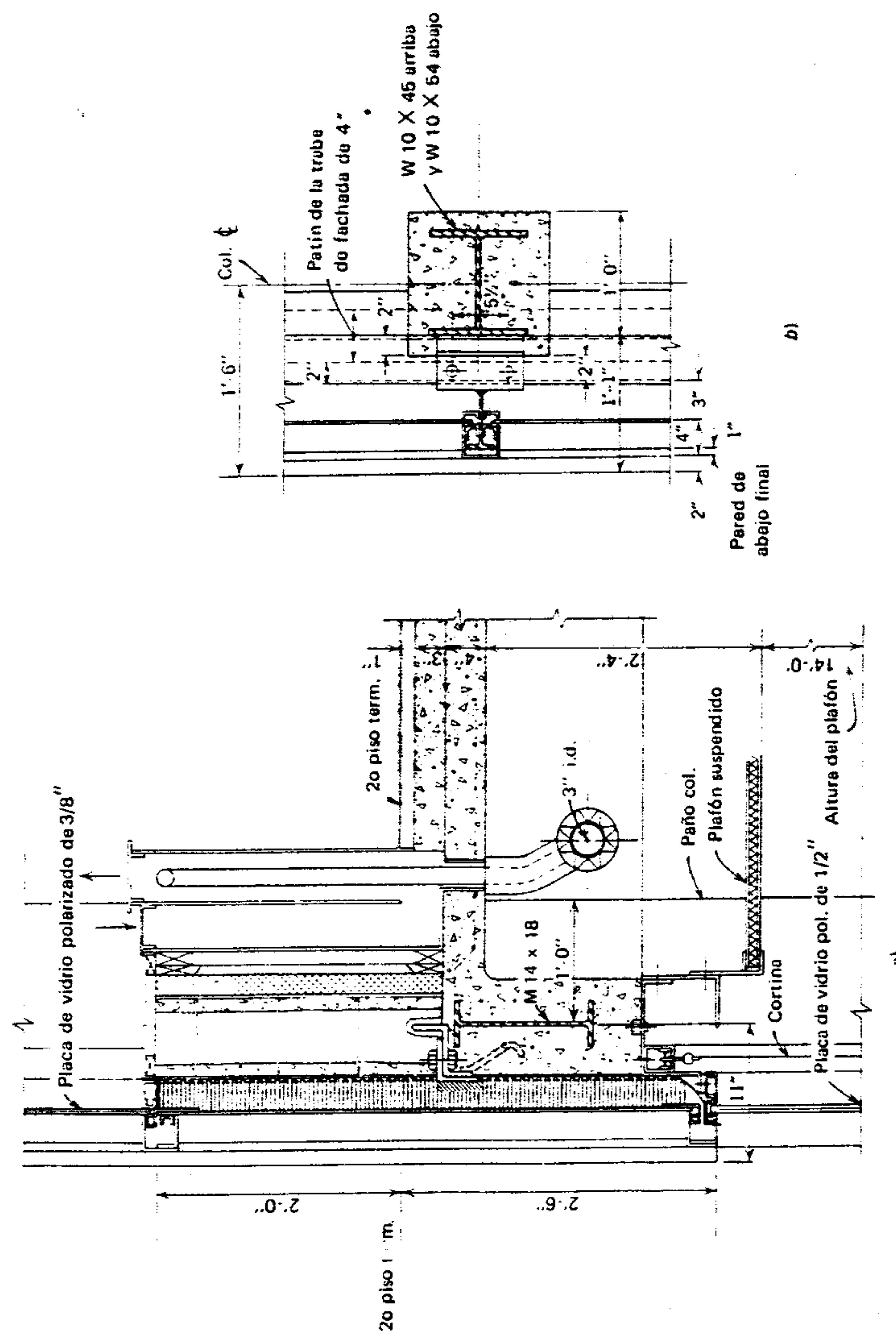


Figura 13.18 Viga de fachada del muro oeste del segundo piso.

Las cargas concentradas constituyen una parte tan pequeña de la carga total que se convertirán en una Carga Concentrada Equivalente

$$C.C.E. = \frac{8Pa}{L} = \frac{8(0.9)6.33}{21.5} = 2.12 \text{ kips}$$

Ahora se necesita suponer una sección para la viga de fachada para obtener el peso de la viga más la protección contra fuego, suponer 130 lb/pie lineal o 2.8 kips. De la sección 13.9 y la figura 13.13 se pueden suponer cargas de viento sobre el marco del muro oeste exterior, de la mitad de las ilustradas; por lo tanto, suponer un esfuerzo directo de  $4.89/2 = 2.45$  kips.<sup>5</sup> La carga total supuesta, entonces, es  $13.6 + 2.12 + 2.80 + 2.45 = 21.0$  kips. En las tablas Constantes de Carga Uniforme del AISC, una sección W 14 X 22 soportará 21.6 kips sobre este claro. Recuerdese que es muy probable que los tamaños reales sean menores debido al empotramiento de los extremos, y aceptar una M 14 X 18.

	(W) uniforme	(P) concentrada
A = $165(21.5)3.08^a$	10,930 lb	—
B = $17.5(3.17 + 4.42)4.5$	—	598 lb
C = $53.5(21.5)2.33$	2,680	—
D = $8(3.17 + 4.42)5.0$	—	304
Totales	13,610	902
	≈ 13,600 lb	≈ 900 lb

<sup>a</sup> Nota. Aunque aquí se usan 6 pies 2 pulg., cuando se diseñan columnas se verá que lo correcto es 6 pies 3 pulg. Esta última dimensión se presenta en los planos estructurales y no requiere un tamaño diferente de miembro.

El peso de la sección M 14 X 18 más el recubrimiento contra el fuego (tabla 13.1) es de  $18 + 104 = 122$  lb/pie lineal = 2.6 kips, y la carga total de gravedad es  $13.6 + 2.12 + 2.6 = 18.3$  kips.

Es razonable suponer que los valores relativos  $I/L$  y los factores de distribución se aproximarán a los mismos del marco interior de la figura 13.13; por lo tanto, se calculará un momento máximo proporcional (sección 13.21). El momento máximo para la viga transversal interior del segundo piso fue de 53.4 pie-kips (figura 13.27), para una carga uniforme total de 24.9 kips. Entonces,

$$M = \frac{18.3}{24.9} (53.4) = 39.3 \text{ pie-kips}$$

Viendo de nuevo los diagramas del AISC y las tablas para momentos permisibles en vigas, se ve que la M 14 X 18 es la selección más económica para cargas de gravedad. Las reacciones serán de 9.15 kips.

Viga de fachada típica — 8 — Tercer piso. En el tercer piso, esta viga tomará una carga concentrada

	(W) uniforme	(P) concentrada
A = $119(21.5)3.08$	7,880 lb	—
B = $17.5(3.17 + 4.42)5.0$	—	660 lb
C = $89(21.5)2.5$	4,780	—
E = $5(21.5)$	110	—
Totales	12,770	930 lb
	≈ 12,800 lb	

<sup>5</sup> Ibid.



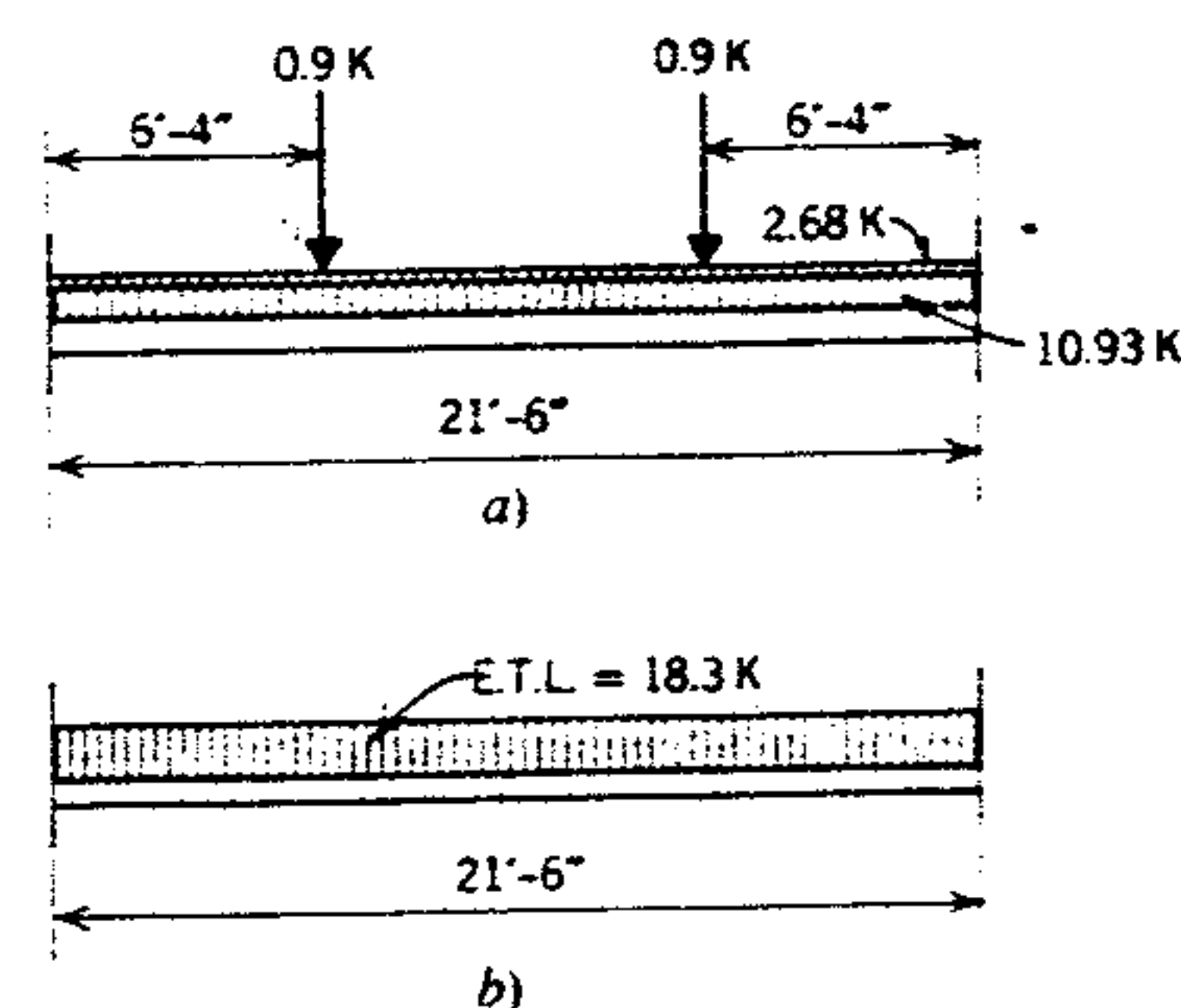


Figura 13.29 Viga de antepecho del segundo piso.

un poco mayor, debido al muro de cortina con ventanas de vidrio arriba y abajo del nivel de piso. Este aumenta cada carga concentrada ( $P$ ) en

$$8(3.17 + 4.42)4.5 = 273 \approx 270 \text{ lb}$$

y

$$\text{C.C.E.} = 2.12 + \frac{8(0.27)6.33}{21.5} = 2.74 \text{ kips}$$

La carga total de gravedad, suponiendo de nuevo que la M 14 X 18 es adecuada, es

$$13.6 + 2.74 + 2.6 = 18.9 \text{ kips}$$

Luego, de la figura 13.26

$$M = \frac{18.9}{24.2} (52.3) = 40.8 \text{ pie-kips}$$

En los diagramas y tablas del AISC para momentos permisibles en vigas, la sección M 14 X 18 es, de nuevo, adecuada. Las reacciones serán de 9.45 kips.

Viga de fachada típica — 8 — Techo. Estas vigas

soportan un parapeto de muro de cortina de 2 pies 6 pulg, rematado con una placa de 1 pie 6 pulg y

barandal (figura 13.5). Los pesos del parapeto y el muro de cortina abajo del nivel del techo son los siguientes:

$B$ = muro de cortina solo	17.5 lb/pie <sup>2</sup>
$C$ = parapeto—muro de cortina con respaldo de ladrillo de de arcilla de baja absorción, de 8 pulg	89.0 lb/pie <sup>2</sup>
$D$ = Vidrio (placa de $\frac{3}{8}$ pulg)	8.0 lb/pie <sup>2</sup>
$E$ = Barandal y placa de remate	5.0 lb/pie lineal

Las cargas resultantes sobre la viga de fachada son:

Entonces,

$$\text{C.C.E.} = \frac{8(0.93)6.33}{21.5} = 2.2 \text{ kips}$$

La carga total de gravedad, suponiendo de nuevo la sección M 14 X 18, es  $12.8 + 2.2 + 2.6 = 17.6$  kips. Luego, en la figura 13.25,

$$M = \frac{17.6}{18.3} (40.1) = 39.1 \text{ pie-kips}$$

De los diagramas de momento permisible del AISC, se ve que la sección M 14 X 18 es adecuada de nuevo. Las reacciones son de 8.8 kips.

Trabe de fachada típica — 18 — Segundo piso y

arriba. El diseño de estos miembros no se hará aquí; sin embargo se debe señalar que las cargas concentradas de las vigas intermedias y el muro de cortina no coincidirán, y como las primeras son tan grandes en proporción a las cargas uniformes, no se usará el procedimiento de la C.C.E. En vez de esto se debe analizar el marco del muro sur por encima del nivel del segundo piso, como en las figuras 13.22 a 13.24.

### 13.24 COLUMNA INTERIOR TÍPICA (10) CARGA DE GRAVEDAD

En las figuras 13.22 y 13.27 se notará que los momentos flexionantes debidos a la continuidad en

esta columna son muy pequeños, es decir, cero en el eje y-y y fluctuando de 0 a 9.0 pie-kips en el eje x-x. Por lo tanto, estos momentos se omitirán.

Las cargas directas se tomarán directamente de los diagramas de fuerza cortante. De la sección 13.21, los siguientes tamaños supuestos de columnas se pueden tabular y determinar sus pesos, con un mínimo de 2 pulgadas de cubierta contra el fuego (tabla 13.1):

Columna del tercer piso W 10 X 54 14 pies 2.5 kips  
Columna del segundo piso W 10 X 54 14 pies 2.5 kips  
Columna del primer piso W 12 X 79 17 pies 4.5 kips  
Columna del sótano W 12 X 79 14 pies 3.7 kips

Para el techo no se permite reducción de carga viva; sin embargo, se pueden hacer reducciones para otros pisos (sección 6.12):

#### Tercer piso

1. Área soportada por la columna (10)  
 $= 21.5(18) = 387 \text{ pie}^2$ .
2. Carga viva sobre el tercer piso (sección 13.3)  
 $= 80 \text{ lb/pie}^2$ .
3. Carga muerta sobre el tercer piso  
 $= 85(387) + 3690$  (peso de una trabe W 16 X 40) + 8840 (peso de tres vigas W 14 X 22) = 45,425 lb.  
Carga muerta unitaria  $= 45,425/387 = 117 \text{ lb/pie}^2$ .
4. Luego, de la sección 6.12,

$$\begin{aligned} a) & 387 > 150 \text{ pie}^2 \\ b) & 0.08(387) = 31 \text{ por ciento} \\ c) & R = 23 \left[ 1 + \frac{D}{L} \right] \\ & = 23 \left[ 1 + \frac{117}{80} \right] = 56.6 \text{ por ciento} \end{aligned}$$

5. Usar 31 por ciento: por lo tanto, la reducción unitaria permisible es  $80(0.31) = 24.8 \text{ lb/pie}^2$ , y la reducción total es de  $24.8(387)/1000 = 9.6$  kips.

#### Segundo piso

1. Área soportada por la columna (10)  
 $= 2(21.5)18 = 774 \text{ pie}^2$ .
2. Carga viva promedio del tercer y segundo pisos  $= 80 \text{ lb/pie}^2$ .
3. Carga muerta promedio del tercer y segundo pisos  $= 117 \text{ lb/pie}^2$ .
4. Luego de la sección 6.12,
  - a)  $774 > 150 \text{ pie}^2$
  - b)  $0.08(774) = 62$  por ciento
  - c)  $R = 23 \left[ 1 + \frac{117}{80} \right] = 56.6$  por ciento
  - d) Reducción máxima  $= 56.6$  por ciento.
5. Usar el 56.6 por ciento; por lo tanto, la reducción unitaria permisible es de  $80(0.566) = 45.3 \text{ lb/pie}^2$ , y la reducción total es  $45.3(774)/1000 = 35.1$  kips.

#### Primer piso

1. Área soportada por la columna (10)  
 $= 3(21.5)18 = 1161 \text{ pie}^2$ .
2. Carga viva promedio del tercero, segundo y primer pisos  $= [2(80) + 100]/3 = 86.7 \text{ lb/pie}^2$ .
3. Carga muerta promedio del tercero, segundo y primer pisos  $= 2(45,425) + 75(387) + 4430$  (peso de una trabe W 18 X 50) + 9160 (peso de tres vigas W 14 X 26) = 133,500 lb.  
Carga unitaria  $= 133,500/1161 = 115 \text{ lb/pie}^2$ .
4. Luego, de la sección 6.12,
  - a)  $1161 > 150 \text{ pie}^2$
  - b)  $0.08(1161) = 93$  por ciento
  - c)  $R = 23 \left[ 1 + \frac{115}{86.7} \right] = 53.5$  por ciento
  - d) Reducción máxima  $= 54$  por ciento

5. Usar 54 por ciento: por lo tanto, la reducción unitaria permisible es  $86.7(0.54) = 46.4 \text{ lb/pie}^2$ , y la reducción total es  $46.4(1161)/1000 = 53.9$  kips.



Entonces, las cargas de gravedad de columna son las siguientes:

Del techo	59.9 kips (8.8 + 8.8 + 22.5 + 19.8)
Peso col.	2.5 kips

62.4 kips en el extremo inferior de la columna del tercer piso

Del tercer piso	78.8 kips (11.7 + 11.7 + 19.2 + 26.2)
-----------------	---------------------------------------

Reducción C.V. — 9.6 kips al 31 por ciento

131.6 kips en el extremo superior de la columna del segundo piso

Peso col. 2.5 kips

134.1 kips en el extremo inferior de la columna del segundo piso

Del segundo piso	81.3 kips (12.2 + 12.2 + 30.3 + 26.6)
------------------	---------------------------------------

Reduc. C.V. — 35.1 kips al 56.6 por ciento

180.3 kips en el extremo superior de la columna del primer piso

Peso col. 4.5 kips

184.8 kips en el extremo inferior de la columna del primer piso

Del primer piso 81.3 kips (sin continuidad con vigas o trabes)

Reduc. C.V.

— 53.9 kips al 53.5 por ciento

212.2 kips en el extremo superior de la columna del sótano

Peso col.

3.7 kips

215.9 kips en el extremo inferior de la columna del sótano

Como en la estructura de este ejemplo no hay sistema de arriostramiento diagonal o muros de cortante, es decir, muros de mampostería que estén en el plano de uno o varios marcos, no hay apoyo lateral confiable para evitar el desplazamiento lateral (desplazamiento lateral del extremo superior de las columnas). Los muros de cortina no son adecuados para este propósito. Por lo tanto, es necesario tener especial cuidado al seleccionar los valores  $K$  para establecer longitudes efectivas (capítulo 6) al diseñar la columna.

En la figura 6.4 se ve que las siguientes condiciones se aplican a la porción en el sótano de la columna interior (10):

1. En la base de la columna del sótano, se usará una placa de base simple con pernos de anclaje. Ésta es teóricamente una condición de extremo articulado pero, de hecho, es una condición que sí proporciona cierta restricción. El extremo de la columna se debería diseñar como una articulación sin fricción verdadera, para que no estuviera restringida. Por lo tanto, la base se puede considerar como del tipo de "rotación libre, translación fija".
2. El extremo superior de la columna del sótano está arriostrada lateralmente por la construcción del primer piso similar a un diafragma. Las conexiones (extremo de viga, de trabe a columna) son flexibles, así que no evitan la rotación. Sin embargo, la columna es continua a través de este piso de diafragma,

y la parte del primer piso de la columna tendería a evitar la rotación. Por lo tanto, hay restricción parcial en el extremo superior.

3. La condición antes descrita parece quedar entre las clasificaciones  $b$  y  $d$  de la figura 6.4. Sabiendo que otros factores regirán el tamaño final de la columna, se selecciona un valor  $K$  conservador de 1.0.
4. Entonces, la longitud efectiva es

$$KL = 1.0(14) = 14 \text{ pies}$$

5. La carga de gravedad total calculada es de 215.9 kips. En las tablas de Cargas Admisibles del AISC para columnas, seleccionar una  $W 8 \times 48$  que soporta 215 kips.

La sección del primer piso de la columna interior (10), que se extiende desde la losa del sótano a 18

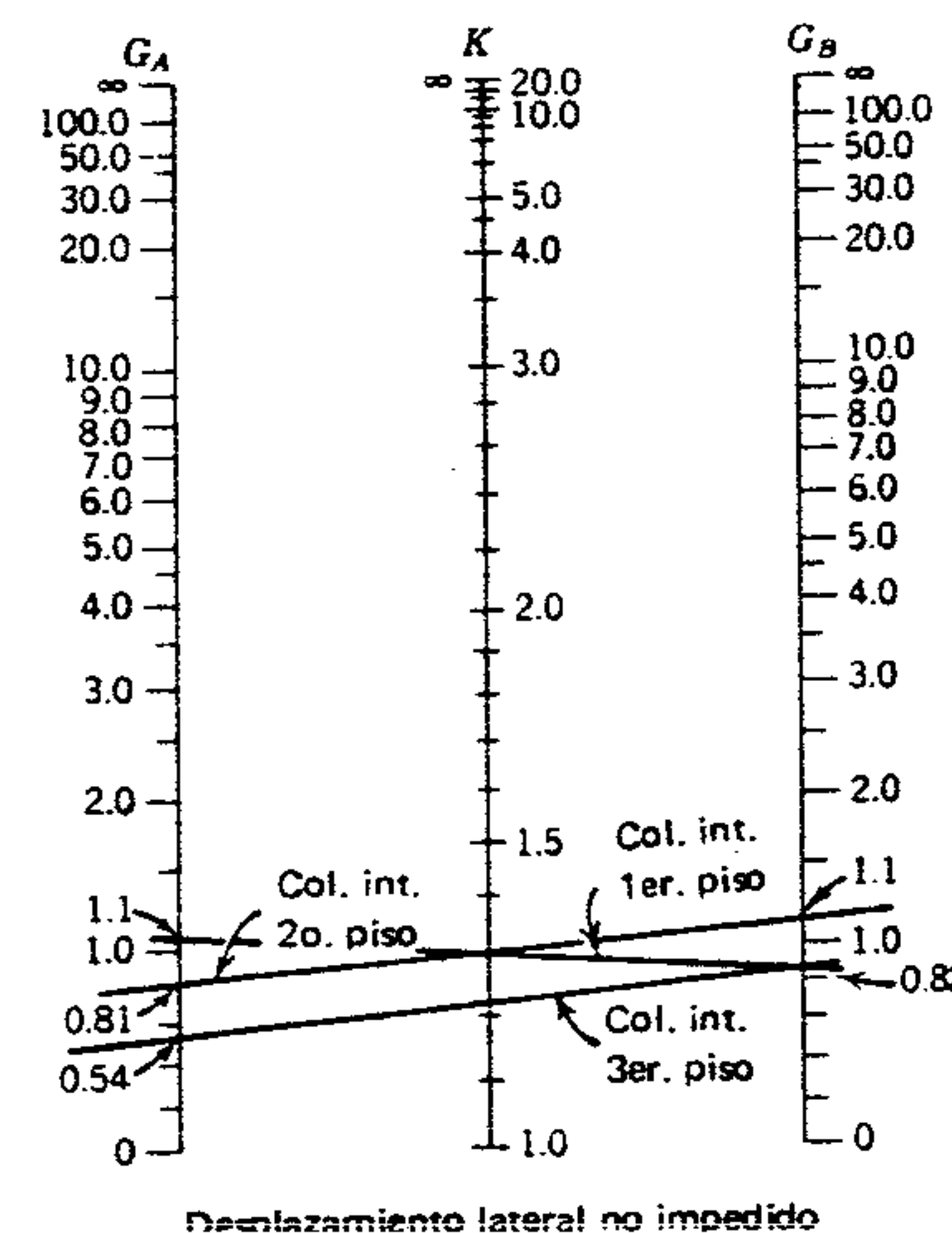


Figura 13.30 Nomograma para determinar la longitud efectiva de columnas en marcos continuos. Cortesía del American Institute of Steel Construction. Fuente original: Column Research Council.

pulg por arriba del segundo piso, es la más crítica y es más difícil establecer la longitud efectiva. En la figura 13.30 se ve que es necesario establecer los valores  $G_A$  y  $G_B$  para ambos ejes.

1. El extremo superior de la columna del primer piso estará libre de desplazarse lateralmente; no obstante, las conexiones rígidas del extremo de la viga y entre trabe y columna le dará cierto grado de resistencia a la rotación de la junta.

Para el eje  $y-y$ , usando la sección  $W 10 \times 54$  originalmente supuesta para la columna del segundo y tercer pisos ( $I_y = 103$ ) y  $W 12 \times 79$  para la columna del sótano y primer piso ( $I_y = 216$ ), y la sección elegida previamente  $W 14 \times 22$  para viga transversal ( $I_x = 199$ ),

$$G_A = \frac{\sum \frac{I_c}{L_c}}{\sum \frac{I_g}{L_g}} = \frac{\frac{103}{14} + \frac{216}{17}}{2 \left( \frac{199}{21.5} \right)} = 1.08$$

Para el eje  $x-x$ , usando la trabe  $W 16 \times 40$  ( $I_x = 518$ ), e  $I_x = 662$  para la columna  $W 12 \times 79$ ,

$$G_A = \frac{\frac{306}{14} + \frac{662}{17}}{2 \left( \frac{518}{18} \right)} = 1.06$$

2. El extremo inferior de la columna del primer piso se puede considerar ahora con más detalle. Para hacerlo se necesita aplicar el criterio. Hay cierto grado de restricción proporcionado por la porción del sótano de la columna continua y resultante del hecho de que no puede ocurrir translación lateral abajo del diafragma del primer piso. Este grado de restricción para la base de la columna del primer piso se determina por la rigidez relativa de la columna del primer piso y el miembro que ofrece la restricción, es decir, la columna del sótano.

$$G_B = \frac{I_c/17}{I_c/17} = 0.82$$



3. Usando el nomograma de la figura 13.30, y trazando un eje recto entre  $G_A = 1.08$  y  $1.06$ , y  $G_B = 0.82$ , se ve que  $K = 1.3$  es el valor más grande. Por lo tanto, el eje y-y es crítico. Por lo tanto, la longitud efectiva es

$$1.3(17) = 22 \text{ pies}$$

y  $P = 184.7$  kips.

4. En las tablas de Cargas Admisibles para columnas del AISC, seleccionar una W 12 X 53 con una capacidad de 189 kips. Nótese que  $G_A$  se basó en el tamaño de columna de la W 12 X 79. Un nuevo cálculo de  $G_A$  basado en la W 12 X 53 daría un valor aún menor. Por lo tanto, no se necesita afinar más para el diseño por carga de gravedad. Como este tamaño de columna es el mayor de los dos (sótano y primer piso), se aceptará temporalmente la W 12 X 53 para la columna de estos dos pisos.

La columna que va del segundo al tercer piso se debe diseñar de manera similar.

1. En el techo, donde los miembros son la columna supuesta W 10 X 54 ( $I_x = 303$  e  $I_y = 103$ ), las vigas transversales M 14 X 18 ( $I_x = 148$ ) y las trabes W 14 X 34 ( $I_x = 340$ ),

$$G_A = \frac{\frac{303}{14}}{2\left(\frac{340}{18}\right)} = 0.58$$

$$G_A = \frac{\frac{103}{14}}{2\left(\frac{148}{21.5}\right)} = 0.54$$

2. En el tercer piso, donde los miembros son la columna supuesta W 10 X 54, las vigas trans-

versales W 14 X 22 ( $I_x = 199$ ) y las trabes W 16 X 40 ( $I_x = 518$ ),

$$G_B = \frac{\frac{303}{14} + \frac{303}{14}}{2\left(\frac{518}{18}\right)} = 0.75$$

$$G_B = \frac{\frac{103}{14} + \frac{103}{14}}{2\left(\frac{199}{21.5}\right)} = 0.79$$

3. En el segundo piso, donde los miembros supuestos son la columna W 10 X 54, la columna W 12 X 79 ( $I_x = 662$  e  $I_y = 216$ ), las vigas transversales W 14 X 22 ( $I_x = 199$ ) y las trabes W 16 X 40 ( $I_x = 518$ ), y refiriéndose a los cálculos de la columna del primer piso,

$$G_C = 1.06 \quad G_C = 1.10$$

4. Usando los valores anteriores, y el nomograma de la figura 13.30: Para la columna del segundo piso.

$$\text{Longitud efectiva} = 1.3(14) = 18.2 \text{ pies}$$

$$P = 134.1 \text{ kips}$$

Seleccionar una W 10 X 45, con una capacidad de 156 kips. El tamaño supuesto fue W 10 X 54. Para la columna del tercer piso:

$$\text{Longitud efectiva} = 1.2(14) = 16.8 \text{ 17 pies}$$

$$P = 62.4 \text{ kips}$$

La W 10 X 45 es adecuada aquí también. Por lo tanto, se aceptará temporalmente una W 10 X 45 para la columna ⑩ interior del segundo y tercer pisos, por carga de gravedad.

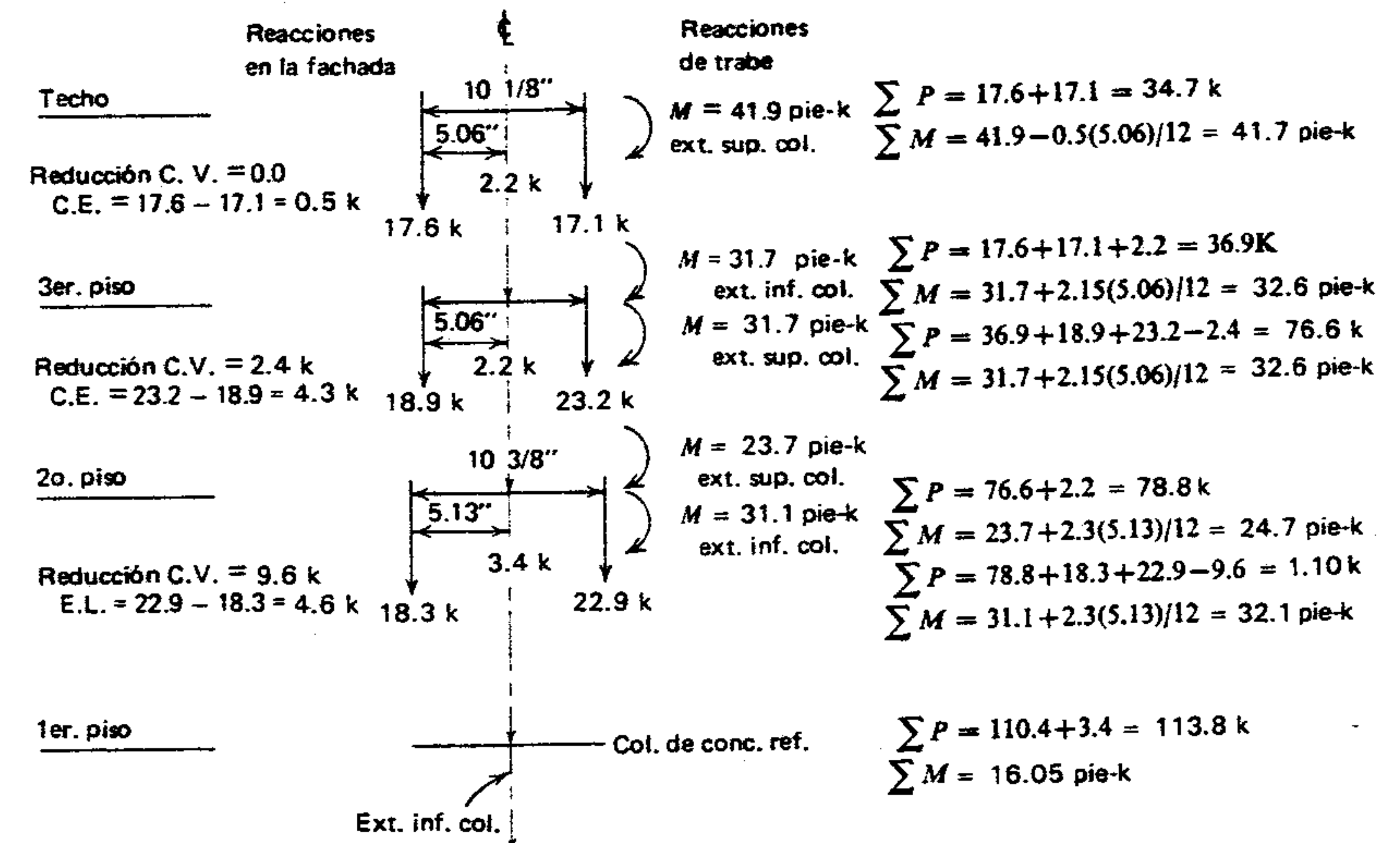


Figura 13.31 Columna exterior ⑨.

### 13.25 COLUMNA ⑨ EXTERIOR TÍPICA -CARGA DE GRAVEDAD

En la figura 13.22 se ve que el momento en la columna exterior ⑨ proveniente de la trabe es significativo (41.9 pie-kips), mientras que el momento inducido por las trabes de fachada en columnas<sup>6</sup> como la ⑧, ⑨ y ⑩ (menores que los de las columnas ⑦, ⑩ y ⑪, de la figura 13.25), es cero o despreciable y se puede omitir con seguridad.

Las vigas de fachada están conectadas al patín exterior de las columnas en sus patines (figura 13.28), trayendo la reacción muy próxima a la cara del patín exterior. La conexión rígida de las trabes a los patines de columna también trae las reacciones de la trabe muy cerca de la cara del patín de la columna. Por lo tanto, para todos los propósitos prácticos, se puede suponer que las cargas de gravedad en las columnas ⑧, ⑨ y ⑩ son cero (figura 13.31).

<sup>6</sup> Respecto al eje menor de la columna.

**Cargas y momentos. Techo.** En la figura 13.22, la reacción de la trabe es de 17.1 kips y, como se señaló antes, el momento es de 41.9 pie-kips.

**Cargas y momentos. Tercer piso.** Las reacciones de la viga de fachada son de 9.45 kips cada una, la reacción de la trabe es 23.2 kips y el momento de la trabe es 63.3 pie-kips (figura 13.23), dividido igualmente, 31.7 arriba y 31.7 abajo del nivel del piso.

**Cargas y momentos. Segundo piso.** Las reacciones de la viga de fachada son 9.15 kips cada una, la reacción de la trabe es 22.9 kips y el momento de la trabe es 54.8 pie-kips (figura 13.24), divididos en 23.7 arriba y 31.1 abajo del nivel del piso.

Los momentos debidos a la excentricidad de las cargas de gravedad (diferencia entre las cargas de la trabe y la viga de fachada) se distribuirán la mitad entre las columnas ⑧ y ⑩. Esto no es totalmente exacto en el nivel del segundo piso debido a la diferencia de la rigidez relativa de las columnas pero se aceptará debido al



efecto despreciable. Las reducciones de carga viva se calculan de la misma manera que para las columnas interiores (área de piso = 193.5 pie<sup>2</sup>), y son las siguientes.

Techo	0.0
Tercer piso	2.4 kips al 15.5 por ciento
Segundo piso	9.6 kips al 31.0 por ciento

Los pesos de columnas, usando los tamaños supuestos anteriormente, son

Columna del tercer piso	W 10 X 45	14 pies, 2.2 kips
Columna del segundo piso	W 10 X 45	14 pies, 2.2 kips
Columna del primer piso	W 10 X 68	17 pies, 3.4 kips

Debe observarse que la columna exterior no se extiende hacia abajo del nivel del primer piso; se apoya sobre la columna del muro de cimentación.

Estos valores, así como los cálculos de  $P$  y  $M$ , se presentan en la figura 13.31. Se considerará flexionamiento sólo para el eje  $x-x$  debido al momento obviamente omitible sobre el eje  $y-y$ .

Esencialmente se aplican las mismas condiciones de extremos, es decir, las mismas que para la columna interior. La diferencia primaria es la condición de extremo casi fijo en la base de la columna exterior, haciendo que esta condición sea del tipo de "rotación fija, translación fija".

Ahora se necesitan fijar con exactitud las longitudes efectivas para el diseño. Con base en el procedimiento de la sección 13.24, se calcularán valores  $G$  sólo para el primer tamaño supuesto de columna y no se calculará de nuevo ningún ajuste de tamaño de columna subsecuente.

1. En el techo, donde la columna supuesta es una W 10 X 45 ( $I_x = 248$  e  $I_y = 53.4$ ),

$$\begin{aligned} &\text{eje } x-x \\ &G_A = \frac{\frac{248}{14}}{\frac{340}{18}} = 0.94 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{eje } y-y \\ &G_A = \frac{\frac{53.4}{14}}{2\left(\frac{148}{21.5}\right)} = 0.28 \end{aligned}$$

2. En el tercer piso,

$$\begin{aligned} &\text{eje } x-x \\ &G_B = \frac{\frac{248}{14} + \frac{248}{14}}{\frac{518}{18}} = 1.23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{eje } y-y \\ &G_B = \frac{\frac{53.4}{14} + \frac{53.4}{14}}{2\left(\frac{199}{21.5}\right)} = 0.41 \end{aligned}$$

3. En el segundo piso, donde la columna supuesta abajo es una W 10 X 68 ( $I_x = 394$  e  $I_y = 134$ ),

$$\begin{aligned} &\text{eje } x-x \\ &G_C = \frac{\frac{248}{14} + \frac{394}{17}}{\frac{518}{18}} = 1.42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{eje } y-y \\ &G_C = \frac{\frac{53.4}{14} + \frac{134}{17}}{2\left(\frac{199}{21.5}\right)} = 0.63 \end{aligned}$$

4. Considérese la base de la columna exterior, donde la columna de acero termina sobre la columna exterior en forma de pilastra. Normalmente, cuando las columnas de acero terminan en placas de base estándar que no están específicamente diseñadas para proporcionar condicio-

nes de restricción, sólo hay una restricción inherente moderada y el AISC recomienda un valor  $G$  de 10. Sin embargo, la solución propuesta tiene características inherentes significativamente diferentes. El detalle propuesto es extender la columna hasta las vigas del primer piso (aun cuando estén sujetas con conexiones flexibles) y terminirlas a unas cuantas pulgadas abajo del primer piso con una placa de base estándar. Esto proporciona los medios necesarios para desarrollar un extremo casi totalmente restringido. La viga de piso puede desarrollar una fuerza lateral en

una dirección, y los tornillos de anclaje una fuerza lateral en la dirección opuesta, formando así el par necesario para un extremo restringido. Por simplicidad, se supondrán extremos totalmente restringidos sólo para el análisis de cargas de viento, y se usará una estimación ligeramente más conservadora para la condición de diseño; es decir, un valor  $G$  de 1.0 se usará en vez del valor de cero que se asigna usualmente a los extremos totalmente restringidos.

Viendo de nuevo el nomograma (figura 13.30), se seleccionan los siguientes valores de  $K$ :

- Columna del tercer piso: Para  $G_A = 0.94$  y  $G_B = 1.24$  sobre el eje  $x-x$ ,  $K = 1.32$   
Para  $G_A = 0.28$  y  $G_B = 0.41$  en el eje  $y-y$ ,  $K = 1.11$
- Columna del segundo piso: Para  $G_B = 1.23$  y  $G_C = 1.40$  en el eje  $x-x$ ,  $K = 1.40$   
Para  $G_B = 0.41$  y  $G_C = 0.62$  en el eje  $y-y$ ,  $K = 1.18$
- Columna del primer piso: Para  $G_C = 1.42$  y  $G_D = 1.0$  en el eje  $x-x$ ,  $K = 1.37$   
Para  $G_C = 0.63$  y  $G_D = 1.0$  en el eje  $y-y$ ,  $K = 1.27$

Diseño de la columna ⑨ del primer piso; cargas de gravedad. De la figura 13.31, la carga equivalente es

$$\begin{aligned} P + P' &= P + MB_x \\ &= 110.4 + [32.1(0.264)12] \\ &= 110.4 + 101.6 = 212 \text{ kips} \end{aligned}$$

La longitud efectiva aproximada es

$$KL = 1.27(17) = 21.5 \text{ pies}$$

De las tablas de Cargas Admisibles del AISC, la sección supuesta W 10 X 68 soportará una carga con-

céntrica de 252 kips en esta longitud. La W 10 X 49 no es adecuada. Probar la W 10 X 54, con una capacidad de carga = 205 kips.

$$\begin{aligned} A &= 15.8 \text{ pulg}^2 & r_x &= 4.37 \text{ pulg} \\ S_x &= 60.0 \text{ pulg}^3 & r_y &= 2.56 \text{ pulg} \\ S_y &= 20.6 \text{ pulg}^3 & d/2 &= 5.06 \text{ pulg} \end{aligned}$$

Hacer la revisión de estabilidad (capítulo 6) para el eje  $x-x$ .

1. Los esfuerzos axiales y de flexión unitarios máximos son



$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{110.4}{15.8} = 6.99 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{M}{S_x} = \frac{32.1(12)}{60.0} = 6.42 \text{ k/pulg}^2$$

2. La relación  $K_y L_y / r_y$  es

$$\frac{1.27(17)12}{2.56} = 101$$

3. El esfuerzo axial permisible (tabla 3.36 del AISC) es

$$F_a = 12.85 \text{ k/pulg}^2$$

4. La relación de esfuerzos axiales es

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{6.99}{12.85} = 0.54$$

Como  $0.54 > 0.15$ , se debe satisfacer la fórmula de interacción modificada.

5. Determinar el factor de amplificación.

$$\frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{1.37(17)12}{4.37} = 64.0$$

De la tabla 9 del AISC,

$$F'_e = 36.46 \text{ k/pulg}^2$$

entonces,

$$1 - \frac{f_a}{F'_e} = 1 - \frac{6.99}{36.46} = 0.81$$

6. El factor de reducción, de la sección 1.6.1 de la Especificación AISC, es

$$C_m = 0.85$$

7. Comprobar las relaciones de esfuerzo,

$$\frac{f_a}{F_a} + \left[ \frac{C_m}{1 - \frac{f_a}{F'_e}} \right] \frac{f_b}{F_b} = 0.54 + \left( \frac{0.85}{0.81} \right) \frac{0.42}{22.00} = 0.54 + 0.31 = 0.85 < 1.0$$

8. Revisar los extremos.

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{6.99}{22.00} + \frac{6.42}{22.00} = 0.61 < 1.0$$

Se acepta la W 10 × 54 (en vez de la W 10 × 68 supuesta). Es posible que para estas condiciones sea aceptable una sección aún más ligera; sin embargo, no se hará más afinación hasta después de investigar las cargas de viento. (Véase también la nota al final de esta sección, respecto a los valores cambiados de  $K$ ).

**Diseño de la columna ⑨ del segundo y tercer pisos; cargas de gravedad.** No se ve fácilmente cuál es la condición de diseño crítica (figura 13.31). Se hará una revisión preliminar para las condiciones más probables, usando  $B_x$  para la sección supuesta W 10 × 45, es decir,  $B_x = 0.271$ .

- Extremo superior de la columna del tercer piso,

$$\begin{aligned} P' &= P + MB_x \\ &= 34.7 + [41.7(0.271)12] \\ &= 34.7 + 135.6 = 170.3 \text{ kips} \end{aligned}$$

$$KL = 1.32(14) = 18.5 \text{ pies}$$

- Extremo superior de la columna del segundo piso,

$$\begin{aligned} P' &= 76.6 + [32.6(0.271)12] \\ &= 76.6 + 106.0 = 182.6 \text{ kips} \end{aligned}$$

$$KL = 1.40(14) = 19.6 \text{ pies}$$

- Extremo inferior de la columna del segundo piso,

$$\begin{aligned} P' &= 78.8 + [24.7(0.271)12] \\ &= 78.8 + 80.2 = 159.0 \text{ kips} \end{aligned}$$

**Diseño de la parte superior de la columna del segundo piso.** La carga equivalente es 181.2 kips, y la longitud efectiva de 19.6 pies.

Con esta longitud, la W 10 × 45 soportará 143 kips. Esto se comprobará con mayor exactitud.

$$\begin{aligned} A &= 13.3 \text{ pulg}^2 & r_x &= 4.32 \text{ pulg} \\ S_x &= 49.1 \text{ pulg}^3 & r_y &= 2.01 \text{ pulg} \\ S_y &= 13.3 \text{ pulg}^3 & d/2 &= 5.06 \text{ pulg} \end{aligned}$$

$$1. f_a = \frac{P}{A} = \frac{76.6}{13.3} = 5.76 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{M}{S_x} = \frac{32.6(12)}{49.1} = 7.97 \text{ k/pulg}^2$$

$$2. \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1.18(14)12}{2.01} = 98.6$$

$$3. F_a = 13.15 \text{ k/pulg}^2$$

$$4. \frac{f_a}{F_a} = \frac{5.76}{13.15} = 0.44$$

Como  $0.44 > 0.15$ , se debe satisfacer la fórmula de interacción modificada.

$$5. \frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{1.40(14)12}{4.32} = 54.44$$

$$F'_e = 50.40 \text{ k/pulg}^2$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_e} = 1 - \frac{5.76}{50.40} = 0.89$$

$$6. C_m = 0.85$$

7. Comprobando las relaciones de esfuerzos,

$$\begin{aligned} 0.44 + \left( \frac{0.85}{0.89} \right) \frac{7.97}{22.00} \\ = 0.44 + 0.335 \\ = 0.78 < 1.0 \end{aligned}$$

8. Revisión final.

$$\frac{5.76}{22.00} + \frac{7.97}{22.00}$$

Antes de aceptar la W 10 × 45 para cargas de gravedad, revisar la W 10 × 39.

$$A = 11.5 \text{ pulg}^2 \quad r_x = 4.27 \text{ pulg}$$

$$S_x = 42.1 \text{ pulg}^3 \quad r_y = 1.98 \text{ pulg}$$

$$S_y = 11.3 \text{ pulg}^3 \quad d/2 = 4.97 \text{ pulg}$$

$$1. f_a = \frac{P}{A} = \frac{76.6}{11.5} = 6.67 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{32.6(12)}{42.1} = 9.29 \text{ k/pulg}^2$$

$$2. \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1.18(14)12}{1.98} = 100$$

$$3. F_a = 12.98 \text{ k/pulg}^2$$

$$4. \frac{f_a}{F_a} = \frac{6.67}{12.98} = 0.514 > 0.15$$

$$5. \frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{1.4(14)12}{4.27} = 55.1$$

$$F'_e = 49.20 \text{ k/pulg}^2$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_e} = 1 - \frac{6.67}{49.20} = 0.86$$

$$6. C_m = 0.85$$

$$7. 0.514 + \left( \frac{0.85}{0.86} \right) \frac{9.29}{22.00}$$

$$= 0.514 + 0.417 = 0.931 < 1.0$$

8. Revisión final.

$$\frac{6.67}{22.00} + \frac{9.29}{22.00} = 0.725 < 1.0$$

Adoptar la W 10 × 39 como satisfactoria para carga de gravedad.

**Nota:** Si se derivaran nuevos valores  $K$  (para ajustar valores  $\alpha$ ) para usar la AISC 1989, se encontraría que la revisión de relación de esfuerzos (paso 7) daría valores de 0.826 y 0.908, respectivamente, es decir, aún más conservadores.



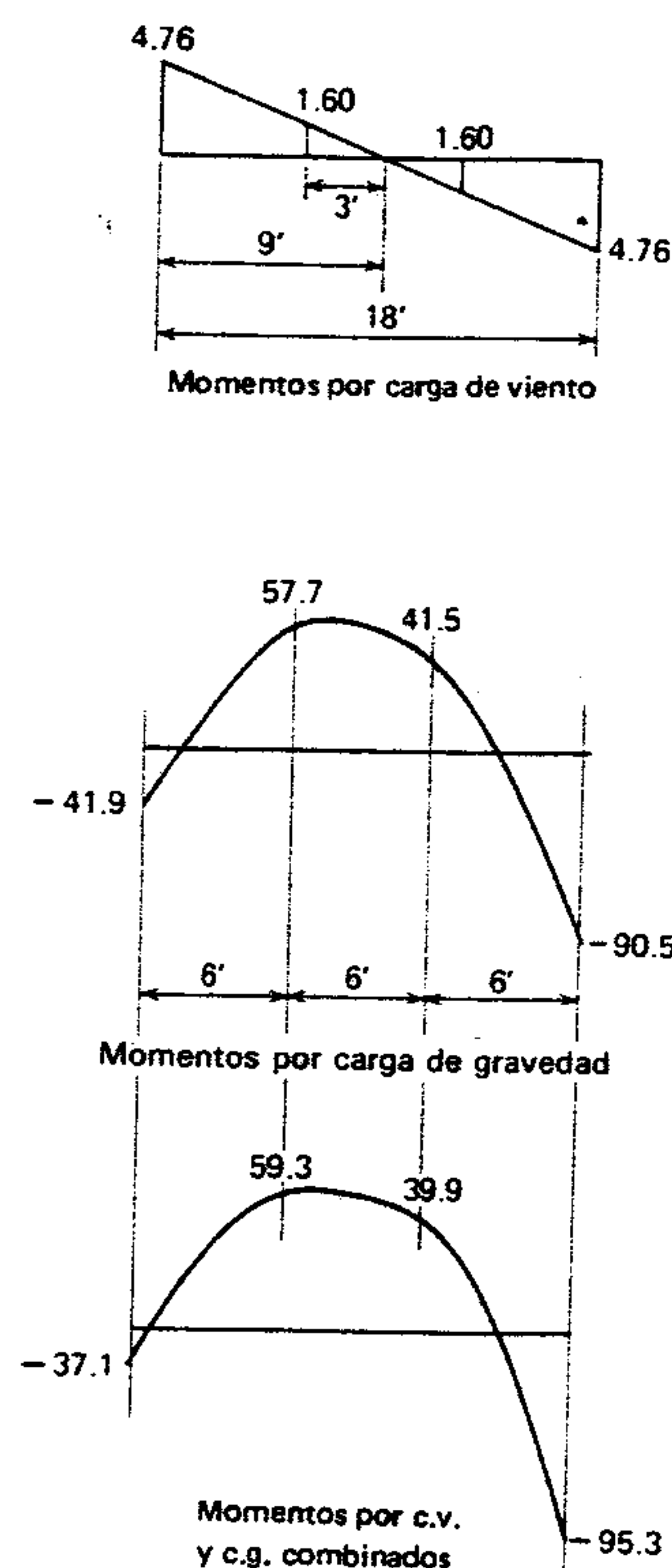


Figura 13.32 Momentos flexionantes para las trabes del techo.

### 13.26 REVISIÓN POR CARGA DE VIENTO; MIEMBROS HORIZONTALES TÍPICOS

Los siguientes miembros típicos han sido diseñados hasta aquí por cargas de gravedad (sección 13.25). La combinación por viento necesaria para cargas de gravedad y de viento (figura 13.13) se registran para consultarla fácilmente. Nótese que los momentos máximos se producen en los apoyos

y son aditivos para cargas de gravedad y de viento (GL y W).

#### 1. Trabes de techo—W 14 × 34

Claro = 18 pies  
 $M_{GL} = 90.3$  pie-kips (de la figura 13.22)  
 $M_w = 4.76$  pie-kips (de la figura 13.13)  
 Total = 95.06 pie-kips = 95.1

#### 2. Trabes del tercer piso—W 16 × 40

Claro = 18 pies  
 $M_{GL} = 117.7$  pie-kips (de la figura 13.23)  
 $M_w = 16.52$  pie-kips (de la figura 13.13)  
 Total = 134.22 = 134 pie-kips

#### 3. Trabes del segundo piso—W 16 × 40

Claro = 18 pies  
 $M_{GL} = 121.4$  pie-kips (de la figura 13.24)  
 $M_w = 35.48$  pie-kips (de la figura 13.13)  
 Total = 156.88 = 157 pie-kips

#### 4. Vigas transversales del techo—W 14 × 18

Claro = 21.5 pies  
 $M_{GL} = 40.1$  pie-kips (de la figura 13.25)  
 $M_w = 2.94$  pie-kips (de la figura 13.13)  
 Total = 43.04 = 43.0 pie-kips

#### 5. Vigas transversales del tercer piso—W 14 × 22

Claro = 21.5 pies  
 $M_{GL} = 52.3$  pie-kips (de la figura 13.26)  
 $M_w = 10.4$  pie-kips (de la figura 13.13)  
 Total = 62.7 pie-kips

#### 6. Vigas transversales del segundo piso—W 14 × 22

Claro = 21.5 pies  
 $M_{GL} = 53.4$  pie-kips (de la figura 13.27)  
 $M_w = 22.38$  pie-kips (de la figura 13.13)  
 Total = 75.78 = 75.8 pie-kips

Los momentos de extremos de miembros debidos al viento se pueden presentar en un diagrama sen-

cillo (figura 13.32). El análisis del marco por el método de portal (sección 13.9) fue para un viento proveniente del sur sobre el lado corto y un viento del oeste sobre el lado largo del edificio. Una inversión del viento crearía un efecto opuesto de

momento en el extremo; por lo tanto, los momentos por viento se pueden considerar aditivos en los puntos de apoyo.

Luego se hace la siguiente tabulación para los miembros anteriores:

	$M_{GL+W}$	$\frac{3}{4}[M_{GL+W}]$	$M_{GL}$
Trabes de techo	95.1	71.3	< 90.5
Trabes del tercer piso	134	101.0	< 117.7
Trabes del segundo piso	157	118.0	< 121.4
Vigas transversales del techo	43.0	32.3	< 40.1
Vigas transversales del tercer piso	62.7	47.0	< 52.3
Vigas transversales del segundo piso	75.8	56.9	> 53.4

Se ve que sólo la viga transversal del segundo piso se afecta cuando se combinan momentos debidos a la carga de gravedad y viento, y luego se reduce ese momento a tres cuartos (lo cual es lo inverso de aumentar el esfuerzo permisible en cuatro tercios). En los diagramas del AISC para momentos permisibles en las vigas, una W 14 × 22 sigue siendo adecuada para un momento de 58 pie-kips.

No se requieren cambios de tamaño de miembros por la carga de viento.

### 13.27 REVISIÓN POR CARGA DE VIENTO; COLUMNAS TÍPICAS

De la sección 13.24 y las figuras 13.13 y 13.16 se registran los siguientes datos de diseño de columnas para fácil consulta. (Nótese que los momentos para columnas interiores producidos por cargas de gravedad se consideran despreciables).

#### 1. Columna ⑩ interior del tercer piso—W 10 × 45

$KL_{(x-x)} = 17$  pies  
 $GL = 62.4$  kips  
 $WL_{directo} = 0.0$   
 $M_{w(x-x)} = 9.52$  pie-kips  
 $KL_{(y-y)} = 17$  pies  
 $M_{w(y-y)} = 6.02$  pie-kips

#### 2. Columna ⑩ interior del segundo piso—W 10 × 45

$KL_{(x-x)} = 18$  pies  
 $GL = 134.1$  kips  
 $WL_D = 0$   
 $M_{w(x-x)} = 23.59$  pie-kips  
 $KL_{(y-y)} = 10.4$  pies  
 $M_{w(y-y)} = 14.84$  pie-kips



## 3. Columna ⑩ interior del primer piso -W 12 X 53

$$\begin{aligned}
 KL_{(x-x)} &= 22.0 \text{ pies} & KL_{(y-y)} &= 22 \text{ pies} \\
 GL &= 184.8 \text{ kips} \\
 WL_D &= 0 \\
 M_{w(x-x)} &= 47.52 \text{ pie-kips} & M_{w(y-y)} &= 29.84 \text{ pie-kips}
 \end{aligned}$$

## 4. Columna ⑩ interior del sótano -W 12 X 53

$$\begin{aligned}
 KL_{(x-x)} &= 14 \text{ pies} & KL_{(y-y)} &= 14 \text{ pies} \\
 GL &= 215.9 \text{ kips} \\
 WL_D &= 0 \\
 M_{w(x-x)} &= 47.52 \text{ pie-kips} & M_{w(y-y)} &= 29.84 \text{ pie-kips}
 \end{aligned}$$

## 5. Columna ⑨ exterior del tercer piso -W 10 X 39

$$\begin{aligned}
 KL_{(x-x)} &= 18.5 \text{ pies} & KL_{(y-y)} &= 15.5 \text{ pies} \\
 P_{GL} &= 34.7 \text{ kips (ext. sup. col.)} & M_{GL} &= 41.7 \text{ pie-kips (ext. sup. col.)} \\
 P_{GL} &= 36.9 \text{ kips (ext. inf. col.)} & M_{GL} &= 32.6 \text{ pie-kips (ext. inf. col.)} \\
 WL_{D(x-x)} &= 0.53 \text{ kips} & WL_{D(y-y)} &= 0 \\
 M_{w(x-x)} &= 4.76 \text{ pie-kips} & M_{w(y-y)} &= 6.02/2 = 3.01 \text{ pie-kips}
 \end{aligned}$$

## 6. Columna ⑨ exterior del segundo piso -W 10 X 39

$$\begin{aligned}
 KL_{(x-x)} &= 19.6 \text{ pies} & KL_{(y-y)} &= 16.5 \text{ pies} \\
 P_{GL} &= 76.6 \text{ kips (ext. sup. col.)} & M_{GL} &= 32.6 \text{ pie-kips (ext. sup. col.)} \\
 P_{GL} &= 78.8 \text{ kips (ext. inf. col.)} & M_{GL} &= 24.7 \text{ pie-kips (ext. inf. col.)} \\
 WL_{D(x-x)} &= 2.37 \text{ kips} & WL_{D(y-y)} &= 0 \\
 M_{w(x-x)} &= 11.76 \text{ pie-kips} & M_{w(y-y)} &= 14.84/2 = 7.42 \text{ pie-kips}
 \end{aligned}$$

## 7. Columna ⑨ exterior del primer piso -W 10 X 54

$$\begin{aligned}
 KL_{(x-x)} &= 23.3 \text{ pies} & KL_{(y-y)} &= 21.6 \text{ pies} \\
 P_{GL} &= 110.4 \text{ kips (ext. sup. col.)} & M_{GL} &= 32.1 \text{ pie-kips (ext. sup. col.)} \\
 P_{GL} &= 113.8 \text{ kips (ext. inf. col.)} & M_{GL} &= 15.05 \text{ pie-kips (ext. inf. col.)} \\
 WL_{D(x-x)} &= 6.31 \text{ kips} & WL_{D(y-y)} &= 0 \\
 M_{w(x-x)} &= 23.7 \text{ pie-kips} & M_{w(y-y)} &= 29.84/2 = 14.92 \text{ pie-kips}
 \end{aligned}$$

Se revisará la sección elegida por carga de gravedad solamente por cargas combinadas, permitiendo un incremento de un tercio en el esfuerzo por el viento, es decir, la columna interior ⑩ del primer y segundo pisos, y la parte superior de las secciones del primer y segundo pisos de la columna exterior ⑨. Como el aire puede venir de cualquier dirección, se considerarán aditivos los momentos.

**Diseño de la columna ⑩ del primer piso; carga de gravedad más viento.** La idoneidad de la W 12 X 53 previamente diseñada (por carga de gravedad solamente) se determinará primero.

Considerando solamente el primer piso, se hará una revisión de la estabilidad con referencia al viento que causa flexión respecto al eje y-y.

$$1. f_a = \frac{P}{A} = \frac{184.8}{15.6} = 11.85 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{M}{S_y} = \frac{29.84(12)}{19.2} = 18.65 \text{ k/pulg}^2$$

$$2. \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{22(12)}{2.48} = 106.5 > \frac{K_x L_x}{r_x}$$

$$3. F_a = 12.14(1.33) = 16.13 \text{ k/pulg}^2$$

$$4. \frac{f_a}{F_a} = \frac{11.85}{16.13} = 0.735$$

Como  $0.735 > 0.15$ , se debe satisfacer la fórmula de interacción modificada.

$$5. \frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_y L_y}{r_y} = 106.5$$

$$F'_e = 13.15(1.33) = 17.49 \text{ k/pulg}^2$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_e} = 1 - \frac{11.85}{17.49} = 0.322$$

$$6. C_m = 0.85$$

$$\begin{aligned}
 7. \frac{f_a}{F_a} + \left[ \frac{C_m}{1 - \frac{f_a}{F'_e}} \right] \frac{f_b}{F_b} \\
 = 0.735 + \left( \frac{0.85}{0.322} \right) \frac{18.65}{(1.33)22} \\
 = 0.735 + 1.682 = 2.417 > 1.0
 \end{aligned}$$

La W 12 X 53 no es adecuada. Probar la W 12 X 72.

$$\begin{aligned}
 A &= 21.1 \text{ pulg}^2 & r_x &= 5.31 \text{ pulg} \\
 S_x &= 97.4 \text{ pulg}^3 & r_y &= 3.04 \text{ pulg} \\
 S_y &= 32.4 \text{ pulg}^3
 \end{aligned}$$

Revisar la flexión respecto al eje y-y

$$1. f_a = \frac{184.8}{21.1} = 8.76 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{29.84(12)}{32.4} = 11.05 \text{ k/pulg}^2$$

$$2. \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{22(12)}{3.04} = 86.8 > \frac{K_x L_x}{r_x}$$

$$3. F_a = 14.58(1.33) = 19.39 \text{ k/pulg}^2$$

$$4. \frac{f_a}{F_a} = \frac{8.76}{19.39} = 0.452 > 0.15$$

$$5. \frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_y L_y}{r_y} = 86.8$$

$$6. F'_e = 19.79(1.33) = 26.32 \text{ k/pulg}^2$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_e} = 1 - \frac{8.76}{26.32} = 0.667$$

$$7. C_m = 0.85$$

$$\begin{aligned}
 8. 0.452 + \left( \frac{0.85}{0.667} \right) \frac{11.05}{22(1.33)} \\
 = 0.452 + 0.481 = 0.933 < 1.0
 \end{aligned}$$

Para la flexión respecto al eje x-x

$$1. f_a = 8.76 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{47.52(12)}{97.4} = 5.85 \text{ k/pulg}^2$$

$$2. \frac{K_y L_y}{r_y} = 86.8 > \frac{K_x L_x}{r_x}$$

$$3. F_a = 19.39 \text{ k/pulg}^2$$

$$4. \frac{f_a}{F_a} = 0.45 > 0.15$$

$$5. \frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{22(12)}{5.31} = 49.7$$

$$6. F'_e = 60.39(1.33) = 80.3 \text{ k/pulg}^2$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_e} = 1 - \frac{8.76}{80.3} = 0.891$$

$$7. C_m = 0.85$$

$$\begin{aligned}
 8. 0.450 + \left( \frac{0.85}{0.891} \right) \frac{11.05}{22(1.33)} \\
 = 0.450 + 0.191 = 0.641 < 1.0
 \end{aligned}$$



Para la revisión final,

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} = \frac{8.76}{22(1.33)} + \frac{11.05}{22(1.33)} = 0.677 < 1.0$$

Se usará la W 12 X 72 en vez de la W 12 X 53 que se seleccionó por carga de gravedad solamente.

Columna interior ⑩ del segundo piso - W 10 X 53. Revisión de la estabilidad para flexión respecto al eje y-y.

$$\begin{aligned} 1. f_a &= \frac{P}{A} = \frac{134.1}{13.3} = 10.08 \text{ k/pulg}^2 \\ f_b &= \frac{M}{S_y} = \frac{14.84(12)}{13.3} = 13.4 \text{ k/pulg}^2 \\ 2. \frac{K_y L_y}{r_y} &= \frac{18.2(12)}{2.01} = 109 \\ 3. F_a &= 11.81(1.33) = 15.71 \text{ k/pulg}^2 \\ 4. \frac{f_a}{F_a} &= \frac{10.08}{15.71} = 0.642 > 0.15 \\ 5. \frac{K_b L_b}{r_b} &= \frac{K_y L_y}{r_y} = 109 \\ F'_e &= 12.57(1.33) = 16.72 \text{ k/pulg}^2 \\ 1 - \frac{f_a}{F'_e} &= 1 - \frac{10.08}{16.72} = 0.397 \\ 6. C_m &= 0.85 \\ 7. 0.642 + \left( \frac{0.85}{0.397} \right) \frac{13.4}{29.26} &= 0.642 + 2.14(0.458) = 1.63 > 1.0 \end{aligned}$$

El tamaño de esta sección es significativamente insuficiente. Probar la W 10 X 49. Nótese que esto es lo que se llama sección cuadrada (10 X 10 pulg), mientras que la W 10 X 45 no lo es. La introducción de un momento en el eje y-y invalida, como regla general, todas las secciones excepto las cuadradas.

$$\begin{aligned} A &= 14.4 \text{ pulg}^2 & r_x &= 4.35 \text{ pulg} \\ S_x &= 54.6 \text{ pulg}^3 & r_y &= 2.54 \text{ pulg} \\ S_y &= 18.6 \text{ pulg}^3 \end{aligned}$$

Revisión de la estabilidad para flexión respecto al eje y-y.

$$\begin{aligned} 1. f_a &= \frac{134.1}{14.4} = 9.31 \text{ k/pulg}^2 \\ f_b &= \frac{14.84(12)}{18.7} = 9.52 \text{ k/pulg}^2 \\ 2. \frac{K_y L_y}{r_y} &= \frac{18.2(12)}{2.54} = 86 \\ 3. F_a &= 14.67(1.33) = 19.51 \text{ k/pulg}^2 \\ 4. \frac{f_a}{F_a} &= \frac{9.31}{19.51} = 0.477 > 0.15 \\ 5. \frac{K_b L_b}{r_b} &= \frac{K_y L_y}{r_y} = 86 \\ F'_e &= 20.16(1.33) = 26.81 \text{ k/pulg}^2 \\ 1 - \frac{9.31}{26.81} &= 0.653 \\ 6. C_m &= 0.85 \\ 7. 0.477 + \left( \frac{0.85}{0.653} \right) \frac{9.52}{29.26} &= 0.477 + 0.425 = 0.901 < 1.0 \end{aligned}$$

La revisión final y la revisión de la estabilidad para flexión respecto al eje x-x se encontrarían satisfactorias.

Se usará la W 10 X 49 en vez de la W 10 X 45 que se seleccionó por carga de gravedad solamente.

Diseño de la columna ⑨ del primer piso; carga de gravedad más la de viento. La idoneidad de la W 10 X 54 previamente diseñada (sólo por cargas de gravedad) se revisará. Revisando los momentos por carga de viento respecto al eje x-x primero en el extremo superior de la columna y refiriéndose al punto 7 al principio de esta sección,

$$\begin{aligned} P &= 110.4 + 6.31 = 116.7 \text{ kips} \\ M_{(x-x)} &= 32.10 + 23.76 = 55.86 \text{ pie-kips} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. f_a &= \frac{P}{A} = \frac{116.7}{15.8} = 7.39 \text{ k/pulg}^2 \\ f_b &= \frac{M}{S_x} = \frac{55.86(12)}{60.0} = 11.17 \text{ k/pulg}^2 \\ 2. \frac{K_y L_y}{r_y} &= \frac{21.6(12)}{2.56} = 101 > \frac{K_x L_x}{r_x} \\ 3. F_a &= 12.85(1.33) = 17.09 \text{ k/pie}^2 \\ 4. \frac{f_a}{F_a} &= \frac{7.39}{17.09} = 0.432 > 0.15 \\ 5. \frac{K_b L_b}{r_b} &= \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{23.3(12)}{4.37} = 64.0 \\ F'_e &= 36.46(1.33) = 48.49 \text{ k/pulg}^2 \\ 1 - \frac{f_a}{F'_e} &= 1 - \frac{7.39}{48.49} = 0.848 \\ 6. C_m &= 0.85 \\ 7. 0.432 + \left( \frac{0.85}{0.848} \right) \frac{11.17}{29.26} &= 0.432 + 0.383 = 0.815 < 1.0 \end{aligned}$$

Revisión final,

$$\frac{7.39}{22(1.33)} + \frac{11.17}{22(1.33)} = 0.634 < 1.0$$

Revisar el eje y-y. En este caso, la columna estará sujeta a flexión respecto a ambos ejes, es decir, a momento por carga de viento sobre el eje y-y (14.92 pie-kips) y al momento de la trabe por carga de gravedad sobre el eje x-x (32.1 pie-kips). Además, habrá una carga de gravedad directa de 110.4 kips. Refiriéndose a las notas generales sobre columnas en el Manual AISC, la fórmula de interacción es:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_{ex}}\right) F_{bx}} + \frac{C_{my} f_{by}}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_{ey}}\right) F_{by}} \leq 1.0$$

$$\begin{aligned} 1. f_a &= \frac{110.4}{15.8} = 6.99 \text{ k/pulg}^2 \\ f_{bx} &= \frac{M_x}{S_x} = \frac{32.1(12)}{60.0} = 6.42 \text{ k/pulg}^2 \\ f_{by} &= \frac{M_y}{S_y} = \frac{14.92(12)}{20.6} = 8.69 \text{ k/pulg}^2 \\ 2. \frac{K_y L_y}{r_y} &= 101 > \frac{K_x L_x}{r_x} \\ 3. F_a &= 17.09 \text{ k/pulg}^2 \\ 4. \frac{f_a}{F_a} &= \frac{6.99}{17.09} = 0.409 > 0.15 \\ 5. \frac{K_b L_b}{r_b} &= \frac{K_y L_y}{r_y} = 101 \\ F'_{ey} &= 14.62(1.33) = 19.44 \text{ k/pulg}^2 \\ 1 - \frac{f_a}{F'_{ey}} &= 1 - \frac{6.99}{19.44} = 0.640 \\ \frac{K_b L_b}{r_b} &= \frac{K_x L_x}{r_x} = 63.7 \\ F'_{ex} &= 48.89 \\ 1 - \frac{f_a}{F'_{ex}} &= 0.857 \\ 6. C_m &= 0.85 \\ 7. 0.409 + \left( \frac{0.85}{0.857} \right) \frac{6.42}{22(1.33)} &+ \left( \frac{0.85}{0.640} \right) \frac{8.69}{22(1.33)} \\ &= 0.409 + 0.218 + 0.394 = 1.021 \end{aligned}$$

Esto indica en realidad que la columna es inadecuada, pero sólo por un escaso margen. La decisión de aceptar la W 10 X 54 o adoptar la siguiente sección mayor (W 10 X 60) se debe basar en el criterio de precisión de todos los supuestos y el procedimiento de diseño empleado. En este caso, la W 10 X 54 se considerará segura.



Revisión final.

$$\frac{6.99}{22(1.33)} + \frac{6.42}{22(1.33)} + \frac{8.69}{22(1.33)} = 0.239 + 0.219 + 0.297 = 0.755 < 1.0$$

La W 10 X 54 adoptada por carga de gravedad solamente también es satisfactoria por carga de gravedad más carga de viento.

**Columna ⑨ del segundo y tercer pisos; carga de gravedad más viento.** Se revisará para ver si es adecuada la W 10 X 45 previamente diseñada (sólo por carga de gravedad). Revisando primero los momentos por carga de viento respecto al eje x-x en la parte superior de la columna del segundo piso, y refiriéndose al punto 6 al principio de esta sección,

$$P = 76.6 + 2.37 = 78.97; \text{ usar; } 79 \text{ kips}$$

$$M_x = 32.6 + 11.76 = 44.36 \text{ pie-kips}$$

$$1. f_a = \frac{P}{A} = \frac{79}{13.3} = 5.94 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_b = \frac{M}{S_x} = \frac{44.36(12)}{49.1} = 10.84 \text{ k/pulg}^2$$

$$2. \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{16.5(12)}{2.01} = 99 > \frac{K_x L_x}{r_x}$$

$$3. F_a = 13.10(1.33) = 17.42 \text{ k/pulg}^2$$

$$4. \frac{f_a}{F_a} = \frac{5.94}{17.42} = 0.341 > 0.15$$

$$5. \frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{19.6(12)}{4.32} = 54.4$$

$$F'_e = 50.47(1.33) = 67.13 \text{ k/pulg}^2$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_e} = 1 - \frac{5.94}{67.13} = 0.912$$

$$6. C_m = 0.85$$

$$7. 0.341 + \left( \frac{0.03}{0.913} \right) \frac{10.84}{22(1.33)} = 0.341 + 0.345 = 0.686 < 1.0$$

Revisión final.

$$\frac{5.94}{22(1.33)} + \frac{10.84}{22(1.33)} = 0.573 < 1.0$$

Revisar ahora la W 10 X 45 para momentos por carga de viento respecto al eje y-y. Se observa que la sección crítica aún ocurre en el extremo superior de la columna del segundo piso.

$$P = 76.6 \text{ kips}$$

$$M_x = 32.6 \text{ pie-kips}$$

$$M_y = 7.42 \text{ pie-kips}$$

$$1. f_a = \frac{76.6}{13.3} = 5.76 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_{bx} = \frac{32.6(12)}{49.1} = 7.97 \text{ k/pulg}^2$$

$$f_{by} = \frac{7.42(12)}{13.3} = 6.69 \text{ k/pulg}^2$$

$$2. \frac{K_y L_y}{r_y} = 99 > \frac{K_x L_x}{r_x}$$

$$3. F_a = 17.42 \text{ k/pulg}^2$$

$$4. \frac{f_a}{F_a} = \frac{5.76}{17.42} = 0.331 > 0.15$$

$$5. \frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_y L_y}{r_y} = 99$$

$$F'_{ey} = 15.21(1.33) = 20.23 \text{ k/pulg}^2$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_{ey}} = 1 - \frac{5.76}{20.23} = 0.715$$

$$\frac{K_b L_b}{r_b} = \frac{K_x L_x}{r_x} = 54.3$$

$$F'_{ex} = 66.79 \text{ k/pulg}^2$$

$$1 - \frac{f_a}{F'_{ex}} = 0.914$$

$$C_m = 0.85$$

$$7. 0.331 + \left( \frac{0.85}{0.914} \right) \frac{7.97}{22(1.33)}$$

**Supuesto de Portal.** De acuerdo con el supuesto de que las columnas exteriores tienen la mitad del momento de inercia de las columnas interiores, éste se calcula aproximadamente como sigue:

$$+ \left( \frac{0.85}{0.713} \right) \frac{6.69}{22(1.33)} = 0.331 + 0.253 + 0.272 = 0.856 < 1.0$$

Revisión final

$$\frac{5.76}{29.26} + \frac{7.97}{29.26} + \frac{6.69}{29.26} = 0.698 < 1.0$$

La W 10 X 45 adoptada por carga de gravedad solamente es también satisfactoria por carga de gravedad más carga de viento.

### 13.28 SELECCIONES FINALES EN CONTRASTE CON SUPUESTOS

Los tamaños finales de columnas se comparan con los supuestos originales de la siguiente tabla:

	Final	Supuesto
Columna interior del primer piso y sótano	W 12 X 72	W 12 X 79
Columna interior del segundo y tercer pisos	W 10 X 49	W 10 X 54
Columna exterior del primer piso	W 10 X 54	W 10 X 68
Columna exterior del segundo y tercer pisos	W 10 X 45	W 10 X 45

### 13.29 PLANOS DE MARCOS Y PROGRAMA DE COLUMNAS

En las figura 13.25 a 13.19 se ilustran plantas de marcos con todos los miembros típicos registrados. En la figura 13.33 se ilustra el programa de columnas.

	Supuesta	I/L	Real	I/L
Vigas transversales del techo	W 14 X 22	1.0	M 14 X 18	1.0
Vigas transversales del tercer piso	W 14 X 22	1.0	W 14 X 22	1.3
Vigas transversales del segundo piso	W 14 X 30	1.5	W 14 X 22	1.3
Trabes del techo	W 14 X 30	1.0	W 14 X 34	1.0
Trabes del tercer piso	W 16 X 36	1.5	W 16 X 40	1.5
Trabes del segundo piso	W 18 X 46	2.4	W 16 X 40	2.1
Columnas interiores del primer piso	W 12 X 79	2.4 <sub>x-x</sub> 1.4 <sub>y-y</sub>	W 12 X 72	2.2 <sub>x-x</sub> 1.2 <sub>y-y</sub>
Columnas interiores del segundo	W 10 X 54	1.4 <sub>x-x</sub>	W 10 X 49	1.2 <sub>x-x</sub>
Columnas exteriores del primer piso	W 10 X 68	1.4 <sub>x-x</sub> 0.8 <sub>y-y</sub>	W 10 X 54	1.1 <sub>x-x</sub> 0.7 <sub>y-y</sub>
Columnas exteriores del segundo y tercer pisos	W 10 X 45	1.1 <sub>x-x</sub> 0.4 <sub>y-y</sub>	W 10 X 45	1.1 <sub>x-x</sub> 0.4 <sub>y-y</sub>



## 594 / PROYECTO DE DISEÑO DE UN EDIFICIO

Piso	Col.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Col.	Piso
Techo																							Techo
3er. piso									W 10 x 45	W 10 x 45	W 10 x 49	W 10 x 49			W 10 x 49	W 10 x 49	W 10 x 45						3er. piso
2o. piso									W 10 x 54	W 10 x 54	W 12 x 72	W 12 x 72			W 12 x 72	W 12 x 72	W 10 x 54						2o. piso
1er. piso									W 10 x 54	W 10 x 54	W 12 x 72	W 12 x 72			W 12 x 72	W 12 x 72	W 10 x 54						1er. piso
piso del sótano																							piso del sótano
Bases de placa de acero																							Bases de placa de acero

Figura 13.33 Programa de columnas.

## 13.30 CONEXIONES TÍPICAS

Se diseñará sólo una conexión entre viga y columna y entre trabe y columna. La junta seleccionada está en la columna (10) en el nivel del segundo piso.

En general, todas las conexiones se harán usando ángulos de marco flexibles con tornillos A325 (alta resistencia) de  $\frac{3}{4}$  pulg de alta resistencia, tipo apoyo con rosca en el plano de esfuerzos cortante y agujeros estándar. Estas conexiones (sólo por cortante) se fabricarán y soldarán en taller, y los tornillos de  $\frac{3}{4}$  pulg se colocarán en la obra. Donde se necesiten conexiones resistentes a momento, es decir, para vigas transversales y entre trabe y columna sobre el primer piso, se soldarán placas adicionales a los patines.

En la figura 13.34 se ve que los ángulos que transfieren el cortante a las columnas dejarán espacio adecuado para la erección. Las placas se colocarán y soldarán en la obra para desarrollar restricción de extremos, es decir, transferir momentos de extremos.

Conexión entre la trabe W 16 X 40 a la columna W 12 X 72. Esfuerzo cortante: 30.3 kips (figura 13.35a). Para el ala conectada en taller, dejar un espacio de 1 pulg entre el extremo de la trabe y el

patín de la columna (para poder soldar la placa del patín inferior).

Se usará un ala conectada de 4 pulg. Luego, suponiendo que se necesiten 3 tornillos, la distribución de soldaduras, usando soldaduras de filete de  $\frac{1}{4}$  y electrodos E60XX, es como se ilustra en la figura 13.35a. Se adoptan ángulos de  $4 \times 4 \times \frac{5}{16}$  pulg.

El cortante es crítico en el ala sobresaliente conectada en la obra. El número requerido de tornillos de alta resistencia de  $\frac{3}{4}$  pulg es

$$\frac{30.3}{9.3} = 3.26; \text{ usar } 6$$

$$\text{Momento: } M_{GL} = 121.4(12) = 1460 \text{ pulg-kips}$$

$$M_{GL+w} = \frac{3}{4}[1460 + 35.48(12)] = 1420 < 1460 \text{ pulg-kips}$$

La placa soldada a los patines debe desarrollar una fuerza de

$$F = \frac{1460}{15} = 91.3 \text{ kips}$$

Si la placa tiene 6 pulg de ancho (dejando  $\frac{1}{2}$  pulg a cada lado para la soldadura de filete al patín de la trabe), el espesor requerido es

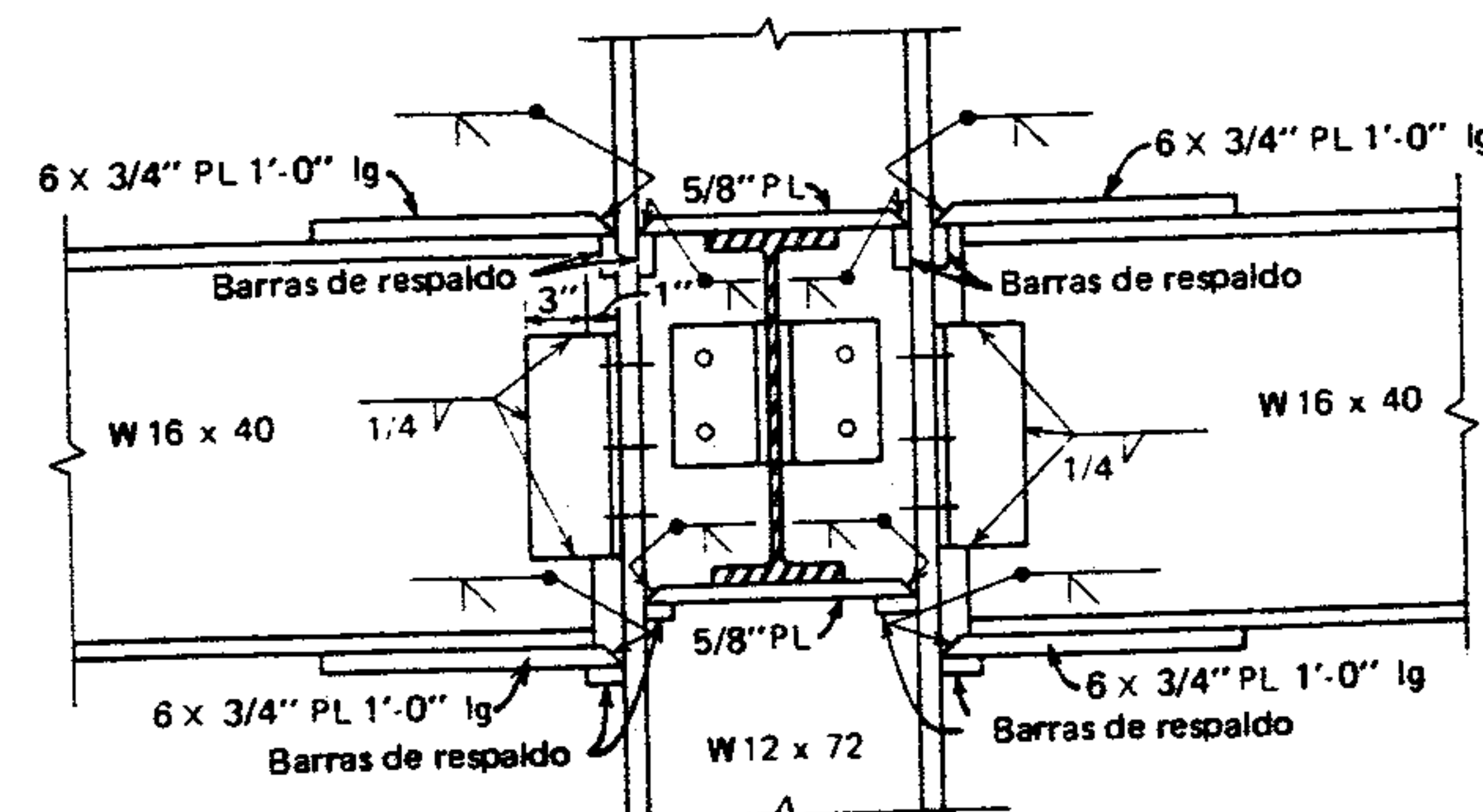
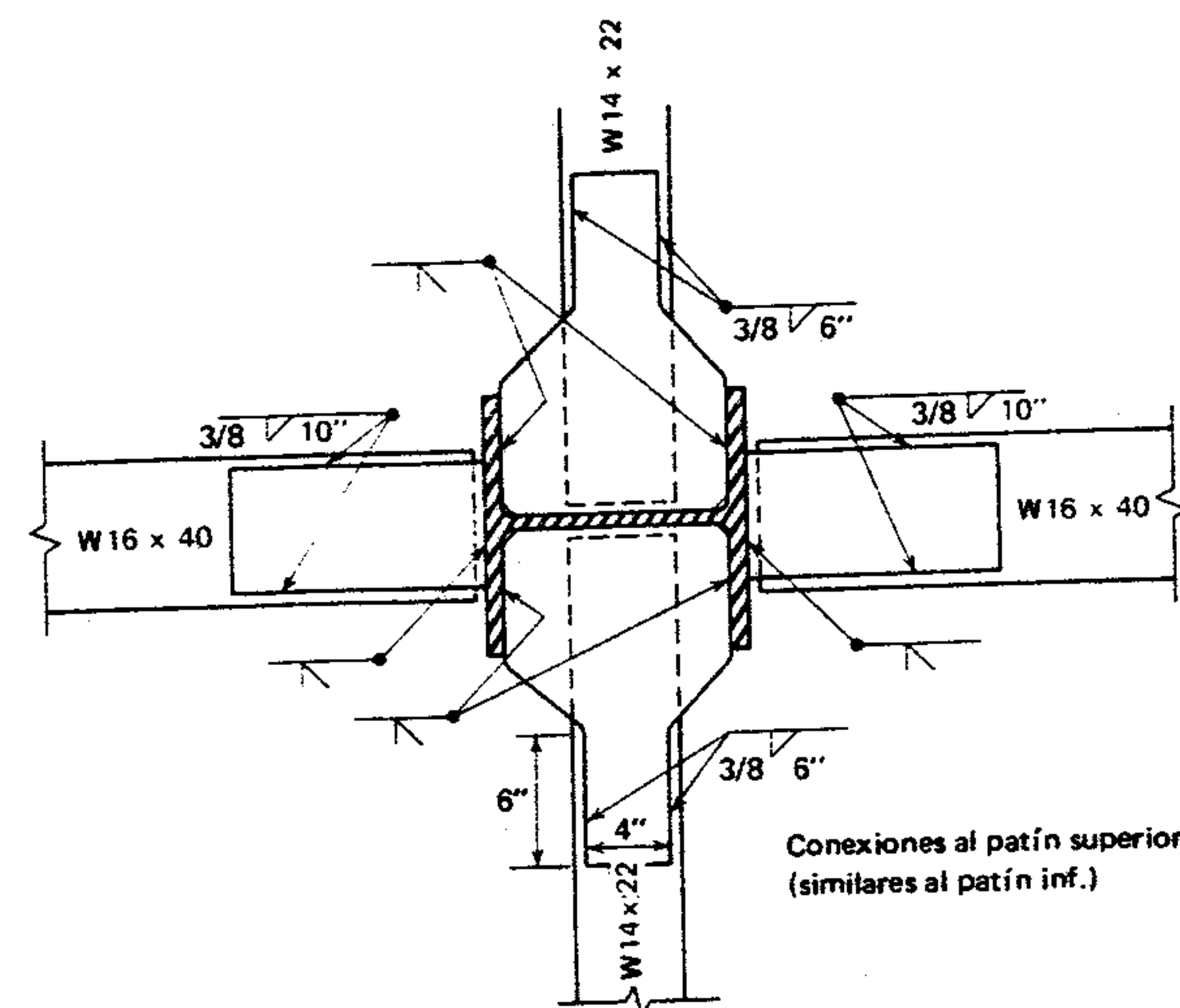


Figura 13.34 Conexión por viento.

$$t = \frac{91.3}{22(6)}$$

Usando soldaduras de filete de  $\frac{3}{8}$  pulg y electrodos E60XX,

$$L = \frac{91.3}{2(4.7)} = 9.7 \text{ pulg}$$

pulg de largo. La soldadura en el patín de la columna será del tipo de bisel simple a tope con soleras de respaldo.



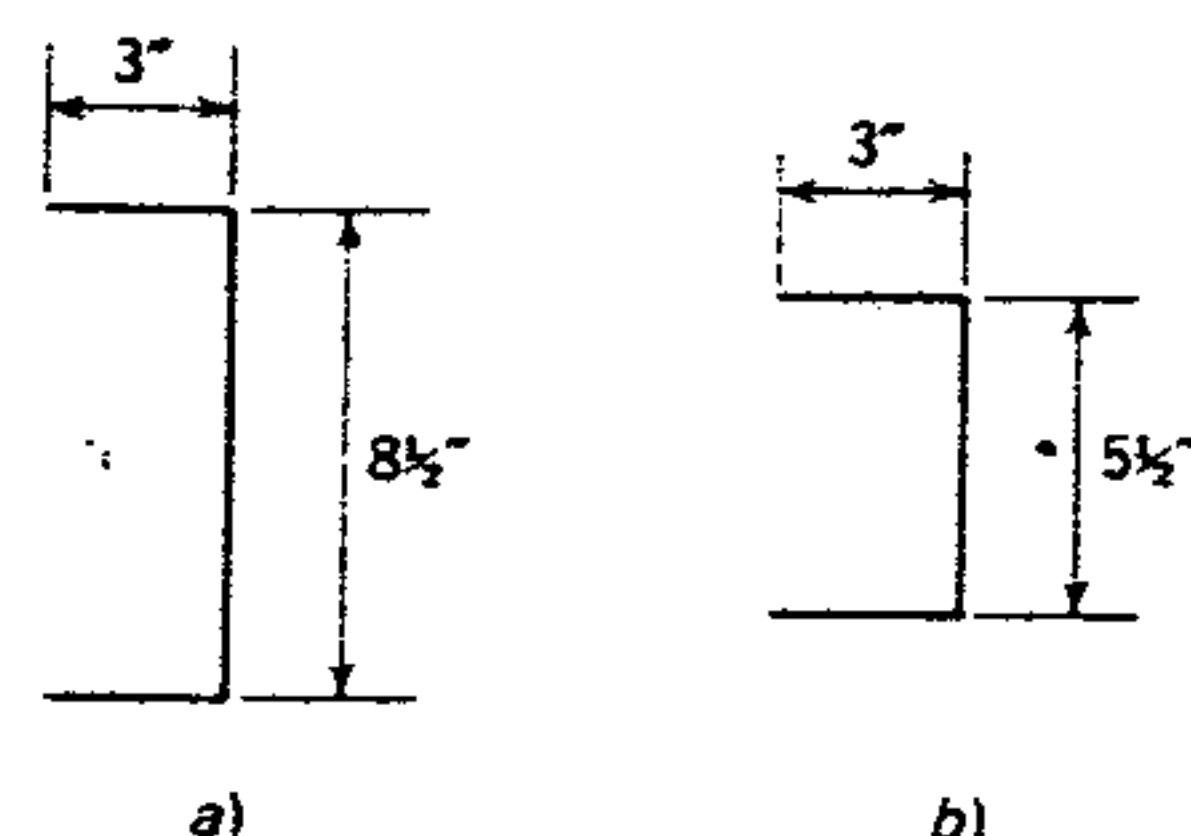


Figura 13.35 Soldadura del ángulo de conexión.

Se requerirá una placa de diafragma entre los patines de las columnas. La placa empleada para desarrollar el momento de la viga transversal se usará para esta función.

**Conexión de viga transversal W 14 X 22 y columna W 12 X 72.** La viga transversal embonará entre los patines de la columna.

Cortante: 14 kips. Para el ala conectada en taller se usarán ángulos estándar de  $4 \times 3 \frac{1}{2} \times \frac{5}{16}$  pulg. Suponiendo que 4 tornillos A325N de alta resistencia serán adecuados, el patrón del soldadura de filete de  $\frac{3}{16}$  pulg.

Para el ala sobresaliente conectada en la obra, usando tornillos de  $\frac{3}{4}$  pulg de alta resistencia, el número requerido es

$$\frac{14}{9.3} = 1.51; \text{ usar 4}$$

Momento:  $-M_{GL} = 53.4(12) = 641$  pulg-kips

$$M_{GL+w} = \frac{3}{4}[641 + 22.38(12)] = 683 \text{ pulg-kips}$$

Nótese que el momento máximo producido en la columna  $\odot$  se usa para estandarizar conexiones.

Entonces, la placa soldada a los patines de la viga debe desarrollar una fuerza

$$F = \frac{683}{13.9} = 49.6 \text{ kips}$$

Para usar esta placa como diafragma, se cortará para que embone entre los patines de la columna,

soldada a estos patines, y ahusada a 4 pulg de ancho para soldarla a filete al patín de la viga transversal. Entonces,

$$t = \frac{49.6}{22(4)} = 0.56; \text{ usar una placa de } \frac{5}{8} \text{ pulg.}$$

Usando soldaduras de filete en el patín de la viga transversal,

$$L = \frac{49.6}{2(4.7)} = 5.3; \text{ usar 6 pulg}$$

De nuevo se usará una soldadura a tope con bisel simple entre la placa y los patines de la columna. Con una soldadura de penetración completa, se requerirán soleras de respaldo. Los esfuerzos cortantes resultantes serán

$$f_v = \frac{49.6}{2(0.625)5} = 7.9 \text{ k/pulg seguro}$$

### 13.31 CONCLUSIÓN

Aunque se seleccionaran deliberadamente grandes cargas de modo que no fuese determinante la deflexión, siempre se debe revisar la deflexión de los miembros críticos. Teniendo esto presente, el diseño completo del marco estructural de este edificio requeriría:

1. Revisar las trabes y vigas transversales requeridas alrededor de los cubos de escaleras para asegurarse de que hay simetría.
2. Revisar las vigas de fachada en los muros norte y este; asimismo, la concordancia de tamaño con los muros sur y oeste.
3. Revisar las demás columnas en función de las necesidades de tamaño; de nuevo, para obtener simetría.
4. Diseñar los demás miembros horizontales intermedios.
5. Diseñar cuidadosamente las conexiones en todos los pisos, y particularmente en los

muros exteriores donde se conectan las vigas de fachada a los patines exteriores de las columnas.

6. Diseñar las placas de asiento para columnas: tipo estándar tanto en los muros exteriores como en el sótano.

7. Diseñar las columnas de concreto reforzado (pilastras) en los muros exteriores.
8. Diseñar todas las zapatas de columnas.
9. También se debe revisar la placa de  $\frac{5}{8}$  pulg como atiesador de acuerdo con la sección 1.15.5 de la Especificación AISC 1978.



## APÉNDICE A

### Esfuerzo y Deformación

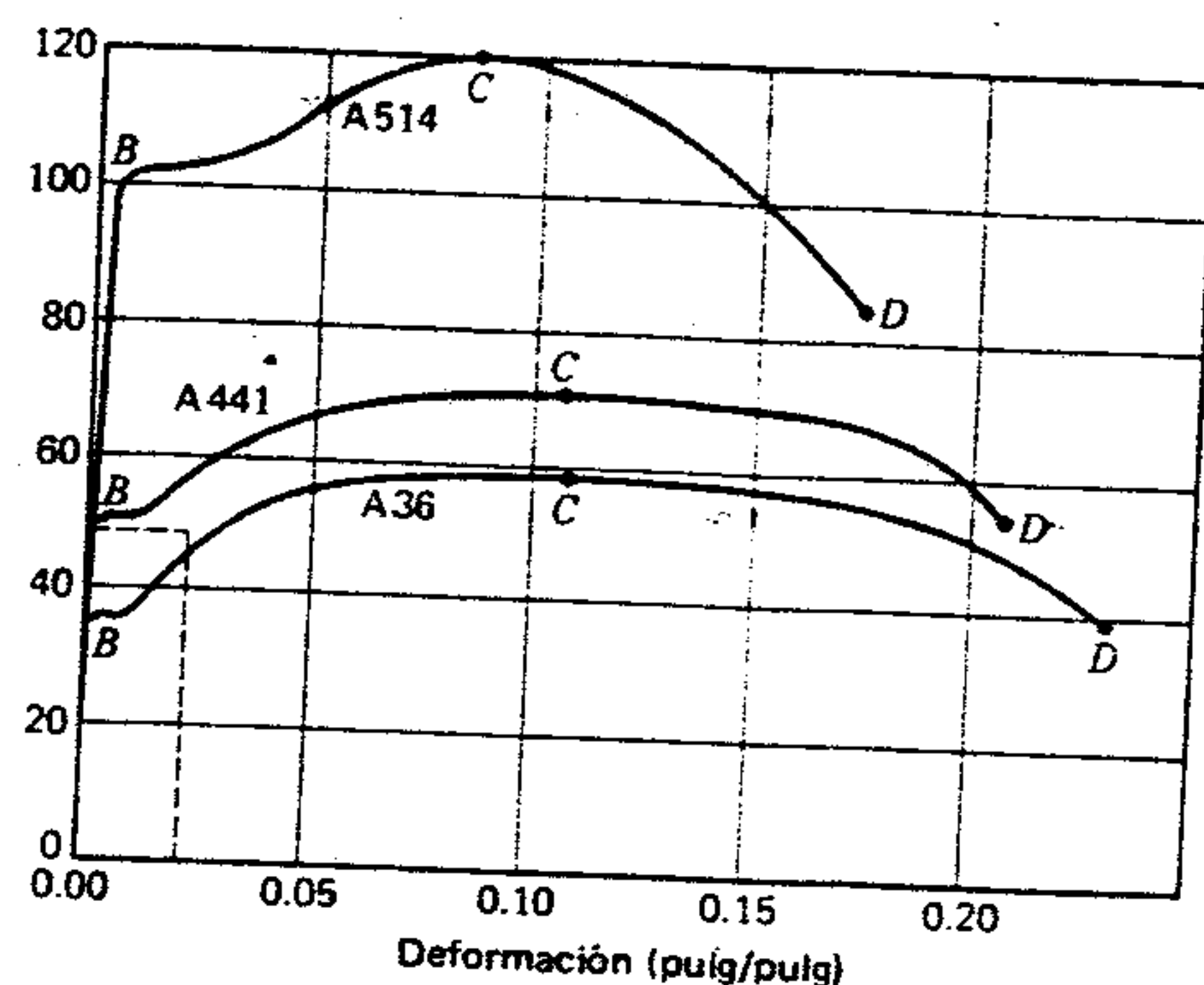
La relación entre límite elástico, punto de cedencia y resistencia última de un material se ilustra claramente por medio de un *diagrama de esfuerzo-deformación*. Este diagrama se obtiene a partir de los datos de una prueba de tensión estática, graficando simultáneamente valores del esfuerzo unitario (carga total sobre el espécimen dividida entre el área original de la sección transversal) y de la elongación unitaria (incremento de la longitud dividido entre la longitud original).

En la figura A1 se ilustra la relación esfuerzo-deformación en tres diferentes tipos de acero. La parte del diagrama correspondiente al acero A36 que está enmarcada por la línea punteada se presenta a escala mayor en la figura A2. La parte de la curva desde el origen hasta *A* es una línea recta, ya que dentro de este margen el material se comporta conforme a la ley de Hooke: el esfuerzo es proporcional a la deformación. Cerca del punto *A*, la curva se desvía de la línea recta, lo cual indica que ya no se mantiene la relación proporcional. Más allá del punto *A*, si la carga se ha retirado durante la prueba, el espécimen no recobraría su longitud original, pero mantendría una deformación permanente. El esfuerzo unitario correspondiente al punto *A* sobre la curva es el *límite elástico* del material.

En el punto *B*, a poca distancia del punto *A*, la curva se vuelve horizontal. Esto indica que el espécimen se ha elongado sin incremento alguno de la carga. El esfuerzo en *B* se llama *punto de cedencia*. Un poco más allá del punto de cedencia, el esfuerzo unitario crece hasta que la *resistencia última* se alcanza en *C*. La falla empieza realmente en el punto de resistencia última, como se ve por la forma de "cuello" del espécimen, aunque no se produce ruptura hasta llegar al *esfuerzo de ruptura* en el punto *D*.

En la figura A2 es evidente que la determinación exacta del límite elástico (punto *A*) sería sumamente difícil, mientras que el punto de cedencia se puede precisar con gran exactitud. Por esta razón, se acostumbra usar los valores de cedencia en el esfuerzo de cedencia y no en el límite elástico.





**Figura A1 Diagramas de esfuerzo-deformación.**

Además de los esfuerzos antes mencionados, el diagrama de esfuerzo-deformación también indica el *módulo de elasticidad* del material que se somete a prueba. El módulo de elasticidad se define como la relación entre el esfuerzo unitario y la

deformación unitaria, o bien, expresado en forma matemática,

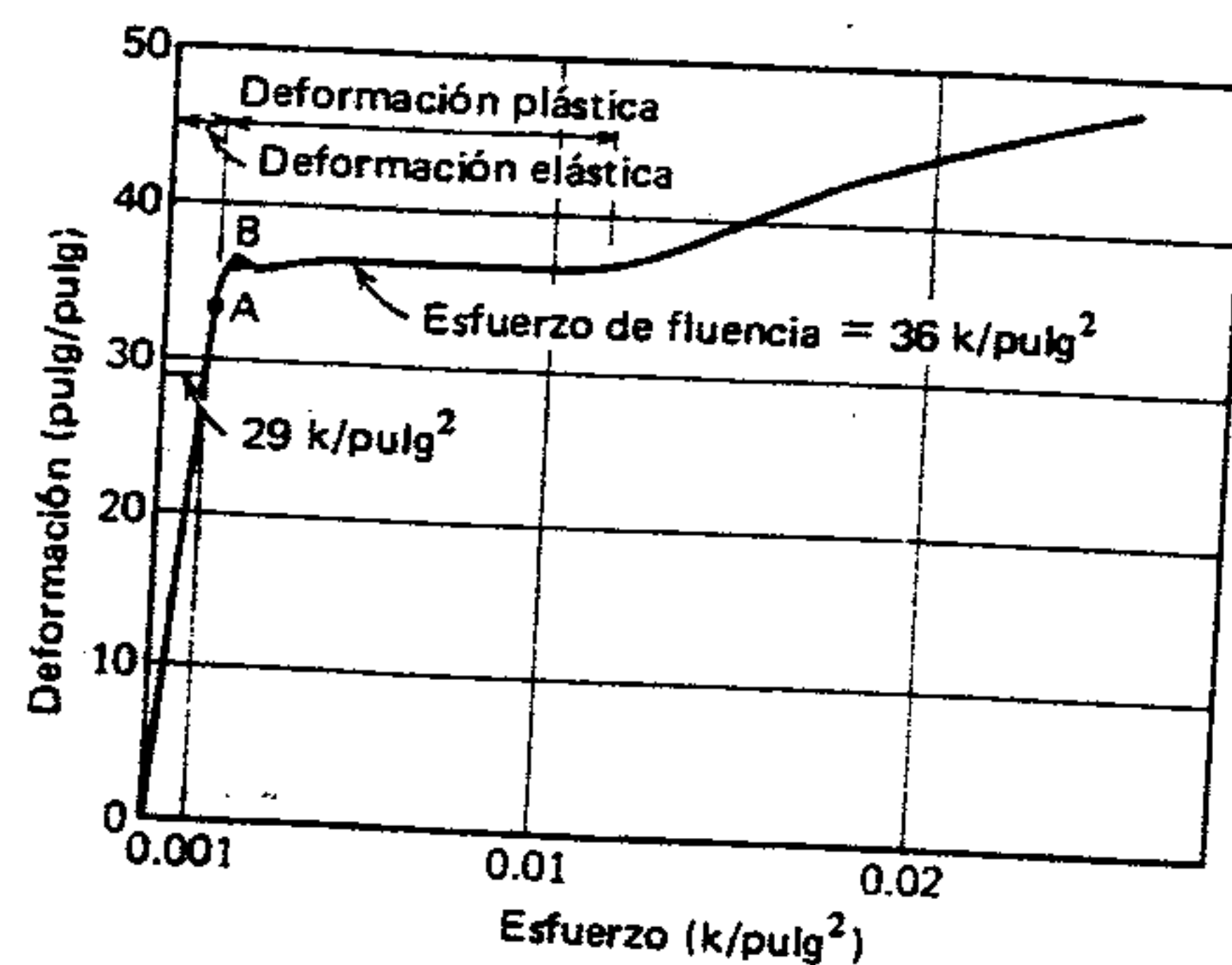
$$E = \frac{f}{\epsilon}$$

Si se selecciona un punto cualquiera sobre la parte de línea recta (de  $O$  a  $A$ ) del diagrama de esfuerzo-deformación, el valor de  $E$  se encuentra mediante la división de la ordenada (esfuerzo unitario) y la abscisa (deformación unitaria). Por ejemplo, en el diagrama de la figura A2, una elongación de 0.001 pulg corresponde a un esfuerzo unitario de cerca de 29,000 libras por pulgada cuadrada. Por tanto, el módulo de elasticidad es

$$E = \frac{f}{\epsilon} = \frac{29,000}{0.001} = 29,000,000 \text{ lb por pulg cuadrada}$$

Es importante observar que aun cuando el esfuerzo de cedencia es diferente en cada tipo de acero, todos los aceros tienen el mismo módulo de elasticidad.

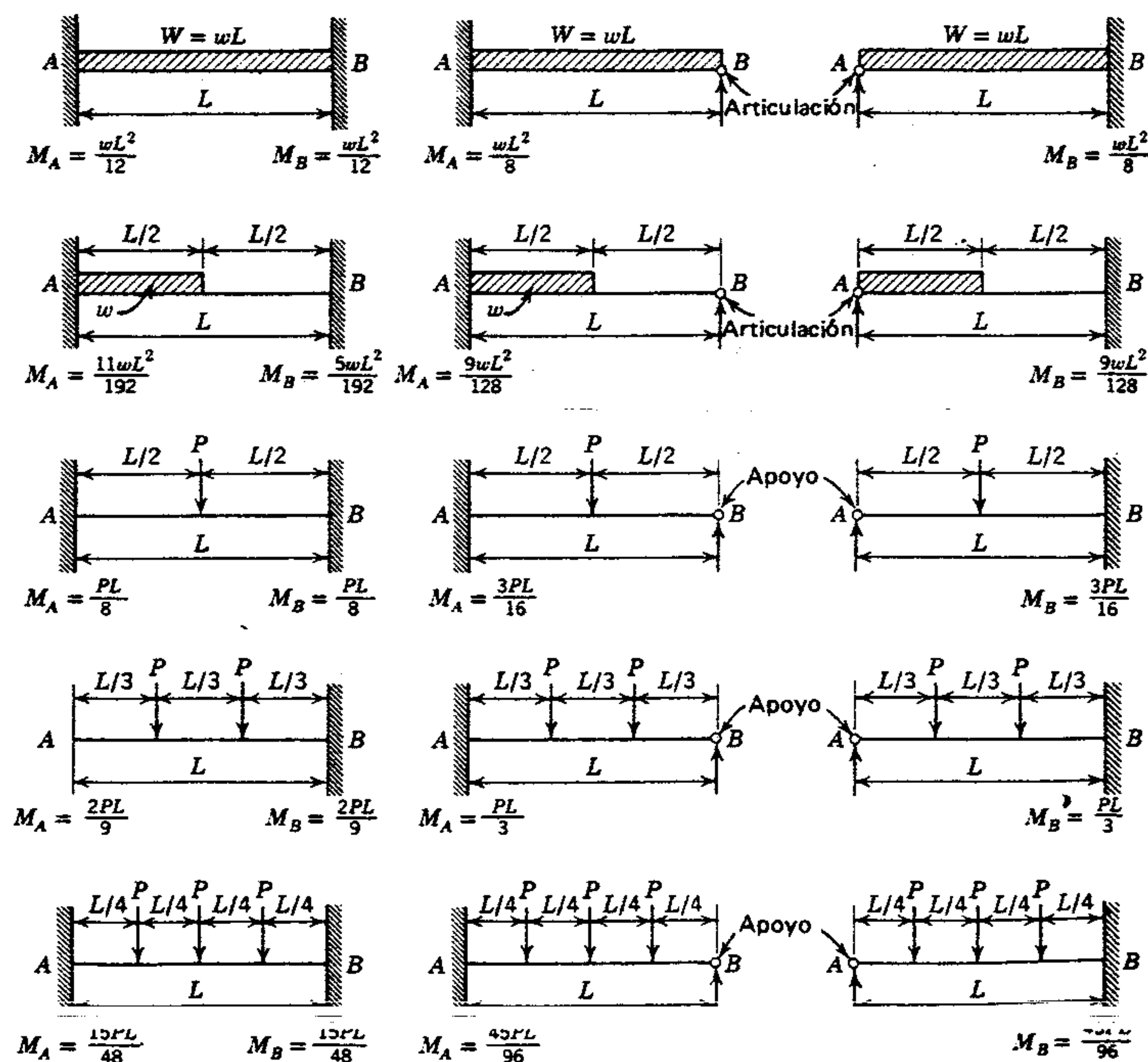
Un estudio más completo de este tema se encontrará en libros de texto tales como:



**Figura A2** Diagrama parcial de esfuerzo-deformación

## APÉNDICE B

# Diagramas de vigas suplementarios



**Figura B1** Momento de extremo fijo o empotramiento.



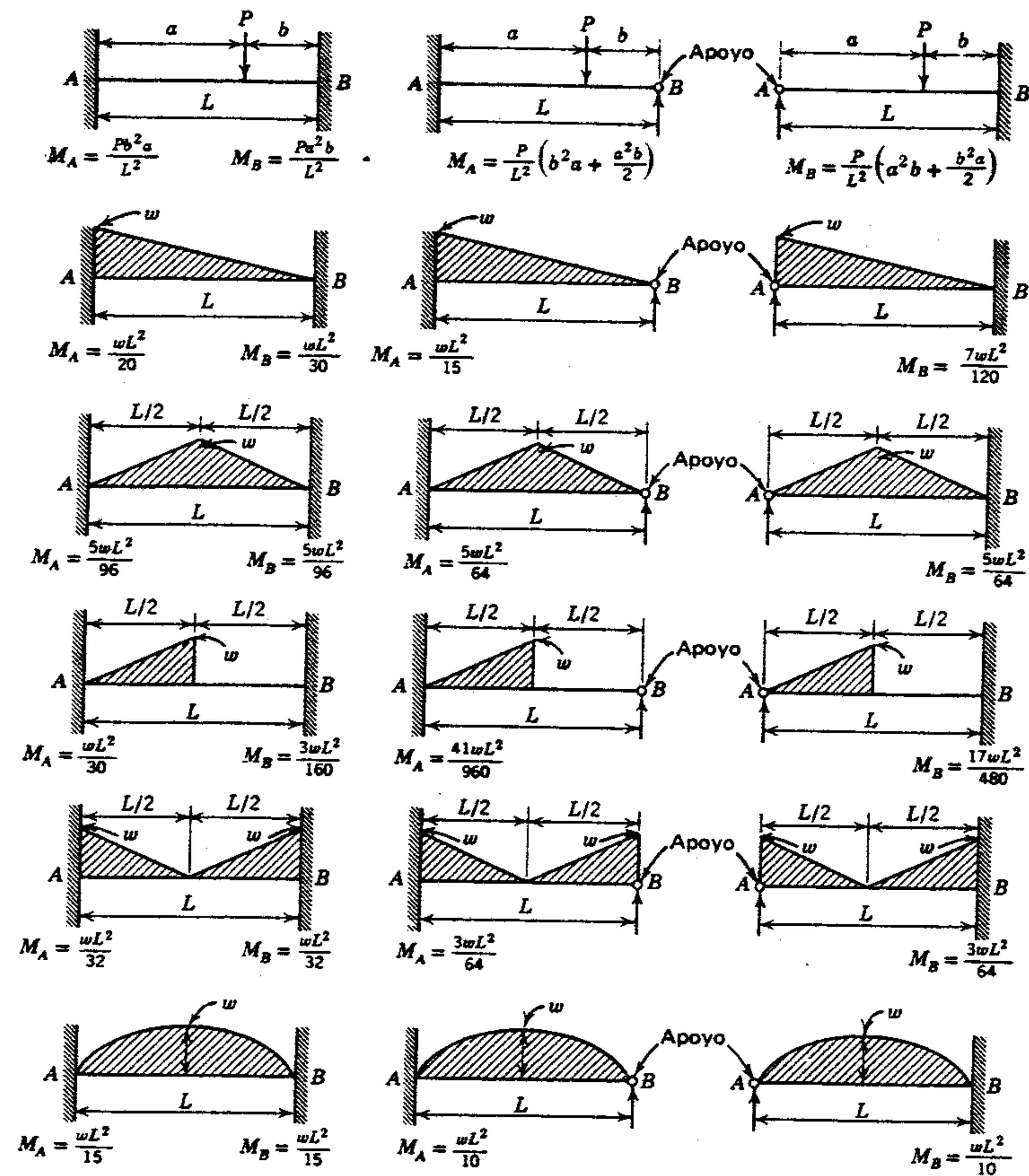


Figura B1 (continúa).

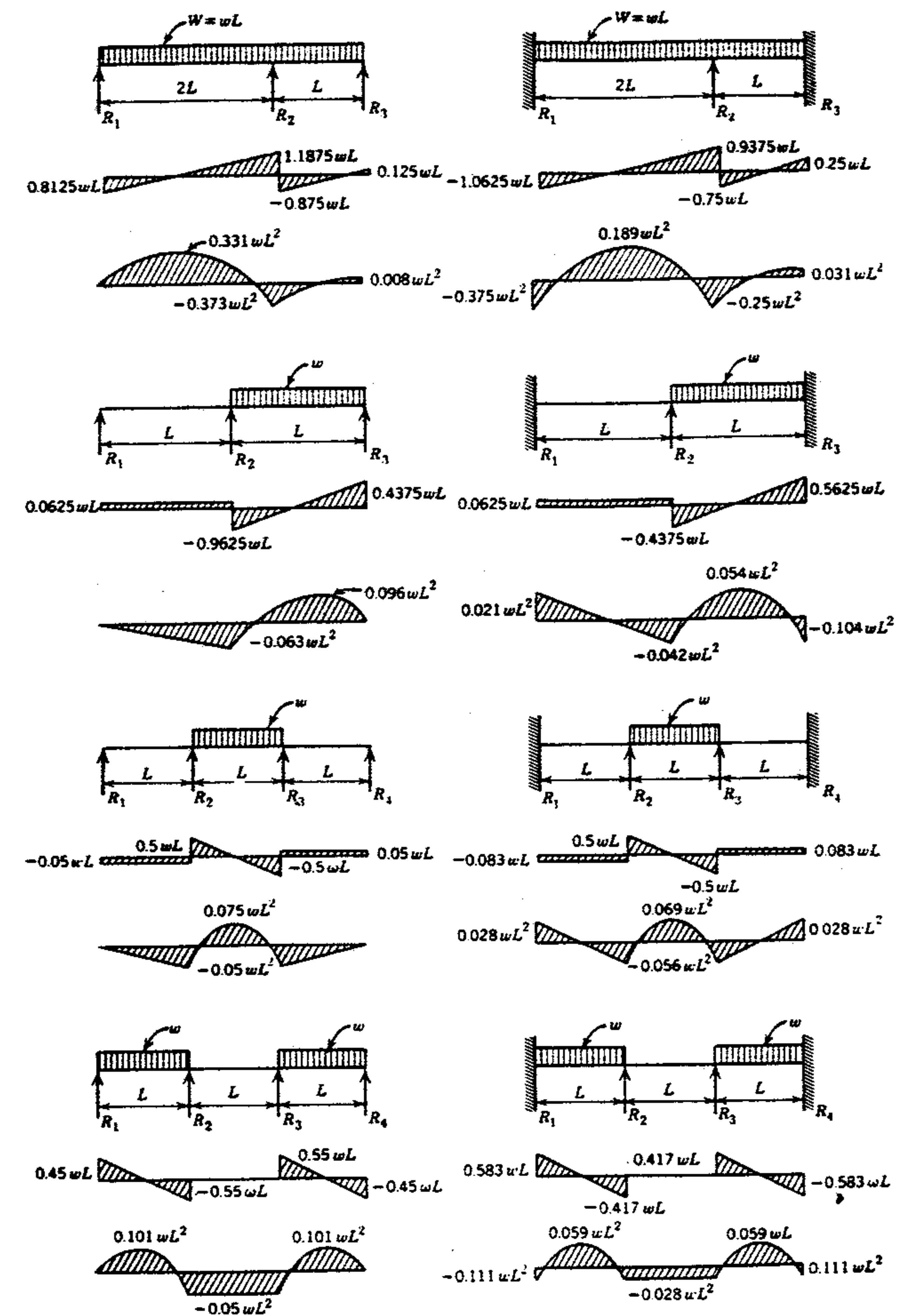


Figura B2 Vigas continuas.



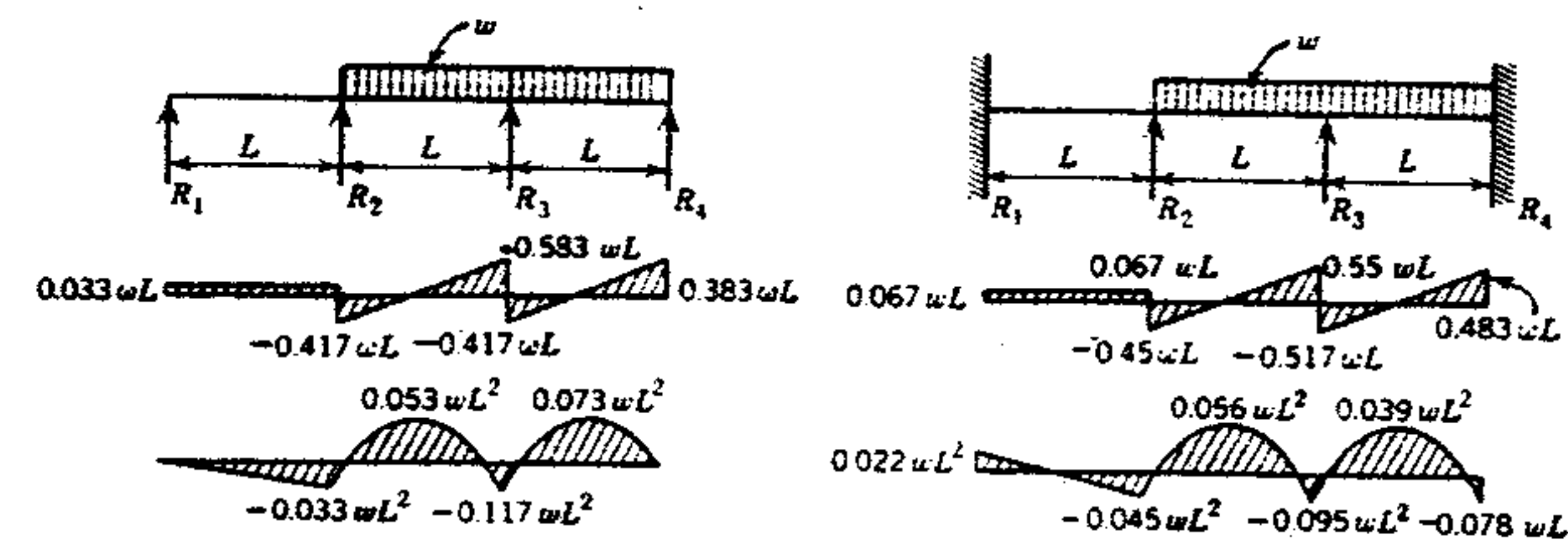


Figura B2 (Continúa).

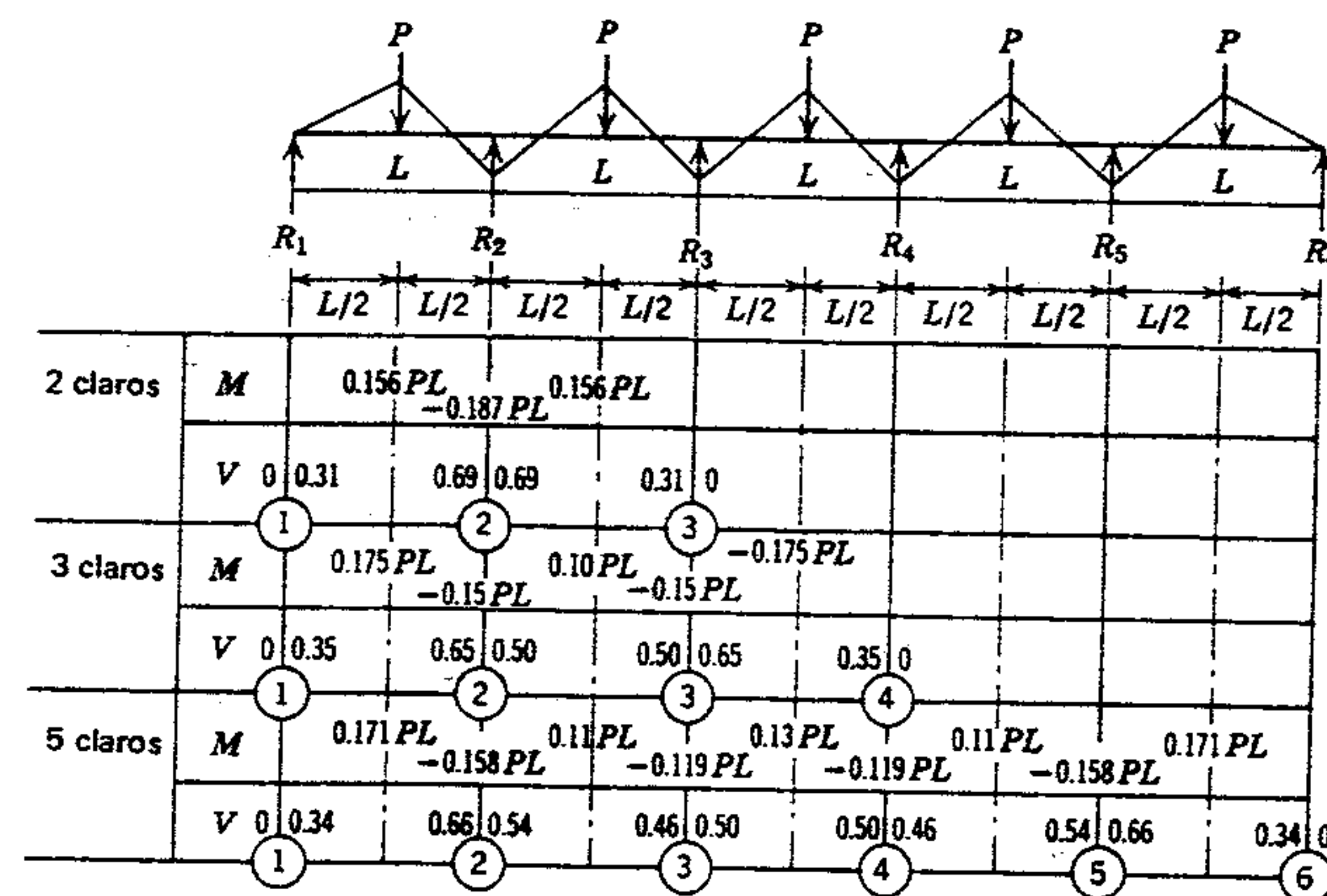


Figura B3 Coeficientes de momento y cortante: vigas continuas con cargas concentradas en el centro del claro.

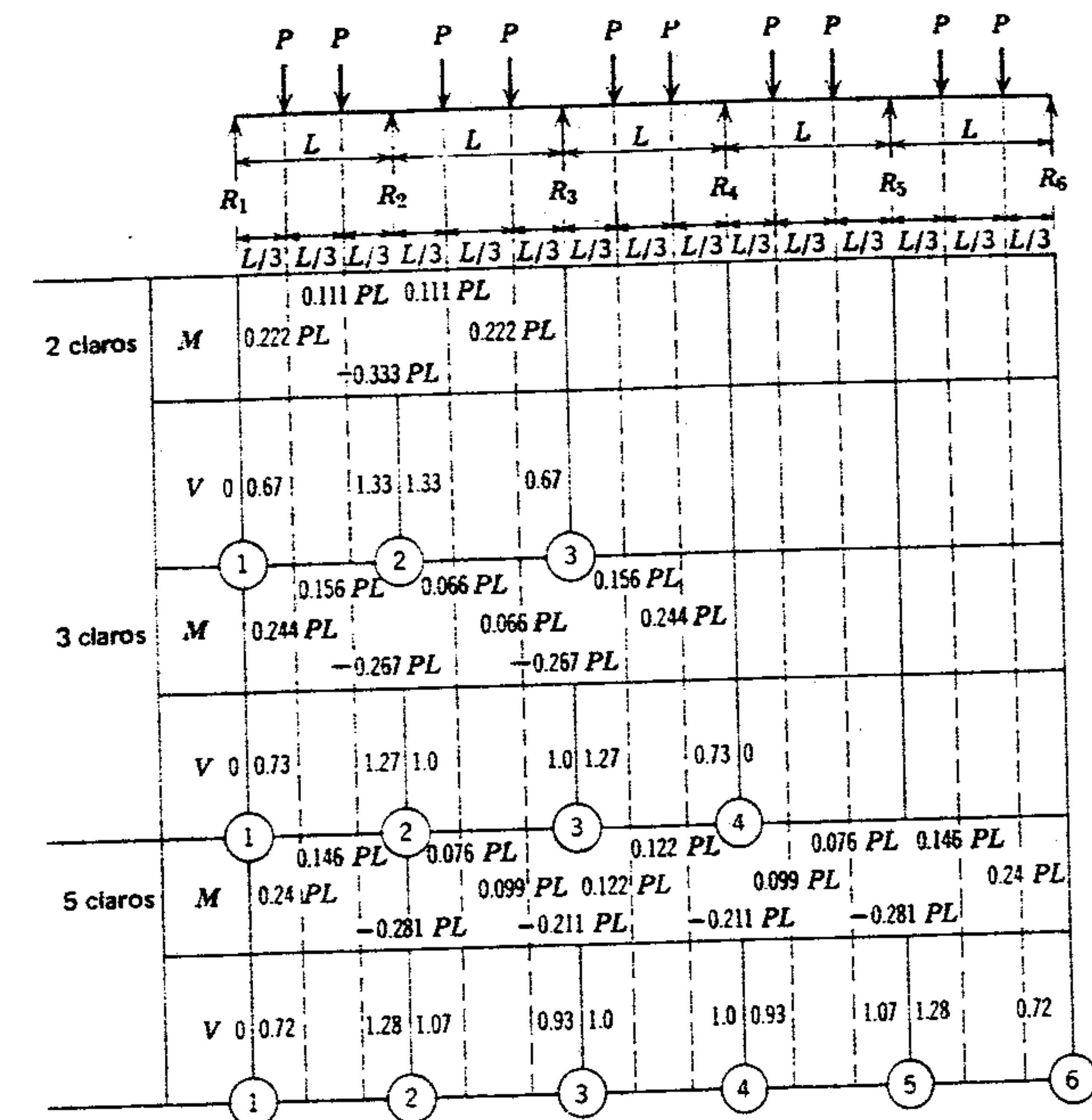


Figura B4 Coeficientes de momento y cortante: vigas continuas con cargas concentradas en los tercios del claro.



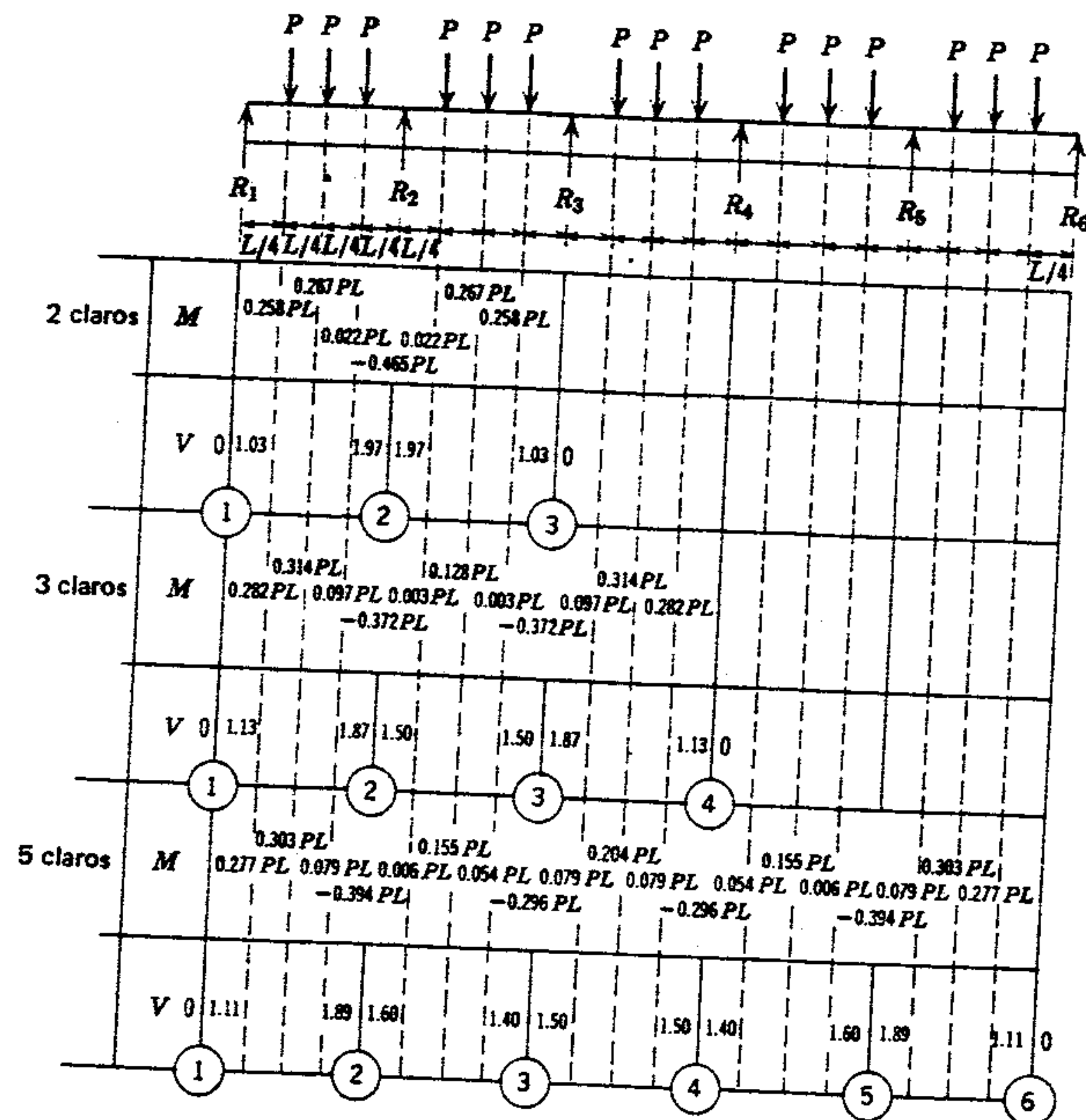


Figura B5 Coeficientes de momento y cortante: vigas continuas con cargas en los cuartos del claro.

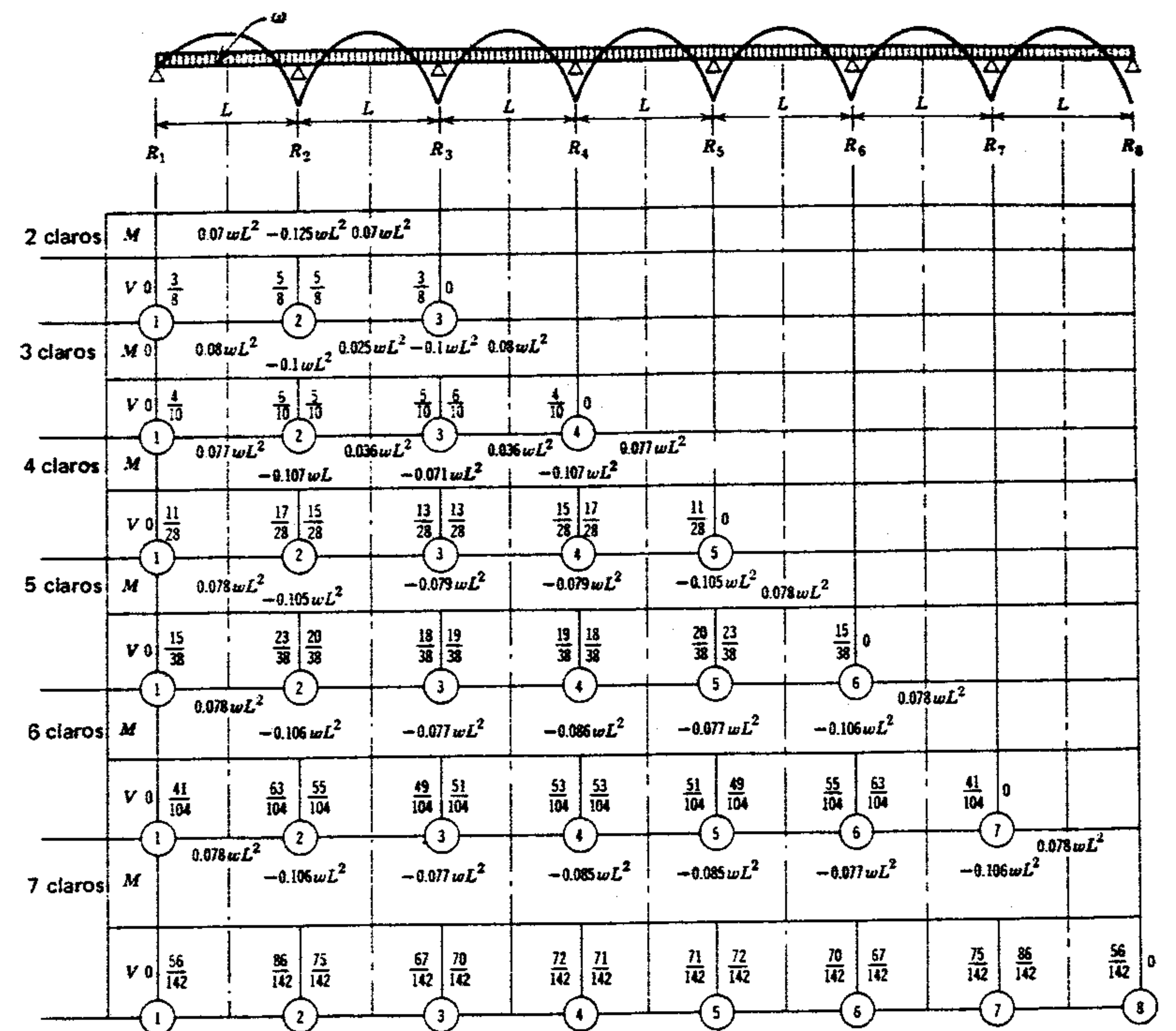


Figura B6 Coeficientes de momento y cortante: vigas continuas con carga uniforme.



## APÉNDICE C

### Fundamentos de álgebra matricial

#### C.1 INTRODUCCIÓN

El álgebra matricial es un procedimiento matemático que se puede usar para encontrar las incógnitas de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas. Se aplica particularmente a problemas que comprenden un gran número de estas ecuaciones y cuando se puede escribir un programa de computadora para efectuar los pasos necesarios para su solución. Aquí, el propósito no es explicar en su totalidad el álgebra matricial sino presentar sus fundamentos con los detalles suficientes para aplicar el procedimiento a los problemas que se presentan en el capítulo 12.

#### C.2 DEFINICIÓN E IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS

Considérense las tres siguientes ecuaciones algebraicas lineales simultáneas:

$$1x + 2y + 3z = 14$$

$$4x + 5y - 1z = 11$$

$$2x + 3y + 4z = 20$$

Se usa el término "lineal" porque las expresiones de las ecuaciones son todas de primer grado, y el término "simultánea" debido al requisito de que todas las incógnitas satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones.

Los elementos de estas ecuaciones se pueden agrupar de tres maneras, como se ve a continuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

que es un arreglo de los coeficientes conocidos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad [x \ y \ z]$$



un arreglo de las incógnitas; y

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ or } \{14 \ 11 \ 20\}$$

un arreglo de los términos *constantes*.

Entonces las ecuaciones se pueden expresar como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Estos arreglos se conocen como matrices y, como se señaló antes, se pueden componer de un gran número de elementos. Cuando estas matrices se manejan mediante los principios del álgebra matricial, algunos de los cuales también se aplican al álgebra ordinaria, se pueden determinar los valores de las incógnitas.

Para identificar fácilmente las posiciones de los elementos de una matriz, usualmente se adopta el siguiente procedimiento. El símbolo  $a$  se usa para representar a cualquier elemento, y un par de subíndices con el símbolo  $a$  para señalar la localización de ese elemento dentro de la matriz. La matriz tiene filas horizontales y columnas verticales, y con el primer subíndice se identifica la fila en que se localiza  $a$  y el segundo la columna en que está situada  $a$ ; por ejemplo,

	Col. 1	Col. 2	Col. 3	...	Cualquier col. $j$	...	Última col. $m$
Fila 1	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1m}$
Fila 2	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2m}$
Fila 3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	...	$a_{3j}$	...	$a_{3m}$
...	...	...	...	...	...	...	...
cualquier fila $i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{im}$
última fila $n$	$a_{n1}$	$a_{n2}$	$a_{n3}$	...	$a_{nj}$	...	$a_{nm}$

Los subíndices  $i$  y  $j$  son notaciones generales que se refieren respectivamente a un elemento en la " $i$ -ésima" fila y en la " $j$ -ésima" columna. La última fila y la última columna se designan con  $n$  y  $m$ ,

respectivamente. El elemento propiamente puede ser cualquier entidad matemática, como un número positivo o negativo, una variable incógnita, una función trigonométrica o una expresión algebraica. Los paréntesis cuadrados (como se ven arriba) se usan para indicar una matriz siempre que se muestren los elementos de la distribución; si no, letras mayúsculas, como  $A$  o  $B$  se usan para representar la matriz.

El número de filas y columnas indican el orden (o tamaño) de una matriz. Así, la matriz rectangular ilustrada antes es del orden  $n \times m$ . Una matriz cuadrada tiene el mismo número de filas y columnas ( $m = n$ ) y se dice que es del orden  $n$ . Cuando una matriz es del orden  $n$ , se dice que los elementos  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots, a_{nn}$  constituyen la diagonal principal (esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha). Una matriz que tiene una sola columna o una sola fila se conoce como una matriz columna o una matriz fila, respectivamente.

La dimensión de una matriz se define como el número de subíndices necesarios para localizar de modo único un elemento de la matriz. Por tanto, las matrices de columna o fila son unidimensionales, mientras que las matrices cuadradas y rectangulares son bidimensionales. Las matrices multidimensionales se usan con frecuencia en diversos tipos de análisis matemáticos; sin embargo, normalmente en el análisis de estructuras se necesitan solamente matrices uni y bidimensionales.

### C.3 TIPOS DE MATRICES

Con frecuencia se presentan ciertos tipos de matrices y se les han dado nombres especiales.

Por ejemplo, una matriz identidad ( $I$ ) se define como una matriz cuadrada en que todos los elementos de la diagonal principal ( $a_{ii}$ ) son iguales a uno, mientras que todos los demás son iguales a cero, por ejemplo,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz triangular ( $L$ ) inferior se define como una matriz cuadrada en la cual  $a_{ij} \neq 0$  para  $i \geq j$  y  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ , por ejemplo,

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Una matriz triangular superior ( $U$ ) se define como una matriz cuadrada en que  $a_{ij} \neq 0$  para  $i \leq j$  y  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ , por ejemplo,

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Una matriz simétrica es una matriz cuadrada cuyos elementos son simétricos respecto a la diagonal principal, por ejemplo,  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i \neq j$ ).

### C.4 IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices  $A$  y  $B$  se definen como iguales solamente si  $a_{ij} = b_{ij}$  para cada par de subíndices  $i$  y  $j$ ; es decir, dos matrices son iguales sólo si tienen el mismo orden y elementos correspondientes iguales en todos sus componentes. Por lo tanto:

1. Si  $A$  y  $B$  son dos matrices cualquiera, se tendrá que  $A = B$ , o bien,  $A \neq B$  (propiedad de terminativa).
2. Si  $A$  es una matriz cualquiera,  $A = A$  (propiedad reflectiva).
3. Si  $A = B$ , entonces  $B = A$  (propiedad simétrica).
4. Si  $A = B$  y  $B = C$ , entonces  $A = C$  (propiedad transitiva).

### C.5 ADICIÓN Y SUBTRACCIÓN DE MATRICES

La suma de dos matrices  $A$  y  $B$  se define como la matriz cuyos elementos se obtienen mediante la su-

ma de los elementos correspondientes en  $A$  y  $B$ , o sea

$$S = A + B = [(a_{ij} + b_{ij})]$$

por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Dos matrices deben ser del mismo orden para que se puedan sumar.

Se puede ver que la adición de matrices es tanto conmutativa como asociativa; es decir, si  $A$ ,  $B$  y  $C$  se pueden sumar, entonces

$$\begin{aligned} A + B &= [(a_{ij} + b_{ij})] \\ &= [(b_{ij} + a_{ij})] \\ &= B + A \quad (\text{conmutativa}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= [(a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))] \\ &= [(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})] \\ &= (A + B) + C \quad (\text{asociativa}) \end{aligned}$$

La  $N$  negativa de una matriz  $A = [a_{ij}]$  se define como

$$N = -A = [-a_{ij}]$$

Es decir, la negativa de una matriz  $A$  se forma mediante el cambio de signo de cada elemento en  $A$ . Por lo tanto,  $A + (-A)$ , o simplemente  $A - A = 0$ , donde  $0$  representa una matriz nula.

En general, la diferencia  $D$  de dos matrices  $A$  y  $B$  se define como

$$D = A + (-B)$$

Es decir, la diferencia  $D$  de dos matrices  $A$  y  $B$  se define como una matriz cuyos elementos se obtienen tomando la diferencia de los elementos correspondientes en  $A$  y  $B$ . Así,

$$D = [(a_{ij} - b_{ij})] = A - B$$



Los mismos requisitos de conformabilidad se aplican tanto a la sustracción de matrices, como a la adición de matrices.

### C.6 MULTIPLICACIÓN ESCALAR DE MATRICES

Una matriz  $A = [a_{ij}]$  se puede multiplicar por una cantidad escalar  $k$  multiplicando cada elemento de la matriz por esa cantidad, es decir,

$$kA = Ak = [(ka_{ij})]$$

Por ejemplo, la matriz

$$P = AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2(2) + 3(3) + 0(-2) & 2(0) + 3(-1) + 0(2) \\ 1(2) + 2(3) + 3(-2) & 1(0) + 2(-1) + 3(2) \\ 0(2) + 1(3) + 3(-2) & 0(0) + 1(-1) + 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

multiplicada por el factor 2, es la siguiente:

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Además, se puede ver que

$$(k + t)A = kA + tA$$

$$k(A + B) = kA + kB$$

$$k(tA) = (kt)A$$

donde  $k$  y  $t$  son constantes escalares

### C.7 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

El producto ( $P$ ) de dos matrices  $A$  y  $B$  se define como la matriz cuyos elementos se obtienen to-

mando los productos interiores de todas las filas en  $A$  y de todas las columnas en  $B$ . Cada elemento sucesivo en la fila 1 de la matriz  $A$  se multiplica por cada elemento sucesivo de la columna 1 de la matriz  $B$ , y cuando se suman todos estos productos, el valor resultante es el elemento de la fila 1 y columna 1 de la matriz producto  $P$ . Este procedimiento se repite con la segunda fila de  $A$  y la primera columna de  $B$  para formar el segundo elemento de la primera columna de la matriz  $B$ , y así sucesivamente, hasta haber tomado todas las filas de la matriz  $A$ . Luego se repite el procedimiento en cada elemento en la siguiente columna en  $B$  y viene a ser la segunda columna de elementos en  $P$ . Este proceso se ilustra mejor mediante el siguiente ejemplo.

El proceso de multiplicación se puede describir por cualquiera de las siguientes notaciones (la matriz  $A$  es del orden  $n \times r$  y  $B$  es del orden  $r \times m$ ):

$$P = AB = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ir}b_{rj}]$$

o

$$P = AB = \left[ \left( \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} \right) \right]$$

La multiplicación de matrices se hace fácilmente mediante la aplicación de programas de computadora. (Para este propósito se describe en la sección C.15 un sencillo programa de 17 pasos.)

Debe observarse que para que sea posible la multiplicación, el número de columnas de  $A$  debe ser igual al número de filas de  $B$ , si no es así, no siempre habrá elementos correspondientes para multiplicarlos. No hay restricción en el número de filas

de  $A$  o en el número de columnas de  $B$ . Si  $A$  es del orden  $n \times r$  y  $B$  es del orden  $r \times m$ , el producto (matriz  $P$ ) será del orden  $n \times m$ . Así,

$$[n \times r][r \times m] = [n \times m]$$

Por ejemplo, considérese la matriz  $A$  de orden  $5 \times 4$  y  $B$  del orden  $4 \times 3$ , entonces el producto  $P$  es el siguiente:

$$P = A_{5 \times 4} B_{4 \times 3}$$

y será del orden  $5 \times 3$ . Obsérvese que el número de columnas en  $A$  (4) debe ser el mismo número de filas en  $B$ .

Asimismo, en la expresión anterior, se dice que  $B$  está premultiplicada por  $A$  o que  $A$  está postmultiplicada por  $B$ . Esta distinción es necesaria puesto que, de ordinario, la multiplicación de matrices no es conmutativa; es decir, excepto en casos especiales, el producto  $AB$  no es igual al producto  $BA$ .

En realidad, si  $A$  es del orden  $n \times r$  y  $B$  es del orden  $r \times m$  y  $n \neq m$ , el producto  $AB$  se puede obtener como se señaló antes, pero el producto  $BA$  no está definido.

La conocida regla del álgebra escalar, de que si un producto es igual a cero, luego uno de los factores debe ser cero, no es aplicable a la multiplicación de matrices ya que es posible que el producto de dos matrices que no son iguales a cero sea una matriz nula (o cero). Por ejemplo, considerando la relación  $AB = AC$ ,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Además, si  $AB = AC$  o  $BA = CA$ , por lo general no se puede concluir que  $B = C$  incluso si  $A \neq 0$ , ya que es posible elegir tres matrices ( $A \neq B \neq C$ ), de modo que  $AB = AC$  o  $BA = CA$ . Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y los productos

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

### C.8 TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

La transpuesta de una matriz  $A$  se denota por el símbolo  $A^t$  y se define como la matriz formada mediante el intercambio de filas y columnas correspondientes de la matriz  $A$ . Por lo tanto, si la matriz original  $A$  es

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La transpuesta de  $A$  es

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En ciertos procesos del álgebra matricial, la transpuesta es una útil herramienta. Por las reglas de adición y multiplicación de matrices, existen varias importantes relaciones entre una matriz y su transpuesta. Si  $A^t$  y  $B^t$  son las transpuestas de las matrices  $A$  y  $B$ , respectivamente, y si  $k$  es una constante escalar, estas relaciones se pueden resumir como sigue:

1.  $(A^t)^t = A$
2.  $(A + B)^t = A^t + B^t$
3.  $(kA)^t = kA^t$
4.  $(AB)^t = B^t A^t$
5. Si  $C = AB$ , entonces  $C^t = B^t A^t$



**Ejemplo**

La transpuesta de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la diagonal principal sigue siendo la misma en ambas matrices.

**C.9 PARTICIÓN DE MATRICES**

A menudo conviene subdividir las grandes matrices en varios grupos rectangulares de elementos. Estos grupos rectangulares se conocen como submatrices, y se dice que la matriz subdividida está particionada. Es conveniente usar líneas punteadas para indicar la subdivisión. La siguiente matriz  $A$  se ha subdividido en cuatro grupos de elementos, cada uno de los cuales se puede considerar como una matriz y se puede denominar submatriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Si las submatrices se denotan

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

la matriz  $A$  se puede escribir en forma compacta.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Las matrices subdivididas se pueden sumar, restar y multiplicar, si la subdivisión se ejecuta de manera que las partes queden conformadas para estas operaciones. Para que dos matrices se puedan multiplicar, la subdivisión de las columnas en el premultiplicador debe ser la misma que la subdivisión de las filas en el posmultiplicador. Considérense las dos matrices  $A$  y  $B$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto ( $P$ ) de estas dos matrices se puede obtener aplicando los procedimientos descritos en la sección anterior, y es

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Las mismas dos matrices ( $A$  y  $B$ ) se usarán para ilustrar el procedimiento de subdivisión y multiplicación. Las líneas punteadas definen la partición de las matrices originales.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ \hline 1 & -1 & | & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la partición de  $A$  en dos columnas y la partición de  $B$  en dos filas hacen conformables las subdivisiones para la multiplicación. La partición de filas en  $A$  y de columnas en  $B$  es arbitraria y se selecciona por conveniencia (dos en  $A$  y una en  $B$ ).

Ahora el producto se puede expresar en términos de estas submatrices, o sea

$$P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$$

que es

$$P = \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) \end{bmatrix}$$

pero

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

y se ve que es lo mismo que el producto obtenido sin la partición.

**C.10 DETERMINANTES**

Los determinantes se usan con frecuencia en el álgebra matricial y son sumamente útiles para resolver ecuaciones lineales. Por lo tanto, aquí se presentarán partes de la teoría básica de los determinantes, junto con varios ejemplos.

Consideremos las siguientes tres ecuaciones simultáneas:

$$a_{11}x + a_{12}y = c_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = c_2$$

Los valores de  $x$  y  $y$  se pueden encontrar utilizando el proceso algebraico usual: o sea, multiplicando la primera ecuación por  $a_{22}$  y la segunda por  $a_{12}$  y restando la segunda de la primera, eliminando así el elemento que contiene el término  $y$ . La ecuación resultante se puede resolver luego despejando  $x$ .

$$x = \frac{a_{22}c_1 - a_{12}c_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Un proceso similar da el término  $y$ :

$$y = \frac{a_{12}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

En ambos casos, el denominador permanece igual y se ve que contiene todos los coeficientes de las ecuaciones originales. Este es el determinante de la matriz  $a_{ij}$  y el símbolo  $|A|$  denota su valor, por ejemplo,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

En el caso particular de una matriz de  $2 \times 2$ , el valor del determinante se obtiene tomando la diferencia del producto de los dos elementos diagonales de la matriz. La diagonal principal va de arriba a la izquierda a abajo a la derecha. El producto de la otra diagonal se sustrae del producto de la diagonal principal. Por lo tanto,

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Por ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1)(2) - (-2)(3) = 2 + 6 = 8$$

Si este procedimiento se aplica a las tres ecuaciones.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$



la expresión resultante para  $x$  será

$$x = \frac{a_{12}a_{23}c_3 + a_{22}a_{33}c_1 + a_{32}a_{13}c_2 - a_{12}a_{33}c_2 - a_{22}a_{13}c_3 - a_{32}a_{23}c_1}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}}$$

De nuevo, se ve que el denominador contiene todos los coeficientes de las ecuaciones originales y es el determinante de la matriz de estos coeficientes. En este caso es un determinante de  $3 \times 3$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El denominador se puede escribir como sigue:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

Expresado en forma de matriz

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Este arreglo de elementos revela un patrón único. Se dice que la primera columna de elementos ( $a_{11}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{31}$ ) tiene menores hechos de los elementos de la segunda y tercera columnas de la matriz pero omitiendo la  $i$ -ésima fila. Por lo tanto, el menor de  $a_{11}$  es el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Cada elemento de la primera columna de la matriz tiene su menor (una submatriz de  $2 \times 2$ ) cuyo valor se puede determinar a partir de la matriz de  $2 \times 2$ ; por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(0 + 1) - 2(4 - 3) + 3(2 - 0) = 5$$

Nótese que al formar la expresión para el determinante de  $A$ , los signos de los menores se alternan, por ejemplo,  $+$ ,  $-$ ,  $+$ ,  $-$ ,  $+$ ,  $-$ . En general existen menores para todos los elementos de los determinantes; sin embargo, este hecho no se aplicará en esta presentación.

Es necesario hacer una observación más respecto a este punto. Viendo de nuevo las tres ecuaciones lineales simultáneas, se puede observar que los términos en los numeradores de las expresiones para las incógnitas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , también se pueden expresar en términos de menores de un determinante. El determinante que se va a usar en cada caso se obtiene mediante una combinación apropiada de los coeficientes de los términos desconocidos y las constantes conocidas que aparecen al lado derecho de las ecuaciones. En las tres ecuaciones, éstos son

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

En cada caso, el numerador es un determinante cuyos elementos son los coeficientes originales del sistema, con la excepción de que los coeficientes del término desconocido cuyo valor se está determinando se remplazan por los términos constantes

## C.11 INVERSA DE UNA MATRIZ

La matriz inversa se define sólo para matrices cuadradas cuyos determinantes no son iguales a cero. Cuando una matriz no tiene inversa, se dice que es singular. El producto de una matriz y su inversa es la matriz unitaria. La matriz se puede premultiplicar o posmultiplicar por su inversa. Si  $A$  es la matriz,  $A^{-1}$  es su inversa, y

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

## C.12 INVERSIÓN DE MATRICES POR ELIMINACIÓN DE GAUSS

Existen numerosos métodos para determinar la inversa de una matriz no singular; sin embargo, todos los métodos exactos son formas de la eliminación de Gauss y son equivalentes a resolver  $n$  ecuaciones algebraicas lineales simultáneas con  $n$  incógnitas  $n$  veces. Este procedimiento se puede describir en términos generales para una matriz grande como sigue: considérese que  $A$  es la matriz dada y  $B$  la inversa deseada de  $A$ . Teniendo presente que todos los elementos  $a_{ij}$  son valores conocidos y que todos los elementos  $b_{ij}$  son valores desconocidos que se deben determinar

$$AB = I$$

o bien

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la regla de multiplicación de matrices a la matriz  $A$  y la primera columna de la matriz  $B$  se obtienen expresiones para los elementos de la primera columna de la matriz unitaria, es decir,

correspondientes del sistema. Así, esta teoría básica de determinantes se puede aplicar directamente para resolver los valores incógnitas de un sistema. Sin embargo, es importante observar que la matriz debe ser cuadrada y el valor del determinante  $A \neq 0$ . Este esquema para resolver conjuntos de ecuaciones simultáneas se conoce como regla de Cramer. Se pueden encontrar mayores datos en casi cualquier referencia estándar de matemáticas.

Un ejemplo de la teoría de determinantes que se usa para resolver incógnitas en las ecuaciones presentadas en la sección C.2., es el siguiente:

$$1x + 2y + 3z = 14$$

$$4x + 5y - 1z = 11$$

$$2x + 3y + 4z = 20$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(20 + 3) - 4(8 - 9) + 2(-2 - 15) = -7$$

Despejando  $x$ , según la teoría de matrices,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & -1 \\ 20 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Entonces, la solución para el determinante del numerador es

$$14 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 11 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$14(20 + 3) - 11(8 - 9) + 20(-2 - 15) = -7$$

y el valor de  $x$  es  $-7/-7 = 1$ . De modo similar, se calculan los valores de  $y$  y  $z$  que son 2 y 3, respectivamente.



$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} &= 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} &= 0 \end{aligned}$$

Éstas son una serie de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas. Las incógnitas del sistema son los elementos  $b_{i1}$  de la primera columna de la matriz  $B$  y se pueden determinar usando el método de eliminación de Gauss para resolver el sistema. Este procedimiento se puede continuar en todas las columnas de la matriz inversa  $B$ . Cuando las matrices son pequeñas, el proceso es sencillo y directo, pero con matrices grandes, el proceso se hace tan tardado que el uso de programas de computadora es la única manera lógica para completar los pasos necesarios. Un ejemplo de este procedimiento para una matriz pequeña de  $2 \times 2$  es el siguiente:  $A = [a_{ij}]$  es la matriz de los coeficientes y  $B = [b_{ij}]$  su matriz inversa desconocida. Entonces

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo la multiplicación indicada de la manera antes descrita, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{Conjunto (a)} \\ \left. \begin{aligned} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} &= 1 \end{aligned} \right\} & \text{Conjunto (b)} \end{aligned}$$

Los elementos desconocidos  $b_{11}$  y  $b_{21}$  de la inversa  $B$  se obtienen resolviendo el conjunto a), y los elementos  $b_{12}$  y  $b_{22}$  se obtienen resolviendo el conjunto b), es decir,

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}}{|A|} \\ b_{21} &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{21}}{|A|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{12}}{|A|} \\ b_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}}{|A|} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz inversa  $B$  es

$$B = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

donde el determinante de la matriz  $A$  es

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

### Ejemplo numérico

Calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

### Solución

$$|A| = 1(-1) - 2(3) = -7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

## C.13 INVERSIÓN DE MATRIZ MEDIANTE PARTICIÓN

El proceso de cálculo de la inversa de matrices mayores que las de  $2 \times 2$  se vuelve cada vez más difícil y engorroso si se sigue el procedimiento general descrito en la sección C.12. Un proceso más sencillo consiste en subdividir la matriz original, determinar la inversa de las submatrices y sustituir sus valores de nuevo en la matriz original. Considérese una matriz de  $5 \times 5$  subdividida como se ve a continuación, para la cual se busca la matriz inversa  $B$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

La submatriz de  $5 \times 5$  se puede indicar mediante  $A_R$ , es decir,

$$A_R = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Supóngase que la matriz  $B_R$  es la inversa de  $A_R$  y que se subdivide de la misma manera que  $A_R$ . Entonces, de acuerdo con la definición de una inversa,

$$\begin{aligned} A_R B_R &= I \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Multiplicando los elementos dentro de los paréntesis

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} &= I \quad (1) \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} &= 0 \quad (2) \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} &= 0 \quad (3) \\ A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} &= I \quad (4) \end{aligned} \quad \text{Conjunto 2}$$

La ecuación 2 del conjunto 1 se puede resolver para  $B_{21}$  de la siguiente manera: Colocar  $A_{21}B_{11}$  al lado derecho de la ecuación y premultiplicar cada lado de la ecuación por la inversa de  $A_{22}$ , o sea

$$A_{22}^{-1}A_{22}B_{21} = A_{22}^{-1}(-A_{21}B_{11})$$

El producto de  $A_{22}$  y  $A_{22}^{-1}$  es la matriz identidad  $I$ , que al posmultiplicarse por  $B_{21}$  es simplemente  $B_{21}$ .

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$$

Sustituyendo esta matriz ( $B_{21}$ ) en la ecuación 1 del conjunto 1,

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} + A_{12}(-A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}) &= I \\ (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})B_{11} &= I \end{aligned}$$

Despejando  $B_{11}$  al premultiplicar ambos lados de la inversa de la matriz dentro de los paréntesis,

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

Asimismo, despejando  $B_{12}$  en la ecuación 3 del conjunto B,

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$$

Sustituyendo esta matriz en la ecuación 4 del conjunto 2,

$$A_{21}(-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}) + A_{22}B_{22} = I$$

y

$$(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})B_{22} = I$$

de donde

$$B_{22} = (-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})^{-1}$$

Las expresiones derivadas para las submatrices  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  y  $B_{22}$ , se pueden resolver para obtener



matriz inversa  $B_R$ . Sin embargo, una expresión más fácil se puede obtener para  $B_{11}$  y  $B_{21}$  aplicando la permutabilidad de una inversa, como sigue:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Así

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Ejecutando las multiplicaciones indicadas,

$$B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} = I \quad (5)$$

$$B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \quad (6)$$

Resolviendo las ecuaciones (5) y (6) para  $B_{11}$  y  $B_{21}$ ,

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$$

Por lo tanto, para encontrar la inversa  $A_R$  es necesario calcular primero la inversa  $A_{11}^{-1}$  y luego simplemente efectuar la substracción y multiplicación necesarias como se indica en el siguiente resumen:

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$$

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}$$

Una vez calculadas las submatrices  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{22}$ , se juntan para formar  $B_R$ , que se ha designado como la inversa de  $A_R$ .

### Ejemplo

Calcular la inversa de la siguiente matriz de  $4 \times 4$  mediante partición.

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] = A_R = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A_{11}| = -1 + 2 = 1$$

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{|A_{11}|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| = 8 + 4 = 12$$

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = B_{22}$$

$$A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-A_{11}^{-1}A_{12})B_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} = B_{12}$$

$$-B_{22}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/6 \\ -1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & -1/6 \end{bmatrix} = B_{21}$$

$$B_{12}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/6 & 2/3 \\ -7/3 & 7/6 \end{bmatrix} = B_{11}$$

En seguida, una vez calculadas las submatrices  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  y  $B_{22}$ , se forma la matriz  $B$  que es la inversa de la matriz  $A$ .

$$B = \begin{bmatrix} -5/6 & 2/3 & -1/6 & 1/6 \\ -7/3 & 7/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/6 & 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Comprobar los valores mediante la multiplicación indicada para probar que el producto de  $A$  y  $B$  forma la matriz identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5/6 & 2/3 & -1/6 & 1/6 \\ -7/3 & 7/6 & 1/3 & 1/6 \\ -1/6 & 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### C.14 MÉTODO DE CHOLESKY

Se puede ver que el método apropiado para manipular arreglos grandes para resolver un gran número de ecuaciones simultáneas. Se han desarrollado diferentes métodos, y todos se usan en diversas circunstancias. En casi todos los

métodos se usa computadora digital de alta velocidad para operar con grandes arreglos.

Sucede así que las matrices generadas de problemas estructurales son únicas porque los elementos con valores no iguales a cero se pueden concentrar a lo largo de la diagonal principal de la matriz. Además, por la ley de Maxwell de deflexio-



nes recíprocas se ha encontrado que las matrices son simétricas y que presentan típicamente la propiedad de ser positivas "definidas".

Por lo tanto, el procedimiento más eficiente para manejar matrices estructurales, según el criterio de la mayoría, es el método de la "raíz cuadrada" de Cholesky.

La primera matriz que se considerará aquí consiste en elementos que representan los coeficientes de las ecuaciones simultáneas. Los símbolos  $A$  y  $a_{ij}$  se usan para representar esta matriz, la cual debe ser tanto simétrica como positiva definida. Debido

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 & \dots & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación indicada de  $U^T$  y  $U$  e igualándolas a los elementos de la matriz  $A$  se produce lo siguiente

$$\begin{aligned} a_{11} &= u_{11}^2 & 0 & u_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{12} &= u_{11} u_{12} & 0 & u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} \\ a_{13} &= u_{11} u_{13} & 0 & u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} \\ a_{22} &= u_{12}^2 + u_{22}^2 & 0 & u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} \\ a_{23} &= u_{12} u_{13} + u_{22} u_{23} & 0 & u_{23} = \frac{(a_{23} - u_{12} u_{13})}{u_{22}} \\ a_{33} &= u_{13}^2 + u_{23}^2 + u_{33}^2 & 0 & u_{33} = \sqrt{a_{33} - (u_{13}^2 + u_{23}^2)} \\ a_{34} &= u_{13} u_{14} + u_{23} u_{24} + u_{33} u_{34} & 0 & u_{34} = \frac{a_{34} - (u_{13} u_{14} + u_{23} u_{24})}{u_{33}} \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores se pueden plantear dos fórmulas generales para la matriz triangular superior  $U$ . Para la diagonal principal

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2} \quad \text{donde } 1 < i = j$$

Para los otros elementos

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}} \quad \text{donde } 1 < i < j$$

a estas propiedades únicas de una matriz estructural, se puede descomponer (o factorizar) en el producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior, cada una de las cuales es la transpuesta de la otra, es decir,

$$A = U^T U$$

El símbolo  $U$  representa la matriz triangular superior y la  $U^T$  su transpuesta. Esto también se escribe como sigue:

Una vez formada la matriz triangular superior, se forma la matriz triangular inferior como su transpuesta.

El método de solución de Cholesky se describirá tomando como referencia las tres siguientes ecuaciones simultáneas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

donde los elementos  $a$  representan los coeficientes (conocidos), los elementos  $b$  las constantes (conocidas) y los elementos  $x$  las variables desconocidas.

Las tres ecuaciones anteriores se pueden expresar como sigue

$$AX = B$$

Primero, la matriz  $A$  se factoriza en  $U^T$  y  $U$  a partir de las fórmulas derivadas previamente (descomposición). Por tanto, se convierten en valores conocidos y se pueden sustituir por  $A$  en la fórmula anterior.

$$U^T U X = B$$

En seguida, se crea un nuevo vector  $Y$  como  $UX = Y$ . Por lo tanto,

$$U^T Y = B$$

Usando las tres ecuaciones simultáneas anotadas arriba, esto se puede escribir en forma de matriz

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

cidos, los valores  $y$  se pueden determinar por multiplicación sucesiva. Esto se conoce como barrido hacia adelante, y más adelante se derivan fórmulas generales para su solución.

Luego, se regresa a la nueva relación del vector  $Y$ ,

$$U^T X = Y$$

lo cual se puede escribir en forma de matriz en las tres ecuaciones simultáneas originales, como sigue:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Como los valores  $u$  y los valores  $y$  se conocen ahora, los valores  $x$  se pueden determinar. Esto se conoce como barrido hacia atrás, y también se derivarán fórmulas generales para su solución.

Volviendo primero a las ecuaciones para el barrido hacia adelante ( $U^T Y = B$ ), éstas son

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1n} & \vdots & \vdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ejecutando la multiplicación indicada,

$$u_{11}y_1 = b_1$$

o

$$y_1 = \frac{b_1}{u_{11}}$$

$$u_{12}y_1 + u_{22}y_2 = b_2$$

o

$$y_2 = \frac{(b_2 - u_{12}y_1)}{u_{22}}$$

$$u_{13}y_1 + u_{23}y_2 + u_{33}y_3 = b_3$$

o

$$y_3 = \frac{(b_3 - (u_{13}y_1 + u_{23}y_2))}{u_{33}}$$

La ecuación general para los elementos  $y$  de las relaciones anteriores se puede escribir como sigue:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} y_k}{u_{ii}} \quad (i > 1)$$



Las ecuaciones para el barrido hacia atrás ( $UX = Y$ ) son

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n-2,n-2} & u_{n-2,n-1} & u_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación indicada, comenzando por abajo y siguiendo hacia arriba,

$$u_{nn}x_n = y_n$$

o

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = y_{n-1}$$

o

$$x_{n-1} = \frac{(y_{n-1} - u_{n-1,n}x_n)}{u_{n-1,n-1}}$$

$$u_{n-2,n-2}x_{n-2} + u_{n-2,n-1}x_{n-1} + u_{n-2,n}x_n = y_{n-2}$$

o

$$x_{n-2} = \frac{y_{n-2} - (u_{n-2,n-1}x_{n-1} + u_{n-2,n}x_n)}{u_{n-2,n-2}}$$

La ecuación general para los elementos  $x$  de las relaciones anteriores se puede escribir como

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik}x_k}{u_{ii}} \quad (i < n)$$

### Resumen del método de Cholesky

1. De la serie de ecuaciones simultáneas, formar la matriz  $a_{ij}$ .

2. Formar la matriz  $U$  con las ecuaciones derivadas
3. Formar la matriz  $U^T$  transpuesta
4. Calcular y formar la matriz  $y_i$  a partir de la ecuación general derivada (barrido hacia adelante).
5. Calcular los valores  $x_i$  a partir de las ecuaciones generales derivadas (barrido hacia atrás).

### C.15 PROGRAMAS FORTRAN PARA ÁLGEBRA MATRICIAL

Los cuatro programas de computadora descritos y listados en esta sección están escritos en Fortran V. Los diagramas de flujo que los acompañan se correlacionan paso por paso con sus programas respectivos. Todos los programas están escritos como simples subrutinas para un programa principal.

Los programas denominados DECOMP, SOLVE y MATPRT se deben incluir como subrutinas cuando se use cualquiera de los dos programas principales, PLTRUSS (Apéndice D) o PLFRAME (Apéndice E). Son para ser incluidos exactamente como se presentan aquí cuando se usen con el programa PLTRUSS. Se necesita una pequeña modificación, como se describe en la nota de pie de página, para MATPRT.

1. MATMUL es una subrutina para multiplicación de matrices. El propósito de su inclusión en este apéndice es para ayudar a compren-

```

1      SUBROUTINE MATMUL(A,B,P,M,L,N)
2      DIMENSION A(120,120), B(120,120), P(120,120)
3      I=0
4
10     I=I+1
5      IF (I.GT.M) RETURN          @ PROCESSING COMPLETED
6      J=0
7
20     J=J+1
8      IF (J.GT.N) GO TO 10
9      K=0
10     SUM=0.0
11
30     K=K+1
12     IF (K.GT.L) GO TO 40
13     SUM=SUM+A(I,K)*B(K,J)
14     GO TO 30
15
40     P(I,J)=SUM
16     GO TO 20
17     END

```

der la multiplicación de matrices descrita en la sección C.7 y el procedimiento paso por paso usado en un proceso de computadora.

El programa se refiere a dos matrices,  $A$  y  $B$ . La matriz  $A$  es del orden  $M \times L$ , mien-

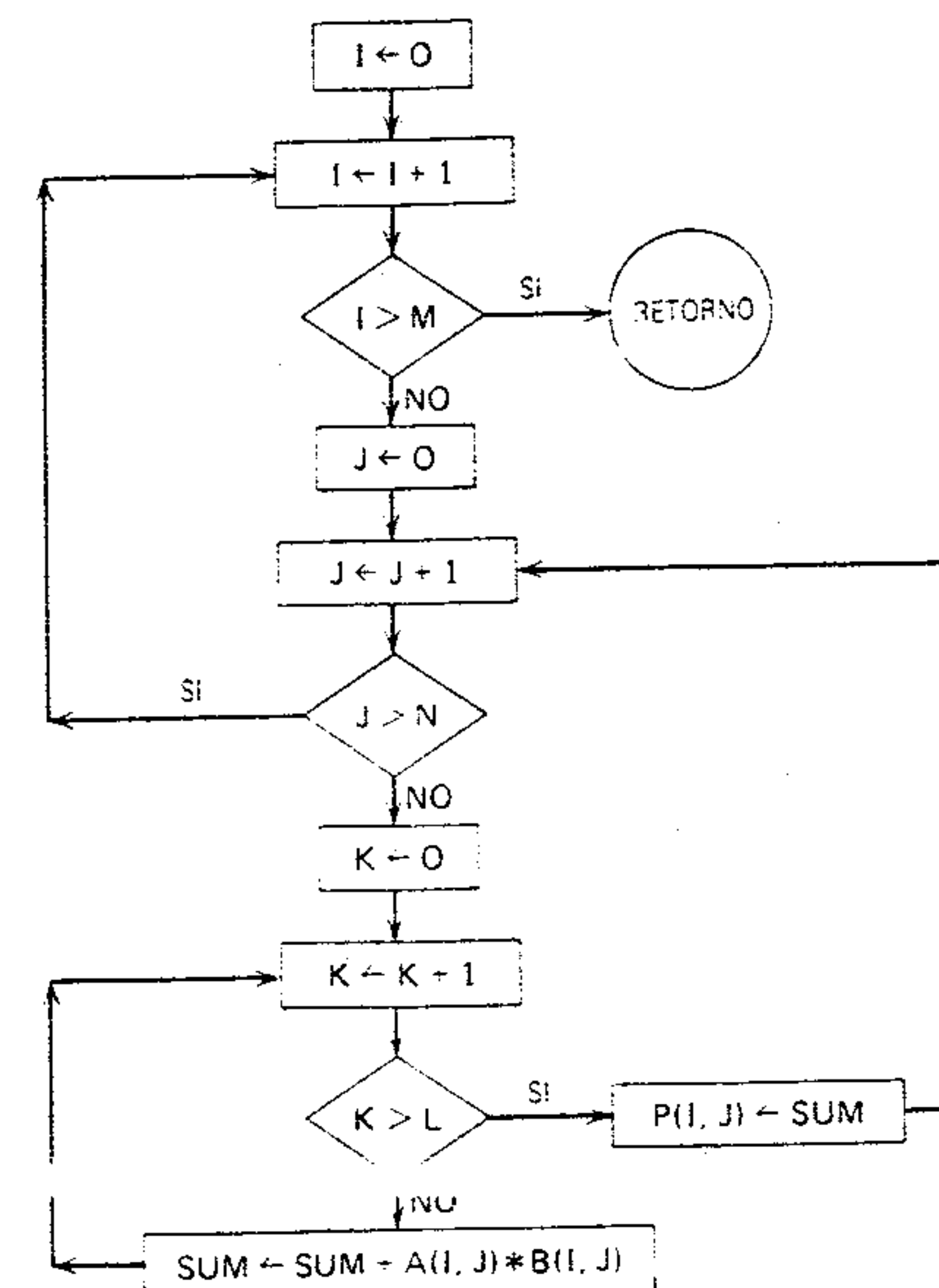


Figura C1 Diagrama de flujo para la multiplicación de matrices.

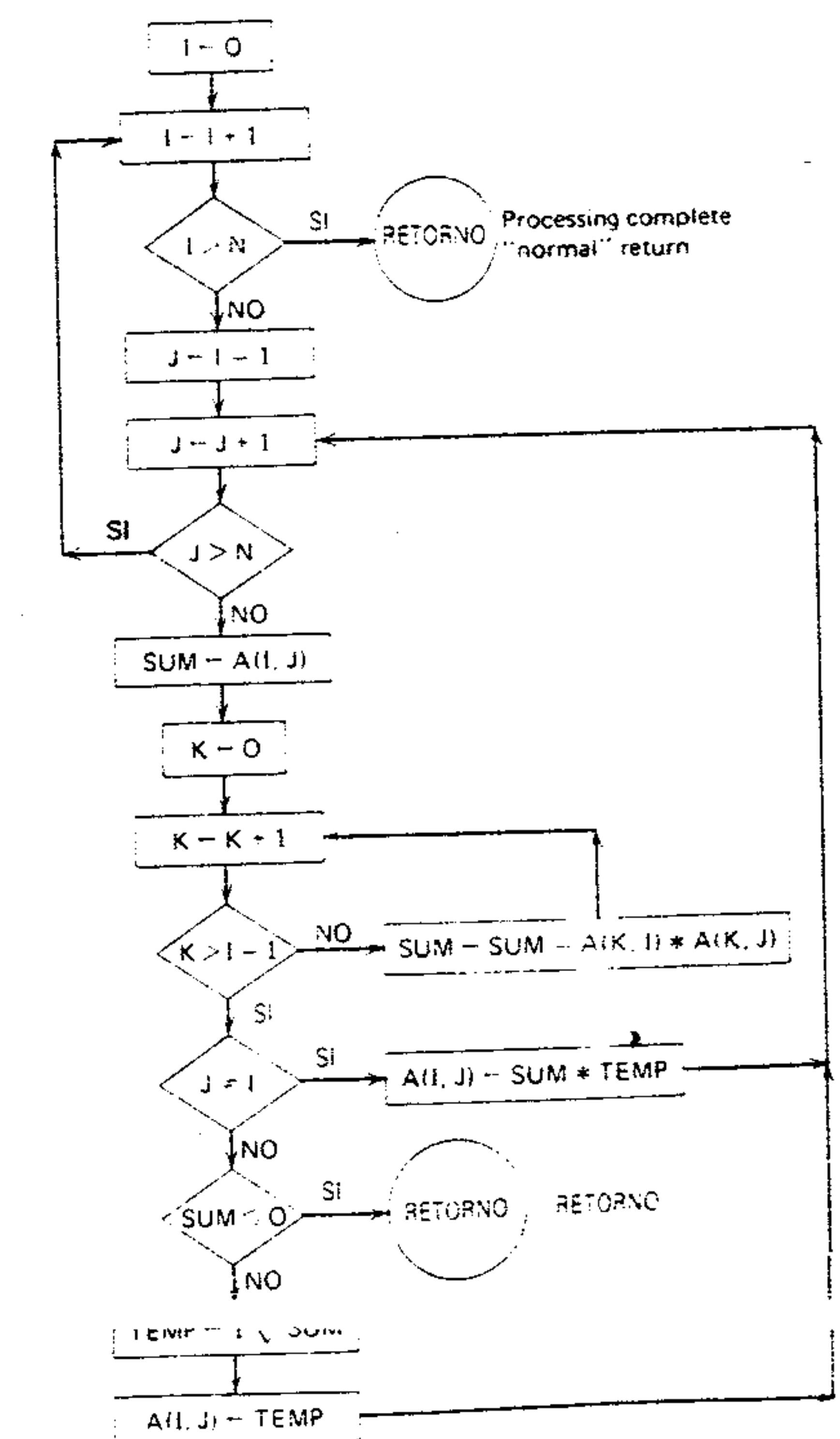


Figura C2 Diagrama de flujo para DECOMP.



tras que  $B$  es del orden  $L \times N$ . Cuando se multiplican, se genera una nueva matriz  $P$  y es del orden  $M \times N$ . La variable  $I$  es el "contador de filas" para la matriz  $A$ , mientras que  $J$  es el "contador de columnas" para la matriz  $B$ . La variable  $K$  es el "contador de producto interior".

Los productos interiores se acumulan en SUM y se asignan a los elementos apropiados de la matriz  $P$  después de  $K$  ciclos de 1 a  $L$ .

En la figura C1 se ilustra el diagrama de flujo para MATMUL. El símbolo en forma de rombo siempre se refiere a una pregunta y se debe responder sí o no. El proceso de retorno implica regresar al programa principal y terminar el procesamiento por la subrutina.

2. DECOMP es una subrutina para la descomposición de una matriz simétrica definida positiva usando el método de raíz cuadrada de Cholesky que se describió en la sección C. 14. La matriz de rigidez  $A$  es del orden  $N$ . Las variables  $I$ ,  $J$  y  $K$  son contadores y se incrementan en 1 antes de hacer pruebas o un cálculo. El triángulo superior de la matriz original  $A$  se destruye y reemplaza por el triángulo superior de la descomposición de  $A$ . Debe notarse que los recíprocos de los elementos de la diagonal de la descomposición se almacenan en vez de los propios elementos. Por lo tanto, las operaciones tanto en DE-

COMP como en SOLVE, comprendiendo la división entre un elemento de la diagonal, se convierten en operaciones que implican multiplicación.

En la figura C2 se ilustra el diagrama de flujo para DECOMP. Hay dos "retornos" de la subrutina. Uno ocurre cuando  $I$  se hace mayor que  $N$  y el procesamiento se completa, mientras que el otro ocurre sólo si falla la descomposición. Este último "retorno" es un medio de seguridad contra una operación aritmética indefinida (división entre cero).

3. SOLVE es una subrutina que ejecuta las operaciones para obtener los vectores  $Y$  y  $X$  en la ecuación matricial descrita en la sección C.14, es decir,

$$U^T Y = B \text{ ("barrido hacia adelante")}$$

y

$$UX = Y \text{ ("barrido hacia atrás")}$$

En una operación similar a la de DECOMP, los nuevos elementos se superponen a los viejos, conservando así espacio de almacenamiento en la computadora.

La figura C3 es el diagrama de flujo para SOLVE. La variable  $I$  es el "contador de filas", y  $K$ , como antes, es el "contador de

```

1  SUBROUTINE DECOMP(N,A,*)
2  DIMENSION A(120,120)
3  I=0
4  10 I=I+1
5  IF (I.GT.N) RETURN      @ PROCESSING COMPLETED
6  J=I-1
7  20 J=J+1
8  IF (J.GT.N) GO TO 10
9  SUM=A(I,J)
10 K=0
11 30 K=K+1
12 IF (K.GT.I-1) GO TO 40
13 SUM=SUM-A(K,I)*A(K,J)
14 GO TO 30
15
16 40 IF (J.NE.1) GO TO 50
17 IF (SUM.LE.0) RETURN 3    @ 'ERROR' EXIT
18 TEMP=1.0/SQRT(SUM)
19 A(I,J)=TEMP
20 GO TO 20
21 50 A(I,J)=SUM*TEMP
22 GO TO 20
23 END

```

producto interior". La mitad superior (instrucciones 3-13 inclusive) pertenecen al barrido hacia adelante, mientras que la mitad inferior (instrucciones 14-24 inclusive), el barrido hacia atrás.

4. MATPRT es una subrutina que imprime una matriz  $M \times N$  por filas, diez columnas por

página. Este formato permite que las páginas se reacomoden para formar una matriz completa sin dobleces.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Reemplazar la palabra "TRUSS" por la palabra "FRAME" en la instrucción 31 cuando se use esta subrutina con PLFRAME.

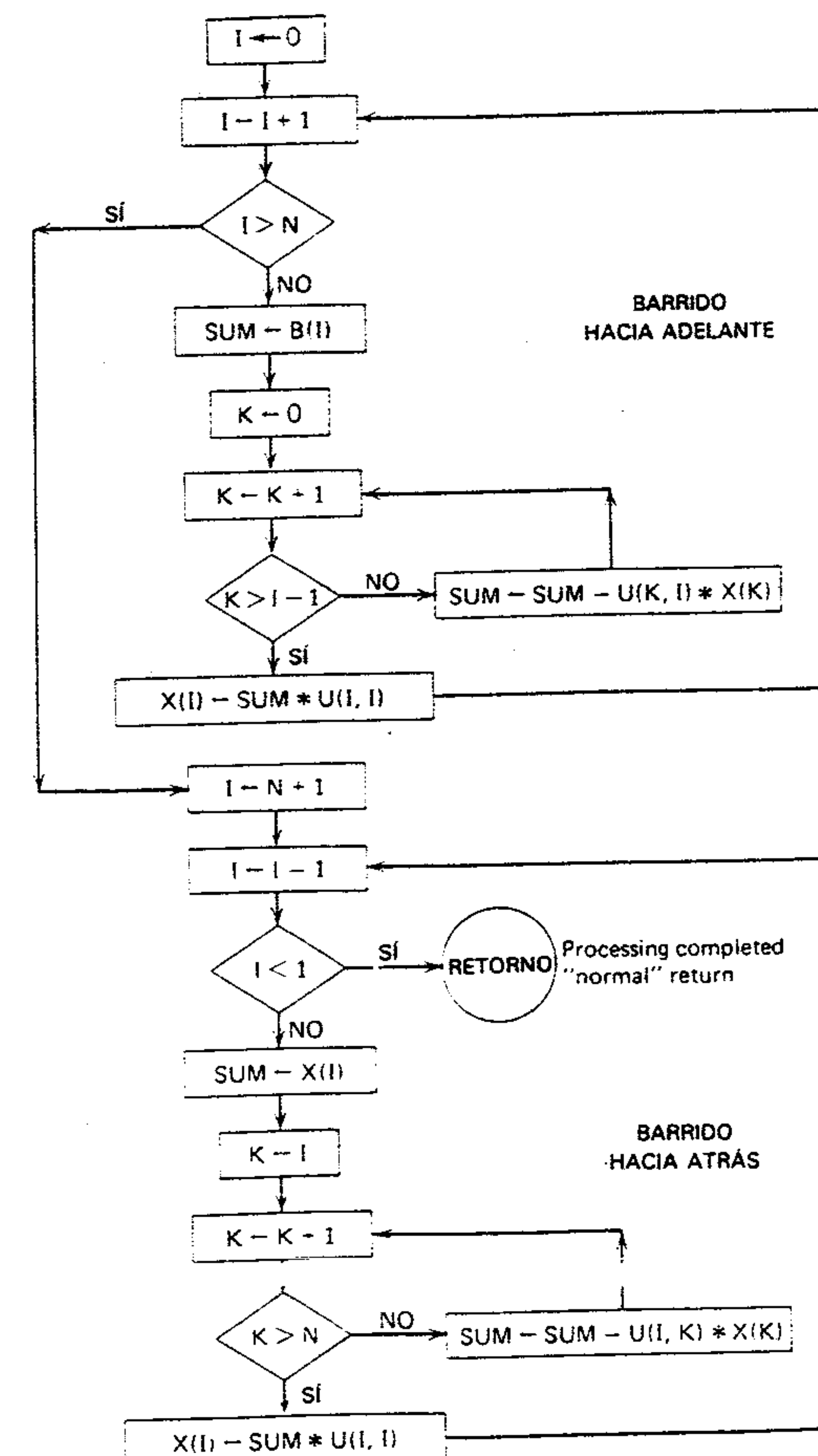


Figura C3 Diagrama de flujo para SOLVE.



```

1      SUBROUTINE SOLVE(N,U,B,X)
2      DIMENSION U(120,120), B(120), X(120)
3      I=0
4      10 I=I+1          @ 'FORWARD' SWEEP
5      IF (I.GT.N) GO TO 40
6      SUM=B(I)
7      K=0
8      20 K=K+1
9      IF (K.GT.I-1) GO TO 30
10     SUM=SUM-U(K,I)*X(K)
11     GO TO 20
12     30 X(I)=SUM*U(I,I)
13     GO TO 10
14     40 I=N+1
15     50 I=I-1          @ 'BACKWARD' SWEEP
16     IF (I.LT.1) RETURN @ PROCESSING COMPLETED
17     SUM=X(I)
18     K=I
19     60 K=K+1
20     IF (K.GT.N) GO TO 70
21     SUM=SUM-U(I,K)*X(K)
22     GO TO 60
23     70 X(I)=SUM*U(I,I)
24     GO TO 50
25     END

```

```

1      SUBROUTINE MATPRT(PID,C,M,N,A)
2
3      C      STEEL BUILDINGS: ANALYSIS AND DESIGN
4      C      CRAWLEY & DILLON
5
6      C      SUBROUTINE MATPRT:
7      C      PRINTS AN M X N MATRIX BY ROWS, 10 COLUMNS PER PAGE
8      C      W O CARTER
9      C      SEPTEMBER 15, 1975
10
11     DIMENSION PID(3,12), A(120,120)
12     INTEGER C, M, N
13
14     K=1
15     100 WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
16     IF (C.EQ.1) WRITE(6,610) @ HEADING
17     IF (C.EQ.2) WRITE(6,620) @ HEADING
18     IF (C.EQ.3) WRITE(6,630) @ HEADING
19     J=K
20     L=J+9
21     LIMIT=MIN(L,N)
22     DO 200 I=1,M
23     200 WRITE(6,640) I, J, (A(I,K), K=J,LIMIT)
24     K=LIMIT+1
25     IF (K.LE.N) GO TO 100
26     RETURN
27
28     C      FORMAT SPECIFICATIONS
29     600 FORMAT(1H1, 47X, 'STEEL BUILDINGS: ANALYSIS AND DESIGN')
30     610 FORMAT(1H1, 50X, 'CRAWLEY & DILLON')
31     620 FORMAT(1H1, 44X, 'PLANE FRAME ANALYSIS BY DISPLACEMENT METHOD')
32     630 FORMAT(1H1, 61X, 'W O CARTER')
33     640 FORMAT(1H0, 29X, 12A6/1H, 29X, 12A6/1H, 29X, 12A6)
34     610 FORMAT(1H0, 46X, '*****')
35     620 FORMAT(1H0, 46X, '*****')
36     630 FORMAT(1H0, 46X, '*****')
37     640 FORMAT(1H0, 46X, '*****')

```

```

38     1      1H, 46X, 'CONDENSED STIFFNESS MATRIX/1,000,000'
39     1      1H, 46X, '*****'
40     630 FORMAT(1H0, 54X, '*****')
41     1      1H, 54X, 'Q MATRIX/1,000,000'
42     1      1H, 54X, '*****'
43     640 FORMAT(1H0, 2I4, 3X, 10F12.5)
44     END
45     @USE MAP$PF.,UCC*FOR-LIB.
46     @MAP,N
47     @XQT

```



## APÉNDICE D

### Programa de armadura plana

#### D.1 INTRODUCCIÓN

El nombre de este programa de computadora es PLTRUSS, y el lenguaje en que está escrito es Fortran V.<sup>1</sup> Sin embargo, mediante revisiones menores, el programa se puede correr en casi cualquier computadora que tenga cualquier tipo de compilador Fortran y el equivalente de aproximadamente 39,000 palabras de almacenamiento primario. En la siguiente explicación del uso de este programa se supone que se usan tarjetas perforadas para operar el programa. (Como se dijo en la sección 12.6, se pueden utilizar otros procedimientos). Todas las tarjetas deben estar apropiadamente perforadas y dispuestas en la sección final en el orden preciso que se ilustra en la figura D1 y que se describe en las siguientes secciones.<sup>2</sup>

PLTRUSS se usa para determinar las fuerzas axiales en todos los miembros, los desplazamientos en todas las juntas y las componentes de reacción de apoyo de armaduras planas articuladas de configuración estable arbitraria y cualquier grado de indeterminación. Los tamaños de los arreglos se establecen de modo que el programa se limite a armaduras con no más de 100 miembros y 60 juntas. Estos límites se pueden exceder en el programa; sin embargo, en este caso se necesitaría una mayor capacidad de almacenamiento primario de la computadora, congruente con el mayor tamaño de los arreglos establecidos.

En la misma corrida de computadora se puede analizar cualquier número de armaduras diferentes, cada una con cualquier número de patrones de cargas. Para cada patrón de cargas de una armadura dada, el programa determina lo siguiente:

1. Matriz de rigidez completa de la armadura.
2. Matriz de rigidez condensada.
3. Matriz  $Q$ .

UP-4060 Rev. 2, Sperry Rand.

<sup>2</sup> Las tarjetas perforadas del programa PLTRUSS se pueden obtener solicitándolas a los autores.



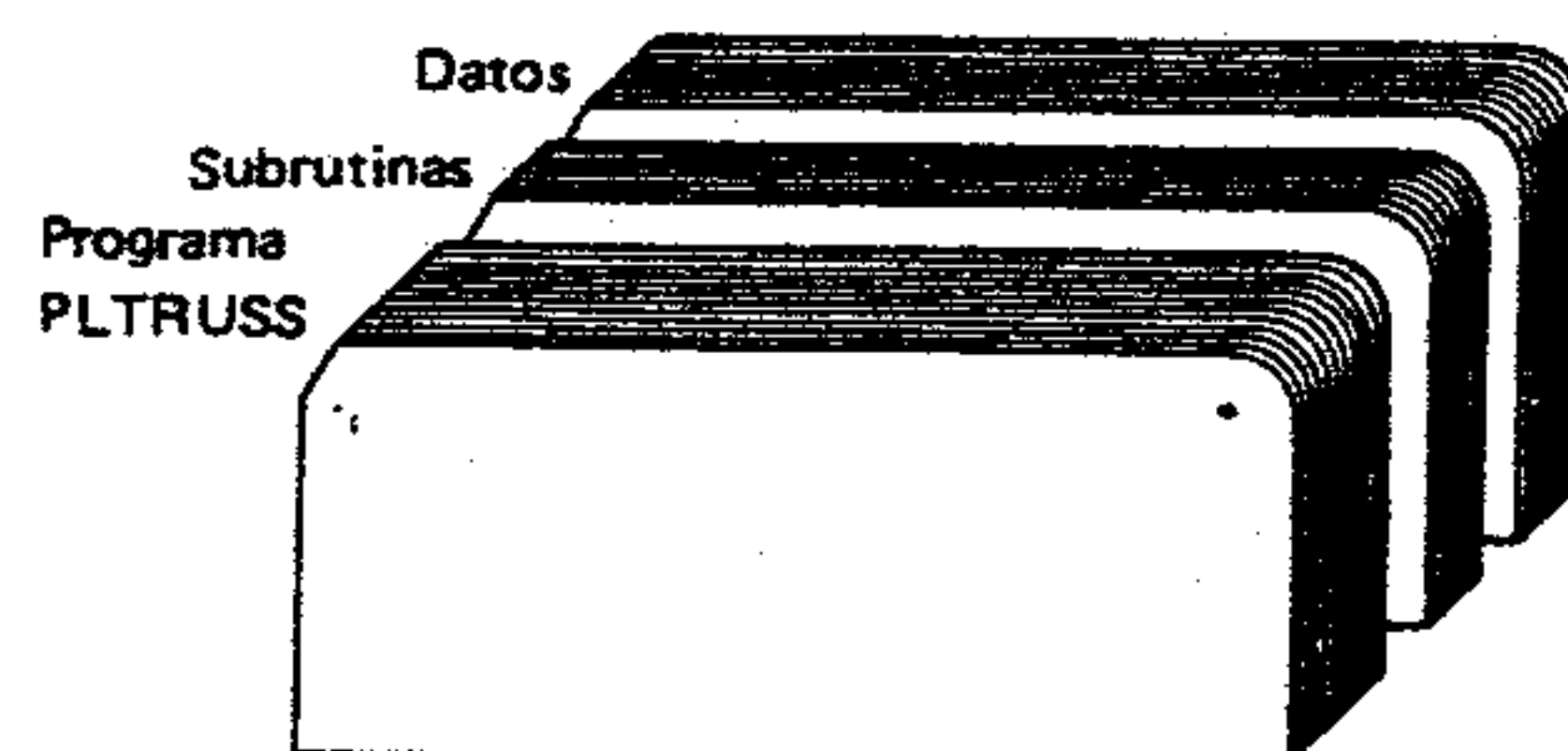


Figura D1 Ensamble del lote de tarjetas.

4. Desplazamientos de todas las juntas.
5. Fuerzas axiales en todos los miembros.
6. Fuerzas de reacción en todos los apoyos de la armadura.

Debe señalarse que los resultados impresos de la computadora no necesitan contener las matrices (puntos 1, 2 y 3). Esto lo puede decidir el usuario.

## D2 EL PROGRAMA

A continuación se lista el programa principal PLTRUSS. Cada línea es una *instrucción* y están numeradas consecutivamente de 1 a 390. Algunas líneas numeradas se han dejado intencionalmente en blanco. Cada instrucción que va precedida por

una letra C es un comentario y se incluye sólo como una ayuda para entender. Para explicar mejor el programa hay comentarios colocados al final de algunas instrucciones. Estos comentarios se sitúan en las mismas líneas que las instrucciones y van precedidas por símbolos @. Todas las líneas en blanco, las líneas de comentarios y los comentarios precedidos por el símbolo @ se pueden omitir del programa, sin que esto tenga efecto alguno sobre los resultados del análisis.

Este programa debe explicarse por sí mismo para quien posee conocimientos fundamentales del lenguaje Fortran. El programa se desarrolla en pasos consecutivos para:

1. Leer o aceptar los datos pertenecientes al problema que se va a resolver.
2. Preparar la matriz de rigidez y todos los vectores de carga.
3. Llamar a las subrutinas para resolver los desplazamientos desconocidos.
4. Hacer los cálculos necesarios para las cargas axiales.
5. Dar instrucciones al instrumento impresor para el contenido y el formato de la información de salida.

Todas las instrucciones de formato están dispuestas al final del programa principal.

### PLTRUSS PROGRAM

```

1      C   STEEL BUILDINGS: ANALYSIS AND DESIGN
2      C   CRAWLEY & DILLON
3
4      C   PLANE TRUSS ANALYSIS BY DISPLACEMENT METHOD
5      C   W O CARTER
6      C   SEPTEMBER 15, 1975
7
8      DIMENSION PID(3,12),
9      1      JM(100), KM(100), AM(100), EM(100), GM(100),
10     1      SM(100), CX(100), CY(100),
11     1      X(60), Y(60), MCL(120),
12     1      S(120,120), Q(120,120), W(120), R(120), D(120)
13
14     REAL    K11, K12, K22
15
17     C   * P R O B L E M   I D E N T I F I C A T I O N *
18     C   * * * * *
19
20     100 READ(5,500,END=999) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3)
21
```

```

22     C   PID(,): PROBLEM IDENTIFICATION (3 CARDS / 72 COLUMNS)
23
24     C   * * * * *
25     C   * T R U S S   G E O M E T R Y *
26     C   * * * * *
27
28     C   INPUT JOINT DATA
29
30     READ(5,510) NJ
31
32     C   NJ: NUMBER OF JOINTS
33
34     READ(5,510) (J, X(J), Y(J), INDEX=1,NJ)
35
36     C   J: JOINT NUMBER
37     C   X(J): X COORDINATE OF JOINT 'J' (FEET)
38     C   Y(J): Y COORDINATE OF JOINT 'J' (FEET)
39
40     NLA=2*NJ @ NUMBER OF LINES OF ACTION
41     DO 110 INDEX=1,NLA
42     110 MCL(INDEX)=0 @ ZERO MATRIX CONDENSATION LIST
43
44     READ(5,520) NRJ
45
46     C   NRJ: NUMBER OF RESTRAINED JOINTS
47
48     READ(5,520) (J, MCL(2*J-1), MCL(2*J), INDEX=1,NRJ)
49
50     C   J: RESTRAINED JOINT NUMBER
51     C   MCL(): MATRIX CONDENSATION LIST ENTRY
52     C   0: UNRESTRAINED LINE OF ACTION
53     C   1: RESTRAINED LINE OF ACTION
54
55     C   OUTPUT JOINT DATA
56
57     WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
58     WRITE(6,610) @ HEADING
59     DO 120 J=1,NJ
60     WRITE(6,620) J, X(J), Y(J)
61     IF (MCL(2*J-1).GT.0) WRITE(6,622)
62     IF (MCL(2*J).GT.0) WRITE(6,624)
63     X(J)=12.0*X(J) @ CONVERT COORDINATE TO INCHES
64     Y(J)=12.0*Y(J) @ CONVERT COORDINATE TO INCHES
65     120 CONTINUE
66
67     NRL=0
68     DO 130 I=1,NLA
69     NRL=NRL+MCL(I) @ NUMBER OF RESTRAINED LINES OF ACTION
70     DO 130 J=1,NLA
71     130 S(I,J)=0.0 @ ZERO STIFFNESS MATRIX
72     NDF=NLA-NRL @ NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM
73
74     C   INPUT MEMBER DATA
75
76     READ(5,530) NM, MPC
77
78     C   NM: NUMBER OF MEMBERS
79     C   MPC: MATRIX PRINT CODE
80     C   0: SUPPRESS OUTPUT
81     C   1: ACTIVATE OUTPUT
82
83     WT=0.0 @ ZERO TOTAL JOINT WEIGHT
84     DO 140 INDEX=1,NM
85
86     READ(5,530) I, J, K, A, E, G
87
88     C   I: MEMBER NUMBER

```



```

89      C      J: 'A' END MEMBER INCIDENCE
90      C      K: 'B' END MEMBER INCIDENCE
91      C      A: CROSS-SECTIONAL AREA OF MEMBER (INS**2)
92      C      E: MODULUS OF ELASTICITY OF MEMBER (KSI/1000)
93      C      G: UNIT WEIGHT OF MEMBER (LBS/FT**3)
94
95      JM(I)=J
96      KM(I)=K
97      AM(I)=A
98      EM(I)=E
99      GM(I)=G
100
101      DELX=X(K)-X(J)
102      DELY=Y(K)-Y(J)
103      SPAN=SQRT(DELX**2+DELY**2) @ LENGTH OF MEMBER (INCHES)
104      SM(I)=SPAN/12.0 @ LENGTH OF MEMBER (FEET)
105      CX(I)=DELX/SPAN @ DIRECTION COSINE (X AXIS)
106      CY(I)=DELY/SPAN @ DIRECTION COSINE (Y AXIS)
107      WT=WT+A*SPAN*G/3456000.0 @ WEIGHT OF TRUSS (TONS)
108
109      C      CONTRIBUTION OF MEMBER TO TRUSS STIFFNESS MATRIX
110      J2=2*J @ GLOBAL LINE OF ACTION
111      J1=J2-1 @ GLOBAL LINE OF ACTION
112      K2=2*K @ GLOBAL LINE OF ACTION
113      K1=K2-1 @ GLOBAL LINE OF ACTION
114      TEMP=A*E/SPAN
115      K11=TEMP*CX(I)**2 @ MEMBER STIFFNESS COEFFICIENT K(1,1)
116      K12=TEMP*CX(I)*CY(I) @ MEMBER STIFFNESS COEFFICIENT K(1,2)
117      K22=TEMP*CY(I)**2 @ MEMBER STIFFNESS COEFFICIENT K(2,2)
118      S(J1,J1)=S(J1,J1)+K11
119      S(J1,J2)=S(J1,J2)+K12
120      S(J1,K1)=-K11
121      S(J1,K2)=-K12
122      S(J2,J1)=S(J2,J1)+K12
123      S(J2,J2)=S(J2,J2)+K22
124      S(J2,K1)=-K12
125      S(J2,K2)=-K22
126      S(K1,J1)=-K11
127      S(K1,J2)=-K12
128      S(K1,K1)=S(K1,K1)+K11
129      S(K1,K2)=S(K1,K2)+K12
130      S(K2,J1)=-K12
131      S(K2,J2)=-K22
132      S(K2,K1)=S(K2,K1)+K12
133      S(K2,K2)=S(K2,K2)+K22
134
135      C      OUTPUT MEMBER DATA
136
137      WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
138      WRITE(6,630) @ HEADING
139      WRITE(6,640) ((I, JM(I), KM(I), SM(I), AM(I), EM(I)), I=1,NM)
140      WRITE(6,650) WT
141
142      C      OUTPUT 'COMPLETE' TRUSS STIFFNESS MATRIX
143      IF (MPC.NE.0) CALL MATPRT(PID,1,NLA,NLA,S)
144
145      C      CONDENSE TRUSS STIFFNESS MATRIX
146      I=0
147      M=0
148      DO 180 K=1,NLA
149      IF (MCL(K).NE.0) GO TO 160
150      I=I+1
151
152      DO 150 J=1,NLA
153      S(I,J)=S(K,J) @ CONDENSE ROWS
154      GO TO 180
155      M=M+1

```

```

156      DO 170 J=1,NLA
157      Q(M,J)=S(K,J) @ FORMULATE 'Q' MATRIX
158      180 CONTINUE
159      J=0
160      DO 200 K=1,NLA
161      IF (MCL(K).NE.0) GO TO 200
162      J=J+1
163      IF (J.EQ.K) GO TO 200
164      DO 190 I=1,NDF
165      S(I,J)=S(I,K) @ CONDENSE COLUMNS
166      200 CONTINUE
167
168      C      OUTPUT 'S' AND 'Q' MATRICIES
169      IF (MPC.EQ.0) GO TO 210 @ SUPPRESS OUTPUT
170      CALL MATPRT(PID,2,NDF,NDF,S)
171      CALL MATPRT(PID,3,NRL,NLA,Q)
172
173      C      'DECOMPOSE' TRUSS STIFFNESS MATRIX
174      210 CALL DECOMP(NDF,S,$999)
175
176      C      * * * * *
177      C      * S O L U T I O N   P H A S E *
178      C      * * * * *
179
180      READ(5,520) NLP
181
182      C      NLP: NUMBER OF LOADING PATTERNS TO BE ANALYZED
183
184      DO 390 LP=1,NLP @ SOLUTION LOOP
185
186      DO 220 INDEX=1,NLA
187      W(INDEX)=0.0
188      220 R(INDEX)=0.0
189
190      WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
191      WRITE(6,660) LP, NLP @ HEADING
192
193      READ(5,520) NLJ, MWC
194
195      C      NLJ: NUMBER OF LOADED JOINTS IN LOADING PATTERN
196      C      MWC: MEMBER WEIGHT CODE
197      C      0: EXCLUDE MEMBER WEIGHTS IN ANALYSIS
198      C      1: INCLUDE MEMBER WEIGHTS IN ANALYSIS
199
200      C      GENERATE LOAD VECTOR
201      IF (NLJ.GT.0) GO TO 230
202      WRITE(6,662) @ NO LOADED JOINTS IN PATTERN
203      GO TO 240
204      230 DO 235 INDEX=1,NLJ
205      READ(5,510) J, WX, WY
206
207      C      J: LOADED JOINT NUMBER
208      C      WX: X DIRECTION JOINT LOAD (KIPS)
209      C      WY: Y DIRECTION JOINT LOAD (KIPS)
210
211      WRITE(6,664) J, WX, WY
212      W(2*J-1)=1000.0*WX @ ASSIGN LOAD IN POUNDS TO LOAD VECTOR
213      W(2*J)=1000.0*WY @ ASSIGN LOAD IN POUNDS TO LOAD VECTOR
214
215      240 IF (MWC.GT.0) GO TO 245
216
217      IF (NLJ.GT.0) GO TO 200 @ NULL LOAD VECTOR
218      GO TO 390
219      C      ASSIGN MEMBER WEIGHTS TO LOAD VECTOR
220      245 DO 250 I=1,NM
221      V=AM(I)*SM(I)*GM(I)/288.0
222      J2=2*JM(I)

```



```

223      K2=2*KM(I)
224      W(J2)=W(J2)-V
225      250 W(K2)=W(K2)-V
226      WRITE(6,668)
227
228      C CONDENSE LOAD VECTOR
229      260 I=0
230      M=0
231      DO 270 K=1,NLA
232      L=MCL(K)
233      IF (L.NE.0) GO TO 265
234      I=I+1
235      W(I)=W(K)
236      GO TO 270
237      265 M=M+1
238      R(M)=-0.001*W(K)
239      270 CONTINUE
240
241      C SOLVE EQUATIONS FOR UNKNOWN DEFLECTIONS
242      CALL SOLVE(NDF,S,W,D)
243
244      C EXPAND DEFLECTION VECTOR TO INCLUDE KNOWN DEFLECTIONS
245      I=NLA
246      J=NDF+1
247      280 L=MCL(I)
248      IF (L.NE.0) GO TO 290
249      J=J-1
250      D(I)=0.000001*D(J)
251      GO TO 300
252      290 D(I)=0.0
253      300 I=I-1
254      IF (I.GT.0) GO TO 280
255
256      C OUTPUT DEFLECTIONS
257      WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
258      WRITE(6,670) LP, NLP @ HEADING
259      WRITE(6,672) (J, D(2*J-1), D(2*J), J=1,NJ)
260
261      C CALCULATE AND OUTPUT MEMBER FORCES
262      WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
263      WRITE(6,680) LP, NLP @ HEADING
264      DO 310 I=1,NM
265      J2=2*JM(I)
266      J1=J2-1
267      K2=2*KM(I)
268      K1=K2-1
269      DELTA=D(J1)-D(K1)
270      DELTB=D(J2)-D(K2)
271      TA=83.333333*(AM(I)*EM(I)/SM(I))*((CX(I)*DELTA+CY(I)*DELTB)
272      FORCE=-TA @ FORCE SIGN CONVENTION: TENSION +
273      COMPRESSION -
274      310 WRITE(6,682) I, FORCE
275
276      C CALCULATE REACTIVE FORCES
277      DO 330 I=1,NRL
278      SUM=0.0
279      DO 320 J=1,NLA
280      SUM=SUM+Q(I,J)*D(J)
281      330 R(I)=R(I)+1000.0*SUM
282
283      C OUTPUT REACTIVE FORCES
284
285      WRITE(6,690) LP, NLP @ HEADING
286      I=0
287      DO 380 J=1,NJ
288      KX=MCL(2*J-1)
289      KY=MCL(2*J)

```

@ MEMBER WEIGHTS INCLUDED

```

290      IF (KX.EQ.0) GO TO 340
291      I=I+1
292      RX=R(I)
293      340 IF (KY.EQ.0) GO TO 350
294      I=I+1
295      RY=R(I)
296      350 IF ((KX.EQ.0).AND.(KY.EQ.0)) GO TO 380
297      IF ((KX.EQ.0).AND.(KY.EQ.1)) GO TO 370
298      IF ((KX.EQ.1).AND.(KY.EQ.0)) GO TO 360
299      WRITE(6,692) J, RX, RY
300      GO TO 380
301      360 WRITE(6,694) J, RX
302      GO TO 380
303      370 WRITE(6,696) J, RY
304      380 CONTINUE
305
306      390 CONTINUE @ END OF SOLUTION LOOP
307
308      C *****
309      C * END SOLUTION PHASE *
310      C *****
311
312      GO TO 100
313
314      999 STOP
315
316      C FORMAT SPECIFICATIONS
317      500 FORMAT(12A6)
318      510 FORMAT(I6,2F10.3)
319      520 FORMAT(3I6)
320      530 FORMAT(3I6,3F10.3)
321      600 FORMAT(1H1,47X,'STEEL BUILDINGS: ANALYSIS AND DESIGN'//
322      1 1H,58X,'CRAWLEY & DILLON'//
323      1 1H,44X,'PLANE TRUSS ANALYSIS BY DISPLACEMENT METHOD'//
324      1 1H,61X,'W O CARTER'//
325      1 1H0,29X,12A6/1H,29X,12A6/1H,29X,12A6//)
326      610 FORMAT(1H0,54X,'*****'//
327      1 1H,54X,'* J O I N T D A T A *'//
328      1 1H,54X,'*****'//
329      1 1H0,47X,'JOINT',5X,'COORDINATES',5X,'RESTRAINTS'//
330      1 1H,58X,'X',7X,'Y',9X,'X Y'//
331      1 1H,56X,'(FEET)',2X,'(FEET)'//)
332      620 FORMAT(1H,47X,I3,4X,2F8.3)
333      622 FORMAT(1H+,76X,'R')
334      624 FORMAT(1H+,79X,'R')
335      630 FORMAT(1H0,53X,'*****'//
336      1 1H,53X,'* M E M B E R D A T A *'//
337      1 1H,53X,'*****'//
338      1 1H0,34X,'MEMBER',5X,'END JOINTS',4X,'LENGTH',6X,
339      1 'AREA OF',6X,'MODULUS OF'//
340      1 1H,47X,'A B',15X,'CROSS-SECTION',3X,'ELASTICITY'//
341      1 1H,59X,'(FEET)',6X,'(INS**2)',5X,'(KSI/1000)'//)
342      640 FORMAT(1H,35X,I3,5X,2I5,2X,F10.3,3X,F10.3,4X,F10.3)
343      650 FORMAT(1H0/
344      1 1H0,47X,'TOTAL WEIGHT OF TRUSS:',F8.3,1X,'TONS')
345      660 FORMAT(1H0,45X,'LOADING PATTERN',I3,1X,'OF',I3,1X,
346      1 'LOADING PATTERNS'//
347      1 1H0,51X,'*****'//
348      1 1H,51X,'* J O I N T L O A D I N G *'//
349      1 1H,51X,'*****'//
350      1 1H0,53X,'JOINT',8X,'LOADING'//
351
352      1 1H,62X,'(KIPS)',3X,'(KIPS)'//
353      662 FORMAT(1H,52X,'NO LOADED JOINTS IN PATTERN')
354      664 FORMAT(1H,53X,I3,3X,2F9.3)
355      666 FORMAT(1H0/
356      1 1H0,44X,'*****'//

```



```

357      1H ,44X,'* MEMBER WEIGHTS NOT INCLUDED IN ANALYSIS *'/
358      1H ,44X,'* * * * *'
359 668 FORMAT(1H0/'
360      1H0,44X,'* * * * *'
361      1H ,44X,'* MEMBER WEIGHTS ARE INCLUDED IN ANALYSIS *'/
362      1H ,44X,'* * * * *'
363 670 FORMAT(1H0,45X,'LOADING PATTERN',I3,1X,'OF',I3,1X,
364      'LOADING PATTERNS'///
365      1H0,47X,'* * * * *'
366      1H ,47X,'* JOINT DEFLECTIONS *'/
367      1H ,47X,'* * * * *'
368      1H0,53X,'JOINT',7X,'DEFLECTIONS',1H ,63X,'D(X)',7X,'D(Y)'//
369      1H ,61X,'(INCHES) (INCHES)'///
370 672 FORMAT(1H ,53X,I3,1X,2F11.4)
371 680 FORMAT(1H0,45X,'LOADING PATTERN',I3,1X,'OF',I3,1X,
372      'LOADING PATTERNS'///
373      1H0,51X,'* * * * *'
374      1H ,51X,'* MEMBER FORCES *'/
375      1H ,51X,'* * * * *'
376      1H0,62X,'(KIPS)'//
377      1H0,57X,'TENSION (+)'//1H ,57X,'COMPRESSION (-)'//
378      1H0,57X,'MEMBER FORCE'///
379 682 FORMAT(1H ,58X,I3,F12.2)
380 690 FORMAT(1H0,45X,'LOADING PATTERN',I3,1X,'OF',I3,1X,
381      'LOADING PATTERNS'///
382      1H0,50X,'* * * * *'
383      1H ,50X,'* REACTIVE FORCES *'/
384      1H ,50X,'* * * * *'
385      1H0,53X,'JOINT',8X,'REACTIONS'//
386      1H ,64X,'R(X)',5X,'R(Y)'//1H ,63X,'(KIPS) (KIPS)'///
387 692 FORMAT(1H ,53X,I3, 4X,2F9.3)
388 694 FORMAT(1H ,53X,I3, 4X, F9.3)
389 696 FORMAT(1H ,53X,I3,13X, F9.3)
390 END

```

### D.3 LAS SUBROUTINAS

Se necesitan tres subrutinas para correr el programa. Éstas son DECOMP, SOLVE y MATPRT; cada una está listada y descrita en la sección C.15 del apéndice C. Estas subrutinas se deben incluir en el lote de tarjetas, como se ve en la figura D1.

#### D.4 DATOS DE ENTRADA

Cada armadura debe tener un conjunto de datos completo consistente en un conjunto de datos que describen la armadura y su geometría y un conjunto de datos para cada patrón de carga que se va a

completos de datos se puede usar consecutivamente para formar el conjunto entero de datos para correrlo con el programa.

El primer conjunto de datos pertenece a la identificación, geometría y propiedades físicas de la armadura que se va a analizar (tabla D1). El segundo pertenece a las cargas sobre la armadura (tabla D2). Cada patrón de carga requiere un conjunto de datos separado. Por ejemplo, una armadura dada puede ser analizada por tres patrones: un patrón de carga viva, uno de carga muerta y otro de cargas de viento.

El programa principal está preparado de tal manera que éste leerá los datos solamente si éstos están en la secuencia especificada y están colocados en una localización específica en las tarjetas. Esta información está contenida en las tablas D1 y D2.

၂၄၁၁၂၀၁၁

Usar el programa PLTRUSS para analizar la armadura ilustrada en la figura D2. Hacer dos soluciones

**Tabla D1 Datos de descripción de armadura.**

Secuencia	Tipo de datos	Localización en tarjeta	Comentarios
1	Identificación del problema	Cualquier lugar en las cols. 1-72 inclusive	Total de 3 tarjetas Centrar en las cols. 1-72.
2	Número de juntas	Cargado a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta
3	Número de junta coordenada x	Cargado a la derecha en col. 6 Posicionado sobre punto decimal en col. 13	Una tarjeta por junta. El número total de tarjetas es igual al número de juntas.
	Coordenada y	Posicionado sobre punto decimal en col. 23	Dimensiones en pies con tres decimales.
4	Número de juntas apoyadas externamente	Cargado a la derecha en col. 6	
5	Número de juntas apoyadas ¿Restricción horizontal? ¿Restricción vertical?	Cargado a la derecha en col. 6 col. 12 col. 18	Una tarjeta por junta apoyada. Código 1 significa sí. Código 0 significa no.
6	Número de miembros Código de impresión de matriz	Cargado a la derecha en col. 6 Col. 12	Una sola tarjeta. Código 1 significa imprimir matriz. Código 0 significa no imprimir.
7	Número de miembro Número de junta en el extremo de "inicio" del miembro Número de junta en el extremo de "terminación" del miembro Área de sección transversal Módulo de elasticidad Peso del miembro	Cargado a la derecha en col. 6 Cargado a la derecha en col. 12 Cargado a la derecha en col. 18 Posicionado sobre punto decimal en col. 25 Posicionado sobre punto decimal en col. 35 Posicionado sobre punto decimal en col. 45	Una tarjeta por miembro El número total de tarjetas es igual al número de miembros. Área en pulgadas cuadradas. $E$ en 1000 k/pulg <sup>2</sup> Peso en libras por pie cúbico. Todos con tres decimales.

separadas, una para las cargas verticales y una para las cargas horizontales. Suponer las siguientes áreas transversales: cuerda superior = 4.5 pulg cuadradas, cuerda inferior = 3.5 pulg cuadradas, diagonal = 3.0 pulg

el peso de los miembros en las soluciones. Los números encerrados en círculos representan juntas y los números dentro de los cuadrados representan miembros.



Tabla D2 Datos de cargas de armadura.

Secuencia	Tipo de datos	Localización en tarjeta	Comentarios
1	Número de patrones de carga que se van a analizar	Cargado a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta por armadura que se va a analizar. Las tarjetas en la secuencia 2 y 3 se van a repetir para cada patrón de cargas.
2	Número de juntas cargadas con estas cargas ¿Se debe agregar el peso del miembro?	Cargado a la derecha en col. 6 Col. 12	Una sola tarjeta. Código 1 significa sí. Código 0 significa no.
3	Número de junta donde se aplica la carga Carga en dirección X Carga en dirección Y	Cargado a la derecha col. 6 Posicionado sobre punto decimal en col. 13 Posicionado sobre punto decimal en col. 23	Una tarjeta para cada junta cargada. El número total de tarjetas es igual al número de juntas cargadas. Carga en kips con 3 decimales.

## Solución

- Los datos dentro de la retícula de la figura D3 están perforados en tarjetas. Como una ayuda para entender la localización de los datos que se van a perforar en las tarjetas, cada línea horizontal de la cuadrícula tiene

- un número de secuencia que está correlacionado con los números de las tablas D1 y D2.
- El programa PLTRUSS y las subrutinas están perforados en tarjetas, y el lote está ensamblado como se ve en la figura D1, y subsecuentemente se lee en la computadora con los resultados siguientes.

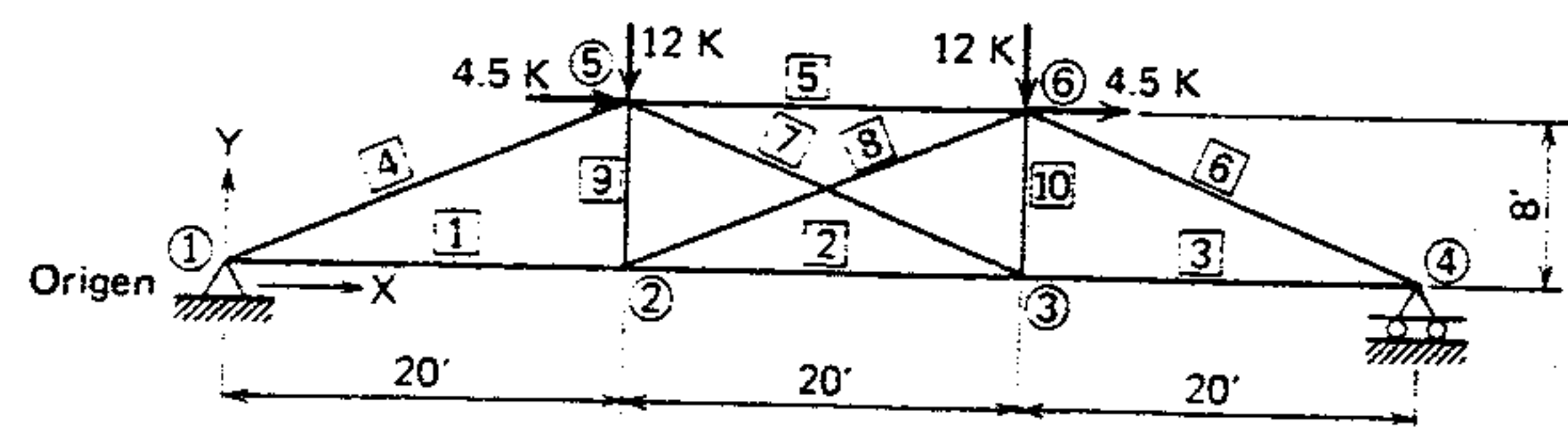


Figura D2 Ejemplo.

PROGRAMA DE ARMADURA  
MARZO 15 1981

EJEMPLO

SECUENCIA

TARJETAS DE REFERENCIA

TABLA D1

TABLA D2

Figura D3



STEEL BUILDINGS: ANALYSIS AND DESIGN  
CRAWLEY & DILLON  
PLANE TRUSS ANALYSIS BY DISPLACEMENT METHOD  
W O CARTER

EXAMPLE  
TRUSS PROBLEM  
MARCH 15 1980

\*\*\*\*\*  
\* JOINT DATA \*  
\*\*\*\*\*

JOINT	COORDINATES		RESTRAINTS	
	X (FEET)	Y (FEET)	X	Y
1	.000	.000	R	R
2	20.000	.000		
3	40.000	.000		
4	60.000	.000		R
5	20.000	8.000		
6	40.000	8.000		

\*\*\*\*\*  
\* MEMBER DATA \*  
\*\*\*\*\*

MEMBER	END JOINTS		LENGTH (FEET)	AREA OF CROSS-SECTION (INS**2)	MODULUS OF ELASTICITY (KSI/1000)
	A	B			
1	1	2	20.000	3.500	29.000
2	2	3	20.000	3.500	29.000
3	3	4	20.000	3.500	29.000
4	1	5	21.541	4.500	29.000
5	5	6	20.000	4.500	29.000
6	6	4	21.541	4.500	29.000
7	5	3	21.541	3.000	29.000
8	2	6	21.541	3.000	29.000
9	2	5	8.000	2.000	29.000
10	3	6	8.000	2.000	29.000

TOTAL WEIGHT OF TRUSS: 1.115 TONS

LOADING PATTERN 1 OF 2 LOADING PATTERNS

\*\*\*\*\*  
\* JOINT LOADING \*  
\*\*\*\*\*

JOINT	LOADING	
	W(X) (KIPS)	W(Y) (KIPS)
5	.000	-12.000
6	.000	-12.000

\*\*\*\*\*  
\* MEMBER WEIGHTS ARE INCLUDED IN ANALYSIS \*  
\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*  
\* JOINT DEFLECTIONS \*  
\*\*\*\*\*

JOINT	DEFLECTIONS	
	D(X) (INCHES)	D(Y) (INCHES)
1	.0000	.0000
2	.0758	-.5411
3	.1482	-.5411
4	.2240	.0000
5	.1429	-.5414
6	.0811	-.5414

\*\*\*\*\*  
\* MEMBER FORCES \*  
\*\*\*\*\*  
(KIPS)

TENSION (+)  
COMPRESSION (-)

MEMBER	FORCE
1	32.08
2	30.58
3	32.08
4	-34.55
5	-33.57
6	-34.55
7	1.61
8	1.61
9	-.22
10	-.22



## LOADING PATTERN 1 OF 2 LOADING PATTERNS

\*\*\*\*\*  
 \* REACTIVE FORCES \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	REACTIONS	
	R(X) (KIPS)	R(Y) (KIPS)
1	.000	13.115
4		13.115

## LOADING PATTERN 2 OF 2 LOADING PATTERNS

\*\*\*\*\*  
 \* JOINT LOADING \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	LOADING	
	W(X) (KIPS)	W(Y) (KIPS)
5	4.500	.000
6	4.500	.000

\*\*\*\*\*  
 \* MEMBER WEIGHTS ARE INCLUDED IN ANALYSIS \*  
 \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*  
 \* JOINT DEFLECTIONS \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	DEFLECTIONS	
	D(X) (INCHES)	D(Y) (INCHES)
1	.0000	.0000
2	.0191	-.0751
3	.0322	-.0734
4	.0442	.0000
5	.0326	-.0762
6	.0368	.0725

## LOADING PATTERN 2 OF 2 LOADING PATTERNS

\*\*\*\*\*  
 \* MEMBER FORCES \*  
 \*\*\*\*\*

(KIPS)  
 TENSION (+)  
 COMPRESSION (-)

MEMBER	FORCE
1	8.08
2	5.52
3	5.08
4	.99
5	-3.13
6	-5.47
7	-.48
8	2.75
9	-.65
10	.55

\*\*\*\*\*  
 \* REACTIVE FORCES \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	REACTIONS	
	R(X) (KIPS)	R(Y) (KIPS)
1	-9.000	-.085
4		2.315



## APÉNDICE E

### Programa de marco plano

#### E.1 INTRODUCCIÓN

El nombre de este programa de computadora es PLFRAME, y el lenguaje en que está escrito es Fortran V.<sup>1</sup> Sin embargo, mediante cambios menores, el programa se puede correr en casi cualquier computadora con aproximadamente 41,000 palabras de almacenamiento primario. En la siguiente explicación del uso de este programa se supone que se usan tarjetas perforadas para operar el programa. (Como se dijo en la sección 12.16 se pueden usar otros procedimientos).

Todas las tarjetas deben estar apropiadamente perforadas y dispuestas en el lote final en el orden preciso para el programa PLTRUSS (figura D1); es decir, el programa PLTRUSS se sustituye simplemente por el programa PLFRAME.<sup>2</sup>

PLFRAME se usa para determinar fuerzas cortantes, momentos flexionantes y fuerzas axiales en los extremos de todos los miembros; el desplazamiento de todas las juntas y las componentes de reacciones de marcos planos de juntas rígidas de configuración arbitraria y cualquier grado de indeterminación. Los tamaños de los arreglos se establecen de modo que el programa se limite a marcos con no más de 80 miembros y 40 juntas. Estos límites se podrían sobrepasar en el programa, sin embargo, este cambio necesitaría una mayor capacidad de almacenamiento primario de la computadora, congruente con el tamaño mayor de los arreglos establecidos.

En la misma corrida de computadora se puede analizar cualquier número de marcos diferentes, cada uno con cualquier número de patrones de cargas. Para cada patrón de cargas para un marco dado, el programa determina lo siguiente:

<sup>1</sup> UNIVAC 1100 Series Fortran V, Programmer Reference UP-4060 Rev. 2, Sperry Rand.

<sup>2</sup> Las tarjetas perforadas de PLFRAME se pueden obtener solicitándolas a los autores.



1. Matriz de rigidez completa del marco.
2. Matriz de rigidez condensada.
- 3 Matriz  $Q$ .
4. Desplazamientos de todas las juntas.
5. Momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial en cada extremo de cada miembro.
6. Fuerzas de reacción de todos los apoyos del marco.

Debe señalarse que la impresión de salida puede o no incluir las matrices correspondientes a los incisos 1, 2 y 3 a juicio del programador.

## E.2 EL PROGRAMA

A continuación se lista el programa principal para PLFRAME. Cada línea es una instrucción y están numeradas consecutivamente de 1 a 796. Algunas líneas numeradas se han dejado a propósito en blanco. Cada instrucción precedida por la letra C es una instrucción de comentario y se incluye sólo como una ayuda para la comprensión. Para comprender mejor la explicación del programa, se colocan comentarios al final de algunas instrucciones. Estos comentarios están situados en las mismas

líneas de la instrucción y van precedidos por símbolos @. Todas las líneas en blanco, las líneas de comentarios y los comentarios precedidos por el símbolo @ se podrían omitir del programa sin afectar en modo alguno los resultados del análisis.

Este programa debe explicarse por sí mismo para quien tenga un conocimiento fundamental del lenguaje Fortran. El programa se desarrolla en pasos consecutivos para:

1. Leer o aceptar los datos pertenecientes al problema que se va a resolver.
2. Preparar la matriz de rigidez y todos los vectores de cargas.
3. Llamar la subrutina para resolver los desplazamientos y rotaciones de juntas desconocidos.
4. Hacer los cálculos necesarios para los momentos flexionantes, fuerzas cortantes y cargas axiales.
5. Dar instrucciones al dispositivo impresor relativas al contenido y al formato de la información de salida.

Todas las instrucciones de formato están reunidas al final del programa principal.

```

1      C      STEEL BUILDINGS: ANALYSIS AND DESIGN
2      C      CRAWLEY & DILLON
3
4      C      PLANE FRAME ANALYSIS BY DISPLACEMENT METHOD
5      C      W O CARTER
6      C      SEPTEMBER 15, 1975
7
8      DIMENSION PID(3,12),
9      1      JM(80), KM(80), AM(80), ZM(80), EM(80), GM(80),
10     1      SM(80), CX(80), CY(80),
11     1      X(40), Y(40), MCL(120),
12     1      S(120,120), Q(120,120), W(120), R(120), D(120)
13
14     REAL    K11, K12, K13, K22, K23, K33, K36,
15     1      MO, MEA(80,6),
16     1      TA, VA, MA, TB, VB, MB
17
18     INTEGER RAL(120)
19
20     C      * * * * *
21     C      * P R O B L E M   I D E N T I F I C A T I O N *
22     C      * * * * *
23
24     100 READ(5,500,END=999) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3)
25
26     C      PID(:): PROBLEM IDENTIFICATION (3 CARDS / 72 COLUMNS)

```

```

27
28     C      * * * * *
29     C      * F R A M E   G E O M E T R Y *
30     C      * * * * *
31
32     C      INPUT JOINT DATA
33
34     READ(5,502) NJ
35
36     C      NJ: NUMBER OF JOINTS
37
38     READ(5,502) (J, X(J), Y(J), INDEX=1,NJ)
39
40     C      J: JOINT NUMBER
41     C      X(J): X COORDINATE OF JOINT 'J' (FEET)
42     C      Y(J): Y COORDINATE OF JOINT 'J' (FEET)
43
44     NLA=3*NJ @ NUMBER OF LINES OF ACTION
45     DO 110 INDEX=1,NLA
46     110 MCL(INDEX)=0 @ ZERO MATRIX CONDENSATION LIST
47
48     READ(5,504) NRJ
49
50     C      NRJ: NUMBER OF RESTRAINED JOINTS
51
52     READ(5,504) (J, MCL(3*J-2), MCL(3*J-1), MCL(3*J), INDEX=1,NRJ)
53
54     C      J: RESTRAINED JOINT NUMBER
55     C      MCL(:): MATRIX CONDENSATION LIST ENTRY (X, Y, ROTATION)
56     C      0: UNRESTRAINED LINE OF ACTION
57     C      1: RESTRAINED LINE OF ACTION
58
59     C      OUTPUT JOINT DATA
60
61     WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
62     WRITE(6,602) @ HEADING
63     DO 120 J=1,NJ
64     WRITE(6,604) J, X(J), Y(J)
65     IF (MCL(3*J-2).GT.0) WRITE(6,606)
66     IF (MCL(3*J-1).GT.0) WRITE(6,608)
67     IF (MCL(3*J).GT.0) WRITE(6,610)
68     X(J)=12.0*X(J) @ CONVERT COORDINATE TO INCHES
69     Y(J)=12.0*Y(J) @ CONVERT COORDINATE TO INCHES
70     120 CONTINUE
71
72     NRL=0
73     DO 130 I=1,NLA
74     NRL=NRL+MCL(I) @ NUMBER OF RESTRAINED LINES OF ACTION
75     DO 130 J=1,NLA
76     130 S(I,J)=0.0 @ ZERO STIFFNESS MATRIX
77     NDF=NLA-NRL @ NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM
78
79     C      INPUT MEMBER DATA AND GENERATE 'COMPLETE' STIFFNESS MATRIX
80
81     READ(5,506) NM, MPC
82
83     C      NM: NUMBER OF MEMBERS
84     C      MPC: MATRIX PRINT CODE
85     C      0: SUPPRESS OUTPUT
86     C      1: ACTIVATE OUTPUT
87
88     WT=0.0 @ ZERO TOTAL FRAME WEIGHT
89     DO 140 INDEX=1,NM
90
91     READ(5,506) I, J, K, A, Z, E, G
92
93     C      I: MEMBER NUMBER

```



```

94      C
95      C
96      C
97      C
98      C
99      C
100
101      JM(I)=J
102      KM(I)=K
103      AM(I)=A
104      ZM(I)=Z
105      EM(I)=E
106      GM(I)=G
107
108      DELX=X(K)-X(J)
109      DELY=Y(K)-Y(J)
110      SPAN=SQRT(DELX**2+DELY**2) @ LENGTH OF MEMBER (INCHES)
111      SM(I)=SPAN/12.0 @ LENGTH OF MEMBER (FEET)
112      CX(I)=DELX/SPAN @ DIRECTION COSINE (X AXIS)
113      CY(I)=DELY/SPAN @ DIRECTION COSINE (Y AXIS)
114      WT=WT+A*SPAN*G/3456000.0 @ WEIGHT OF FRAME (TONS)
115
116      C
117      CONTRIBUTION OF MEMBER TO FRAME STIFFNESS MATRIX
118
119      K36=2.0*E*Z/SPAN
120      K33=2.0*K36
121      S23=3.0*K36/SPAN
122      S22=6.0*K36/SPAN**2
123      S11= E*A/SPAN
124      K23=S23*CX(I)
125      K22=S11*CY(I)**2+S22*CX(I)**2
126      K13=S23*CY(I)
127      K12=(S11-S22)*CX(I)*CY(I)
128      K11=S11*CX(I)**2+S22*CY(I)**2
129
130      J3=3*J @ GLOBAL LINE OF ACTION: ROTATION
131      J2=J3-1 @ GLOBAL LINE OF ACTION: Y(S)
132      J1=J3-2 @ GLOBAL LINE OF ACTION: X(S)
133      K3=3*K @ GLOBAL LINE OF ACTION: ROTATION
134      K2=K3-1 @ GLOBAL LINE OF ACTION: Y(S)
135      K1=K3-2 @ GLOBAL LINE OF ACTION: X(S)
136
137      S(J1,J1)=S(J1,J1)+K11
138      S(J1,J2)=S(J1,J2)+K12
139      S(J1,J3)=S(J1,J3)+K13
140      S(J1,K1)=-K11
141      S(J1,K2)=-K12
142      S(J1,K3)=-K13
143      S(J2,J1)=S(J2,J1)+K12
144      S(J2,J2)=S(J2,J2)+K22
145      S(J2,J3)=S(J2,J3)+K23
146      S(J2,K1)=-K12
147      S(J2,K2)=-K22
148      S(J2,K3)= K23
149      S(J3,J1)=S(J3,J1)+K13
150      S(J3,J2)=S(J3,J2)+K23
151      S(J3,J3)=S(J3,J3)+K33
152      S(J3,K1)= K13
153      S(J3,K2)=-K23
154      S(J3,K3)= K36
155      S(K1,J1)=-K11
156      S(K1,J3)= K13
157      S(K1,K1)=S(K1,K1)+K11
158      S(K1,K2)=S(K1,K2)+K12
159      S(K1,K3)=S(K1,K3)+K13
160      S(K2,J1)=-K12

```

```

161      S(K2,J2)=-K22
162      S(K2,J3)=-K23
163      S(K2,K1)=S(K2,K1)+K12
164      S(K2,K2)=S(K2,K2)+K22
165      S(K2,K3)=S(K2,K3)+K23
166      S(K3,J1)=-K13
167      S(K3,J2)= K23
168      S(K3,J3)= K36
169      S(K3,K1)=S(K3,K1)+K13
170      S(K3,K2)=S(K3,K2)+K23
171      S(K3,K3)=S(K3,K3)+K33
172
173      C
174      OUTPUT MEMBER DATA
175
176      WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
177      WRITE(6,612) @ HEADING
178      WRITE(6,614) ((I, JM(I), KM(I), SM(I), AM(I), ZM(I), EM(I));
179      I=1,NM)
180      WRITE(6,616) WT
181
182      C
183      OUTPUT 'COMPLETE' FRAME STIFFNESS MATRIX
184      IF (MPC.NE.0) CALL MATPRT(PID,1,NLA,NLA,S)
185
186      C
187      CONDENSE FRAME STIFFNESS MATRIX
188      I=0
189      M=0
190      DO 180 K=1,NLA
191      IF (MCL(K).NE.0) GO TO 160
192      I=I+1
193      IF (I.EQ.K) GO TO 180
194      DO 150 J=1,NLA
195      S(I,J)=S(K,J) @ CONDENSE ROWS
196      GO TO 180
197      150 S(I,J)=S(K,J)
198      M=M+1
199      DO 170 J=1,NLA
200      Q(M,J)=S(K,J) @ FORMULATE 'Q' MATRIX
201      CONTINUE
202      J=0
203      DO 200 K=1,NLA
204      IF (MCL(K).NE.0) GO TO 200
205      J=J+1
206      IF (J.EQ.K) GO TO 200
207      DO 190 I=1,NDF
208      S(I,J)=S(I,K) @ CONDENSE COLUMNS
209      CONTINUE
210
211      C
212      OUTPUT 'S' AND 'Q' MATRICIES
213      IF (MPC.EQ.0) GO TO 210 @ SUPPRESS OUTPUT
214      CALL MATPRT(PID,2,NDF,NDF,S)
215      CALL MATPRT(PID,3,NRL,NLA,Q)
216
217      C
218      'DECOMPOSE' FRAME STIFFNESS MATRIX
219      210 CALL DECOMP(NDF,S,$999)
220
221      C
222      * * * * *
223      * S O L U T I O N   P H A S E *
224      * * * * *
225
226      READ(5,508) NLP
227
228      C
229      NLP. NUMBER OF LOADING PATTERNS TO BE ANALYZED
230
231      DO 998 LP=1,NLP @ SOLUTION LOOP
232
233      DO 300 INDEX=1,NLA
234      W(INDEX)=0.0
235      R(INDEX)=0.0
236
237

```



## 652 / PROGRAMA DE MARCO PLANO

```

228      WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
229      WRITE(6,618) LP, NLP @ HEADING
230
231      C *****
232      C * GENERATE LOAD VECTOR *
233      C *****
234
235      C / / / / / / / /
236      C / JOINT LOADS /
237      C / / / / / / / /
238
239      READ(5,508) NLJ
240
241      C NLJ: NUMBER OF LOADED JOINTS
242
243      IF (NLJ.GT.0) GO TO 310
244      WRITE(6,620) @ NO LOADED JOINTS
245      GO TO 330
246
247      310 WRITE(6,622) @ HEADING
248      DO 320 INDEX=1,NLJ
249      READ(5,508) J, WX, WY, WM
250
251      C J: LOADED JOINT NUMBER
252      C WX: X DIRECTION JOINT LOAD (KIPS)
253      C WY: Y DIRECTION JOINT LOAD (KIPS)
254      C WM: Z-AXIS COUPLE (KIP-FeET)
255
256      WRITE(6,624) J, WX, WY, WM
257
258      J3=3*J
259      J2=J3-1
260      J1=J3-2
261
262      C ASSIGN LOADS IN POUNDS AND COUPLES IN INCH-POUNDS
263      C TO LOAD AND REACTION VECTORS
264      W(J1)=W(J1)+ 1000.0*WX
265      W(J2)=W(J2)+ 1000.0*WY
266      W(J3)=W(J3)+12000.0*WM
267      IF (MCL(J1).NE.0) R(J1)=R(J1)- 1000.0*WX
268      IF (MCL(J2).NE.0) R(J2)=R(J2)- 1000.0*WY
269      320 IF (MCL(J3).NE.0) R(J3)=R(J3)-12000.0*WM
270
271      C / / / / / / / /
272      C / MEMBER LOADS /
273      C / / / / / / / /
274
275      330 WRITE(6,626) @ HEADING
276      DO 340 I=1,NM
277      DO 340 J=1,6
278      340 MEA(I,J)=0.0 @ ZERO MEMBER END ACTION ARRAY
279
280      C / MEMBER CONCENTRATED LOADS /
281
282      READ(5,510) NMC
283
284      C NMC: NUMBER OF MEMBERS W/ CONCENTRATED LOADS
285
286      IF (NMC.GT.0) GO TO 350
287      GO TO 400
288
289      350 WRITE(6,630) @ HEADING
290      DO 390 INDEX=1,NMC
291      READ(5,510) M, NCL
292
293
294

```

```

295      C M: LOADED MEMBER NUMBER
296      C NCL: NUMBER OF CONCENTRATED LOAD POINTS
297
298      IF (NCL.EQ.0) GO TO 390
299      WRITE(6,632) M
300      SPAN=12.0*SM(M)
301      COSA=CX(M)
302      SINA=CY(M)
303      TA=0.0
304      VA=0.0
305      MA=0.0
306      TB=0.0
307      VB=0.0
308      MB=0.0
309      DO 380 I=1,NCL
310      READ(5,512) K, A, FX, FY, MO
311
312      C K: LOAD ORIENTATION
313      C 0: MEMBER AXES
314      C 1: STRUCTURE AXES
315      C A: LOCATION OF LOADING (FRACTION OF SPAN)
316      C FX: CONCENTRATED X DIRECTION LOAD (KIPS)
317      C FY: CONCENTRATED Y DIRECTION LOAD (KIPS)
318      C MO: CONCENTRATED Z-AXIS MOMENT (KIP-FeET)
319
320      IF (K.NE.0) GO TO 360
321
322      C MEMBER AXES ORIENTATION
323      WRITE(6,634) A, FX, FY, MO
324      WX=FX
325      WY=FY
326      WM=MO
327      GO TO 370
328
329      C STRUCTURE AXES ORIENTATION
330      360 WRITE(6,636) A, FX, FY, MO
331      C TRANSFORM ORIENTATION TO MEMBER AXES
332      WX= FX*COSA+FY*SINA
333      WY=-FX*SINA+FY*COSA
334      WM=MO
335
336      370 WX= 1000.0*WX
337      WY= 1000.0*WY
338      WM=12000.0*WM
339
340      C X(M) DIRECTION LOAD
341      TA=TA-WX*(1.0-A) @ CUMULATIVE 'A' END THRUST
342      TB=TB-WX*A @ CUMULATIVE 'B' END THRUST
343
344      C Y(M) DIRECTION LOAD
345      TEMP=WY*SPAN*A*(1.0-A)
346      BMA=-TEMP*(1.0-A) @ 'A' END MOMENT
347      BMB= TEMP*A @ 'B' END MOMENT
348      MA=MA+BMA @ CUMULATIVE 'A' END MOMENT
349      MB=MB+BMB @ CUMULATIVE 'B' END MOMENT
350      TEMP=(BMA+BMB)/SPAN
351      VA=VA+TEMP-WY*(1.0-A) @ CUMULATIVE 'A' END SHEAR
352      VB=VB-TEMP-WY*A @ CUMULATIVE 'B' END SHEAR
353
354      C Z-AXIS COUPLE
355      BMA=-WM*(1.0-A*(4.0-3.0*A)) @ 'A' END MOMENT
356      BMB= WM*(1.0-3.0*A) @ 'B' END MOMENT
357      MA=MA+BMA @ CUMULATIVE 'A' END MOMENT
358      MB=MB+BMB @ CUMULATIVE 'B' END MOMENT
359      TEMP=(BMA+BMB+WM)/SPAN
360      VA=VA+TEMP @ CUMULATIVE 'A' END SHEAR
361      380 VB=VB-TEMP @ CUMULATIVE 'B' END SHEAR

```



```

362 C ASSIGN END ACTIONS TO MEA(,) ARRAY AND W() AND R() VECTORS
363
364 MEA(M,1)=MEA(M,1)+TA
365 MEA(M,2)=MEA(M,2)+VA
366 MEA(M,3)=MEA(M,3)+MA
367 MEA(M,4)=MEA(M,4)+TB
368 MEA(M,5)=MEA(M,5)+VB
369 MEA(M,6)=MEA(M,6)+MB
370
371 J3=3*JM(M)
372 J2=J3-1
373 J1=J3-2
374 K3=3*KM(M)
375 K2=K3-1
376 K1=K3-2
377
378 W(J1)=W(J1)-TA*COSA+VA*SINA
379 W(J2)=W(J2)-TA*SINA-VA*COSA
380 W(J3)=W(J3)-MA
381 W(K1)=W(K1)-TB*COSA+VB*SINA
382 W(K2)=W(K2)-TB*SINA-VB*COSA
383 W(K3)=W(K3)-MB
384
385 IF (MCL(J1).NE.0) R(J1)=R(J1)+TA*COSA-VA*SINA
386 IF (MCL(J2).NE.0) R(J2)=R(J2)+TA*SINA+VA*COSA
387 IF (MCL(J3).NE.0) R(J3)=R(J3)+MA
388 IF (MCL(K1).NE.0) R(K1)=R(K1)+TB*COSA-VB*SINA
389 IF (MCL(K2).NE.0) R(K2)=R(K2)+TB*SINA+VB*COSA
390 IF (MCL(K3).NE.0) R(K3)=R(K3)+MB
391
392 390 CONTINUE
393
394 C / MEMBER DISTRIBUTED LOADS /
395
396 400 READ(5,510) NMU
397
398 C NMU: NUMBER OF MEMBERS W/ UNIFORMLY DISTRIBUTED LOADS
399
400 IF (NMU.GT.0) GO TO 410 @ NO MEMBERS W/ DISTRIBUTED LOADS
401 WRITE(6,638)
402 GO TO 460
403
404 410 WRITE(6,640) @ HEADING
405 DO 450 INDEX=1,NMU
406 READ(5,510) M, NUL
407
408 C M: LOADED MEMBER NUMBER
409 C NUL: NUMBER OF DISTRIBUTED LOADS
410
411 IF (NUL.EQ.0) GO TO 450
412 WRITE(6,642) M
413 SPAN=12.0*SM(M)
414 COSA=CX(M)
415 SINA=CY(M)
416 TA=0.0
417 VA=0.0
418 MA=0.0
419 TB=0.0
420 VB=0.0
421 MB=0.0
422 DO 440 I=1,NUL
423 READ(5,512) K, FX, FY, MO
424
425 C K: LOAD ORIENTATION
426 C O: MEMBER AXES
427 C 1: STRUCTURE AXES
428 C FX: UNIFORMLY DISTRIBUTED X DIRECTION LOAD (KIPS/FT)

```

```

429 C FY: UNIFORMLY DISTRIBUTED Y DIRECTION LOAD (KIPS/FT)
430 C MO: UNIFORMLY DISTRIBUTED Z-AXIS MOMENT (K-FT/FOOT)
431
432 IF (K.NE.0) GO TO 420
433
434 C MEMBER AXES ORIENTATION
435 WRITE(6,644) FX, FY, MO
436 WX=FX
437 WY=FY
438 WM=MO
439 GO TO 430
440
441 C STRUCTURE AXES ORIENTATION
442 420 WRITE(6,646) FX, FY, MO
443 C ADJUST FOR MEMBER INCLINATION
444 FX=FX*ABS(SINA)
445 FY=FY*ABS(COSA)
446 MO=MO*ABS(COSA)
447 C TRANSFORM ORIENTATION TO MEMBER AXES
448 WX=FX*COSA+FY*SINA @ AXIAL COMPONENT
449 WY=-FX*SINA+FY*COSA @ TRANSVERSE COMPONENT
450 WM=MO
451
452 430 WX=1000.0*WX/12.0
453 WY=1000.0*WY/12.0
454 WM=1000.0*WM
455
456 C X(M) DIRECTION LOAD
457 TEMP=-WX*SPAN/2.0 @ CUMULATIVE 'A' END THRUST
458 TA=TA+TEMP @ CUMULATIVE 'B' END THRUST
459 TB=TB+TEMP
460
461 C Y(M) DIRECTION LOAD
462 TEMP=WY*SPAN/2.0 @ 'A' END MOMENT
463 BMA=-TEMP*SPAN/6.0 @ 'B' END MOMENT
464 BMB=-BMA @ CUMULATIVE 'A' END MOMENT
465 MA=MA+BMA @ CUMULATIVE 'B' END MOMENT
466 MB=MB+BMB @ CUMULATIVE 'A' END SHEAR
467 VA=VA+TEMP @ CUMULATIVE 'B' END SHEAR
468 VB=VB+TEMP
469
470 C Z-AXIS COUPLE @ CUMULATIVE 'A' END SHEAR
471 VA=VA+WM @ CUMULATIVE 'B' END SHEAR
472 440 VB=VB-WM
473
474 C ASSIGN END ACTIONS TO MEA(,) ARRAY AND W() AND R() VECTORS
475
476 MEA(M,1)=MEA(M,1)+TA
477 MEA(M,2)=MEA(M,2)+VA
478 MEA(M,3)=MEA(M,3)+MA
479 MEA(M,4)=MEA(M,4)+TB
480 MEA(M,5)=MEA(M,5)+VB
481 MEA(M,6)=MEA(M,6)+MB
482
483 J3=3*JM(M)
484 J2=J3-1
485 J1=J3-2
486 K3=3*KM(M)
487 K2=K3-1
488 K1=K3-2
489
490 W(J1)=W(J1)-TA*COSA+VA*SINA
491 W(J2)=W(J2)-TA*SINA-VA*COSA
492 W(J3)=W(J3)-MA
493 W(K1)=W(K1)-TB*COSA+VB*SINA
494 W(K2)=W(K2)-TB*SINA-VB*COSA
495 W(K3)=W(K3)-MB

```



```

496 IF (MCL(J1).NE.0) R(J1)=R(J1)+TA*COSA-VA*SINA
497 IF (MCL(J2).NE.0) R(J2)=R(J2)+TA*SINA+VA*COSA
498 IF (MCL(J3).NE.0) R(J3)=R(J3)+MA
499 IF (MCL(K1).NE.0) R(K1)=R(K1)+TB*COSA-VB*SINA
500 IF (MCL(K2).NE.0) R(K2)=R(K2)+TB*SINA+VB*COSA
501 IF (MCL(K3).NE.0) R(K3)=R(K3)+MB
502
503 450 CONTINUE
504
505 C / MEMBER WEIGHT LOADS /
506
507 460 READ(5,510) MWC
508
509 C MWC: MEMBER WEIGHT CODE
510 C 0: EXCLUDE MEMBER WEIGHTS IN ANALYSIS
511 C 1: INCLUDE MEMBER WEIGHTS IN ANALYSIS
512
513 IF (MWC.NE.0) GO TO 470
514 WRITE(6,648) @ MEMBER WEIGHTS NOT INCLUDED
515 GO TO 700
516
517 470 WRITE(6,650) @ MEMBER WEIGHTS ARE INCLUDED
518 DO 480 M=1,NM
519 SPAN=12.0*SM(M)
520 COSA=CX(M)
521 SINA=CY(M)
522 TEMP=0.00057870370*AM(M)*GM(M)
523 WX=-TEMP*SINA @ AXIAL COMPONENT
524 WY=-TEMP*COSA @ TRANSVERSE COMPONENT
525 TEMP=WY*SPAN/2.0
526 MA=-TEMP*SPAN/6.0 @ 'A' END MOMENT
527 MB=-MA @ 'B' END MOMENT
528 VA=-TEMP @ 'A' END SHEAR
529 VB=-TEMP @ 'B' END SHEAR
530 TA=-WX*SPAN/2.0 @ 'A' END THRUST
531 TB=TA @ 'B' END THRUST
532
533 C ASSIGN END ACTIONS TO MEA(,) ARRAY AND W() AND R() VECTORS
534
535 MEA(M,1)=MEA(M,1)+TA
536 MEA(M,2)=MEA(M,2)+VA
537 MEA(M,3)=MEA(M,3)+MA
538 MEA(M,4)=MEA(M,4)+TB
539 MEA(M,5)=MEA(M,5)+VB
540 MEA(M,6)=MEA(M,6)+MB
541
542 J3=3*JM(M)
543 J2=J3-1
544 J1=J3-2
545 K3=3*KM(M)
546 K2=K3-1
547 K1=K3-2
548
549 W(J1)=W(J1)-TA*COSA+VA*SINA
550 W(J2)=W(J2)-TA*SINA+VA*COSA
551 W(J3)=W(J3)-MA
552 W(K1)=W(K1)-TB*COSA+VB*SINA
553 W(K2)=W(K2)-TB*SINA+VB*COSA
554 W(K3)=W(K3)-MB
555
556 IF (MCL(J2).NE.0) R(J2)=R(J2)+TA*SINA+VA*COSA
557 IF (MCL(J3).NE.0) R(J3)=R(J3)+MA
558 IF (MCL(K1).NE.0) R(K1)=R(K1)+TB*COSA-VB*SINA
559 IF (MCL(K2).NE.0) R(K2)=R(K2)+TB*SINA+VB*COSA
560 IF (MCL(K3).NE.0) R(K3)=R(K3)+MB
561
562 480 CONTINUE

```

```

563
564 C CONDENSE LOAD VECTOR
565 700 I=0
566 M=0
567 DO 720 K=1,NLA
568 IF (MCL(K).NE.0) GO TO 710
569 I=I+1
570 W(I)=W(K)
571 GO TO 720
572 710 M=M+1
573 RAL(M)=K
574 720 CONTINUE
575
576 C * * * * *
577 C * SOLVE EQUATIONS FOR UNKNOWN DEFLECTIONS *
578 C * * * * *
579
580 CALL SOLVE(NDF,S,W,D)
581
582 C EXPAND DEFLECTION VECTOR TO INCLUDE KNOWN DEFLECTIONS
583 I=NLA
584 J=NDF+1
585 730 IF (MCL(I).NE.0) GO TO 740
586 J=J-1
587 D(I)=0.000001*D(J)
588 GO TO 750
589 740 D(I)=0.0
590 750 I=I-1
591 IF (I.GT.0) GO TO 730
592
593 C OUTPUT DEFLECTIONS
594 WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
595 WRITE(6,652) LP, NLP @ HEADING
596 WRITE(6,654) (J, D(3*J-2), D(3*J-1), D(3*J), J=1,NJ)
597
598 C * * * * *
599 C * CALCULATE AND OUTPUT MEMBER END ACTIONS *
600 C * * * * *
601
602 WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
603 WRITE(6,656) LP, NLP @ HEADING
604 DO 800 I=1,NM
605
606 SPAN=12.0*SM(I)
607 COSA=CX(I)
608 SINA=CY(I)
609
610 J3=3*JM(I)
611 J2=J3-1
612 J1=J3-2
613 K3=3*KM(I)
614 K2=K3-1
615 K1=K3-2
616
617 D1= D(J1)*COSA+D(J2)*SINA
618 D2=-D(J1)*SINA+D(J2)*COSA
619 D3= D(J3)
620 D4= D(K1)*COSA+D(K2)*SINA
621 D5=-D(K1)*SINA+D(K2)*COSA
622
623 E=1000000.0*EM(I)
624 S36=2.0*E*ZM(I)/SPAN
625 S33=2.0*S36
626 S23=3.0*S36/SPAN
627 S22=6.0*S36/SPAN**2
628 S11= E*AM(I)/SPAN
629

```



```

630      TA=MEA(I,1)+S11*(D1-D4)
631      VA=MEA(I,2)+S22*(D2-D5)+S23*(D3+D6)
632      MA=MEA(I,3)+S23*(D2-D5)+S33*D3+S36*D6
633      TB=MEA(I,4)-S11*(D1-D4)
634      VB=MEA(I,5)-S22*(D2-D5)-S23*(D3+D6)
635      MB=MEA(I,6)+S23*(D2-D5)+S36*D3+S33*D6
636
637      TA=TA/(1000.0)
638      VA=VA/(1000.0)
639      MA=MA/(12000.0)
640      TB=TB/(1000.0)
641      VB=VB/(1000.0)
642      MB=MB/(12000.0)
643
644      800 WRITE(6,658) I, TA, VA, MA, TB, VB, MB
645
646      C *****
647      C * CALCULATE REACTIVE FORCES *
648      C *****
649
650      DO 910 I=1,NRL
651      SUM=0.0
652      DO 900 J=1,NLA
653      900 SUM=SUM+Q(I,J)*D(J)
654      K=RAL(I)
655      910 R(K)=R(K)/1000.0+1000.0*SUM
656
657      C OUTPUT REACTIVE FORCES
658      WRITE(6,600) ((PID(I,J), J=1,12), I=1,3) @ PROBLEM IDENTIFICATION
659      WRITE(6,660) LP, NLP @ HEADING
660      DO 920 J=1,NJ
661      J3=3*J
662      J2=J3-1
663      J1=J3-2
664      K=MCL(J1)+MCL(J2)+MCL(J3)
665      IF (K.EQ.0) GO TO 920
666      WRITE(6,662) J
667      IF (MCL(J1).NE.0) WRITE(6,664) R(J1)
668      IF (MCL(J2).NE.0) WRITE(6,666) R(J2)
669      IF (MCL(J3).EQ.0) GO TO 920
670      R(J3)=R(J3)/12.0
671      WRITE(6,668) R(J3)
672      920 CONTINUE
673
674      998 CONTINUE @ END OF SOLUTION LOOP
675
676      C *****
677      C * END SOLUTION PHASE *
678      C *****
679
680      GO TO 100
681
682      999 STOP
683
684      C FORMAT SPECIFICATIONS
685
686      C INPUT FORMATS
687      500 FORMAT(12A6)
688      502 FORMAT(I6.2F10.3)
689      504 FORMAT(12A6)
690      506 FORMAT(3I6,4F10.3)
691      508 FORMAT(I6,3F10.3)
692      510 FORMAT(2I6)
693      512 FORMAT(I6,4F10.3)
694
695      C OUTPUT FORMATS
696      600 FORMAT(1H1,47X,'STEEL BUILDINGS: ANALYSIS AND DESIGN')

```

```

697      1H,58X,'CRAWLEY & DILLON'//
698      1H,44X,'PLANE FRAME ANALYSIS BY DISPLACEMENT METHOD'//
699      1H,61X,'W O CARTER'//
700      1H0,29X,12A6/1H,29X,12A6/1H,29X,12A6//
701      602 FORMAT(1H0,54X,'*****')
702      1H,54X,'* JOINT DATA *'//
703      1H,54X,'*****'//
704      1H0,47X,'JOINT',5X,'COORDINATES',7X,'RESTRAINT'//
705      1H,58X,'X',7X,'Y',8X,'CONDITION'//
706      1H,56X,'(FEET)',2X,'(FEET)',6X,'X Y R'//
707      604 FORMAT(1H,47X,I3,4X,2F8.3)
708      606 FORMAT(1H+,76X,'R')
709      608 FORMAT(1H+,79X,'R')
710      610 FORMAT(1H+,82X,'R')
711      612 FORMAT(1H0,53X,'*****')
712      1H,53X,'* MEMBER DATA *'//
713      1H,53X,'*****'//
714      1H0,28X,'MEMBER',4X,'END JOINTS',6X,'LENGTH',5X,
715      'CROSS-SECTION PROPERTIES',4X,'MODULUS OF'//
716      1H,68X,'AREA',9X,'I(ZZ)',7X,'ELASTICITY'//
717      1H,40X,'A B',8X,'(FEET)',6X,'(INS**2)',6X,'(INS**4)',5X,
718      '(KSI/1000)'//
719      614 FORMAT(1H,29X,I3,4X,2I5,4X,F10.3,3X,F10.2,4X,F10.3)
720      616 FORMAT(1H0/
721      1H0,47X,'TOTAL WEIGHT OF FRAME:',F8.3,1X,'TONS')
722      618 FORMAT(1H0,45X,'LOADING PATTERN',I3,1X,'OF',I3,1X,
723      'LOADING PATTERNS'//)
724      620 FORMAT(1H0,52X,'NO LOADED JOINTS IN PATTERN')
725      622 FORMAT(1H0,51X,'*****')
726      1H,51X,'* JOINT LOADING *'//
727      1H,51X,'*****'//
728      1H0,44X,'JOINT',15X,'LOADING'//
729      1H,56X,'F(X)',8X,'F(Y)',7X,'COUPLE'//
730      1H,55X,'(KIPS)',6X,'(KIPS)',4X,'(KIP-Feet)'//
731      624 FORMAT(1H,44X,I3,2X,3F12.3)
732      626 FORMAT(///
733      1H0,51X,'*****')
734      1H,51X,'* MEMBER LOADING *'//
735      1H,51X,'*****'//
736      628 FORMAT(1H0,43X,'NO MEMBERS WITH CONCENTRATED LOADS IN PATTERN')
737      630 FORMAT(1H0,26X,'MEMBER',20X,'CONCENTRATED',2X,
738      'LOADING'//
739      1H,35X,'LOCATION OF LOAD',3X,'ORIENTATION',4X,
740      'F(X)',10X,'F(Y)',10X,'M(O)'//
741      1H,34X,'(FRACTION OF SPAN)',5X,'(AXES)',5X,
742      '(KIPS)',8X,'(KIPS)',6X,'(KIP-Feet)'//
743      632 FORMAT(1H0,26X,I4)
744      634 FORMAT(1H+,31X,F14.3,14X,'M',3F14.3//)
745      636 FORMAT(1H+,31X,F14.3,14X,'S',3F14.3//)
746      638 FORMAT(1H0/
747      1H0,43X,'NO MEMBERS WITH DISTRIBUTED LOADS IN PATTERN')
748      640 FORMAT(1H0/
749      1H0,33X,'MEMBER',5X,'UNIFORMLY',2X,
750      'DISTRIBUTED LOADING'//
751      1H,46X,'ORIENTATION',4X,'W(X)',10X,'W(Y)',10X,'M(O)'//
752      1H,49X,'(AXES)',3X,'(KIPS/FOOT)',3X,'(KIPS/FOOT)',3X,
753      '(K-FT/FOOT)'//
754      642 FORMAT(1H0,33X,I4)
755      644 FORMAT(1H+,51X,'M',3F14.3//)
756      646 FORMAT(1H+,51X,'S',3F14.3//)
757      648 FORMAT(1H0/
758      1H0,44X,'*****')
759      1H,44X,'* MEMBER WEIGHTS NOT INCLUDED IN ANALYSIS *'//
760      1H,44X,'*****'//
761      650 FORMAT(1H0/
762      1H0,44X,'*****')
763      1H,44X,'* MEMBER WEIGHTS ARE INCLUDED IN ANALYSIS *'//

```



## 660 / PROGRAMA DE MARCO PLANO

```

764      1      1H ,44X,'* * * * *')
765      652 FORMAT(1H,45X,'LOADING PATTERN',I3,1X,'OF',I3,1X,
766      1      'LOADING PATTERNS'///
767      1      1H,47X,'* * * * *')
768      1      1H ,47X,'* J O I N T   D E F L E C T I O N S *'//
769      1      1H ,47X,'* * * * *')
770      1      1H,45X,'JOINT',8X,'D E F L E C T I O N S'//
771      1      1H ,55X,'D(X)',8X,'D(Y)',6X,'ROTATION'//
772      1      1H ,53X,'(INCHES)',4X,'(INCHES)',5X,'(RADS)'///
773      654 FORMAT(1H ,45X,I3,2F12.4,F12.5)
774      656 FORMAT(1H,45X,'LOADING PATTERN',I3,1X,'OF',I3,1X,
775      1      'LOADING PATTERNS'///
776      1      1H,47X,'* * * * *')
777      1      1H ,47X,'* M E M B E R   E N D   A C T I O N S *'//
778      1      1H ,47X,'* * * * *')
779      1      1H,27X,'MEMBER',7X,'T(A)',8X,'V(A)',8X,'M(A)',8X,
780      1      'T(B)',8X,'V(B)',8X,'M(B)'//
781      1      1H ,39X,'(KIPS)',6X,'(KIPS)',6X,'(K-FT)',6X,
782      1      '(KIPS)',6X,'(KIPS)',6X,'(K-FT)'///
783      658 FORMAT(1H ,27X,I4,2X,6F12.3)
784      660 FORMAT(1H,45X,'LOADING PATTERN',I3,1X,'OF',I3,1X,
785      1      'LOADING PATTERNS'///
786      1      1H,50X,'* * * * *')
787      1      1H ,50X,'* R E A C T I V E   F O R C E S *'//
788      1      1H ,50X,'* * * * *')
789      1      1H,44X,'JOINT',11X,'R E A C T I O N S'//
790      1      1H ,54X,'R(X)',8X,'R(Y)',8X,'COUPLE'//
791      1      1H ,53X,'(KIPS)',6X,'(KIPS)',5X,'(KIP-FEET)'///
792      662 FORMAT(1H ,44X,I3)
793      664 FORMAT(1H+,47X,F12.3)
794      666 FORMAT(1H+,59X,F12.3)
795      668 FORMAT(1H+,71X,F13.3)
796      END

```

Tabla E1 Datos de descripción del marco.

Secuencia	Tipo de datos	Localización en tarjeta	Comentarios
1	Identificación del problema	Cualquier lugar en las cols. 1-72 inclusive	Total de tres tarjetas. Centrarse en las cols. 1-72
2	Número de juntas (o nodos)	Cargada a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta.
3	Número de junta coordenada x	Cargada a la derecha en col. 6	Una tarjeta por junta. El número total de tarjetas es igual al número de juntas. Dimensiones en pies con 3 decimales.
	Coordenada y	Posicionado sobre punto decimal en col. 13	
4	Número de juntas apoyadas externamente	Posicionado sobre punto decimal en col. 23	
5	Número de juntas apoyadas	Cargada a la derecha en col. 6	Una tarjeta por junta apoyada.
	¿Restricción horizontal?	Col. 12	Código 1 significa sí.
	¿Restricción vertical?	Col. 18	Código 0 significa no.
	momento?		
6	Número de miembros código de impresión de matriz	Cargada a la derecha en col. 6 Col. 12	Una sola tarjeta. Código 1 significa imprimir matriz. Código 0 significa no imprimir.

Tabla E1 (continuación)

Secuencia	Tipo de datos	Localización en tarjeta	Comentarios
7	Número de miembro	Cargada a la derecha en col. 6	Una tarjeta por miembro. El número total de tarjetas es igual al número de miembros.
	Número de junta en el extremo de "inicio" del miembro	Cargada a la derecha en col. 12	
	Número de junta en el extremo de "terminación" del miembro	Cargada a la derecha en col. 18	Área en pulgadas cuadradas.
	Área transversal	Posicionado sobre punto decimal en col. 25	I en pulg <sup>4</sup> .
	Momento de inercia	Posicionado sobre punto decimal en col. 35	E en 1000 k/pulg <sup>2</sup>
	Módulo de elasticidad	Posicionado sobre punto decimal en col. 45	Peso en libras por pie cúbico.
	Peso del miembro	Posicionado sobre punto decimal en col. 55	Todos con tres decimales.

## E.3 LAS SUBROUTINAS

Se necesitan tres subrutinas para correr el programa. Estas son DECOMP, SOLVE y MATPRT y se describen y listan en la sección C.15, Apéndice C. Estas subrutinas se deben incluir en el lote de tarjetas como se ve en la figura D.1.

## E.4 DATOS DE ENTRADA

Cada marco debe tener un conjunto completo de datos consistente en un conjunto de datos que describan el marco y su geometría y un conjunto de datos para cada patrón de carga que se va a analizar. Cualquier número de estos conjuntos completos de datos se puede usar consecutivamente para formar en conjunto entero de datos que se correrán con el programa.

El primer conjunto de datos debe contener la identificación, geometría y propiedades físicas del marco que se va a analizar (tabla E1). El segundo a las cargas sobre el marco (tabla E2). Cada patrón de

cargas requiere un conjunto de datos separado. Por ejemplo, un marco dado se puede analizar por tres patrones: un patrón de cargas muertas, uno de cargas viva y muerta, y un patrón de carga muerta y de viento.

El programa principal está preparado de tal manera que leerá los datos solamente si éstos están en la secuencia especificada y situados en una localización específica en las tarjetas. Esta información está contenida en las tablas E1 y E2.

## Ejemplo

Usar el programa PLFRAME para analizar el marco a dos aguas ilustrado en la figura E1. Hacer dos soluciones separadas, una para las cargas concentradas y uno para las cargas distribuidas. Este marco con sus cargas concentradas es el mismo que se resolvió usando distribución de momentos en la sección 10.14. La carga vertical distribuida comprende la carga muerta, mientras que la carga distribuida inclinada (normal a la trabe) representa



Tabla E2 Datos de carga del marco.

Secuencia	Tipo de datos	Localización en tarjeta	Comentarios
1	Número de patrones de carga por analizar	Cargado a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta por marco por analizar. Las tarjetas en la secuencia 2 a 10 se van a repetir para cada patrón de carga.
2	Número de juntas con cargas concentradas en este patrón de carga	Cargado a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta. Se debe usar cero si no hay juntas cargadas.
3	Número de la junta en que se aplica la carga	Cargado a la derecha en col. 6	Una tarjeta por cada junta cargada.
	Carga en la dirección x	Posicionado sobre punto decimal en col. 13	El número total de tarjetas es igual al número de juntas cargadas.
	Carga en la dirección y	Posicionado sobre punto decimal en col. 23	Carga concentrada en kips, momento en kips-pies, cada uno con tres decimales.
	Carga de momento en el eje z	Posicionado sobre punto decimal en col. 33	
4	Número del miembro con cargas concentradas en este patrón de carga.	Cargado a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta. Se debe usar cero si no hay miembros con cargas concentradas.
5	Número del miembro con cargas concentradas	Cargado a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta en este paso. Repetir para cada miembro cargado una vez descritas las cargas en el paso 6.
	Número de puntos con cargas	Cargado a la derecha en col. 12	
6	Código de orientación de carga	Col. 6	Código 0 significa eje de miembro.
	Localización del punto cargado	Posicionado sobre punto decimal en col. 13	Código 1 significa eje de estructura.
	Carga en la dirección x	Posicionado sobre punto decimal en col. 23	Localización en fracción de claro.
	Carga en la dirección y	Posicionado sobre punto decimal en col. 33	El número total de tarjetas es igual al número de puntos con cargas concentradas.
	Carga de momento en el eje z	Posicionado sobre punto decimal en col. 43	Cargas concentradas en kips, momentos en kips-pies, cada uno con tres decimales.
7	Número de miembros con cargas distribuidas en este patrón de carga	Cargado a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta. Se debe usar 0 si no hay miembros con cargas distribuidas.

Tabla E2 (continúa).

Secuencia	Tipo de datos	Localización en tarjetas	Comentarios
8	Número de miembros con cargas distribuidas	Cargado a la derecha en col. 6	Una sola tarjeta en este paso. Repetir cada miembro cargado una vez descritas las cargas en el paso 9.
	Número de cargas distribuidas	Cargado a la derecha en col. 12	Código 0 significa eje de miembro.
9	Código de orientación de cargas	Col. 6	Código 1 significa eje de estructura.
	Carga uniforme en la dirección x	Posicionado sobre punto decimal en col. 13	
	Carga uniforme en la dirección y	Posicionado sobre punto decimal en col. 23	El número total de tarjetas es igual al número de cargas distribuidas.
	Momento uniforme sobre el eje z	Posicionado sobre punto decimal en col. 33	Carga uniforme en kips por pie. Momento uniforme en kips-pies por pie.
10	¿Se debe incluir el peso del miembro en el análisis?	Col. 6	Código 0 significa no. Código 1 significa sí.

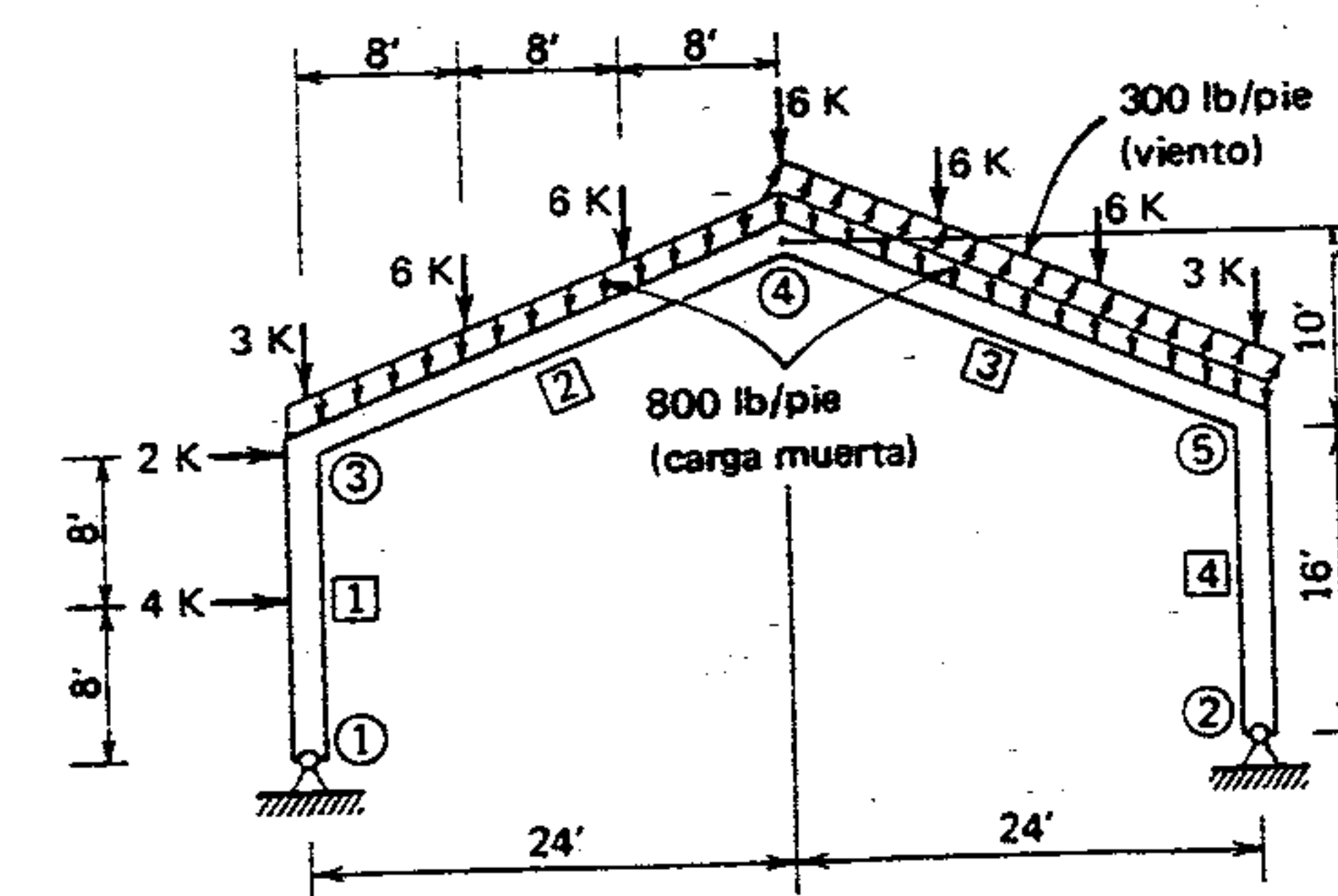


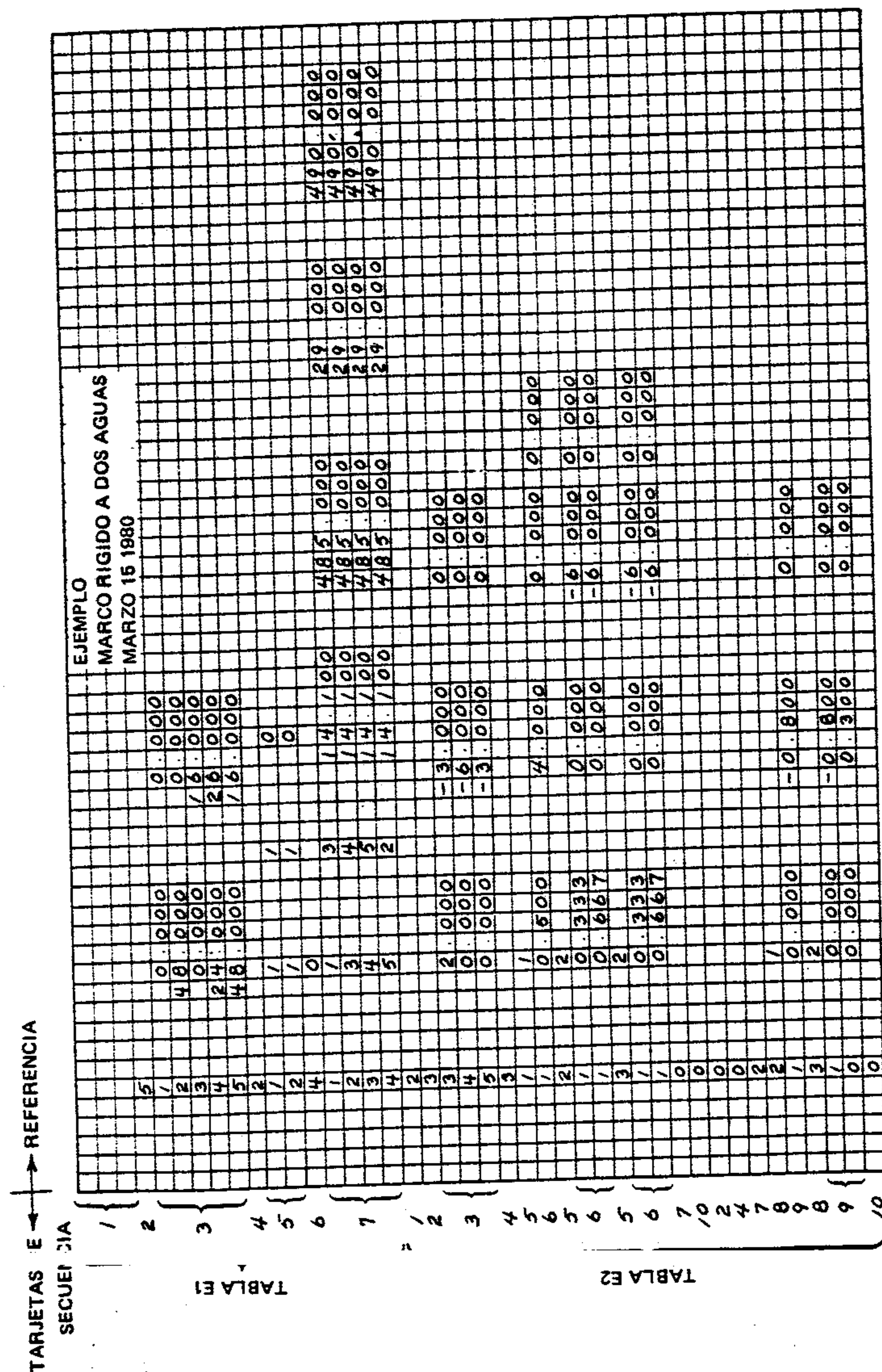
Figura E1 Ejemplo: marco a dos aguas.

succión hacia arriba a causa del viento. Suponer que tanto las columnas como las vigas son de tamaño (W 14 X 48). No incluir el peso de los miembros en la solución. Los números dentro de los círculos representan juntas, y dentro de los cuadrados representan miembros.

**Solución**

- Los datos dentro de la cuadrícula de la figura E2 están perforados en tarjetas. Para ayudar a comprender la localización de los datos que se van a perforar en las tarjetas, cada línea





horizontal de la cuadrícula tiene como referencia un número de la secuencia, que está correlacionado con los números de las tablas E1 y E2.

2. El programa PLFRAME y las subrutinas están perforados en tarjetas, y el lote está ensamblado como se ilustra en la figura D1 e ingresado subsecuentemente en la computadora con la siguiente salida impresa.

STEEL BUILDINGS: ANALYSIS AND DESIGN  
CRAWLEY & DILLON

PLANE FRAME ANALYSIS BY DISPLACEMENT METHOD  
W O CARTER

EXAMPLE  
RIGID GABLE FRAME  
MARCH 15 1980

\*\*\*\*\*  
\* JOINT DATA \*  
\*\*\*\*\*

JOINT	COORDINATES		RESTRAINT		
	X (FEET)	Y (FEET)	X	Y	R
1	.000	.000	R	R	
2	48.000	.000	R	R	
3	.000	16.000			
4	24.000	26.000			
5	48.000	16.000			

\*\*\*\*\*  
\* MEMBER DATA \*  
\*\*\*\*\*

MEMBER	END JOINTS		LENGTH (FEET)	CROSS-SECTION PROPERTIES		MODULUS OF ELASTICITY (KSI/1000)
	A	B		AREA (INS**2)	I(ZZ) (INS**4)	
1	1	3	16.000	14.100	485.00	29.000
2	3	4	26.000	14.100	485.00	29.000
3	4	5	26.000	14.100	485.00	29.000
4	5	2	16.000	14.100	485.00	29.000

TOTAL WEIGHT OF FRAME: 2.015 TONS



## LOADING PATTERN 1 OF 2 LOADING PATTERNS

\*\*\*\*\*  
 \* JOINT LOADING \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	F(X) (KIPS)	LOADING F(Y) (KIPS)	COUPLE (KIP-Feet)
3	2.000	-3.000	.000
4	.000	-6.000	.000
5	.000	-3.000	.000

\*\*\*\*\*  
 \* MEMBER LOADING \*  
 \*\*\*\*\*

MEMBER	LOCATION OF LOAD (FRACTION OF SPAN)	ORIENTATION (AXES)	F(X) (KIPS)	F(Y) (KIPS)	M(O) (KIP-Feet)
1	.500	S	4.000	.000	.000
2	.333 .667	S S	.000 .000	-6.000 -6.000	.000 .000
3	.333 .667	S S	.000 .000	-6.000 -6.000	.000 .000

NO MEMBERS WITH DISTRIBUTED LOADS IN PATTERN

\*\*\*\*\*  
 \* MEMBER WEIGHTS NOT INCLUDED IN ANALYSIS \*  
 \*\*\*\*\*

## LOADING PATTERN 1 OF 2 LOADING PATTERNS

\*\*\*\*\*  
 \* JOINT DEFLECTIONS \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	DEFLECTIONS D(X) (INCHES)	D(Y) (INCHES)	ROTATION (RADS)
1	.0000	.0000	-.00136
2	.0000	.0000	-.01088
3	.4532	-.0078	-.00502
4	.9447	-1.2076	.00142
5	1.4349	-.0091	-.00066

\*\*\*\*\*  
 \* MEMBER END ACTIONS \*  
 \*\*\*\*\*

MEMBER	T(A) (KIPS)	V(A) (KIPS)	M(A) (K-FT)	T(B) (KIPS)	V(B) (KIPS)	M(B) (K-FT)
1	16.667	-1.799	.000	-16.667	5.799	-60.789
2	12.456	9.616	60.789	-7.840	1.461	45.219
3	8.866	-1.000	-45.219	-13.481	12.077	-124.788
4	19.333	7.799	124.788	-19.333	-7.799	.000

\*\*\*\*\*  
 \* REACTIVE FORCES \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	REACTIONS R(X) (KIPS)	R(Y) (KIPS)	COUPLE (KIP-Feet)
1	1.799	16.667	
2	-7.799	19.333	



## LOADING PATTERN 2 OF 2 LOADING PATTERNS

NO LOADED JOINTS IN PATTERN

\*\*\*\*\*  
 \* MEMBER LOADING \*  
 \*\*\*\*\*

NO MEMBERS WITH CONCENTRATED LOADS IN PATTERN

## MEMBER UNIFORMLY DISTRIBUTED LOADING

	ORIENTATION (AXES)	W(X) (KIPS/FOOT)	W(Y) (KIPS/FOOT)	M(O) (K-FT/FOOT)
2	S	.000	-.800	.000
3	S	.000	-.800	.000
	M	.000	.300	.000

\*\*\*\*\*  
 \* MEMBER WEIGHTS NOT INCLUDED IN ANALYSIS \*  
 \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*  
 \* JOINT DEFLECTIONS \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	DEFLECTIONS		
	D(X) (INCHES)	D(Y) (INCHES)	ROTATION (RADS)
1	.0000	.0000	-.00014
2	.0000	.0000	-.01030
3	.3746	-.0076	-.00557
4	.8774	-1.2267	.00219
5	1.3783	-.0071	-.00093

## LOADING PATTERN 2 OF 2 LOADING PATTERNS

\*\*\*\*\*  
 \* MEMBER END ACTIONS \*  
 \*\*\*\*\*

MEMBER	T(A) (KIPS)	V(A) (KIPS)	M(A) (K-FT)	T(B) (KIPS)	V(B) (KIPS)	M(B) (K-FT)
1	16.088	-4.147	.000	-16.088	4.147	-66.352
2	10.015	13.255	66.352	-2.631	4.468	47.880
3	5.025	-1.278	-47.880	-12.410	11.201	-114.350
4	15.112	7.147	114.350	-15.112	-7.147	.000

\*\*\*\*\*  
 \* REACTIVE FORCES \*  
 \*\*\*\*\*

JOINT	REACTIONS		
	R(X) (KIPS)	R(Y) (KIPS)	COUPLE (KIP-Feet)
2	4.147	16.088	
	-7.147	15.112	



## **APÉNDICE F**

### **Tablas de cargas en vigas de acero**

*Extractado de las Tablas de Cargas y Tablas de Pesos de Especificaciones Estándar del Steel Joist Institute.  
adaptadas por SJI y AISC, octubre 1, 1974. Todos los valores listados son cargas permisibles en libras  
por pie lineal. (Véase la sección 5.18).  
Reimpreso con permiso del Steel Joist Institute.*



Tabla de cargas estándar. Vigas de acero de alma abierta, Serie H" (Las cargas sobre las líneas gruesas están determinadas por el cortante).

*Para peraltes de vigas de 8" a 12" inclusive*

Designación de viga	8H3	10H3	10H4	12H3	12H4	12H5	12H6
* Peralte nominal (pulg.)	8	10	10	12	12	12	12
Momento resistente (pulg.-lb)	91,000	116,000	148,000	140,000	180,000	222,000	260,000
Reacción máxima de extremo (lb)	2400	2500	2800	2800	3200	3600	3900
Peso aproximado (lb/pie)	5.0	5.0	6.1	5.2	6.2	7.1	8.2
Claro en pies 8 o menos	600	500	560	467	533	600	650
9	533	500	560	467	533	600	650
10	480	500	560	467	533	600	650
11	436	455	509	467	533	600	650
12	400	417	467	467	533	600	650
13	359	385	431	431	492	554	600
14	310	357	400	400	457	514	557
15	270	333	373	373	427	480	520
16	232	302	350	350	400	450	488
17	192	268	329	323	376	424	459
18	151	239	305	288	356	400	433
19	112	181	223	264	345	404	480
20	92	157	185	242	284	337	433
21		127	157	185	242	284	337
22		108	133	157	206	241	286
23		193	247	233	300	360	390
24		92	114	135	177	207	246
25				212	272	336	371
26				117	152	179	212
27				193	248	306	355
28				101	133	155	185
29				176	227	280	328
30				89	116	136	162
31				162	208	257	301
				78	102	120	142

El Steel Joist Institute publica tanto Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usarse conjuntamente.

*Para peraltes de vigas de 14" a 16" inclusive*

14H3	14H4	14H5	14H6	14H7	16H4	16H5	16H6	16H7	16H8
14	14	14	14	14	16	16	16	16	16
165,000	212,000	259,000	307,000	369,000	221,000	289,000	344,000	413,000	478,000
3200	3500	3800	4200	4600	3800	4300	4600	4900	5200
5.5	6.5	7.4	8.6	10.0	6.6	7.8	8.6	10.3	11.4
457	500	543	600	657	475	538	575	613	650
457	500	543	600	657	475	538	575	613	650
457	500	543	600	657	475	538	575	613	650
457	500	543	600	657	475	538	575	613	650
457	500	543	600	657	475	538	575	613	650
457	500	543	600	657	475	538	575	613	650
457	500	543	600	657	475	538	575	613	650
457	500	543	600	657	475	538	575	613	650
427	467	507	560	613	475	538	575	613	650
400	438	475	525	575	475	538	575	613	650
376	412	447	494	541	447	506	541	576	612
305	398								
340	389	422	467	511	422	478	511	544	578
257	336	393			413				
305	368	400	442	484	400	453	484	516	547
218	285	334	399	470	351	432			
275	350	380	420	460	368	430	460	490	520
187	245	287	342	403	301	370	437		
249	320	362	400	438	334	410	438	467	495
162	212	248	295	348	260	320	377	454	
227	292	345	382	418	304	391	418	445	473
141	184	215	257	302	226	278	328	395	454
208	267	326	365	400	279	364	400	426	452
123	161	189	225	265	198	243	287	346	398
191	245	300	350	383	256	334	383	408	433
108	142	166	198	233	174	214	253	304	350
176	226	276	327	368	236	308	367	392	416
96	125	147	175	206	154	190	224	269	310
163	209	255	303	354	218	285	339	377	400
85	111	131	156	183	137	169	199	239	275
151	194	237	281	337	202	264	315	363	385
76	99	117	139	164	122	151	177	214	246
140	180	220	261	314	188	246	293	350	371
68	89	134	125	147	110	135	159	192	220
					175	229	273	327	359
					99	121	143	172	198
					164	214	255	306	347
					89	110	129	156	179
					153	200	239	287	332
					81	99	117	141	162
					144	188	224	269	311
					74	90	107	128	148



**Para peraltes de vigas de 20" a 22" inclusive**

20H7	20H8	20H9	20H10	20H11	22H6	22H7	22H8	22H9	22H10	22H11
20	20	20	20	20	22	22	22	22	22	22
499,000	602,000	701,000	789,000	912,000	422,000	526,000	653,000	776,000	873,000	1,009,000
5400	5600	6400	7000	7900	5400	5600	5800	6700	7200	8100
10.7	12.2	13.2	14.6	16.4	9.7	10.7	12.0	13.8	15.2	16.9
540	560	640	636	632	491	509	527	609	626	648
540	560	640	636	632	491	509	527	609	626	648
540	560	640	636	632	491	509	527	609	626	648
514	533	610	636	632	491	509	527	609	626	648
491	509	582	636	632	491	509	527	609	626	648
470	487	557	609	632	470	487	504	583	626	648
450	467	533	583	632	450 446	467	483	558	600	648
432	448	512	560	632	432 395	448	464	536	576	648
411	431	492	538	608	415 351	431	446	515	554	623
365	415	474	519	585	386 313	415	430	496	533	600
400	392	425	480	545	380	400	414	479	514	579
386	400	457	500	564	359	400	414	479	514	579
292	352	381	431	488	281	341	414	468	514	579
372	386	441	483	545	335	386	400	462	497	559
263	317	343	388	440	253	307	379	421	473	539
360	373	427	467	527	313	373	387	447	480	540
238	286	310	350	397	228	277	343	381	428	487
346	361	413	452	510	293	361	374	432	465	523
215	259	281	317	360	207	251	311	345	387	441
325	350	400	438	494	275	342	363	419	450	506
196	236	255	288	327	188	228	282	314	352	401
305	339	388	424	479	258	322	352	406	436	491
178	215	233	263	298	172	208	257	286	321	366
288	329	376	412	465	243	303	341	394	424	476
163	196	213	240	273	157	190	235	261	294	335
272	320	366	400	451	230	286	331	383	411	463
150	180	195	220	250	144	175	216	240	269	307
257	310	356	389	439	217	271	322	372	400	450
137	166	179	203	230	132	160	198	220	247	282
243	293	341	378	427	206	256	314	362	389	438
127	152	165	187	212	122	148	183	203	228	260
230	278	324	364	416	195	243	301	353	379	426
117	141	153	172	195	112	136	169	187	210	240
219	264	307	346	400	185	231	286	340	369	415
108	130	141	159	181	104	126	156	173	195	222
208	251	292	329	380	176	219	272	323	360	405
100	121	131	148	168	96	117	145	161	180	205
					167	209	259	308	346	395
					89	109	134	149	167	191
					159	199	247	293	330	381
					83	101	125	139	156	177
					152	190	235	280	315	364
					78	94	116	129	145	165
					145	181	225	267	301	347
					74	88	109	121	133	155

El Steel Joist Institute publica tanto Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usarse conjuntamente.



Para peraltes de vigas de 24" a 26" inclusive

Designación de viga	24H6	24H7	24H8	24H9	24H10	24H11	26H8	26H9
*Peralte nominal (pulg.)	24	24	24	24	24	24	26	26
Momento resistente (pulg.-lb)	462,000	576,000	718,000	851,000	957,000	1,106,000	784,000	925,000
Reacción máxima de extremo (lb)	5600	5800	6000	7000	7500	8200	6700	7200
†Peso aproximado (lb/pie)	10.3	11.5	12.7	14.0	15.5	17.5	12.8	14.8
Claro en pies								
24 o menos	467	483	500	583	625	631	515	554
25	448	464	480	560	600	631	515	554
26	431	446	462	538	577	631	515	554
27	415	430	444	519	556	607	496	533
	375							
28	393	414	429	500	536	586	479	514
	336	406						
29	366	400	414	483	517	566	462	497
	303	365						
30	342	387	400	467	500	547	447	480
	273	330		457				
31	320	374	387	452	484	529	432	465
	248	299	373	414	465		418	
32	301	363	375	438	469	513	419	450
	225	272	339	376	423	482	380	445
33	283	352	364	424	455	497	406	436
	205	248	309	343	386	440	346	405
34	266	332	353	412	441	482	394	424
	188	227	283	314	353	402	317	371
35	251	313	343	400	429	469	383	411
	172	208	259	288	323	369	290	340
36	238	296	333	389	417	456	372	400
	158	191	238	264	297	339	267	312
37	225	280	324	378	405	443	362	389
	146	176	219	243	274	312	246	288
38	213	266	316	368	395	432	353	379
	135	162	202	225	253	288	227	266
39	202	252	308	359	385	421	344	369
	124	150	187	208	234	266	210	246
40	193	240	298	350	375	410	327	360
	115	139	174	193	217	247	194	228
41	183	228	284	337	366	400	311	351
	107	129	161	179	201	229	181	211
42	175	218	271	322	357	390	296	343
	100	120	150	166	187	213	168	197
43	167	208	258	307	345	381	283	334
	93	112	140	155	174	199	156	183
44	159	198	247	293	330	373	270	319
	87	105	130	145	163	186	146	171
45	152	190	236	280	315	364	258	305
	81	98	122	135	152	173	137	160
46	146	181	226	268	302	348	247	291
	76	92	114	127	142	162	128	150
47	139	174	216	257	289	334	237	279
	71	86	107	119	133	152	120	140
48	134	167	207	246	277	320	227	268
	67	81	100	111	125	143	112	132

El Steel Joist Institute publica estas Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usarse conjuntamente.

Para peraltes de vigas de 26" a 30" inclusive

26H10	26H11	28H8	28H9	28H10	28H11	30H8	30H9	30H10	30H11
26	26	28	28	28	28	30	30	30	30
1,040,000	1,203,000	846,000	1,000,000	1,124,000	1,300,000	909,000	1,075,000	1,207,000	1,397,000
7600	8300	6700	7200	7700	8400	6800	7500	8100	8700
16.2	17.9	13.5	15.2	16.8	18.3	14.2	15.4	17.3	18.8
585	638	479	514	550	600	453	500	540	580
585	638	479	514	550	600	453	500	540	580
585	638	479	514	550	600	453	500	540	580
563	615	479	514	550	600	453	500	540	580
543	593	479	514	550	600	453	500	540	580
524	572	462	497	531	579	453	500	540	580
507	553	447	480	513	560	453	500	540	580
490	535	432	465	497	542	439	484	523	561
475	519	419	450	481	525	425	469	506	544
461	503	406	436	467	509	412	455	491	527
456		404							
447	488	394	424	453	494	400	441	476	512
417	476	370							
434	474	383	411	440	480	389	429	463	497
383	437	339	396						
422	461	372	400	428	467	378	417	450	483
352	401	311	364	410		359			
411	449	362	389	416	454	368	405	438	470
324	370	287	336	378	432	330	387	436	
400	437	353	379	405	442	358	395	426	458
299	341	265	310	349	399	305	357	402	
390	426	344	369	395	431	349	385	415	446
276	316	245	287	322	369	282	331	372	426
380	415	335	360	385	420	340	375	405	435
256	292	227	266	299	342	262	306	345	395
371	405	327	351	376	410	332	366	395	424
238	272	211	247	278	318	243	285	320	367
362	395	319	343	367	400	324	357	386	414
221	253	196	229	258	295	226	265	298	341
353	386	305	335	358	391	316	349	377	405
206	235	183	214	241	275	211	247	278	318
345	377	291	327	350	382	309	341	368	395
193	220	171	200	225	257	196	230	259	297
338	369	279	320	342	373	299	333	360	387
180	205	159	187	210	240	184	215	242	278
328	361	267	313	335	365	286	326	352	378
168	192	149	175	197	225	172	202	227	260
314	353	255	302	328	357	274	319	345	370
158	180	140	164	184	211	161	189	213	244
301	346	245	289	321	350	263	311	338	363
148	169	131	154	173	198	151	177	200	229



Para peraltes de vigas de 24" a 26" inclusive (continúa)

Designación de viga	24H6	24H7	24H8	24H9	24H10	24H11	26H8	26H9
* Peralte nominal (pulg.)	24	24	24	24	24	24	26	26
Momento resistente (pulg.-lb)	462,000	576,000	716,000	851,000	957,000	1,106,000	784,000	925,000
Reacción máxima de extremo (lb)	5600	5800	6000	7000	7500	8200	6700	7200
† Peso aproximado (lb/pie)	10.3	11.5	12.7	14.0	15.5	17.5	12.8	14.8
49							218	257
							106	124
50							209	247
							100	117
51							201	237
							94	110
52							193	228
							88	104
53								
54								
55								
56								
57								
58								
59								
60								

El Steel Joist Institute publica tanto Especificaciones como tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usarse conjuntamente.

Para peralte de vigas de 26" a 30" inclusive (continúa)

26H10	26H11	28H8	28H9	28H10	28H11	30H8	30H9	30H10	30H11
26	26	28	28	28	28	30	30	30	30
1,040,000	1,203,000	846,000	1,000,000	1,124,000	1,300,000	909,000	1,075,000	1,207,000	1,397,000
7600	8300	6700	7200	7700	8400	6800	7500	8100	8700
16.2	17.9	13.5	15.2	16.8	18.3	14.2	15.4	17.3	18.8
289	334	235	278	312	343	252	298	331	355
139	159	124	144	163	186	142	167	188	215
277	321	226	267	300	336	242	287	322	348
131	150	116	136	153	175	134	157	177	202
267	308	217	256	288	329	233	276	309	341
124	141	110	128	144	165	126	148	166	191
256	297	209	247	277	321	224	265	298	335
117	133	103	121	136	156	119	139	157	180
		201	237	267	309	216	255	286	328
		98	114	128	147	112	132	148	170
		193	229	257	297	208	246	276	319
		92	108	121	139	106	125	140	161
		186	220	248	287	200	237	266	308
		87	102	115	132	101	118	133	152
		180	213	239	276	193	229	257	297
		83	97	109	125	95	112	126	144
						187	221	248	287
						90	106	119	137
						180	213	239	277
						86	101	113	130
						174	206	231	268
						81	95	108	123
						168	199	224	259
						77	91	102	117

\*Indica peralte nominal de vigas de acero solamente.

† Pesos aproximados por pie lineal de vigas de acero solamente. No se incluyen accesorios ni solera clavable.

\*† Véase el catálogo del fabricante para una información detallada sobre tipos específicos de vigas.

†† Basado en un esfuerzo tensil máximo permisible de 30,000 lb/pulg<sup>2</sup>.



Tabla de cargas estándar. Vigas de acero de gran claro, Serie L.H.

Desig- nación de viga	Peso aprox en lb pie lin pies	Peralte nominal en pulg.	CARGA ADMIS- IBLE** en lb. Rango	Carga neta en pies																
				25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
18L.H02	13	18	12000	468	442	418	391	367	345	324	306	289	273	259	245					
18L.H03	14	18	13300	521	493	467	438	409	382	359	337	317	299	283	267					
18L.H04	16	18	15500	604	571	535	500	469	440	413	388	365	344	325	308					
18L.H05	17	18	17500	684	648	614	581	543	508	476	448	421	397	375	355					
18L.H06	19	18	20700	809	769	728	688	648	605	566	531	499	470	443	418					
18L.H07	21	18	21500	840	809	780	746	708	678	635	595	559	526	496	469					
18L.H08	22	18	22400	876	843	812	784	758	727	687	641	604	571	540	512					
18L.H09	24	18	24000	936	901	868	838	810	783	759	713	671	633	598	566					
				616	571	527	491	458	418	380	346	316	289	266	245					
20L.H02	13	20	11300	442	437	431	410	388	365	344	325	307	291	275	262					
20L.H03	14	20	12000	506	493	478	452	434	414	395	372	352	333	316	299					
20L.H04	16	20	14700	574	566	558	528	496	467	440	416	393	372	353	335					
20L.H05	17	20	15800	616	609	602	595	571	544	513	484	458	434	411	390					
20L.H06	19	20	21100	822	791	763	723	679	635	596	560	527	497	469	444					
20L.H07	21	20	22500	878	845	814	786	760	711	667	627	590	556	526	497					
20L.H08	22	20	23200	908	873	842	813	785	760	722	687	654	621	588	558					
20L.H09	24	20	25400	990	953	918	886	856	828	802	778	755	712	673	636					
20L.H10	27	20	27400	1068	1028	991	956	924	894	865	839	814	791	748	707					
				786	724	673	626	585	545	510	479	448	411	377	346					

Desig- nación de viga	Peso aprox en lb pie lin pies	Peralte nominal en pulg.	CARGA ADMIS- IBLE** en lb. Rango	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
24L.H03	14	24	11500	342	339	336	323	307	293	279	267	255	244	234	224	215	207	199	191								
24L.H04	16	24	14100	419	408	398	380	363	347	331	317	304	291	280	269	258	248	238	228								
24L.H05	17	24	15100	449	446	440	419	399	380	363	347	331	317	304	291	280	269	258	248								
24L.H06	19	24	20300	604	579	555	530	504	480	457	437	417	399	381	364	348	334	320	307								
24L.H07	21	24	22300	665	638	613	588	565	541	516	491	468	446	426	407	389	373	357	343								
24L.H08	22	24	23800	707	677	649	622	597	572	545	520	497	475	455	435	417	400	384	369								
24L.H09	24	24	28000	832	808	785	764	731	696	663	632	602	574	548	524	501	480	460	441								
24L.H10	27	24	29600	882	856	832	809	788	768	737	702	668	637	608	582	556	533	511	490								
24L.H11	29	24	31200	927	900	875	851	829	807	787	768	734	701	671	642	616	590	567	544								
				624	588	555	525	498	472	449	418	388	361	337	315	294	276	259	243								
28L.H05	16	28	14000	337	323	310	297	286	275	265	255	245	237	228	220	213	206	199	193								
28L.H06	19	28	18600	448	429	412	395	379	364	350	337	324	313	301	291	281	271	262	253								
28L.H07	21	28	21000	505	484	464	445	427	410	394	379	365	352	339	327	316	305	295	285								
28L.H08	21	28	22500	540	517	496	475	456	438	420	403	387	371	357	344	331	319	308	297								
28L.H09	24	28	27700	667	639	612	586	563	540	519	499	481	463	446	430	415	401	387	374								
28L.H10	27	28	30300	729	704	679	651	625	600	576	554	533	513	495	477	460	444	429	415								
28L.H11	29	28	32500	780	762	736	711	682	655	629	605	582	561	540	521	502	485	468	453								
28L.H12	33	28	35700	857	837	818	800	782	766	737	709	682	656	632	609	587	566	546	527								
28L.H13	36	28	37200	895	874	854	835	816	799	782	766	751	722	694	668	643	620	598	577								
				569	543	518	495	472	452	433	415	396	373	352	332	314	297	281	266								

El Steel Joist Institute publica tanto Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usarse conjuntamente.



Tabla de cargas estándar. Vigas de acero de gran claro, Serie LH (continúa):

Designación de viga	Peso aprox. en lb por p linea pies	Peralte nominal en pulg.	CARGA ADMISIBLE** en lb Rango	Claros netos en pies																		
				39-48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64		
32LH06	18	32	16700	338	326	315	304	294	284	275	266	257	249	242	234	227	220	214	208			
32LH07	20	32	18800	211	199	189	179	169	161	153	145	138	131	125	119	114	108	104	99			
32LH08	21	32	20400	235	223	211	200	189	179	170	162	154	146	140	133	127	121	116	111			
32LH09	24	32	25600	255	242	229	216	205	194	184	175	167	159	151	144	137	131	125	120			
32LH10	26	32	28300	319	308	285	270	256	243	230	219	208	198	189	180	172	164	157	149			
32LH11	28	32	31000	352	332	315	297	282	267	254	240	228	217	206	196	186	178	169	162			
32LH12	30	32	36400	385	363	343	325	308	292	277	263	251	239	227	216	206	196	187	179			
32LH13	33	32	40600	450	428	406	384	364	345	327	311	295	281	267	255	243	232	221	211			
32LH14	36	32	41800	500	480	461	444	420	397	376	354	336	319	304	288	275	262	249	238			
32LH15	40	32	43200	515	495	476	458	440	417	395	374	355	337	321	304	290	276	264	251			
				870	853	837	821	805	791	776	763	750	735	701	678	656	635	616	597			
				532	511	492	473	454	438	422	407	393	374	355	338	322	306	292	279			
			42-56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72			
36LH07	22	36	16800	292	283	274	266	258	251	244	237	230	224	218	212	207	201	196	191			
36LH08	24	36	18500	321	311	302	293	284	276	268	260	253	246	239	233	227	221	215	209			
36LH09	26	36	23700	411	398	386	374	363	352	342	333	323	314	306	297	289	282	275	267			
36LH10	28	36	26100	454	440	426	413	401	389	378	367	357	347	338	328	320	311	303	295			
36LH11	30	36	28500	495	480	465	451	438	425	412	401	389	378	368	358	348	339	330	322			
36LH12	33	36	34100	593	575	557	540	523	508	493	478	464	450	437	424	412	400	389	379			
36LH13	36	36	40100	697	675	654	634	615	596	579	562	546	531	516	502	488	475	463	451			
36LH14	40	36	44200	809	795	781	769	744	721	698	677	656	637	618	600	583	567	551	536			
36LH15	44	36	46600	480	464	448	434	413	394	375	358	342	327	312	299	286	274	263	252			

			47-64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
40LH08			16600	254	247	241	234	228	222	217	211	206	201	196	192	187	183	178	174
40LH09	3	40	21800	150	144	138	132	127	122	117	112	108	104	100	97	93	90	86	83
40LH10	5	40	24000	196	188	180	173	166	160	153	147	141	136	131	126	122	118	113	109
40LH11	7	40	26200	216	207	198	190	183	176	169	162	156	150	144	139	134	129	124	119
40LH12	12	40	31900	285	273	261	251	241	231	222	213	205	197	189	182	176	169	163	157
40LH13	16	40	37600	573	557	542	528	514	500	487	475	463	451	440	429	419	409	399	390
40LH14	37	40	43000	656	638	620	603	587	571	556	542	528	515	502	490	478	466	455	444
40LH15	41	40	48100	734	712	691	671	652	633	616	599	583	567	552	538	524	511	498	486
40LH16	47	40	53000	808	796	784	772	761	751	730	710	691	673	655	638	622	606	591	576
				469	455	441	428	416	404	387	371	356	342	329	316	304	292	282	271
			52-72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
44LH09	22	44	20000	272	265	259	253	247	242	236	231	226	221	216	211	207	202	198	194
44LH10	25	44	22100	158	152	146	141	136	131	127	122	118	114	110	106	103	99	96	93
44LH11	27	44	23900	174	168	162	155	150	144	139	134	130	125	121	117	113	110	106	103
44LH12	31	44	29600	325	317	310	302	295	289	282	276	269	264	258	252	247	242	236	232
44LH13	35	44	35100	188	181	175	168	162	157	151	146	140	136	131	127	123	119	115	111
44LH14	36	44	40400	402	393	383	374	365	356	347	339	331	323	315	308	300	293	287	280
44LH15	41	44	47000	477	466	454	444	433	423	413	404	395	386	377	369	361	353	346	338
44LH16	47	44	54200	737	719	701	684	668	652	637	622	608	594	580	568	555	543	531	520
44LH17	54	44	58200	809	795	780	769	759	750	732	715	699	683	667	652	638	624	610	597
				450	438	426	415	405	390	376	363	351	338	327	316	305	295	285	276

El Steel Joist Institute publica tanto Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usarse conjuntamente.



Tabla de cargas estándar. Vigas de acero de gran claro, Serie LH (Continúa) ‡

Designación de viga	Peso aprox. en lb por p. lineal	Peralte nominal en pulg.	CARGA ADMISIBLE** en lbs Rango	Claro neto en pies																
				81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	
48LH10	25	48	20000	246	241	236	231	226	221	217	212	208	204	200	196	192	188	185	181	
48LH11	27	48	21700	141	136	132	127	123	119	116	112	108	105	102	99	96	93	90	87	
48LH12	31	48	27400	266	260	255	249	244	239	234	229	225	220	216	212	208	204	200	196	
48LH13	35	48	32800	152	147	142	137	133	129	125	120	117	113	110	106	103	100	97	94	
48LH14	36	48	38700	336	329	322	315	308	301	295	289	283	277	272	266	261	256	251	246	
48LH15	41	48	44500	191	185	179	173	167	161	156	151	147	142	138	133	129	126	122	118	
48LH16	47	48	51300	402	393	384	376	368	360	353	345	338	332	325	318	312	306	300	294	
48LH17	54	48	57600	228	221	213	206	199	193	187	180	175	170	164	159	154	150	145	141	
				975	464	434	444	434	425	416	407	399	390	383	375	367	360	353	346	
				269	260	251	243	234	227	220	212	206	199	193	187	181	176	171	165	
				545	533	521	510	499	488	478	468	458	448	439	430	422	413	405	397	
				308	298	287	278	269	260	252	244	236	228	221	214	208	201	195	189	
				629	615	601	588	576	563	551	540	528	518	507	497	487	477	468	459	
				355	343	331	320	310	299	289	280	271	263	255	247	239	232	225	218	
				706	690	675	660	646	632	619	606	593	581	569	558	547	536	525	515	
				397	383	371	358	346	335	324	314	304	294	285	276	268	260	252	245	

\*\*Para obtener la carga uniforme admisible entre los claros mostrados, dividir la carga admisible en libras entre claro neto en pies más .67 †. (La adición de .67 pies, ocho pulgadas, es necesaria para obtener el claro adecuado para el cual se han desarrollado las tablas de cargas.)

En ningún caso la carga uniforme admisible debe exceder a la carga uniforme calculada para el claro mínimo listado.

Para obtener la carga viva entre los claros mostrados, multiplicar la carga viva del claro neto más corto que aparece en la tabla de cargas por el (claro neto más corto más .67 pies)<sup>2</sup>, y dividir entre el (claro neto real más .67 pies)<sup>2</sup>. La carga viva no debe exceder la carga uniforme admisible.

‡ Basado en un esfuerzo tensil máximo permisible de 30,000 lb/pie<sup>2</sup>.

El Steel Joist Institute publica tanto Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usarse conjuntamente.

Tabla de cargas estándar. Vigas de gran claro y gran peralte; Serie DLH ‡

Designación de viga	Peso arox. en lb. por pie lineal	Peralte en pulg.	CARGA ADMISIBLE** en lbs Rango	Claro neto en pies																
				89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	
52DLH10	27	52	26700	298	291	285	279	273	267	261	256	251	246	241	236	231	227	223	218	
52DLH11	29	52	29300	171	165	159	154	150	145	140	136	132	128	124	120	116	114	110	107	
52DLH12	31	52	32700	187	181	174	169	164	158	153	149	144	140	135	132	128	124	120	117	
52DLH13	36	52	39700	204	197	191	185	179	173	168	163	158	153	149	144	140	135	132	128	
52DLH14	40	52	45400	247	239	231	224	216	209	203	197	191	185	180	174	170	164	159	155	
52DLH15	45	52	51000	276	266	258	249	242	234	227	220	213	207	201	194	189	184	178	173	
52DLH16	50	52	55000	311	301	291	282	272	264	256	247	240	233	226	219	213	207	201	195	
52DLH17	55	52	63300	346	335	324	314	304	294	285	276	267	260	252	245	237	230	224	217	
				706	691	676	661	647	634	620	608	595	583	572	560	549	539	528	518	
				395	381	369	357	346	335	324	315	304	296	286	279	270	263	255	247	

El Steel Joist Institute publica tanto Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una contiene datos para usarse conjuntamente.



Tabla de cargas estándar. Vigas de gran claro y gran peralte, Serie DLH (continúa) ‡

Designación de viga	Peso aprox. en lbs por pie lineal	Peralte en pulg.	CARGA ADMISIBLE** en lb	Claro neto en pies																
				66-96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
56DLH111	29	56	28100	288	283	277	272	267	262	257	253	248	244	239	235	231	227	223	219	112
56DLH112	31	56	32100	331	324	318	312	306	300	295	290	284	278	273	268	263	259	254	249	110
56DLH113	36	56	39100	401	394	386	379	372	365	358	351	344	338	331	325	319	314	308	303	119
56DLH114	40	56	44200	453	444	435	427	419	411	403	396	388	381	375	368	361	355	349	343	145
56DLH115	45	56	50500	518	508	498	488	478	469	460	451	443	434	426	419	411	403	396	389	162
56DLH116	50	56	54500	559	548	537	526	516	506	496	487	478	469	460	452	444	436	428	420	182
56DLH117	55	56	62800	643	630	618	605	594	582	571	560	549	539	529	520	510	501	492	483	204
				356	345	335	325	316	306	298	289	281	273	266	258	251	245	238	231	
60DLH112	31	60	31100	295	289	284	279	274	270	265	261	256	252	248	244	240	236	232	228	120
60DLH113	36	60	37800	358	351	345	339	333	327	322	316	311	306	301	296	291	286	282	277	
60DLH114	39	60	42000	398	391	383	376	370	363	356	350	344	338	332	327	321	316	310	305	
60DLH115	45	60	49300	516	508	498	488	478	469	460	451	443	434	426	419	411	403	396	389	
60DLH116	50	60	54200	553	544	534	524	514	504	494	485	476	466	457	448	439	430	421	412	
60DLH117	55	60	62300	640	629	618	607	596	585	574	563	552	541	530	520	510	500	490	480	
60DLH118	2	60	71900	681	668	656	644	632	621	610	599	589	578	568	559	549	540	531	522	
				366	357	346	337	327	319	310	303	294	286	279	272	266	259	252	246	

64DLH12	1	64	30000	264	259	255	251	247	243	239	235	231	228	224	221	218	214	211	208	128
64DLH13	6	64	36400	321	315	310	305	300	295	291	286	281	277	273	269	264	260	257	253	
64DLH14	9	64	41700	367	360	354	349	343	337	332	326	321	316	311	306	301	296	292	287	
64DLH15	5	64	47800	421	414	407	400	394	387	381	375	369	363	358	352	347	341	336	331	
64DLH16	0	64	53800	474	466	458	450	443	435	428	421	414	407	401	394	388	382	376	370	
64DLH17	5	64	62800	546	536	527	518	509	501	492	484	476	468	461	454	446	439	432	426	
64DLH18	2	64	71600	630	619	608	598	587	578	568	559	549	540	532	523	515	507	499	491	
				337	328	320	311	304	296	288	282	274	267	261	255	249	243	237	232	
68DLH13	6	68	35000	288	284	279	275	271	267	263	259	255	252	248	244	241	237	234	231	136
68DLH14	9	68	40300	332	327	322	317	312	308	303	299	294	290	286	281	277	273	269	266	
68DLH15	3	68	45200	372	365	360	354	348	343	337	332	327	322	317	312	308	303	299	294	
68DLH16	0	68	53600	441	433	427	420	413	407	400	394	388	382	376	371	365	360	354	349	
68DLH17	5	68	60400	497	489	481	474	467	460	453	446	439	433	427	420	414	408	403	397	
68DLH18	2	68	69900	575	566	557	549	540	532	524	516	508	501	493	486	479	472	465	459	
68DLH19	0	68	80500	662	651	641	631	621	611	601	592	583	574	565	557	548	540	532	525	
				353	344	336	328	320	313	305	298	291	285	278	272	266	260	254	248	

‡ The Steel Joist Institute publishes tanto Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usar conjuntamente.



Tabla de carga estándar. Vigas de gran claro y gran peralte, Serie DLH (continúa) ‡

Designación de viga	I 30 en pies	CARGA ADMISIBLE** en lb Rango	Peralte en pulg.	Claros netos en pies																
				129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	
72DL1114	9	39200	72	303	298	294	290	285	281	277	274	270	266	262	259	255	252	248	245	
72DL1115	3	44900	72	171	167	163	159	155	152	149	146	143	139	136	133	131	128	125	123	
72DL1116	0	51900	72	191	187	183	178	174	171	167	163	160	156	152	150	147	143	140	137	
72DL1117	5	58400	72	225	219	214	209	205	200	196	191	188	183	179	175	171	169	165	161	
72DL1118	2	68400	72	256	250	245	239	233	228	224	218	213	209	205	200	196	191	188	184	
72DL1119	3	80200	72	289	283	276	270	265	258	252	247	242	236	231	227	222	217	212	209	
				619	609	600	591	582	573	565	557	549	541	533	526	518	511	504	497	
				328	321	313	306	300	293	286	280	274	268	263	257	251	247	241	236	

\*\*Para obtener la carga uniforme admisible entre los claros mostrados, dividir la carga admisible en libras entre el claro neto en pies más .67 pies. (La adición de .67 pies, ocho pulgadas, es necesaria para obtener el claro adecuado para el cual se han desarrollado las tablas de cargas.)

En ningún caso a carga uniforme admisible debe exceder a la carga uniforme calculada para el claro mínimo listado.

Para obtener la carga viva entre los claros mostrados, multiplicar la carga viva del claro neto más corto que aparece en la tabla de cargas por el (claro neto más corto más .67 pies)<sup>2</sup>, y dividir entre el (claro neto real más .67 pies)<sup>2</sup>. La carga viva no debe exceder a la carga uniforme admisible.

‡ Basado en un esfuerzo tensil máximo permisible de 30,000 lb/pie<sup>2</sup>.

§ Steel Joist Institute publica tanto Especificaciones como Tablas de Cargas; cada una de éstas contiene datos para usarse conjuntamente.

## APÉNDICE G

### Respuestas a los problemas

#### Capítulo 2

- $R_L = 7.0$  kips,  $R_R = 6.5$  kips.
- $R_L = 19.0$  kips,  $R_R = 17.0$  kips.
- $R_L = 5.5$  kips,  $R_R = 20.3$  kips.
- Cortante en el extremo izquierdo = +7 kips; a 6 pies del extremo izquierdo = +7 kips y -2 kips; a 14 pies del extremo izquierdo = -2 kips y -6.5 kips; en el extremo derecho = 6.5 kips. Momento flexionante en el extremo izquierdo = cero; a 6 pies del extremo izquierdo = +42 pie-kips; a 14 pies del extremo izquierdo = +26 pie-kips; en el extremo derecho = cero.
- Cortante en el extremo izquierdo = +19 kips; a 5 pies del extremo izquierdo = +19 kips y -1 kips; a 10 pies del extremo izquierdo = -1 kips, aumentando linealmente a -17 kips en el extremo derecho. Momento flexionante en el extremo izquierdo = cero; a 5 pies del extremo izquierdo = +95 pie-kips; a 10 pies del extremo izquierdo = +90 pie-kips; en el extremo derecho = cero.
- Cortante en el extremo izquierdo = +5.5 kips; a 5 pies del extremo izquierdo = +5.5 kips y -9.5 kips; en la reacción derecha = -9.5 kips y +10.8 kips; en el extremo derecho = 6.0 kips y cero. Momento flexionante en el extremo izquierdo = cero; a 5 pies del extremo izquierdo = +27.5 pie-kips; en la reacción derecha = -67.2 pie-kips; en el extremo derecho = cero. Asimismo, el punto de momento cero está a 7.9 pies del extremo izquierdo.
- $R_L = 9.53$  kips,  $R_R = 7.87$  kips; ecuaciones de carga:

$$L_{(0-4)} = -0.8; L_{(4-18)} = -0.8;$$

ecuaciones de fuerza cortante

$$V_{(0-4)} = -0.8x + 9.53; V_{(4-18)} = -0.8x + 6.53;$$

ecuaciones de momento:

$$M_{(0-4)} = -0.4x^2 + 7.73x,$$

$$M_{(4-18)} = -0.4x^2 + 6.53x + 12.0.$$

El momento flexionante máximo ocurre en el punto en que el cortante = cero, o sea a 8.15



pies de la reacción izquierda. El cortante en el extremo izquierdo = + 9.53 kips; a 4 pies del extremo izquierdo = + 6.33 kips y + 3.33 kips; en la reacción derecha = -7.87 kips. Momento flexionante en el extremo izquierdo = cero; a 4 pies del extremo izquierdo = + 31.8 pie-kips; a 8.15 pies del extremo izquierdo = + 38.6 pie-kips (valor máximo); a 14 pies del extremo izquierdo = + 25.4 pie-kips; en el extremo derecho = cero.

22. Respuesta parcial: momento máximo a 7.5 pies del extremo izquierdo, Momento máximo = 21 pie-kips.

### Capítulo 3

#### Sección 3.9:

1.  $W = 46.9$  kips.
3.  $W 21 \times 62$  S  $20 \times 75$ .
4.  $W 10 \times 12$ .

#### Sección 3.15:

1.  $f_v = 6.77$  k/pulg<sup>2</sup>,  
 $W = 101.8$  kips
2.  $f_v = 2.84$  k/pulg<sup>2</sup>
- 3)  $f_v = 4.16$  k/pulg<sup>2</sup> para  $W 21 \times 62$   
 $f_v = 2.75$  k/pulg<sup>2</sup> para  $S 20 \times 75$
- 4)  $f_v = 1.62$  k/pulg<sup>2</sup>

### Capítulo 4

1. a)  $EI\theta_{(0-10)} = 3.33x^2 - 555$ .  
 $EI\theta_{(10-30)} = -1.67x^2 + 100x - 1055$ .  
 $EI\Delta_{(0-10)} = 1.11x^3 - 555x$ .  
 $EI\Delta_{(10-30)} = -0.56x^3 + 50x^2 - 1055x + 1660$ .
- b) La deflexión máxima se produce a 13.6 pies de la reacción izquierda.
- c) Deflexión máxima = - 0.85 pulg.
3. a)  $\Delta = 0.66$  pulg.  
b)  $\Delta = 0.36$  pulg.
4.  $\Delta = 1.15$  pulg.
6.  $W 10 \times 68$

### Capítulo 5

#### Sección 5.4:

1.  $W 18 \times 35$ .
2.  $W 21 \times 44$ .
3.  $W 14 \times 38$ .
4.  $W 14 \times 22$  (sin cambio)
5.  $W 14 \times 26$ .
6.  $W 16 \times 31$  ( $S$  requerida = 34.4 pulg<sup>3</sup>;  $I$  entre apoyos = 282 pulg<sup>4</sup>;  $I$  para el voladizo = 370 pulg<sup>4</sup>).

#### Sección 5.7:

1. a) La viga es segura.  
b)  $f_b = 22.3 > 22$  k/pulg<sup>2</sup>. La viga está un poco escasa pero se acepta.
2. a)  $W = 47.7$  kips.  
b)  $W = 10.5$  kips.
5.  $W 8 \times 21$ .
7.  $W 16 \times 50$ .

#### Sección 5.10:

2.  $N = 4.04$  (usar 4 pulg)
3.  $W 16 \times 45$  o  $21 \times 44$ .
4.  $W 16 \times 31$ .
6.  $W 14 \times 34$ .
8.  $W 18 \times 40$ .

#### Sección 5.19:

2.  $W = 20.2$  kips.  
 $\Delta = 0.74$  pulg.
6.  $f_b = 24.1$  k/pulg<sup>2</sup>,  $F_b = 17.8$  k/pulg<sup>2</sup> (no es segura).
7.  $PL 8 \times 11 \times \frac{5}{8}$  pulg.
8.  $W 6 \times 15$ .

### Capítulo 6

#### Sección 6.8:

1.  $P = 137$  kips.
3.  $P = 217$  kips.
5.  $P = 317$  kips.

#### Sección 6.13:

1.  $W 8 \times 40$ .
2.  $W 6 \times 15$ .
4. 2 ángulos de  $3 \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$  pulg, con las alas largas espaldas con espalda.
5.  $W 10 \times 33$ .
8.  $P = 287$  kips.

#### Sección 6.17:

1. Revisión por estabilidad = 0.836.  
Revisión de extremo = 0.895.  
La columna es segura.
3.  $P = 32$  kips.
5. Revisión por estabilidad = 0.850.  
Revisión de extremo = 0.69.  
La columna es segura.
7.  $W 12 \times 45$ .
8.  $W 10 \times 49$ .

#### Sección 6.19:

4. Placa de  $1\frac{1}{4}$  pulg de espesor.

### Capítulo 7

#### Sección 7.12:

1.  $P = 54.6$  kips, distancia al extremo =  $1\frac{3}{4}$  pulg.
3.  $P = 48$  kips, distancia al extremo =  $1\frac{1}{8}$  pulg.
6. Espesor de la placa de unión =  $\frac{5}{16}$  pulg.  
Usar 3 tornillos A325 en una línea.  
Distancia al extremo =  $1\frac{1}{4}$  pulg (ángulos),  $2\frac{1}{4}$  pulg (placa).

#### Sección 7.16:

1. Ángulos de conexión de  $4 \times 3\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$  pulg de  $5\frac{1}{2}$  pulg de long. Dos tornillos en el ala conectada, 4 tornillos en las alas sobresalientes.
2. Usar tornillos de  $\frac{5}{8}$  pulg.
5. Usar ángulo de asiento de  $6 \times 4 \times \frac{7}{8}$  pulg en cada lado con tornillos de  $\frac{5}{4}$  pulg a través del alma de la trabe.

#### Sección 7.20:

1. Esfuerzo total = 10.53 kips sobre el tornillo derecho extremo. La conexión es segura.
3. Fuerza de diseño = 8.76 kips.  
Usar tornillos de  $\frac{5}{8}$  pulg.

#### Sección 7.26:

1. Espesor de placa = 0.424 pulg, usar  $\frac{1}{2}$  pulg.  
Longitud de traslape = 4.4 pulg, usar  $4\frac{1}{2}$  pulg.
3.  $L = 3$  pulg.

#### Sección 7.29:

1.  $R = 26.2$  kips.
2.  $D = 0.312$  pulg, usar soldadura de  $\frac{5}{16}$  pulg.

#### Sección 7.32:

2. a)  $R = 55.1$  kips.  
b)  $R = 56.2$  kips.
3.  $R = 35.4$  kips.
4.  $R = 42.6$  kips (el ala conectada es determinante).

### Capítulo 8

#### Sección 8.7:

1. a) ANSI  
Fuerzas externas más succión interna.  
Presión del techo  $p = 13.2$  lb/pie<sup>2</sup> (hacia afuera).  
Aleros a barlovento  $w = 381$  lb por pie.  
Aleros a sotavento  $w = 147$  lb por pie.  
Fuerzas externas más presión interna.  
Presión del techo  $p = 21.6$  lb/pie<sup>2</sup> (hacia afuera).  
Aleros a barlovento  $w = 234$  lb por pie.  
Aleros a sotavento  $w = 294$  lb por pie.
- b) UBC  
Presión del techo  $p = 17$  lb/pie<sup>2</sup> (hacia afuera).  
Aleros a barlovento  $w = 321$  lb por pie.  
Aleros a sotavento  $w = 210$  lb por pie.

#### Sección 8.11:

1. ANSI,  $V = 90$  kips.  
UBC,  $V = 110$  kips.
2. Carga de diafragma  
Transversal,  $F_Q = 55.0$  kips.  
Longitudinal,  $F_Q = 34.7$  kips.  
Extremo inferior de los muros de cortante.  
Muro del extremo,  $V = 20$  kips (cada segmento).  
Muro lateral,  $V = 9.1$  kips (segmento central).  
 $V = 19.1$  kips (cada segmento de extremo).



# Capítulo 9

## Sección 9.36:

1. Carga de nieve; int. = 2.66 kips; ext. = 1.33 kips.
3. Cuerda superior = 26.6 y 21.5 kips a compresión. Cuerda inferior = 24.6 y 14.8 kips a tensión. Verticales de la celosía = 24.6 y 14.8 kips a tensión. Diagonales de la celosía hasta el caballete = 8 kips a tensión. Diagonales de la celosía cerca del talón = 5.2 kips a compresión.
6.  $2C 8 \times 13.75$ .

## Sección 9.40:

1. a) Miembro A-1 = 6.7 kips (comp.) 4-5 = 4.48 kips (comp.). Cortante máximo en columnas = 2 kips. Momento máximo en columnas = 20 pie-kips.
- c) Miembro A-7 = 7.0 kips (tensión), 4-5 = 5.37 kips (comp.). Cortante máximo en columnas = 3 kips. Momento máximo en columnas = 24 pie-kips.

# Capítulo 10

## Sección 10.3:

1. Reacciones de extremos = 13.5 kips. Reacciones en el centro = 45 kips.
3.  $M = 152$  pie-kips.

## Sección 10.5:

1.  $M_A = 75.9$  pie-kips;  $M_B = 48$  pie-kips.
4.  $R_1 = 10.5$  kips,  $R_B = 41.5$  kips,  $R_C = 23.0$  kips. Momentos negativos:  $M_B = 67.5$  pie-kips,  $M_C = 30$  pie-kips. Momentos positivos:  $M$  a 5.25 pies del apoyo izquierdo = 28 pie-kips,  $M$  a 11 pies del apoyo central = 51 pie-kips.

## Sección 10.9:

1. 2)  $M_A = 156$  pie-kips,  $M_B = 101$  pie-kips.
- 3)  $M = 126$  pie-kips
- 4)  $M = 67.7$  pie-kips.
3.  $M_B = 28.6$  pie-kips,  $M_C = 28.6$  kips.

## Sección 10.10:

1. Miembro AB: cortante = 4 kips, momento = 24 pie-kips, carga axial = 15 kips; Miembro BC: cortante = 15 kips, momento = 120 pie-kips, carga axial = 4 kips.
3. Miembros AB y BC: cortante = 5.1 kips, momento = 40 pie-kips, carga axial = 21.8 kips.

## Sección 10.15

1.  $V_A = 5.5$  kips,  $V_C = 6.5$  kips,  $H_A = 2$  kips,  $H_C = 6$  kips.  $M_A = 3.3$  pie-kips,  $M_B = 23.4$  pie-kips,  $M_C = 33.3$  pie-kips.
3.  $V_A = 13.7$  kips,  $V_D = 16.3$  kips,  $H_A = 1.3$  kips,  $H_D = 7.3$  kips.  $M_B = 51.5$  pie-kips,  $M_C = 87.5$  pie-kips,  $M = 70.2$  pie-kips en el centro del claro.

# Capítulo 11

## Sección 11.2:

1. a) Alma  $w/t = 20 < 68.7$  CORRECTO. Patín  $w/t = 28 < 32$  CORRECTO.
- b)  $M_p = 95$  pie-kips.
- c)  $M_y = 142.5$  pie-kips.
- d)  $M_p = 185$  pie-kips.
- e)  $I_{cr} = 20$  pies.
2. Eje Mayor;  $M_p = 192$  pie-kips,  $u = 1.13$ . Eje menor;  $M_p = 31.5$  pie-kips.

## Sección 11.4:

1. W 16  $\times$  26.
2. W 12  $\times$  22.

## Sección 11.5:

1. W 16  $\times$  31.
2. W 16  $\times$  31.

1. a) W 21  $\times$  44.

b)  $L/360 = 1.0$  pulg.; la  $\Delta$  máxima ocurre a 17.2 pie del apoyo interior y es de 0.43 pulg, satisfactorio.

3. Usar W 18  $\times$  50 para todos los claros. Sin embargo, también funcionan otras combinaciones.
5.  $L = 21.1$  pies.

## Sección 11.7:

$$1. P = \frac{M_p}{15}$$

# Capítulo 12

## Sección 12.5:

2.  $R_A = 5.28$  kips,  $R_B = 14.31$  kips.  $R_C = 8.50$  kips,  $R_D = 2.91$  kips.  $M_B = -41.28$  pie-kips,  $M_C = -19.62$  pie-kips.

## Sección 12.10:

3. Matriz de rigidez del elemento  $\div 1000$  (k y pulg)

3.335	0.000	0.000	-3.335	0.000	0.000
0.000	0.072	3.636	0.000	-0.072	3.636
0.000	3.636	242.440	0.000	-3.636	121.220
-3.335	0.000	0.000	3.335	0.000	0.000
0.000	-0.072	-3.636	0.000	0.072	-3.636
0.000	3.636	121.220	0.000	-3.636	242.440

Matriz de rigidez del elemento transformada  $\div 1000$  (k y pulg)

0.454	-1.094	-3.418	-0.454	1.094	-3.418
	2.953	-1.244	1.094	-2.953	-1.244
		242.440	3.418	1.244	121.220
			0.454	-1.094	3.418
				2.953	1.244
(simétrica)					242.440

Las reacciones de extremos son las siguientes:

$$t_A = 10.07 \text{ kips}, v_A = 3.66 \text{ kips}, m_A = 0.57 \text{ pulg-kips.}$$

$$t_B = -10.67 \text{ kips}, v_B = -3.66 \text{ kips}, m_B = 365.77 \text{ pulg-kips.}$$

4. Las acciones de extremo convertidas a los ejes de la estructura son las siguientes:

$$T_A = -7.09 \text{ kips}, V_A = 8.77 \text{ kips}, M_A = 0.37 \text{ pulg-kips}$$

$$T_B = 7.09 \text{ kips}, V_B = -8.77 \text{ kips}, M_B = 365.77 \text{ pulg-kips.}$$

## Sección 12.15:



## 1. Matriz de rigidez completa por 1.000,000 (lb pulg)

0.64006	0.20506	-0.20506	-0.20506	-0.43500	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.20506	0.20506	-0.20506	-0.20506	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.20506	-0.20506	0.84512	0.00000	-0.20506	0.20506	-0.43500	0.00000	0.00000	0.00000
-0.20506	-0.20506	0.00000	0.41012	0.20506	-0.20506	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-0.43500	0.00000	-0.20506	0.20506	1.28012	0.00000	-0.20506	-0.20506	-0.43500	0.00000
0.00000	0.00000	0.20506	-0.20506	0.00000	0.41012	-0.20506	-0.20506	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-0.43500	0.00000	-0.20506	-0.20506	0.84512	0.00000	-0.20506	0.20506
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.20506	-0.20506	0.00000	0.41012	0.20506	-0.20506
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.43500	0.00000	-0.20506	0.20506	0.64006	-0.20506
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.20506	-0.20506	-0.20506	0.20506

Vector de carga (lb)      Vector de desplazamiento (pulg)

$R_1$	0.0000
$R_2$	0.0000
1000	0.0088
-5000	0.0307
0	0.0011
0	-0.0359
1000	-0.0027
-5000	-0.0296
$R_9$	0.0000
$R_{10}$	0.0000

Fuerzas de miembro (kips)

Tensión (+)	
Compresión (-)	
Miembro	Fuerza
1	0.50
2	-0.50
3	-5.00
4	-6.36
5	-7.78
6	-0.71
7	0.71

## 2.

Matriz de rigidez completa por 1.000,000 (lb, pul)

0.136	0.000	-5.437	-0.136	0.000	-5.437	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	2.900	0.000	0.000	-2.900	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-5.437	0.000	289.985	5.437	0.000	144.993	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.136	0.000	5.437	1.425	0.000	5.437	-1.289	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	-2.900	0.000	0.000	2.912	1.074	0.000	-0.012	1.074	0.000	0.000	0.000
-5.437	0.000	144.993	5.437	1.074	418.874	0.000	-1.074	64.444	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	-1.289	0.000	0.000	1.329	0.000	2.417	-0.040	0.000	2.417
0.000	0.000	0.000	0.000	-0.012	-1.074	0.000	1.945	-1.074	0.000	-1.933	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	1.074	64.444	2.417	-1.074	322.222	-2.417	0.000	96.667
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.040	0.000	-2.417	0.040	0.000	-2.417
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.933	0.000	0.000	1.933	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.417	0.000	96.667	-2.417	0.000	193.333

Vector de carga (lb, pulg)

Vector de desplazamiento  
(pulg, radianes)

$R_1$	0.0000
$R_2$	0.0000
$R_3$	0.0000
1500	0.0303
-5375	-0.0018
-192500	-0.00094
0	0.0283
-5375	0.0032
192500	0.00057
$R_{10}$	0.0000
$R_{11}$	0.0000
$R_{12}$	0.0000

Acciones de extremos del miembro

Miembro	$T(A)$ (KIPS)	$V(A)$ (KIPS)	$M(A)$ (K-PIES)	$T(B)$ (KIPS)	$V(B)$ (KIPS)	$M(B)$ (K-PIES)
1	5.364	-1.016	2.312	-5.364	1.016	-9.084
2	2.516	5.364	9.084	-2.516	6.136	-14.871
3	6.136	2.516	14.871	-6.136	-2.516	10.286



Presión del viento:

$$Presión del viento = 95.45 \text{ kg/m}^2 \approx 100 \text{ kg/m}^2$$

$$F = 100 \text{ kg/m}^2, \text{ razones } 10^4 \text{ kg/m}^2$$

15 kg/m

Presión del viento:

$$C.P. = 25.4 \text{ kg/m}^2 = 124 \text{ kg/m}^2$$

- Presión del viento sobre la cubierta
- Presión del viento sobre las paredes
- Presión del viento sobre las columnas
- Presión del viento sobre las vigas

$$Carga del viento: (W = 0.555 \times 10^5 \text{ kg/m}^2)$$

$$W = \text{FED. DEBIDA AL VIENTO (kg.)}$$

$$C = \text{FACTORES EMPUJE (DIMENSIONALES)}$$

$$L = \text{LONGITUD EXPOSITA EN M}$$

$$V = \text{VELOCIDAD DE DISEÑO EN km/hr.}$$

Nota:

\* Los techos formados por sup. inclinadas cuya inclinación no exceda de 15° se tratan como horizontales y entonces  $C = 1$ .

$$Presión del viento = 74 \text{ kg/m}^2$$

$$100.77 \text{ kg/m}^2$$

$$Carga por viento = 100 kg/m^2 \times \text{Longitud}$$

$$Carga por viento = 100 kg/m^2 \times \text{Longitud}$$

$$Carga por viento = 100 kg/m^2 \times \text{Longitud}$$

$$Carga por viento = 100 kg/m^2 \times \text{Longitud}$$

Resumen:

$$1. Presión del viento = 100.77 \text{ kg/m}^2$$

$$2. Carga por viento = 124 \text{ kg/m}^2$$

$$3. Carga por viento = 74 \text{ kg/m}^2$$

$$4. Carga por viento = 25.4 kg/m^2 \times \text{Área expuesta}$$

$$35.19 \text{ kg/m}^2$$

# Índice

Acciones en el extremo, 490

Acero:

- alta resistencia, 8-10
- construcción, tipos de, 184-185
- costos, 8, 10
- resistencia a la corrosión, 7, 9
- resistencia al fuego, 8
- tipos, 7, 9

Acero resistente a la corrosión, 7, 9

Aceros de alta resistencia, 8-10

ALGOL:

- lenguaje, 470

Alma:

- aplastamiento, en vigas, 105
- conexiones, 189
- fuerza cortante, 56
- pandeo, 105
- diagonal, en vigas, 107

Altura no arriostrada, 149

American Institute of Steel Construction (AISC), V, VI, 6

- acero, tipos de, 9
- dimensiones y propiedades de secciones, 43
- efecto de condiciones de extremo, 144
- especificaciones del, 6
- Manual of Steel Construction, 6
- Nomograma, 145, 579
- requisitos de rigidez de techo, 81, 99
- tabla de diseño, 110
- tablas de cargas admisibles:
  - para columnas, 157-158
  - para puntales, 160
- valores K, 144

American Insurance Association, 5

National Building Code (Reglamento Nacional de Construcción), requisitos mínimos de carga viva, 5

American Iron and Steel Institute, V, VI

especificaciones del, 6-7

American National Standards Institute (ANSI), V, VI, 3

- Mapa Básico de Velocidad del Viento, 274
- mapas de zonas sísmicas, 296, 299
- referencia a mapas de zonas nevadas, 328
- requisitos mínimos de carga viva, 5

American Society for Testing and Materials (ASTM):

- designaciones del acero, 8, 9, 43
- Análisis gráfico de vectores, 336
- diagramas de momento de vigas, 443

procedimiento semigráfico, 336

Análisis y Diseño auxiliados por Computadora: general, 469

Anclaje:

- armaduras, 354
- columnas, 177
- vigas, 128

Ángulos:

- conexiones, 176-190
- marcos, 188
- para dinteles, 119
- puntales, 143, 153
- relación ancho-espesor, 149
- secciones, 118, 143

Apoyo:

- muros de, 128
- sujetadores de, 192

Arcos, de tres articulaciones, 382, 408

Áreas, propiedades de, 63

Armadura espacial:

- descripción, 484
- grados de libertad, 485
- Armadura plana, 471, 484
- grados de libertad, 485
- programa de computadora, 642

Armaduras:

- análisis de esfuerzos de, 338
- método de juntas, 338
- por carga de nieve, 347
- por carga muerta, 346
- por carga por viento, 345
- análisis vectorial gráfico, 336
- anclaje, 354
- suposiciones de análisis, 335

Arriostramiento:

- viguetas de acero, 134

Arriostramiento cruzado, 253

- armaduras, 330, 355
- muros laterales, 364

Asentamiento de apoyos, 403

Asientos de viga flexibles, 190

Atiesadores, 106-107

B

Basic Building Code:

- requisitos mínimos de carga viva, 5
- BASIC, lenguaje, 527
- Building Officials and Code Administrators,



International, 3  
requisitos de carga viva, 5  
Building Seismic Safety Council, 6

C

Calibre, conexiones de sujetador, 202  
Capacidad de apoyo:  
muros, 128  
de concreto (UBC), 177  
Carga última, 437, 439  
Cargas:  
combinadas, 329, 347  
definición:  
diseño, 3-6  
distribuidas, vigas, 13  
muertas, 3  
vivas, 3, 4  
excéntricas, sobre columnas, 161  
muertas, 3, 325, 546  
vigas, 135  
Cargas ambientales, 3, 4, 6  
Cargas concentradas, 4  
vigas, 448  
Cargas de diseño, 3, 547  
Cargas excéntricas sobre columnas, 161  
Cargas muertas, 3  
sobre armaduras de techo, 334, 345  
Cargas transversales, 11  
Cargas vivas, 3, 4, 547  
reducciones, columnas, 154  
Categorías de exposición, viento, 276  
Centro de gravedad:  
de grupo de tornillos, 216  
Cimentaciones:  
emparrillado, 177  
plano, 554  
Chicago Building Code  
requisitos mínimos de carga viva, 5  
Cimentación emparrillada, 177  
Coeficiente de presión de velocidad, 276  
Coeficientes de exposición a la presión de la  
velocidad, 280  
Column Research Council, 147, 579  
Columnas:  
bloque de compresión corto, 162  
cargas excéntricas, 161  
procedimientos de diseño para, 164  
cargas sobre, 155, 156  
transversal, 168

cimentación de emparrillado para, 179  
cortantes, 556  
curvaturas, 239  
de elementos, 150  
definición, 141  
dimensión mínima, 144  
discontinuas, 163  
diseño, 153  
procedimientos para, 153  
diseño interior de, 577  
diseño para carga por gravedad, 577  
elementos no rigidizados, 149  
empalmes, 155, 156  
esfuerzo directo, 558  
esfuerzo residual, 141  
esfuerzos, 141  
excentricidad, 141  
exterior, 579  
extremo articulado, 144  
factor de amplificación, 167  
factor de reducción, 165, 167  
factor de seguridad, 145  
fórmula de Euler, 145  
fórmulas:  
interacción modificada, 166  
intensidad de los esfuerzos, 162  
investigación de, 146  
lateral:  
cargas, 168  
deflexión, 168  
método de carga concéntrica equivalente,  
175  
momento en extremo:  
condiciones, 144  
esfuerzos, 166  
momentos inducidos, 163  
nomograma, 579  
pandeo,  
elástico, 145, 146  
esfuerzos, 142  
no elástico, 145, 146  
placas base, 177  
problemas, 152, 156, 174, 175, 179  
programa para, 595  
puntales, 143, 146, 153  
puntos de inflexión, 144  
reducción de carga viva, 155-156  
relación de esbeltez, 143  
relación de esfuerzo, 170  
relaciones ancho-espesor, 149

rigidez, 163  
secciones, 143  
secciones compuestas, 149  
tablas de cargas admisibles, 157-158, 160  
valor K, 150  
Combadura  
en armaduras, 329  
en vigas, 81  
Compactibilidad o Compacidad:  
vigas, definición, 92  
Componentes del desplazamiento, 509  
Compresión, definición, 142  
bloque corto, 141, 162  
miembros en armaduras, 349  
Computadoras:  
compilador acústico, 527  
definición, 469  
forma algorítmica, 525  
Fortran, 563  
lenguajes, 470, 526  
matriz de rotación, 494  
ley de Maxwell, 493  
proceso de solución, 512  
programas:  
PLFRAME, 531, 532, 534  
PLTRUSS, 531, 532, 642  
SADSYS, 532  
subrutinas, DECOMP, SOLVE, MATPRT,  
MATMUL, 624-638  
(TRC), 529  
unidades de cinta magnética, 527  
utilización de, 525  
Cantiliver, vigas en,  
apuntaladas, 403  
cortante, 22  
deflexión, 12  
forma y deflexión, 71  
momento de área, 64  
momento flexionante, 28  
Conectores (sujetadores):  
apoyo y fricción, 190, 192  
cargas, 190  
cortante en el extremo, 197  
distancia al borde, 197  
esfuerzos permisibles, 196  
apoyo, 192, 193, 197  
cortante, 190, 193  
Conexiones:  
área neta, 202  
calibre, 202

carga en el plano de cortantes de sujetador, 216,  
217, 218  
carga en el plano de soldaduras, 234  
carga fuera del plano de soldaduras, 237  
consistencia del diseño, 185  
cortante de bloque, 210  
cortante en placa extrema, 211  
cortante único, 203  
distancia al extremo y al borde, 197, 202  
doble cortante, 205  
esfuerzo del par de torsión, 216  
falla de, 193  
fuerzas de palanca, 222  
placas de cortante, 189  
punzonado, 201  
resistentes al momento, 189-190, 191, 244  
soldadas, 233  
sujetador excéntrico, 215  
tipos de:  
a tope, 188  
alma directa, 189  
ángulos de conexión, 189, 209-211, 241  
asientos de viga, 189, 240  
flexibles, 213  
rigidizados, 220  
en ménsula, 189, 190  
traslape, 188  
Conexiones a tope, 188, 226  
Conexiones en ménsula, 189-190  
Conexiones excéntricas:  
soldadas, 233  
sujetador, 214  
Conexiones resistentes al momento, 189-190, 191,  
244, 593  
dúctiles, 249, 463  
Conference of American Building Officials (CABO),  
3  
Consideraciones arquitectónicas, 2, 537  
planos de diseño, 542-545  
Construcción:  
de cubiertas de techo, 361  
marco arriostrado, 363  
techo de gran claro, 381  
tipos de acero, 184-185, 223  
Construcción con muros de carga, 1  
Construcción reticulada, 1, 2, 13, 537  
Continuidad, 386  
Coordenadas cartesianas, 14, 18  
Cortante:  
alabeo, 138  
columnas, 556



en la base sísmica:  
 coeficientes, 299, 305  
 distribución, 321  
 placas, 189  
 sujetadores:  
 falla de junta, 193  
 tipo de, 190  
 vigas:  
 cargas concentradas, 18-19  
 de alma, 54  
 definición, 16  
 diagramas, 17-22  
 diseño por, 56  
 distribución de, 56  
 esfuerzo permisible, 56  
 esfuerzo torsional, 137  
 esfuerzo unitario promedio, 56  
 falla, 16  
 horizontal, 52  
 intensidad, 53  
 relación ordenada-pendiente, 32  
 resistencia, 52  
 unitaria, 56  
 variación, 18  
 vertical, 52  
 Cortante de bloque, 210  
 Cortante en el extremo, sujetadores, 197  
 Costos:  
 acero y construcción en acero, 8, 10  
 Cubierta ambiental, 2  
 Cubiertas de acero laminadas en frío, 131  
 Cubiertas:  
 metal de calibre ligero, 134  
 Cuerdas, 261, 329  
 de armaduras, 349, 356, 359  
 tipo paralelo, 361  
 Cuerpo libre:  
 concepto, 16  
 diagramas,  
 acciones en el extremo del elemento, 503  
 cargas de junta, 503  
 diseño plástico, 478  
 en el diseño auxiliado por computadora, 478  
 Curva elástica:  
 aplicación de, 69

## D

DECOMP, 624, 661  
 Deflexión:

columnas, lateral, 168  
 de muros y marcos, 266  
 factor de flexibilidad, 266  
 fórmulas, 75-76  
 limitaciones, 59, 79  
 método de la deformación consistente o compatible, 344  
 sismo inducido, 303  
 techos, 81  
 vigas, general, 59  
 principios de área-momento, 60  
 método, 63  
 Deformación, 41, 599  
 Deformación consistente, método de, 386  
 Deformación unitaria, 40, 599-600  
 Descuadre, 362  
 Desplazamiento lateral, 364, 412  
 Determinantes, 614  
 Diafragmas, 259  
 cargas sísmicas, 323  
 cortante longitudinal, 266  
 cubierta de acero, 264-265  
 flexibles, 259, 314  
 fórmula de carga sísmica, 320  
 piso, 252  
 rígidos, 259, 314  
 techo, 310  
 Diseño sísmico, 3, 6, 256  
 arriostramiento cruzado, 314  
 carga lateral equivalente o cortante en la base, 298  
 coeficiente de cortante en la base, 299, 305  
 distribución de fuerza, 313  
 distribuciones del cortante en la base, 321  
 elementos verticales, 314, 319  
 factor de fuerza horizontal, 302  
 factor de importancia, 301  
 factor de zona, 304  
 factor suelo, 304  
 factores de fuerza sísmica, 300  
 introducción a, 295  
 masa discretizada, 317  
 segunda ley de movimiento de Newton, 298  
 Dinteles, 119  
 Diseño límite, definición de, 432  
 aplicación de, 436  
 teoría, 432, 433  
 Distribución de momentos:  
 en el diseño de marcos, 567-572  
 extremo articulado, tratamiento del, 401

extremos articulados simplificados, 401  
 factor de rigidez, 397  
 factores de transporte, 397  
 generalidades, 384  
 momentos inducidos, 399  
 movimiento de apoyos, 403  
 problemas, 395-396  
 procedimiento matemático para, 392  
 teoría de, 398  
 Doble integración, 72  
 Ductilidad, 7

## E

Ecuaciones de equilibrio, 502  
 Ecuaciones de restricción, 508  
 Ecuaciones simultáneas, 473-474  
 Edificios de varios pisos, análisis de viento, 293  
 Eje neutro, 40, 54  
 Elasticidad, teoría de la, 431  
 Elemento:  
 cargas, 523  
 ejes, 487  
 marco prismático, 523  
 matriz de rigidez;  
 armadura, 487  
 marco, 489  
 Electrodos, 183, 224-226  
 Elementos de marcos prismáticos, 523  
 Elementos no rigidizados, 149  
 Elementos rigidizados, 149  
 Elevación de techos, 330  
 Elevadores, 540, 543  
 Eliminación de Gauss, 617  
 Empalmes,  
 columnas, 156-157  
 vigas continuas, 451  
 Encharcamiento, 6, 81, 99  
 Energía cinética del viento, 275  
 Equilibrio estático, 14  
 Escaleras, estructuración, 562  
 Esfuerzo:  
 de fibra, 41  
 de torsión, 216  
 distribución, 41  
 en sujetadores, 143  
 momento en extremo, 166  
 relaciones, en columnas, 170  
 residual, 144  
 Esfuerzo de fibra, 41  
 Esfuerzo de fluencia, 9, 600

Esfuerzo elástico-plástico, 434  
 Esfuerzo unitario, 6  
 Esfuerzos de trabajo, 6-7  
 Esfuerzos permisibles:  
 columnas, 142, 145, 164  
 conectores (sujetadores), 196  
 de trabajo, 6, 7  
 viento, incremento por, 332  
 vigas, 45  
 Espigas soldadas, 182  
 Estructuración:  
 ángulos, 188, 189, 596  
 condiciones de extremo, 151  
 cubierta de acero de calibre ligero, 261  
 diafragmas, 259  
 elementos horizontales, 252  
 elementos verticales, 254  
 escaleras, 563  
 marcos y sistemas primarios, 271  
 planos, 2, 3, 14, 95, 104, 132-133, 554, 560-563, 593  
 puntales diagonales, 366  
 sistemas, 551  
 Estructura cortada, 473, 475

## F

Fachada:  
 conexiones, 573  
 vigas, 189  
 Factor de amplificación, para columnas, 167  
 Factor de carga, 437  
 Factor de flexibilidad, 266  
 Factor de ráfaga, 276  
 Factor de seguridad, 7  
 columnas, 142, 145  
 diseño plástico, 431  
 Factores de fuerza sísmica,  
 302  
 Fijación, junta, 144  
 Flexión (véase Vigas y Columnas)  
 Forma algorítmica, 525  
 Formas de acero de patín ancho, 44  
 Fórmula de Euler, 145  
 resistencia última de columnas, 432  
 Fórmulas:  
 columna, 145  
 de Euler, 145  
 esfuerzo cortante, 53  
 interacción fundamental, 165



- Rayleigh, 303  
 reducción, columnas, 142  
 uso de las fórmulas de vigas, 44  
 viga, 42  
 Fórmulas de reducción, 142  
 FORTRAN:  
   compilador, 615  
   lenguaje, 470  
   programas para álgebra matricial, 593  
 Fuego, 8  
 Fuerza cortante vertical, 52  
 Fuerza interna, 433  
 Fuerzas de palanca, 221  
 Fuerzas laterales:  
   cortantes, 263, 266  
   de terremoto (sísmicas), 251  
   definición, 251  
   desarrollo de, 252  
   por nieve, 251  
   por viento, 251  
   presión del agua, 251  
   presión del suelo, 251  
   torsión, 252  
 G  
 Grado de exactitud, 16  
 Grados de libertad, 485  
 Gráficas, vigas, 116, 117  
 I  
 Impacto, 4  
 International Conference of Building Officials, VI, 3  
   requisitos mínimos de carga viva, 5  
 J  
 Juntas, diseño de, en armaduras, 351  
 L  
 Largueros:  
   diseño de, 342  
   sobre armaduras de techo, 329  
   techo:  
     definición de, 80  
     techo con arriostramiento cruzado, 256  
 Largueros de fachada, 128  
 Lateralmente:  
   vigas apoyadas, 89-90  
   vigas no apoyadas, 99  
 Ley de Hooke, 471, 599  
 Ley de Maxwell, 493  
 Límite elástico, 7, 40  
 Líneas globales de acción, 502  
 Longitud efectiva de columnas, 144  
 LL  
 Lluvia, 3, 6  
 M  
 Marco arriostrado:  
   con varios pisos y varios vanos, 379  
   construcción, 362  
   supuestos de base articulada, 365  
     marcos transversales, 363, 375  
     portales simples, 366  
     tipos, 363  
   supuestos de base fija, 365  
 Marco espacial, 465  
 Marco plano, 471, 474  
 Marco para tomar el viento, 552  
 Marco transversal (véase también marco arriostrado):  
   análisis de, 375  
   esfuerzos del miembro, 375  
   puntales, 364  
 Marcos, 383  
   análisis de, 412  
   análisis por viento, 283, 552  
   componentes de junta, 501  
   componentes de reacción, 408  
   cortantes, 408  
   de dos aguas, 422  
   desplazamiento lateral, 411-412  
   determinado, 408  
   diseño de resistencia última, 453  
   diseño por desplazamiento lateral, 417  
   edificios, 407  
   empuje, 407  
   espacio, 484  
   esqueleto, 537  
   estables, 385  
   factor de carga para marcos continuos, 437  
   factores de corrección, 426  
   grados de libertad, 485  
   indeterminado, 408  
   inestables, 384

- matriz de rigidez de elemento, 489  
 método de equilibrio, 457  
 método del mecanismo, 454  
 momentos, 408  
 planos, 471  
 portal, 511  
 un solo piso, 408  
   análisis de, 414  
 varios pisos, 408  
 (véase también construcción de marcos  
 arriostrados; marcos transversales, y marcos  
 rígidos)  
 Marcos a dos aguas, 422  
   análisis de viento, 290, 292  
   factores de corrección, 426  
 Marcos no arriostrados, 171, 363  
 Materiales de construcción, pesos de, 4  
 Matriz:  
   álgebra, 609  
 Matriz de rotación, 494  
   adición y sustracción, 611  
   ecuaciones simultáneas:  
     regla de Cramer para, 617  
   inversas, 617, 618  
   multiplicación de, 612, 614  
   multiplicación escalar de, 611  
   producto de, 513  
   rotación de, 494  
   subdivisión de, 613, 618  
   transposición, 613  
   tipos de, 610  
 Matrices:  
   método de Cholesky, 621  
   producto condensado, 514  
   rigidez de elemento:  
     armadura, 486  
     marco, 489, 493, 507  
 Mecanismo, 439  
   método, 454  
 Método de Cholesky, 621  
 Método de equilibrio, 456  
 Método de la carga excéntrica equivalente, columnas,  
 175  
 Método de la flexibilidad, 470, 473, 475  
 Método del desplazamiento, 473  
 Miembros a tensión, en armaduras, 350  
 Método de acción:  
   elástico, 43  
   plástico, 434  
 Momento: (véase también Vigas, Columnas)  
   áreas diferenciales, 42  
   ecuaciones, 35  
   en diseño plástico, 443  
   en marcos rígidos, 408  
   extremo fijo, 387-388  
   flexión elástica, 442  
   gradiente, 91  
   inducido, 399  
   inducido en columnas, 163  
   procedimiento matemático para cantilíver  
     apuntalado, 440  
   procedimiento semigráfico para cantilíver  
     apuntalado, 440  
   resistente, 39  
 Momento-área:  
   carga asimétrica, 67  
   método, 60  
   uso de, 389  
 Momento de inercia, 42  
 Momento flexionante  
   columnas, 141, 558  
   diagramas, 24-26  
   elásticos, 442  
   en miembros continuos  
     de armadura, 357  
   en trabes de techo, 586  
   fórmula, 42  
   plásticos, 442  
   vigas, 22-24  
 Momento resistente, 39  
 Multiplicación escalar de matrices, 612  
 Muros:  
   cargas, 549  
   coeficientes de presión de viento, 280  
   exteriores, 546  
   parapetos, 543, 577  
   presión de carga sobre, 128  
 N  
 National Building Code:  
   requisitos mínimos de carga viva, 5  
 National Bureau of Standards, 6  
 National Institute of Building Sciences, 3, 6  
 Nieve:  
   como carga lateral, 251  
   cargas, 3, 6  
   sobre armaduras de techo, 333, 347  
 Nomograma, 510  
 Notación:  
   líneas de acción para elementos de marco plano,  
   492



Notación de Bow, 335, 336  
 aplicación de cargas, 331  
 apoyo extremo, 350  
 arriostramiento, 356  
 carga de nieve sobre, 333  
 cargas en puntos de panel, 344  
 cargas entre puntos de panel, 337  
 diseño:  
   de juntas, 351  
   planos, 353  
   procedimiento, 341  
 elevación, 330  
 espaciales, 484  
 espaciamiento, 330  
 estables, 384  
 flexionamiento y compresión  
   en miembros, 359  
 flexionamiento y tensión directa en miembros, 358  
 grados de libertad, 485  
 matriz de rigidez de elementos, 487  
 miembros a compresión, 358  
 miembros a tensión, 350  
 miembros continuos, 357  
 pendiente, 330  
 plano, 471  
 techo, 329  
 tipo cuerda paralela, 361  
 tipos de, 330

## P

Pandeo:  
 alma, 105  
 diagonal, 56  
 diagonal del alma, 56  
 elástico, 143, 145, 146  
 esfuerzos en columnas, 141, 142  
 inelástico, 145, 146  
 lateral, 86  
 local, 105, 434  
 longitudinal, 90  
 Pandeo lateral, 86  
 Par de torsión, 89  
 Paso:  
   conexiones de sujetador, 202  
   grados de libertad, 484  
   programa de computadora, 619  
 Pendiente:  
   de techos, 330  
 Pesos de materiales de construcción, 4  
 Piso reticulado con riostras cruzadas, 252

## Pisos:

cargas, 548  
 cubierta de acero de calibre ligero, 262  
 cubierta metálica de calibre ligero, 134  
 de armaduras, 252  
 diafragmas, 252  
 estructuración, 131, 132  
   planos, 550-552, 554  
 plantas de edificios, 539, 541, 542, 544, 545  
 Placas de apoyo:  
   bases de columnas, 177  
   para armaduras, 354  
   sobre muros de mampostería, 128  
 Placas de junta, 206, 330, 352  
 Placas de relleno, columnas, 155  
 Plafones suspendidos, 326, 548  
 Plano de carga, 11

## Planos:

de construcción de marcos, 2, 3, 14, 95, 104,  
 132-133, 554, 561-563, 593  
 de piso, 539  
 estructurales, 552

## Portales:

análisis de, 366, 370  
 esfuerzos de miembros, 373  
 método de análisis, 379  
 reacciones, 372  
 vanos múltiples, 364, 369

Presión del suelo, 3

Presión hidrostática, 3

Procedimiento de diseño, vigas, 49

Programa PLFRAME, 531, 624, 647

Programa PLTRUSS, 531, 624, 631, 632, 647

## Programas:

armadura plana, 642  
 DECOMP, 624, 661  
 lenguaje Fortran, 470  
 marco plano, 648  
 para álgebra matricial, 609

Protección contra el fuego, 8

Protección de miembros contra el fuego, 547, 551

## Puntales:

conexión, 206  
 de arrastre, 259  
 definición, 141  
 diseño e investigación de, 153

miembros secundarios, 146

secciones, 143

tabla de cargas admisibles, 160

Punto de fluencia, 7, 433

## R

Radio de giro, 143

## Reacciones:

componentes en marcos, 408  
 redundantes, 384  
 vigas, 13-14

Regla de Cramer, 616

Reglamentos de construcción, 3

cargas vivas, 5  
 modelo, 5

## Relación ancho-espesor:

columnas, 149  
 en diseño plástico, 434  
 vigas, 92

Relación de esbeltez, 143

Relación esfuerzo-deformación, 433, 599

Remaches, 183

## Resistencia:

de soldaduras, 226  
 de sujetadores de:  
   apoyo, 196  
   esfuerzo cortante, 193  
   esfuerzo cortante en extremo, 196  
   tensión, 200

Resistencia de ruptura, 6

## Resistencia última:

definición, 7, 432  
 diseño, 431

Reticula, 484

grados de libertad en retícula espacial, 485  
 sistema para el diseño arquitectónico, 538

## Rigidez:

columnas, 163  
 de miembros, 59  
 matrices:  
   elementos de armadura, 486  
   elementos de marco, 489, 491, 507  
   método de análisis, 470, 473, 478, 480  
 vigas, 1, 2

Rotación de extremo, vigas, 186

## S

## Secciones:

compuestas:  
   columna, 149  
   viga, 44

Secciones asimétricas, 118, 123

## Secciones compuestas:

columnas, 148  
 diseño plástico, 435  
 vigas, 121

## Signos convencionales:

diseño computarizado, 480  
 momento flexionante, 23  
 vigas continuas, 341

## Sistemas estructurales, 485

ambientales, 3, 325  
 descripción analítica, 500  
 ecuaciones de equilibrio, 502  
 elemento en el diseño auxiliado por computadora,  
 523  
 en el plano de cortante de sujetadores, 216  
 en el plano de las soldaduras, 237  
 fuera del plano de cortante de sujetadores, 218  
 fuera del plano de las soldaduras, 237  
 fuerzas de palanca, 222  
 muros, 548  
 panel, 332, 344  
 pisos, 54  
 por nieve y lluvia, 326  
 transversales, 168  
 vivas, 3, 4, 325, 547

## Soldadura:

alma fundente, 128  
 ángulos de conexión, 241  
 arco por gas, 128  
 arco protegido, 128, 183  
 arco sumergido, 223  
 conexión dúctil resistente al momento, 244-249  
 conexiones flexibles de vigas, 240  
 conexiones tipo traslape, 231  
 de cubierta de acero, 262  
 electrogás, 128  
 placas de extremo, 240  
 remates, 228  
 símbolos, 229

## Soldaduras:

carga en el plano de la, 234  
 carga fuera del plano de la, 237  
 resistencia, 226  
 tamaños, 230-231  
 tipos:

batida, 262  
 por ranuras, 226

SOLVE, 624, 661

Southern Building Code Congress, International  
 Code, 3

*Juan José López Aguilar*



cargas por viento, 271  
 requisitos mínimos de carga viva, 5  
 Steel Joist Institute, VI, 6, 671  
 Submatrices, 624, 638, 661  
 Sujetadores a fricción, 192  
 Sujetadores tipo apoyo, 192  
 Sujetadores (ver también Conectores)  
 agujeros para, 191-192  
 falla de, 193  
 pendiente, 201  
 sección bruta y neta, 200, 201  
 valor:  
 valor del remache (RV), 194  
 cortante doble y único, 204, 205  
 valor del tornillo (BV), 194  
 Superposición, 473

## T

Tablas de cargas admisibles:  
 para columnas, 158  
 para puntales, 160  
 Tablas de viguetas de acero:  
 Serie DLH, 685  
 Serie H, 672  
 Serie LH, 680  
 Techo: (véase también Armaduras)  
 armaduras, 329  
 aplicación de cargas, 331  
 carga de nieve sobre, 333  
 carga de viento sobre, 334  
 carga muerta, 334  
 coeficientes de presión del viento, 280  
 construcción de cubierta, 361  
 tipos de, 330  
 arriostramiento cruzado, 253, 255  
 cubierta de acero de calibre ligero, 156  
 de gran claro, 381  
 diafragma, 267  
 elevación, 330  
 inclinación, 330  
 largueros, 80  
 detalles de apoyo, 128  
 pendiente, 330  
 procedimiento de diseño, 341  
 sistema de estructuración, 95  
 Temperatura, efectos de la, 7  
 Tirantes, 89

## Tornillos:

definición, 182

en apoyo, 192  
 en cortante simple, 193-194  
 en doble cortante, 193-194  
 en tensión y cortante, 218  
 esfuerzo de torsión sobre, 217  
 esfuerzo permisible, 196  
 montaje, 155  
 valor (BV), 194  
 Tornillos de erección, 155  
 Torsión, 89, 127, 135  
 esfuerzo cortante, 137  
 sismo inducido, 252  
 St. Venant, 138  
 viento inducido, 252  
 Torre, 364  
 Trabajo virtual, 454  
 Trabes:  
 armadas, 124  
 diseño de, 558  
 en construcción de marcos, 95  
 techo, 586  
 (véase también Vigas)  
 Trabes armadas, 123

## U

Uniform Building Code:  
 capacidad de apoyo del concreto, 177  
 conexiones dúctiles resistentes al momento, 463  
 especificaciones para sismo, 271  
 procedimiento de diseño sísmico, 296  
 requisito mínimo de carga viva, 5  
 sísmica:  
 factores de fuerza, 302  
 fuerza cortante en la base, 305  
 mapas de riesgo zonal, 297  
 viento:  
 coeficientes, 302  
 especificaciones, 271

## V

Valor de remache (RV), 194  
 Valor K, columnas, 151  
 análisis de armadura para, 251  
 carga estática equivalente, 269  
 cargas de panel, 554  
 cargas sobre armaduras de techo, 334  
 velocidad, 279  
 coeficientes, 276, 279, 280

coeficientes de exposición, 276  
 coeficientes de factor de estancamiento del viento, 282  
 coeficientes de presión de muro externo, 280  
 coeficientes de presión de techo externo, 280  
 como una carga lateral, 251  
 conexión, 594  
 definición, 269  
 diseño por, 553, 585, 586  
 energía cinética, 275  
 factor de importancia (I), 273  
 factor de ráfaga, 276, 278  
 gradiente:  
 altura, 271  
 velocidad, 272  
 interior:  
 presión, 270  
 succión, 270  
 longitudinal, 290  
 mapa básico de velocidad del viento, 274  
 presión, 275  
 reglamentos, 276  
 temperatura, 275  
 torsión, 252  
 transversal, 287  
 Uniform Building Code:  
 coeficientes de altura, exposición y factor de ráfaga, 282  
 velocidad, 271  
 Viento (véase también fuerzas laterales), 3, 6  
 Vigas:  
 apoyadas lateralmente, 89  
 asientos, 188, 212, 220, 240  
 atiesadores, 108  
 atiesadores de alma, 245  
 cantilíver, 12, 22  
 cantilíver apuntalado, 403  
 cargas, 12, 13, 14  
 trapezoidales, 13  
 última, 437, 439  
 uniformes, 12, 13  
 variables uniformemente, 13  
 cargas concentradas equivalentes, 113-114  
 cargas transversales, 11-12  
 combadura, 81  
 compacidad, definición, 92  
 conexiones flexibles de viga, 240  
 continuas, 12, 383, 447  
 continuidad, 386  
 cortante horizontal/vertical, 32  
 cortante (véase Fuerza cortante)

definición, 11  
 deflexión, 59  
 fórmulas, 75-76  
 método área momento, aplicación del, 63  
 método de curva elástica, 69  
 principios de área momento, 60  
 deformación unitaria, 40  
 diagrama de flujo, 88-89  
 diagramas, 115-116  
 diagramas, 29-31, 601-607  
 análisis de, 31-35  
 diagramas de cuerpo libre, 31  
 diagramas de momento, 24-37  
 dinteles, 119  
 distribución de momento (véase Distribución de momento)  
 empalmadas, 451  
 en marcos, 95  
 en voladizo, 12, 16, 21  
 equilibrio estático, 14  
 esfuerzo de fibra, 40  
 esfuerzo directo en, 556  
 esfuerzos permisibles, 43, 88-89  
 estables, 384  
 estáticamente indeterminadas, 12  
 estructuración de piso, 132  
 extremo restringido, (col.), 163  
 factor de carga, 437  
 falla por cortante, 16  
 flexión, 11  
 ecuaciones de momentos, 35  
 esfuerzo, 6  
 momento, 22, 557  
 respecto a dos ejes, 125  
 formas y secciones, 43, 44, 118  
 fórmula, 42  
 uso de, 45  
 fórmula de la flexión, 42  
 fórmula de torcimiento, 89  
 inclinadas, 125  
 método de diseño según el área del patín o cuerda, 125  
 módulo de elasticidad, 41, 599-600  
 módulo de sección, 43, 434  
 momento (véase también Momento):  
 ecuaciones, 35  
 extremo fijo, 388  
 gradiente, 90  
 momentos permisibles en, gráfica de, 116  
 pandeo, 11, 56



lateral, 86  
 peso de, en diseño, 50  
 placas de apoyo, 128  
 placas de extremo, 240  
 proporciones, 92  
 radio:  
   de curvatura, 40, 61  
   de giro, 99  
 reacciones, 13, 14  
 relación ancho-espesor, 92, 434  
 restricción de extremo, 387  
 restringidas, 12  
 rotación de extremo, 186  
 sección sin apoyo, 118, 123  
 secciones asimétricas, 118  
 secciones compuestas, 121  
 simples, 11  
 sin apoyos laterales, 99  
 tabla, 110  
 tablas de diseño, 108

tipos, 11  
 torcimiento, 11  
 torsión, 135  
 trabes armadas, 124  
 vigas de fachada, diseño de, 572, 573-576  
 Viga restringida, definición de, 12  
 Vigas continuas (véase Vigas)  
 Vigas en voladizo:  
   cortante, 20-21  
   definición, 12, 16  
   momento flexionante, 28  
 Vigas simples:  
   definición, 11  
   deflexión, 74  
 Viguetas:  
   arriostramiento, 134  
   de acero de alma abierta, 132  
 Viguetas de acero, diseño de, 138  
 Viguetas de barras, 132 (véase también Viguetas de alma abierta, y Viguetas de acero)

-000-

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DÍA 10 DE FEBRERO DE 1992  
 EN LOS TALLERES DE PROGRAMAS EDUCATIVOS,  
 S.A. DE C.V. CHABACANO 65, LOCAL "A"  
 MÉXICO 8, D.F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 2,000 EJEMPLARES  
 Y SOBANTES PARA REPOSICIÓN

## Obras afines:

### DISEÑO DE ACERO ESTRUCTURAL

Joseph E. Bowles

Aborda los temas básicos de acero estructural que necesitan el estudiante para diseñar miembros estructurales de acero. Analiza también los elementos de diseño tanto para edificios como de puentes.

Los capítulos que contiene son: elementos de diseño; marcos; armaduras y puentes; comportamiento elástico-plástico y por pandeo de acero estructural; diseño de vigas a flexión; diseño de miembros a tensión; columnas y pilas axialmente cargadas; diseño de vigas-columnas; conexiones atornilladas y remachadas; conexiones soldadas y trabes armadas.

Por la secuencia lógica de sus temas, éste es un adecuado texto introductorio al diseño de las estructuras en referencia de las carreras de Ingeniería Civil y Arquitectura.

### DISEÑO PRÁCTICO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

Delfino Rodríguez Peña

Su objetivo es presentar, al Ingeniero Civil Estructuralista recién egresado, los recursos necesarios para el diseño de estructuras de acero de las plantas industriales, en la concepción, aplicación y ejecución de la técnica profesional de la ingeniería de detalle.

Se trata de un libro con enfoque práctico que muestra el planteamiento del diseño de una estructura, observando sus componentes minuciosamente.

Ello, como resultado de los 18 años de experiencia del autor, quien sugiere, durante el desarrollo temático, los criterios de diseño, cómo optimizar los tipos de perfiles y materiales, cómo transferir el diseño al lenguaje gráfico propio de la construcción, etc.; además de enfatizar en el arreglo estructural y en el diseño de los elementos estructurales y sus conexiones mediante el uso de diagramas de flujo.

### DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO

Boris Bresler

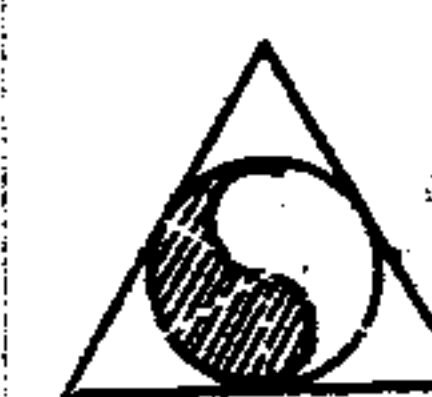
T.Y. Lin

John B. Scalzi

Expone el comportamiento, análisis y diseño de las estructuras de acero, sus miembros y conexiones; asimismo, relaciona el diseño con la práctica.

De igual forma, presenta los fundamentos de la mecánica estructural, la conducta de las estructuras reales y su relación con las estructuras ideales, conjuntamente con los requisitos prácticos que deben satisfacer tales como: fabricación

arquitectura  
 básica  
 de construcción  
 P  
 diseño  
 ingeniería



**Taller**  
**ABZ**

MANTENIMIENTO INDUSTRIAL E INSTALACIONES