

Santillana

Año 2011

TEXTO PARA EL ESTUDIANTE

2° Educación Media

MATEMÁTICA

TEXTO PARA EL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA

MARIO ZANARTU NAVARRO
FLORENCIA DARRIGRANDI NAVARRO
MAURICIO RAMOS RIVERA

2°
Educación
Media



AÑO 2011

EDICIÓN ESPECIAL PARA
EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN



Santillana

TEXTO PARA EL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA



MARIO ZAÑARTU NAVARRO

LICENCIADO EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA,
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.
MAGÍSTER EN HISTORIA DE LA CIENCIA: CIENCIA, HISTORIA Y SOCIEDAD,
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA.

FLORENCIA DARRIGRANDI NAVARRO

LICENCIADA EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN ESTADÍSTICA,
MAGÍSTER EN ESTADÍSTICA,
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.

MAURICIO RAMOS RIVERA

LICENCIADO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA
LICENCIADO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA
UNIVERSIDAD DE CHILE



El material didáctico **Matemática 2º**,
para **Segundo Año de Educación Media**, es
una obra colectiva, creada y diseñada por el
Departamento de Investigaciones Educativas
de Editorial Santillana, bajo la dirección de:
MANUEL JOSÉ ROJAS LEIVA

COORDINACIÓN DEL PROYECTO:
EUGENIA ÁGUILA GARAY

COORDINACIÓN ÁREA MATEMÁTICA:
VIVIANA LÓPEZ FUSTER

EDICIÓN:
JAVIERA SETZ MENA

AYUDANTE DE EDICIÓN:
ALDO PEREIRA SOLIS

AUTORES:
MARIO ZAÑARTU NAVARRO
FLORENCIA DARRIGRANDI NAVARRO
MAURICIO RAMOS RIVERA

REVISIÓN DE ESPECIALISTA:
JOSÉ CORTÉS OTÁROLA
MANUEL SALAZAR CÓRDOVA

CORRECCIÓN DE ESTILO:
ISABEL SPOERER VARELA
ASTRID FERNÁNDEZ BRAVO

DOCUMENTACIÓN:
PAULINA NOVOA VENTURINO
MARÍA PAZ CONTRERAS FUENTES

La realización gráfica ha sido efectuada
bajo la dirección de:
VERÓNICA ROJAS LUNA

COORDINACIÓN GRÁFICA:
CARLOTA GODOY BUSTOS

COORDINACIÓN LICITACIÓN:
XENIA VENEGAS ZEVALLOS

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN:
XIMENA MONCADA LOMEÑA
MARIELA PINEDA GÁLVEZ

FOTOGRAFÍAS:
ARCHIVO SANTILLANA

CUBIERTA:
XENIA VENEGAS ZEVALLOS

PRODUCCIÓN:
GERMÁN URRUTIA GARÍN

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

© 2009, by Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones,
Dr. Aníbal Ariztía 1444, Providencia, Santiago (Chile)
PRINTED IN CHILE
Impreso en Chile por World Color Chile S.A.
ISBN: 9 - 7895 - 15 - 1566 - 6
Inscripción N° 186.188
www.santillana.cl

Referencias de los Textos *Educación Matemática 2 y 3*, Educación Media, de los autores:
Ángela Baeza Peña, María José García Zattera, Marcia Villena Ramírez, Marcela Guerra Noguera,
Patricia Urzúa Figueroa y Rodrigo Hernández Reyes. Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones, Santiago, Chile, 2005.

La materialidad y fabricación de este texto está certificada por el IDIEM – Universidad de Chile.

Presentación

El texto **Matemática Segundo Año Medio** ha sido creado y diseñado pensando en tus intereses, gustos e inquietudes.

Este año profundizarás algunos de los temas vistos en tu Primer Año de Educación Media con el estudio de los números reales y de las expresiones algebraicas fraccionarias. Además, te presentamos una Unidad de sistemas de ecuaciones lineales que te permitirá comprender, modelar y resolver situaciones cercanas a la vida diaria.

En el estudio de la Geometría, podrás profundizar tus conocimientos relacionados con la semejanza de figuras planas, incluyendo los teoremas de Thales y de Euclides, y con la circunferencia, tanto respecto de las relaciones entre sus ángulos, como de las relaciones métricas de sus trazos.

Te presentamos una Unidad de Datos y azar cuyo estudio te aportará conceptos para el análisis e interpretación de la información entregada por los medios de comunicación y para manejar recursos objetivos para fundamentar tus opiniones.

Te invitamos a que, junto a tus compañeros y compañeras, descubras, deduzcas, hagas conjeturas, inventes y resuelvas problemas usando otras estrategias, distintas a las que planteamos en este Texto, de manera que seas un constructor de tu aprendizaje matemático.

Índice

12	Unidad 1: NÚMEROS Y RAÍCES
14	¿CUÁNTO SABES?
16	Números racionales en la recta numérica
18	Números irracionales
20	Números reales
22	Aproximación de un número irracional
24	MI PROGRESO
25	Raíces cuadradas y raíces cúbicas
27	Ubicación de raíces en la recta numérica
29	Irracionalidad de algunas raíces cuadradas
31	Raíces enésimas
33	Cálculo de raíces enésimas y sus propiedades
35	Relación entre raíces enésimas y potencias de exponente racional
37	Situaciones que involucran raíces
41	MI PROGRESO
42	Logaritmos
46	Propiedades de los logaritmos
48	Propiedades de las operaciones de los logaritmos
50	Ecuaciones logarítmicas
53	Aplicaciones de las ecuaciones logarítmicas
55	Herramientas tecnológicas
59	MI PROGRESO
60	CÓMO RESOLVERLO
62	EN TERRENO
64	SÍNTESIS DE LA UNIDAD
66	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

68

Unidad 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

70 — ¿CUÁNTO SABES?

72 — Fracciones algebraicas

74 — Comparación de fracciones algebraicas

76 — Análisis de fracciones algebraicas

78 — Restricciones en fracciones algebraicas

79 — Herramientas tecnológicas

80 — Simplificación de fracciones algebraicas

82 — Multiplicación de fracciones algebraicas

84 — División de fracciones algebraicas

86 — MI PROGRESO

87 — Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

89 — Adición de fracciones algebraicas

91 — Sustracción de fracciones algebraicas

93 — Ecuaciones que involucran fracciones algebraicas

95 — Situaciones que involucran fracciones algebraicas

97 — MI PROGRESO

98 — CÓMO RESOLVERLO

100 — EN TERRENO

102 — SÍNTESIS DE LA UNIDAD

104 — EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

106

Unidad 3: SISTEMAS DE ECUACIONES

108 — ¿CUÁNTO SABES?

110 — Ecuaciones lineales con dos incógnitas

112 — Planteo de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

114 — Método gráfico

116 — Herramientas tecnológicas

118 — Análisis de las soluciones en el plano cartesiano

120 — MI PROGRESO

121 — Método de igualación

123 — Método de sustitución

125 — Método de reducción

127 — Análisis algebraico sobre la existencia de las soluciones

129 — Pertinencia de las soluciones

131 — Otros sistemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales

133 — MI PROGRESO

134 — CÓMO RESOLVERLO

136 — EN TERRENO

138 — SÍNTESIS DE LA UNIDAD

140 — EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

142

Unidad 4: SEMEJANZA

144

¿CUÁNTO SABES?

146

Semejanza de figuras

148

Semejanza de triángulos: criterio AA

150

Semejanza de triángulos: criterio LLL

152

Semejanza de triángulos: criterio LAL

154

Análisis de semejanza en figuras planas

156

Aplicación de la semejanza
en modelos a escala

158

MI PROGRESO

159

Teorema de Thales

162

Teorema general de Thales

163

Herramientas tecnológicas

165

División de un trazo en una razón dada

167

Teorema de Euclides

169

Aplicaciones del teorema de Euclides

171

Homotecia

174

Herramientas tecnológicas

175

MI PROGRESO

176

CÓMO RESOLVERLO

178

EN TERRENO

180

SÍNTESIS DE LA UNIDAD

182

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

184	Unidad 5: CIRCUNFERENCIA
186	¿CUÁNTO SABES?
188	Medición de arcos
190	Ángulos del centro y ángulos inscritos
194	Ángulos semi-inscritos
196	MI PROGRESO
197	Ángulos interiores y exteriores a una circunferencia
199	Proporcionalidad entre las cuerdas de una circunferencia
201	Proporcionalidad entre las secantes de una circunferencia
203	Proporcionalidad entre las secantes y tangentes de una circunferencia
205	MI PROGRESO
206	CÓMO RESOLVERLO
208	EN TERRENO
210	SÍNTESIS DE LA UNIDAD
212	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

214	Unidad 6: DATOS Y AZAR
216	¿CUÁNTO SABES?
218	Medidas de dispersión
222	Medidas de dispersión para datos agrupados
224	Comparación de dos o más conjuntos de datos
226	Homogeneidad y heterogeneidad
228	Muestreo aleatorio simple
230	Herramientas tecnológicas
232	MI PROGRESO
233	Conjuntos
235	Técnicas de conteo
239	Regla de Laplace
241	Probabilidad de la unión
243	Probabilidad de la intersección
247	MI PROGRESO
248	CÓMO RESOLVERLO
250	EN TERRENO
252	SÍNTESIS DE LA UNIDAD
254	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD
256	SOLUCIONARIO
271	BIBLIOGRAFÍA

Organización del Texto

Te damos la bienvenida a este nuevo año escolar y queremos apoyarte en tu crecimiento y desarrollo con este Texto, que te entregará herramientas para enfrentarte de mejor manera al mundo que te rodea, y te invita a comprender que la **Matemática** es parte de él.

A través de sus **6 unidades** te enfrentarás a diversas situaciones, en las que podrás explorar, aprender, construir y consolidar conceptos relacionados con números, álgebra, geometría, datos y azar. En ellas encontrarás las siguientes páginas y secciones:

Páginas de inicio



EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A...

En esta sección conocerás los principales objetivos que se espera que logres con el desarrollo de la unidad.

CONVERSEMOS DE...

A través de una introducción al tema de la unidad, conectamos elementos e imágenes de la vida diaria con el contenido que trabajarás. Además, encontrarás preguntas relacionadas con la imagen y con los contenidos de la unidad que te permitirán exponer tus ideas, dar opiniones y argumentar a partir de tus experiencias.

¿CUÁNTO SABES?

En esta sección, te invitamos a resolver ejercicios y problemas que te ayudarán a evaluar tus conocimientos y a recordar lo que aprendiste en años anteriores y que serán la base para el desarrollo de la unidad.

¿Cuánto sabes?

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

1. Resuelve los siguientes ejercicios con fracciones y simplifica cada uno que sea necesario.

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$

2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

- La suma de fracciones cumple con las propiedades asociativa y conmutativa.
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$, entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.
- Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$, entonces $\frac{a}{b} > 0$.
- Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$, entonces $\frac{a}{b} < 0$.
- La multiplicación de fracciones cumple con las propiedades conmutativa y asociativa.

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

¿QUÉ DEBES RECORDAR?

Para sumar o restar fracciones con igual denominador, se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador.

Para sumar o restar fracciones con distintos denominadores, se puede simplificar o simplificar hasta obtener fracciones equivalentes con igual denominador y luego, sumamos o restamos.

Al multiplicar fracciones, se obtiene una fracción cuyo numerador corresponde al producto de los numeradores y cuyo denominador, al producto de los denominadores.

En general, si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Para dividir fracciones, se puede multiplicar la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda.

En general, si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Algunas factorizaciones y productos notables son:

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (cuadrado de binomio)
- $(a \pm b)(a \mp b) = a^2 - b^2$ (suma por su diferencia)
- $(a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$ (producto de dos binomios con un término común)
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (suma y diferencia de cubos)

¿QUÉ DEBES RECORDAR?

Podrás activar tus conocimientos previos a través de un resumen que incluye los principales conceptos trabajados en años anteriores y que te servirán como apoyo para los aprendizajes que se espera que logres en la unidad.

Páginas de desarrollo

ANALICEMOS...

Por medio de preguntas, trabajarás el razonamiento, explorarás el contenido matemático que aprenderás, pondrás en práctica lo que ya sabes, compartirás tus ideas y extraerás conclusiones.

Fracciones algebraicas

Ante de iniciar cuatro vueltas a la pista de atletismo de tu colegio, los alumnos se acuerdan de que se detendrá el reloj en la primera vuelta. ¿Qué hora será el reloj, considerando $x = 5$ segundos en la segunda, para cada vuelta se suma un minuto y se detiene el reloj en la tercera vuelta?

ANÁLISIS...

- Si se detiene el reloj en la primera vuelta, ¿qué hora será el reloj?
- Si se detiene el reloj en la segunda vuelta, ¿qué hora será el reloj?
- Si se detiene el reloj en la tercera vuelta, ¿qué hora será el reloj?
- Si se detiene el reloj en la cuarta vuelta, ¿qué hora será el reloj?

Si los datos de la situación anterior se organizan en una tabla, se obtiene:

	Primeras vueltas	Segunda vuelta	Tercera vuelta	Cuarta vuelta
Primeras vueltas	x	x	x	x
Segunda vuelta	x	x	x	x
Tercera vuelta	x	x	x	x
Cuarta vuelta	x	x	x	x

Luego, las expresiones $\frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}$ representan la rapidez de las vueltas. Las expresiones $\frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}$ representan la rapidez de las vueltas. Las expresiones $\frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}$ representan la rapidez de las vueltas. Las expresiones $\frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}$ representan la rapidez de las vueltas.

ANÁLISIS...

- Si se detiene el reloj en la primera vuelta, ¿qué hora será el reloj?
- Si se detiene el reloj en la segunda vuelta, ¿qué hora será el reloj?
- Si se detiene el reloj en la tercera vuelta, ¿qué hora será el reloj?
- Si se detiene el reloj en la cuarta vuelta, ¿qué hora será el reloj?

Si los datos de la situación anterior se organizan en una tabla, se obtiene:

	Primeras vueltas	Segunda vuelta	Tercera vuelta	Cuarta vuelta
Primeras vueltas	x	x	x	x
Segunda vuelta	x	x	x	x
Tercera vuelta	x	x	x	x
Cuarta vuelta	x	x	x	x

Luego, las expresiones $\frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}$ representan la rapidez de las vueltas. Las expresiones $\frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}$ representan la rapidez de las vueltas. Las expresiones $\frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}$ representan la rapidez de las vueltas. Las expresiones $\frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}$ representan la rapidez de las vueltas.

EN TU CUADERNO

1. Calcula cuál sería la rapidez de Ana en cada vuelta suponiendo ahora que en la primera vuelta se detiene el reloj.

2. Determina el valor de las siguientes fracciones algebraicas si $a = 1, 2, 3, 4, 5$.

3. Observa el siguiente ejemplo:

Las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ son generadas por la fracción algebraica $\frac{1}{n^2 + 1}$ porque se obtienen al reemplazar $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ y n respectivamente.

Encuentra la fracción algebraica que genere las siguientes fracciones en cada caso:

a. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$

b. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$

EN TU CUADERNO

Resolverás variadas actividades para ir construyendo los conceptos y reforzando así tu aprendizaje.

EN RESUMEN

Encontrarás explicaciones, formalizaciones o definiciones que destacan y precisan lo que vas aprendiendo.

GLOSARIO

Te presentará nuevos términos matemáticos relacionados con el contenido que se está desarrollando.

Restricciones en fracciones algebraicas

Podría haberse analizado la fracción algebraica $\frac{1}{x^2 - 1}$ cuando se obtienen valores positivos y negativos de esta expresión.

ANÁLISIS...

- Si se analiza el denominador, ¿cómo son los valores que se obtienen para la expresión dada? ¿positivos o negativos? ¿positivos o negativos?
- ¿Cómo son los valores que se obtienen para la expresión dada? ¿positivos o negativos? ¿positivos o negativos?
- ¿Cómo son los valores que se obtienen para la expresión dada? ¿positivos o negativos? ¿positivos o negativos?

Para obtener valores de x y y de la siguiente tabla:

Valor de x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{x^2 - 1}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$
Resultado	0.0417	0.0667	0.125	0.3333	Infinito	-Infinito	Infinito	0.3333	0.125	0.0667	0.0417

Según los valores que aparecen en la fila de los resultados, se observa que:

- Cuando $x = -5, -4, -3, -2, -1$, el valor de la expresión es 0.
- Si x es positivo y menor que 1, el resultado es un número menor que 1.
- Si x es negativo y mayor que -1, el resultado es un número menor que 1.
- Si x es positivo y mayor que 1, el resultado es un número mayor que 1.
- Si x es negativo y mayor que -1, el resultado es un número mayor que 1.
- Cuando $x = 0$, la expresión no está definida, y se dice que tiene una restricción.

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

En esta actividad, aprenderás cómo analizar expresiones algebraicas y obtener sus valores utilizando una planilla de cálculo como Excel.

Primero, debes familiarizarte con el procedimiento para analizar fórmulas, y la manera de reemplazar valores en ellas. Considera, por ejemplo, la fórmula $A2 = A1 + 1$.

- Selecciona en la celda A2 y escribe un número real.
- Continúa escribiendo la fórmula, reemplazando el valor de la celda A1 por el valor que deseas.
- El número de la celda donde se encuentra la fórmula.
- Apreséntate el resultado de reemplazar en la fórmula el valor que deseas.

Ahora estás en condiciones de analizar fracciones algebraicas. Como ejemplo considera la expresión $\frac{1}{x^2 - 1}$.

En una planilla de cálculo como Excel, haz lo siguiente:

- En la columna A escribe, hacia abajo, una serie de números, los cuales pueden ser enteros, fracciones, positivos o negativos. Por ejemplo, escribe en la celda correspondiente, por ejemplo: A2.
- Luego en B1 escribe la siguiente fórmula: $=1/(A2^2 - 1)$. Lo que con esta fórmula la fórmula, al escribir, aparece el valor de la expresión que aparece en el resultado de reemplazar en la expresión el valor que deseas.

A continuación, copia el resultado que aparece en B1 de manera que aparezca debajo del valor que deseas reemplazar. Lo que hace la planilla de cálculo es reemplazar la fórmula escrita en B1 por el valor que deseas reemplazar. Lo que hace la planilla de cálculo es reemplazar la fórmula escrita en B1 por el valor que deseas reemplazar. Lo que hace la planilla de cálculo es reemplazar la fórmula escrita en B1 por el valor que deseas reemplazar.

Ejemplos:

1. $\frac{1}{x^2 - 1}$

2. $\frac{1}{x^2 - 1}$

3. $\frac{1}{x^2 - 1}$

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Aprenderás a utilizar planillas de cálculo o programas computacionales.

Resolverás actividades que te permitirán evaluar tu progreso en el logro de los aprendizajes.

Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

Unidad 3

PROBLEMA

1. Ordena los siguientes triángulos en orden de mayor a menor, considerando sus variaciones en sus valores propios:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

2. Determina los valores de a y b para los cuales se anulan los siguientes triángulos. Luego, determina los valores para los cuales quedan negativos:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

3. Determina los valores de a y b para los cuales los siguientes triángulos quedan positivos:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

4. Calcula los siguientes multiplicaciones algebraicas:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

5. Calcula los siguientes divisiones algebraicas:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

6. Calcula los siguientes productos algebraicos:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

7. Calcula los siguientes divisiones algebraicas:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

8. Calcula los siguientes productos algebraicos:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

9. Calcula los siguientes divisiones algebraicas:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

10. Calcula los siguientes productos algebraicos:

$$a. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$b. \frac{1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

$$c. \frac{3b-1}{2} - \frac{b-1}{2}$$

Después de medir un terreno agrícola en sus áreas, Carlos, María y sus compañeros obtuvieron los siguientes valores entre otros. Como se muestra, cada uno calculó las variaciones en los valores propios de los triángulos, y se basó en los triángulos medidos a la suma del área y el ancho del rectángulo.

ANÁLISIS

• Si los valores propios de cada forma fueron para cubrir una misma área, ¿podría ser la misma área que puede cubrir con triángulos de una misma forma?

• ¿Es posible encontrar el mismo número común múltiplo entre las expresiones algebraicas de las variaciones propias? ¿por qué?

En la siguiente actividad en este documento se te muestra para qué puede calcular con triángulos de una misma forma.

Considera que a y b son el ancho y la altura del triángulo en a y b metros. En la siguiente actividad $a = 8$ metros y $b = 2$ metros.

Área del triángulo: $a \cdot b = ab$

$$\text{Ancho del triángulo: } \left[\frac{a-b}{2} \right] \cdot \left[\frac{b-a}{2} \right] = \frac{a^2 - ab - ab + b^2}{4}$$

Área, es el cálculo del área de ambas expresiones. Una buena idea es factorizar las expresiones algebraicas, o bien, evaluar los valores de a y b en las expresiones algebraicas. Si $a = 8$ metros y $b = 2$ metros, el área es $ab = 16$ metros cuadrados. Si $a = 8$ metros y $b = 2$ metros, el área es $\frac{a^2 - ab - ab + b^2}{4} = \frac{64 - 16 - 16 + 4}{4} = \frac{36}{4} = 9$ metros cuadrados.

Como antes de las expresiones de los triángulos comunes, hay que seguir los factores para no considerar más valores de las respectivas. Observa.

1. Encuentra el menor $a^2 - ab - ab + b^2$. Factorizando:

$$a^2 - ab - ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

Los factores que contienen $a^2 - ab - ab + b^2$ es $(a-b)$ y $(a-b)$ y por tanto el menor $a^2 - ab - ab + b^2$ es $(a-b)^2 = (8-2)^2 = 36$.

2. Encuentra el menor $a^2 - ab - ab + b^2$. Factorizando:

$$a^2 - ab - ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

Los factores que contienen $a^2 - ab - ab + b^2$ es $(a-b)$ y $(a-b)$ y por tanto el menor $a^2 - ab - ab + b^2$ es $(a-b)^2 = (8-2)^2 = 36$.

$$a^2 - ab - ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

RECUERDA QUE...

Te recordará un contenido o procedimiento ya aprendido y necesario para lograr tus nuevos aprendizajes.

Páginas de cierre

CÓMO RESOLVERLO

En estas dos páginas observarás dos problemas resueltos paso a paso a través de una determinada estrategia, podrás practicar la estrategia utilizada o aplicar otras que te permitan encontrar la solución. Eso sí, en Matemática siempre hay más de un camino para resolver un problema.

[illegible]

NO OLVIDES QUE...

Te recordará que debes revisar tus procedimientos, analizar la pertinencia y consistencia de las soluciones, entre otras.

A partir de una situación desarrollada en un contexto real o laboral, desarrollarás (primero individualmente y luego en equipo) actividades que te permitirán aplicar lo que aprendiste en la unidad.

En terreno

Ley de enfriamiento de Newton

Newton afirma que el enfriamiento de los cuerpos depende proporcionalmente de la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente. En otras palabras, si el cuerpo está a una temperatura T_c y el medio ambiente a una temperatura T_a , la velocidad de enfriamiento $\frac{dT_c}{dt}$ es proporcional a $T_c - T_a$.

La ley de enfriamiento de Newton puede expresarse matemáticamente como:

$$\frac{dT_c}{dt} = -k(T_c - T_a)$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo y del medio ambiente.

Esta ley es válida para cuerpos que se enfrían o calientan en un medio homogéneo y que no están sometidos a radiación o convección.

Investigación

Anexo trabajo en grupo de personas

- Comprobar la ecuación obtenida en el trabajo integrando y derivar sobre T_c obteniendo así la ecuación diferencial en la que T_c es una función de t .
- Derivar T_c con respecto a t obteniendo una ecuación de primer orden en T_c , que sea una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.
- Calcular el valor de k en el experimento, utilizando las condiciones del problema. Discutir.
- Calcular el tiempo necesario para que el cuerpo se enfríe a una temperatura dada.
- Calcular el tiempo necesario para que el cuerpo se caliente a una temperatura dada.

En tu cuaderno

- Con ayuda de una calculadora y usando la aproximación $e \approx 2.71828$, encuentra el valor de T_c en $t = 10$ minutos para el modelo de enfriamiento.
- Usando, nuevamente, una aproximación al valor de la temperatura del cuerpo humano, ¿cuál es el valor de T_c en $t = 10$ minutos?
- ¿El cuerpo está calentándose o enfriándose?
- ¿Cuánto tiempo le tomará al cuerpo humano para alcanzar la temperatura ambiente?
- ¿Cuánto tiempo le tomará al cuerpo humano para alcanzar la temperatura ambiente si el cuerpo humano está a una temperatura de 37°C en $t = 0$ minutos?
- ¿Cuánto tiempo le tomará al cuerpo humano para alcanzar la temperatura ambiente si el cuerpo humano está a una temperatura de 37°C en $t = 0$ minutos?

Evaluación final

- Comprobar las ecuaciones obtenidas en el trabajo integrando y derivando, ¿qué obtienes los mismos valores? ¿Cuánto te ha costado resolverlos?
- ¿Qué sabes k el tiempo que tarda el cuerpo en enfriarse a una temperatura dada?
- ¿Qué sabes k el tiempo que tarda el cuerpo en calentarse a una temperatura dada?
- ¿Qué sabes k el tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar la temperatura ambiente?
- ¿Qué sabes k el tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar la temperatura ambiente si el cuerpo humano está a una temperatura de 37°C en $t = 0$ minutos?
- ¿Qué sabes k el tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar la temperatura ambiente si el cuerpo humano está a una temperatura de 37°C en $t = 0$ minutos?

Este es un espacio para que construyas tu mapa conceptual de todo lo trabajado en la unidad a partir de algunos conceptos fundamentales. También responderás preguntas de verdadero o falso y actividades de desarrollo para evaluar lo que has aprendido en la unidad.

Síntesis de la Unidad

Unidad 2

A continuación, se presentan los contenidos fundamentales indagados en la unidad. Conéctalos con los otros temas correspondientes, en los recuadros. No olvides apoyarte en la posición de colores que indica las relaciones que hay entre los conceptos.

**Exposiciones algebraicas
factorizadas**

```

    graph TD
      A[Exposiciones algebraicas factorizadas] --> B[Análisis]
      A --> C[Ensayos]
      A --> D[Simplificación]
      A --> E[Orden]
      A --> F[suma de exposiciones algebraicas]
      A --> G[Reestructuras]
      A --> H[Multiplicación y división]
      B --> I[Problemas]
      C --> I
      D --> I
      E --> I
      F --> I
      G --> I
      H --> I
      I --> J[Adición y sustracción]
  
```

1. Ordena a las exposiciones algebraicas sus verdaderos o falsos. Justifica tus respuestas.

- Para simplificar una expresión algebraica, basta dividir numerador y denominador por su máximo común divisor.
- La función algebraica $\frac{x^2 - 11x^3}{3x^2 + 75x + 125}$ es irreducible.
- La función algebraica $\frac{x^2 - 1}{3x^2 + 75x + 125}$ es irreducible en \mathbb{R} o en \mathbb{C} cuando se suman por tal valor de x .
- La función $\frac{x^2 - 1}{3x^2 + 75x + 125}$ es mayor que la función $\frac{x^2 - 1}{3x^2 + 75x + 125}$, para $x > 0$ y $x < 0$.
- Para encontrar los valores donde una función algebraica queda indefinida, se necesitan invertir los valores para los cuales el numerador es cero.
- Una función algebraica toma los valores del conjunto de los números que figuran en el denominador determinado.
- El mínimo común múltiplo de $4x^3$ y $3x^2$ es $(12x^3)(3x^2) = 36$.

- Las funciones $f(x) = \frac{2}{3}$ y $g(x) = \frac{1}{3}$ son generadas por la expresión $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
- La única solución positiva de la ecuación $x^2 + 2 = 0$ es $x = 2$.
- Para dividir dos funciones algebraicas, se convierten multiplicando la primera, por el inverso multiplicativo de la segunda.
- En el caso de $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, el valor de la función $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ es menor que -1 .
- La expresión $\frac{x^2 - 1}{3x^2 + 75x + 125}$ es menor o igual a cero para $x = 0$.
- La única solución de la ecuación $x^2 + 2 = 0$ es $x = 2$.
- Las funciones $f(x) = \frac{2}{3}$ y $g(x) = \frac{1}{3}$ son generadas por la expresión $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

2. Aplica lo que aprendiste en la unidad para desarrollar las siguientes actividades:

- Hallar los valores positivos en la unidad, para encontrar las siguientes exposiciones, al menos 2.
¿El de estos números que cumplen esta propiedad, ¿cómo lo sabes?
- De cinco niños se piden para formar una pareja. Si uno de ellos se deniega la mitad del tiempo que a los otros, ¿pueden ser todos los niños, una pareja, el tiempo que a los otros, ¿cómo lo sabes?
- Resuelve la ecuación $\frac{x^2 - 1}{3x^2 + 75x + 125} = 0$.
- Un grupo de 60 estudiantes de un colegio secundario pone una cuota para asistir al cine. Para 10 de ellos se admiten, dejando el resto para 5 000 adicionales. Determina el valor original de la cuota.
- Factorea las siguientes exposiciones y determina los valores de x para los cuales no están definidas.

102

Unidad 2

Exposiciones algebraicas factorizadas | 103

En estas dos páginas, podrás autoevaluar los aprendizajes que lograste en la unidad. Tomando en cuenta que una de las alternativas al egresar de la Educación Media es rendir la PSU, incluimos algunas preguntas tipo de esta prueba.

Evaluación de la Unidad

Unidad 2

Resuelve las siguientes operaciones en la casillera y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

1. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor por $x > 0$?

A. $\frac{x-1}{x}$
 B. $\frac{x-1}{x+1}$
 C. $\frac{x+1}{x}$
 D. $\frac{x+1}{x-1}$

2. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la menor por $x > 0$?

A. $\frac{x-1}{x}$
 B. $\frac{x-1}{x+1}$
 C. $\frac{x+1}{x}$
 D. $\frac{x+1}{x-1}$

3. Si $x = 1$, ¿cuál de las siguientes fracciones es la más cercana a $\frac{1}{2}$?

A. $\frac{x-1}{x}$
 B. $\frac{x-1}{x+1}$
 C. $\frac{x+1}{x}$
 D. $\frac{x+1}{x-1}$

4. ¿Cuál de las siguientes no es una restricción para la fracción $\frac{x-37}{x^2-1}$?

A. $x \neq -5$
 B. $x \neq 1$
 C. $x \neq -1$
 D. $x \neq 2$

5. ¿Cuál fracción está generada por la misma expresión que los restantes?

A. $\frac{x}{x^2-1}$
 B. $\frac{1}{x^2-1}$
 C. $\frac{1}{x}$
 D. $\frac{x}{x^2}$

6. El resultado de $\frac{x^2+3}{2x} \cdot \frac{x^2+4}{x^2+5} \cdot \frac{x^2+6}{x^2+7}$ es:

A. $\frac{x^2+3}{x^2+7}$
 B. $\frac{x^2+4}{x^2+5}$
 C. $\frac{x^2+6}{x^2+7}$
 D. $\frac{x^2+3}{x^2+5}$

7. El resultado de $\frac{x^2+3}{x^2+4} \cdot \frac{x^2+5}{x^2+6}$ es:

A. $\frac{x^2+3}{x^2+2}$
 B. $\frac{x^2+4}{x^2+2}$
 C. $\frac{x^2+5}{x^2+2}$
 D. $\frac{x^2+6}{x^2+2}$

8. El resultado de $\frac{19}{x^2-1} \cdot \frac{14}{x^2-4}$ es:

A. $\frac{5x+7}{(x^2+4)(x^2+1)}$
 B. $\frac{5x^2+4x+1}{x^2+1}$
 C. $\frac{5x^2+4x+1}{x^2+3}$
 D. $\frac{5x^2}{x^2+1}$

9. La expresión $\frac{x^2-3}{x^2+1}$ es equivalente a:

A. $\frac{x^2-3}{x^2+1}$
 B. $\frac{x^2-3}{x^2-1}$
 C. $\frac{x^2-3}{x^2+1}$
 D. $\frac{x^2-3}{x^2-1}$

10. El resultado de $\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+3}{x^2-4}$ es igual a:

A. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$
 B. $\frac{x^2+3}{x^2-1}$
 C. $\frac{x^2+1}{x^2-3}$
 D. $\frac{x^2+3}{x^2-3}$

11. El resultado de $\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+3}{x^2-4}$ es:

A. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$
 B. $\frac{x^2+3}{x^2-1}$
 C. $\frac{x^2+1}{x^2-3}$
 D. $\frac{x^2+3}{x^2-3}$

12. La solución para x de la ecuación $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{x}$ es:

A. $x = 1$
 B. $x = -1$
 C. $x = -2$
 D. $x = 2$

13. La operación $\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+3}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5}{x^2-7}$ es:

A. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$
 B. $\frac{x^2+3}{x^2-1}$
 C. $\frac{x^2+5}{x^2-1}$
 D. $\frac{x^2+7}{x^2-1}$

14. El resultado de $\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+3}{x^2-4}$ es:

A. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$
 B. $\frac{x^2+3}{x^2-1}$
 C. $\frac{x^2+5}{x^2-1}$
 D. $\frac{x^2+7}{x^2-1}$

15. Desmenua un número positivo tal que si se le suma 7, el resultado se divide por 3, y si hallamos la raíz de este número, el resultado es 2 veces el número multiplicado del mismo.

A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 5

16. Por suerte a Carlos le ha llegado de regalo un lote de alfalfa para alimentar a sus vacas. Él sabe que cada vaca de su alfalfa debe comer 100 kg más que el promedio por el grupo de vacas. ¿Cuántos vacas tenía el animalero?

A. 7
 B. 12
 C. 15
 D. 10

Cada vez que encuentres este icono, te invitamos a seguir aprendiendo con tu hipertexto.

1

Unidad

Números y raíces

EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

- Caracterizar los números irracionales como aquellos que no pueden ser escritos como un cociente entre dos números enteros.
- Caracterizar los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.
- Utilizar los números reales en la resolución de problemas, reconocer sus propiedades y realizar aproximaciones por defecto, por exceso y por redondeo.
- Ubicar algunas raíces en la recta numérica y explorar situaciones geométricas en las que ellas están presentes.
- Analizar la demostración de la irracionalidad de algunas raíces cuadradas.
- Interpretar y calcular la raíz n -ésima de un número real y reconocer algunas propiedades.
- Relacionar las raíces n -ésimas con las potencias de exponente racional.

CONVERSEMOS DE:

El matemático italiano Leonardo Fibonacci (1170-1230), famoso por sus estudios acerca de la validez del sistema de numeración árabe y la importancia del cero, formuló la siguiente sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Si observas, cada número de la sucesión es igual a la suma de los dos términos anteriores; además, estos vienen dados por la fórmula:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Años después del planteamiento de la sucesión, los astrónomos descubrieron que la relación entre los planetas en el sistema solar podía ser descrita mediante los números de Fibonacci; otros descubrimientos surgieron en la Biología, relacionando la sucesión con la conformación de las plantas cuyos tallos o pétalos tienen forma de espiral, así como en la concha de algunos moluscos, por ejemplo, la concha de un nautilus. En el ejemplo anterior, se muestra una de las múltiples aplicaciones de las raíces, que estudiarás en esta unidad, como también se enseña una vez más la increíble relación entre la Matemática y el mundo que nos rodea.



¿Cuánto sabes?

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

1. Descompón los siguientes números como producto de factores primos:

a. 256

c. 1 525

e. 1 936

b. 441

d. 2 020

f. 2 187

2. Determina cuál o cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas. Justifica tu decisión.

a. $3^2 : 3^{-2} = 1$

c. $3^2 + 4^2 = 5^2$

e. $(5x)^0 = 1, x \neq 0$

b. $3^5 = 15$

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$

f. $\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}\right]^0 = 0, x \neq 0$

3. Resuelve cada ejercicio aplicando las propiedades de las potencias.

a. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

g. $3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 2^5 \cdot 2^{-3}$

b. $\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3^4$

h. $4^{-5} : 4^{-3}$

c. $(-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^{-3} + (-1)^2$

i. $(a^{-2} : a^3) \cdot a^3$

d. $2^{-2} : 2^4$

j. $\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 : n^{-5}\right] \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-2}, n \neq 0$

e. $x^{2a-3} \cdot x^{3a+4} \cdot x^{5-a}$

k. $w^{a-4} \cdot w^{7-3a} \cdot w^{2a}$

f. $\left(\frac{-6a^2x^3}{3z}\right)^2, z \neq 0$

l. $\left(\frac{a^{2p-3q}}{a^{3p-2q}}\right)^2, a \neq 0$

4. Resuelve los siguientes problemas y explica, paso a paso, el procedimiento que utilizaste.

a. Si el lado de un cuadrado aumenta al doble, ¿a cuánto aumenta su área?, ¿y su perímetro?

b. La arista de un cubo mide a cm. Si la arista del cubo se disminuye a su cuarta parte, ¿a cuánto disminuye el volumen del cubo?

5. Reduce las siguientes raíces (con a y b números positivos):

a. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$

e. $\sqrt{4b} \cdot \sqrt{12b^3}$

b. $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}}$

f. $\frac{\sqrt{8a^6}}{\sqrt{a^4b^4}}$

c. $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{14}$

g. $\sqrt[3]{-64a} \cdot \sqrt[3]{4a} \cdot \sqrt[3]{-a}$

d. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{9}$

h. $\frac{\sqrt[3]{a^7b^4}}{\sqrt[3]{a^4b^{10}}}$

Compara tus respuestas con las de tus compañeras y compañeros. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.



¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- Al resolver operaciones con números racionales, tienen prioridad la multiplicación y división antes que la adición y la sustracción.
- En las potencias de base racional y exponente entero, se cumplen las siguientes propiedades:

$$a \in \mathbb{Q}, n, m \in \mathbb{Z}, a \neq 0, a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a, b \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}, a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a \in \mathbb{Q}, n, m \in \mathbb{Z}, a \neq 0, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- Si a y b son números racionales, se cumple lo siguiente:

Multiplicación de raíces $\blacktriangleright \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, con $a, b \geq 0$.

$$\blacktriangleright \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

División de raíces $\blacktriangleright \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, con $a \geq 0, b > 0$.

$$\blacktriangleright \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \text{ con } b \neq 0.$$

Números racionales en la recta numérica



Francisca y Claudia resuelven una tarea midiendo con una regla. Observan que en la regla hay solo números naturales.

ANALICEMOS...

- ¿Es posible construir una regla que sea capaz de medir cualquier longitud?
- ¿Qué conjunto de números nos permite asignar números a cada punto de una recta?
- ¿Todo número entero es un número racional?
- ¿Tiene cada número representado en la recta un sucesor en ella?, ¿por qué?
- ¿Cuántos puntos distintos hay en un segmento de una recta?
- ¿Cuántos números racionales hay entre el 0 y el 1?

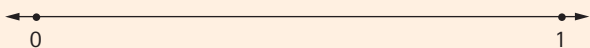
En la recta numérica, se pretende representar todos los números, para esto es necesario asignar a cada punto de la recta un número. Estos números indican la distancia desde el punto al 0. Si el punto se encuentra a la derecha del 0, el número correspondiente a ese punto será positivo. Si está a la izquierda, negativo.

¿Qué conjunto numérico podría representar todos los puntos de una recta?

Se pueden colocar todos los números racionales en una recta con los siguientes trucos geométricos:

Por ejemplo, considera el número $\frac{3}{5}$. Como es menor que 1, se divide la unidad en cinco partes iguales y de estas, se toman tres.

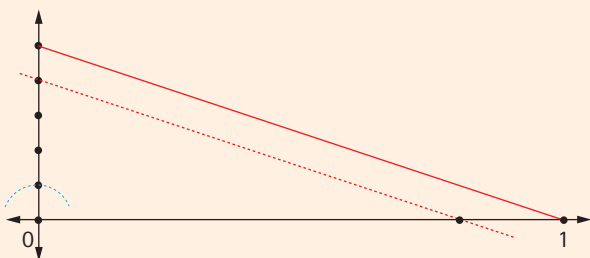
1° Se marca en una recta el 0 y la unidad.



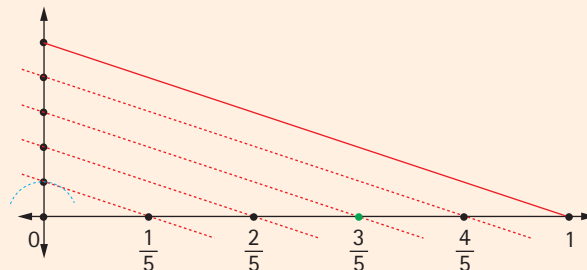
2° Se dibuja una recta que pase por 0 y se marcan cinco puntos a igual distancia.



- 3° Se dibuja un segmento desde el quinto punto hasta la unidad.
Se traza un segmento paralelo respecto al segmento dibujado que pase por el cuarto punto.



- 4° Se dibujan los otros segmentos paralelos en los puntos restantes. Los puntos de intersección entre los segmentos dibujados y el segmento unidad son $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$.



Este método permite dividir la unidad en cualquier número de partes y determinar un número racional cualquiera entre 0 y 1. También se puede realizar en otra parte de la recta, por ejemplo, entre 7 y 8, de modo que se puede dividir, idealmente, toda la recta y señalar todos los números racionales que se puedan representar en ella.

RECUERDA QUE...

- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $ad < bc$, con $b, d > 0$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, con $b \neq 0$

EN RESUMEN

- La **recta numérica** es una recta en la que a cada punto le corresponde un número que indica su posición respecto del 0.
- Un segmento se puede dividir en cualquier número de partes. Para esto se procede como en el ejemplo, pero copiando un segmento tantas veces como se quiera dividir la unidad.

EN TU CUADERNO

1. Dibuja en tu cuaderno un segmento de 1 centímetro con una regla y divídelo en 10 partes iguales utilizando el método explicado anteriormente. Verifica con tu regla si la división se corresponde con los milímetros de la misma.
2. Dibuja una recta numérica y ubica en ella los siguientes números racionales:

$$\frac{7}{5}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{100}; -\frac{99}{100}; 0; 1; \frac{5}{7}; \frac{100}{99}$$

Números irracionales

En cursos anteriores, aprendiste a reconocer los números racionales como aquellos que se pueden escribir como una fracción. Los números naturales y enteros son también números racionales. Los números decimales finitos también, ya que son equivalentes a una fracción decimal. En el caso de los decimales infinitos, solo si son periódicos o semiperiódicos corresponden a números racionales y, de hecho, existen procedimientos para escribir como fracción estos números.

Pero existen otros números decimales infinitos. Observa.

0,1436487965798085312346574568...

0,00111222233334444455556789...

1,4142135623730950488016887242...

0,2463547680987540000876432456...

3,1415926535897932384626433832...

ANALICEMOS...

- ¿Algún número de estos tiene período?, ¿crees que si se conocieran más cifras decimales se podría observar algún período?, ¿por qué?
- Con los procedimientos conocidos, ¿se podrían escribir como fracción? Justifica.
- ¿Estos números son racionales?, ¿por qué?
- ¿Reconoces algún número de estos?, ¿cuál o cuáles?

Existen números decimales infinitos que, aunque se conozcan 100, 1 000 ó 1 000 000 cifras decimales, no tienen período alguno. Luego, no se podrían escribir como fracción con alguno de los procedimientos conocidos.

GLOSARIO

Número irracional: número que no se puede obtener como cociente de dos enteros.

Número racional: se puede expresar como cociente de dos enteros.

Un número decimal infinito que no es racional se llama **número irracional**. Es imposible escribirlos completamente, ya que tienen infinitas cifras decimales, por lo que usualmente se aproximan a la cantidad de cifras decimales necesarias, o bien se representan mediante operaciones, como $1 + \sqrt{3}$, o con constantes, como el caso del número π .

Algunos números irracionales destacados

El número irracional más conocido es el número π , que es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, es decir:

$$\pi = \frac{\text{longitud de una circunferencia}}{\text{diámetro}}$$

Muchas han sido las aproximaciones de π en el transcurso de los años, por ejemplo, en 1987 se calculó con una precisión de más de 100 millones de cifras decimales, sin encontrarse período alguno.

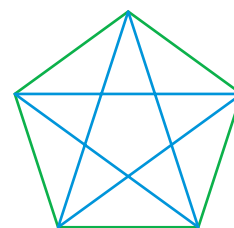
Otro importante número irracional es el número $e \approx 2,718281...$

El número e data del siglo XVI y aparece en forma natural cada vez que se estudian fenómenos de crecimiento o decrecimiento poblacional o se modelan las curvas, por ejemplo, que aparecen en los cables de tendido eléctrico.

El número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398...$, llamado **número áureo** o número de oro fue descubierto en la Antigüedad al observar la proporción que hay en algunas figuras geométricas (relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular), también en algunas proporciones de la anatomía humana (por ejemplo, entre la altura de una persona y altura de su ombligo, o la relación entre el diámetro de la boca y diámetro de la nariz) y en la naturaleza (como en la disposición de los pétalos de las flores o en la distancia entre espiras de cualquier caracol).

GLOSARIO

Número áureo:



$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi \approx 1,61803398...$$

EN RESUMEN

- Un **número irracional** es un número que no puede representarse como una fracción. Es un número decimal infinito que no tiene período.
- Algunos números irracionales destacados son π , el número e y el número de oro, ϕ .

EN TU CUADERNO

1. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

a. 0,737

c. 154,154154...

e. 0,121231234...

g. 26,0625

b. 2,1732929...

d. 23,242526...

f. 14,1010010001...

h. 12,4666...

2. Determina si m e y son números irracionales o no. Justifica tu decisión.

a. $m = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)^2$

b. $y = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^3$

3. Encuentra un número irracional que cumpla lo siguiente:

a. Sea mayor que $\sqrt{2}$ y menor que $\sqrt{3}$.

c. Sea mayor que 1 y menor que $\sqrt{2}$.

b. Sea mayor que $\sqrt{15}$ y menor que 4.

d. Sea mayor que $\sqrt{23}$ y menor que $\sqrt{24}$.

4. Completa con los signos $<$, $>$ o $=$, según corresponda.

a. $\sqrt{2}$ 1,4142

c. $\sqrt{3}$ 1,73

e. $\sqrt{5}$ 2,23

b. $\sqrt{2}$ 1,41

d. $\sqrt{3}$ 1,733

f. $\sqrt{5}$ 2,236



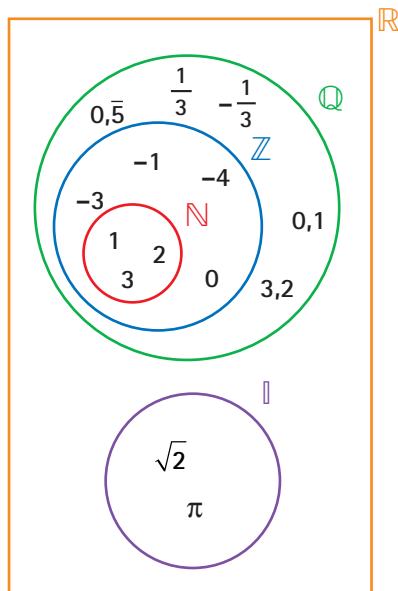
Números reales



Daniel necesita dibujar un diagrama que le permita comprender cómo se relacionan todos los conjuntos de números que conoce. Él sabe que todos los números naturales también son números enteros, que todos los enteros también son racionales y que los números irracionales, por definición, no son racionales.

ANALICEMOS...

- ¿Existe un conjunto de números que los agrupe a todos o, al menos, una manera común de llamarlos a todos?
- ¿Qué propiedades tienen los números de este conjunto que no se cumplen en los otros?
- ¿Cómo se representarían en la recta numérica?



La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales recibe el nombre de conjunto de los **números reales**, y se denota con el símbolo \mathbb{R} .

Las propiedades de las operaciones que involucran números racionales se extienden naturalmente a los números reales:

- Las operaciones básicas tienen como resultado números reales; es decir, de la adición, sustracción, multiplicación y división de números reales se obtiene siempre un número real. Es decir, el conjunto de los números reales es **cerrado**.
- La adición y la multiplicación de números reales satisfacen las propiedades de **conmutatividad** y **asociatividad**; cada operación tiene un **elemento neutro** y cada número real tiene su **elemento inverso**, tanto aditivo como multiplicativo (excepto el 0, que no tiene inverso multiplicativo).
- Además, la multiplicación es **distributiva** respecto de la adición.
- Es un conjunto **denso**, esto es, entre dos números reales siempre hay otro número real.

GLOSARIO

Decimal finito: número decimal cuya parte decimal es finita.

Decimal infinito periódico: número decimal cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten indefinidamente. El número que se repite se llama período.

Los números racionales, cuando se escriben como números decimales, son finitos, infinitos periódicos o infinitos semiperiódicos. Sin embargo, los números irracionales son siempre números decimales infinitos pero no periódicos. Considerando su representación en la recta numérica, los números reales ocupan la recta numérica por completo, ya que los números irracionales completan todos los espacios dejados por los racionales en la recta numérica.

EN RESUMEN

- El conjunto de los números reales contiene a todos los números racionales e irracionales.
- Los números reales conservan las propiedades de las operaciones entre números racionales.

EN TU CUADERNO

1. Resuelve las siguientes operaciones y determina si sus resultados son iguales o no, en cada caso.

a. $\frac{4}{7} + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) \bigcirc \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{10}$

f. $\frac{3}{7} + 0 \bigcirc 0 + \frac{3}{7}$

b. $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9}\right) \bigcirc \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{7}{9}$

g. $(20,4 + 12,6) \cdot 3,5 \bigcirc (20,4 \cdot 3,5) + (12,6 \cdot 3,5)$

c. $\frac{18}{3} \cdot 0 \bigcirc 0 \cdot \frac{18}{3}$

h. $\frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{7}\right) \bigcirc \left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{2}{7}$

d. $7 \cdot (4 - 9) \bigcirc (7 \cdot 4) - (7 \cdot 9)$

i. $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{11} \bigcirc \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{8}$

e. $\frac{4}{9} + \frac{5}{3} \bigcirc \frac{5}{3} + \frac{4}{9}$

j. $\frac{4}{7} \cdot \left(\frac{7}{4}\right) \bigcirc \left(\frac{7}{4}\right) \cdot \frac{4}{7}$

- ¿Qué propiedad se está aplicando en cada caso?

2. Encuentra dos números reales que estén entre:

a. $\frac{7}{3}$ y $\frac{11}{13}$

c. $\frac{99}{100}$ y $\frac{100}{99}$

e. $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$

b. $\frac{7}{13}$ y $\frac{8}{13}$

d. $\frac{99}{101}$ y $\frac{101}{99}$

f. $\frac{1}{50}$ y $\frac{2}{101}$

3. Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales:

a. $\frac{5}{6}, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}$

c. $\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, 1$

e. $0,\overline{3}; 0,3\overline{4}; 0,344; 0,\overline{34}$

b. $-\frac{7}{9}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$

d. $0,7501; 0,7051; \frac{3}{4}$

f. $0,\overline{6}; 0,5\overline{6}; 0,\overline{56}; 0,\overline{65}$

4. Decide si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. $a < b \rightarrow \frac{a}{b} < 1 \quad a, b > 0$

b. $a < b \rightarrow \frac{a}{b} > 1 \quad a, b \neq 0$

Aproximación de un número irracional

GLOSARIO

El número π es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro:

$$\pi = \frac{\text{longitud de una circunferencia}}{\text{diámetro}}$$

$$\pi \approx 3,141592...$$

Tatiana quiere decorar un viejo tambor metálico para usarlo de paragüero en la sala de clases. Tiene un trozo de cuerda muy gruesa que va a pegar en el contorno del borde superior. El diámetro del tambor mide 58,5 cm. Ella decide cortar la cuerda de 175,5 cm de longitud para que le quede justa, pero le faltaron más de 7 cm.

ANALICEMOS...

- ¿Cuál fue el error de Tatiana?
- ¿Cómo aproximarías π ?, ¿por qué?
- ¿Qué entiendes por aproximar por defecto?, ¿y por exceso?
- ¿Cuál es la mejor aproximación de π con dos cifras decimales?, ¿qué error se comete con esta aproximación?
- ¿Cuál es la ventaja de aproximar por redondeo?

RECUERDA QUE...

Aproximar un número a ciertas cifras decimales consiste en encontrar un número con las cifras pedidas que esté muy próximo al número dado.

Aproximar por redondeo un número consiste en dar la mejor de las aproximaciones, es decir, aquella con la que se comete un error menor.

Error de una aproximación es la diferencia, en valor absoluto, entre un número y su aproximación.

Tatiana calculó el perímetro del tambor usando 3 como aproximación de π , así: $P = 58,5 \cdot 3 = 175,5$. Después decidió aproximar a 3,2, para que no le quedara corta, $P = 58,5 \cdot 3,2 = 187,2$, pero, en este caso, le sobraron casi 4 cm. Entonces, decidió utilizar una calculadora y obtuvo $P = 58,5 \cdot \pi = 183,78317...$ y cortó nuevamente la cuerda, ahora de 183,8 cm, para cubrir completamente el contorno.

Al realizar una aproximación por **defecto**, se busca el número, con un determinado número de cifras decimales, que es inmediatamente menor que el dado. En cambio, para aproximar por **exceso**, se busca el número, con las cifras decimales fijadas, inmediatamente mayor.

Por ejemplo, dado el número π , al aproximar a dos cifras decimales:

- por defecto es 3,14.
- por exceso es 3,15.

Al utilizar la aproximación en lugar del número se comete un error, en el ejemplo anterior, los errores que se cometen son:

- por defecto: $3,141592... - 3,14 < 0,001592...$
- por exceso: $3,15 - 3,141592... < 0,008408...$

Entonces, al aproximar por **redondeo**, se escoge la aproximación con la que se comete el menor error, en este caso, $\pi \approx 3,14$.

Ahora, si no se conocen las cifras decimales de una raíz no exacta, por ejemplo $\sqrt{5}$, se puede aproximar por tanteo de la siguiente manera:

Sea D tal que $D^2 = 5$, entonces

$$2 < D < 2,3, \text{ ya que } 2^2 = 4 < D^2 < 5,29 = 2,3^2$$

$$2,2 < D < 2,25, \text{ ya que } 2,2^2 = 4,84 < D^2 < 5,0625 = 2,25^2$$

$$2,23 < D < 2,24, \text{ ya que } 2,23^2 = 4,9729 < D^2 < 5,0176 = 2,24^2$$

Es decir, $D \approx 2,23$, aproximado con dos cifras decimales.

NO OLVIDES QUE...

La cantidad de cifras decimales de una aproximación depende de la cantidad de cifras de los datos y también de la precisión requerida, según el contexto del problema.

EN TU CUADERNO

1. Aproxima con dos cifras decimales por exceso y luego, por defecto, cada uno de los siguientes números irracionales. Considerando estos resultados, aproxima por redondeo.

a. 2,718281...

b. 3,141592...

c. 1,618033...

d. 1,732050...

e. 2,645751...

f. 3,605551...

g. 7,540182...

h. 4,376525...

i. 2,231748...

2. Indica, en cada caso, el error cometido al aproximar $\sqrt{22}$ a:

a. 4,69

b. 4,690416

c. 4,7

d. 4,6904

e. 5

f. 4,69042

3. Determina por tanteo aproximaciones con dos cifras decimales para

a. $\sqrt{15}$

b. $\sqrt{10}$

c. $\sqrt{12}$

d. $\sqrt{21}$

e. $\sqrt{17}$

f. $\sqrt{30}$

EN RESUMEN

- Si al aproximar el número obtenido es menor, se ha aproximado por **defecto**. Si es mayor, se ha aproximado por **exceso**.
- Si de los dos valores posibles, se ha considerado aquel con el que se comete el menor error respecto del número original, se ha aproximado por **redondeo**.

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

En esta actividad, aprenderás a aproximar números utilizando una planilla de cálculo como Excel.

- Escribe el número decimal que quieres aproximar en la celda **A1**.
- En la celda **B1** escribe **=REDONDEAR.MAS(A1;3)**.
- En la celda **C1** escribe **=REDONDEAR.MENOS(A1;3)**.
- En la celda **D1** escribe **=REDONDEAR(A1;3)**.

En todos los casos, el número 3 indica que se aproximará con tres cifras decimales.

Observa que los números obtenidos corresponden a aproximaciones por exceso, defecto y redondeo, respectivamente. Si quieres aproximar varios números simultáneamente, escríbelos en la columna **A** y copia las fórmulas correspondientes en las columnas **B**, **C** y **D**.

MI PROGRESO

1. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

a. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$

e. $\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)^2$

b. $\frac{\sqrt{3}+1}{6}$

d. $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$

f. $\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)^2$

2. ¿Entre qué números enteros se ubican los números irracionales de la pregunta anterior?

3. Usando que $\sqrt{2} \approx 1,41$; $\sqrt{3} \approx 1,73$; $\sqrt{5} \approx 2,24$; ordena de mayor a menor los siguientes números:

a. $\frac{\sqrt{4}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5}$

c. $\frac{2\sqrt{2}+1}{6}, \frac{2\sqrt{2}-2}{6}, \frac{2\sqrt{2}-1}{5}$

b. $\frac{\sqrt{3}+1}{6}, \frac{\sqrt{3}+1}{7}, \frac{\sqrt{3}+2}{6}$

d. $\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}+1}{10}, \frac{\sqrt{5}}{11}$

4. Ordena de menor a mayor los números: $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. Con ayuda de una calculadora, aproxima por exceso y por defecto con dos cifras decimales.

a. $\sqrt{3}+1$

c. $\sqrt{7}-3$

e. $\sqrt{11}-4$

b. $4-\sqrt{5}$

d. $4-\sqrt{10}$

f. $6-2\sqrt{10}$

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Reconocer números racionales e irracionales.	1	___ / 6
Ubicar números irracionales en la recta numérica.	2	___ / 6
Ordenar números irracionales.	3 y 4	___ / 5
Aproximar números irracionales.	5	___ / 6

Enrique decidió hacer un marco de madera para poner una fotografía con forma cuadrada de los Juegos Olímpicos de Atenas, cuya superficie es de $1\,225\text{ cm}^2$. Sin embargo, esta información no parece servir mucho para determinar la medida de los lados.

Por otro lado, su hermana Paula dispone de un pliego de papel de regalo, de 70 cm de ancho y 100 cm de largo, para envolver un joyero con forma de cubo, cuyo volumen es de $3\,375\text{ cm}^3$.

ANALICEMOS...

- ¿Cuánto mide el lado de la fotografía que va a enmarcar Enrique?, ¿cómo lo calculaste?, ¿cuánta madera necesita?
- ¿Cuánto mide el lado del joyero que quiere envolver Paula?, ¿le alcanza con el pliego de papel que tiene?
- Dada la superficie de una región cuadrada, ¿existe una forma de obtener la medida del lado del cuadrado?, ¿cómo?
- Dado el volumen de un cuerpo cúbico, ¿se puede calcular la medida del lado?, ¿cómo?

Enrique debe calcular qué número al cuadrado es igual a 1 225. Este número se escribe con el símbolo $\sqrt{1\,225}$ y se lee como "raíz cuadrada de 1 225". En este caso, ya que $35 \cdot 35 = 1\,225$, el lado del cuadrado mide 35 cm. Y como $4 \cdot 35 = 140$, entonces, debe comprar al menos 140 cm de madera para cubrir el perímetro de la fotografía.

También podría considerarse al número -35 como raíz cuadrada de 1 225, ya que se cumple que $(-35) \cdot (-35) = 1\,225$, pero esto no corresponde. Para evitar confusiones, al referirse a $\sqrt{1\,225}$ solo se considera el valor positivo, que en este caso es 35.

Además, la raíz cuadrada solo puede aplicarse a números reales positivos o al cero, ya que el cuadrado de todo número real es siempre positivo o cero.

Paula, en cambio, para determinar la medida del lado del cubo debe calcular qué número al cubo es igual a 3 375. En este caso, se escribe con el símbolo $\sqrt[3]{3\,375}$ y se lee como "raíz cúbica de 3 375", que en este caso es igual a 15, ya que $15^3 = 15 \cdot 15 \cdot 15 = 3\,375$. Entonces, si Paula dispone de un pliego de $7\,000\text{ cm}^2$, el papel de regalo le alcanza para cubrir el joyero, ya que su superficie total es de $1\,350\text{ cm}^2$.

GLOSARIO

Términos de una raíz: dada la expresión $\sqrt[n]{a}$, n es el índice de la raíz y a es la cantidad subradical.

EN RESUMEN

- Recuerda que si a es un número positivo o 0 ($a \geq 0$), la expresión \sqrt{a} denota al único número (mayor o igual a 0) cuyo cuadrado es a . \sqrt{a} : se lee “raíz cuadrada de a ”. Si $a \geq 0$:
 - $x = \sqrt{a}$ si $a = x^2$
 - $(\sqrt{a})^2 = a$
- Si a es un número real cualquiera, la expresión $\sqrt[3]{a}$ corresponde al único número cuyo cubo es a , y su signo es el mismo que el de a , y se lee “raíz cúbica de a ”.
 - $x = \sqrt[3]{a}$ si $x^3 = a$
 - $(\sqrt[3]{a})^3 = a$
 - $\sqrt[3]{0} = 0$
- Los números negativos no tienen raíz cuadrada real, pero sí tienen raíz cúbica.
Por ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = -2$, ya que $(-2)^3 = -8$

EN TU CUADERNO

1. Resuelve:

- Encuentra la medida del lado de un cuadrado de área igual a 121 m^2 .
- Determina el radio de un círculo cuya área es de $81\pi \text{ cm}^2$.
- Si la medida del lado de un cuadrado se expresa por \sqrt{A} , donde A es el área del cuadrado, ¿cuál es la expresión del perímetro del cuadrado?, ¿y de la mitad del perímetro del cuadrado?
- Encuentra el perímetro de una circunferencia que encierra un área de $361\pi \text{ m}^2$.

2. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu decisión.

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| a. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3}$ | c. $\sqrt{32} = 4 + \sqrt{2}$ | e. $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$ |
| b. $\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$ | d. $\sqrt{28} = 2 + \sqrt{7}$ | f. $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ |

3. Responde:

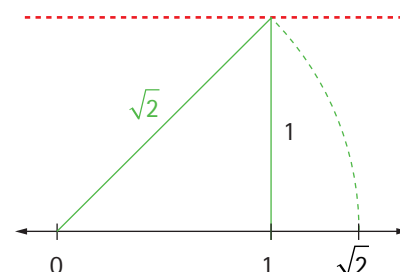
- Determina el área de una cara de un cubo si su volumen es de 64 cm^3 .
- El volumen de un cubo es 125 m^3 . Se quiere calcular el área de una de sus caras, por lo que se plantea que este cálculo es equivalente a resolver $(\sqrt[3]{125})^2$. ¿Es correcta la afirmación anterior?, ¿por qué?
- Si la medida de la arista de un cubo se expresa por $\sqrt[3]{V}$, ¿cómo se expresa el área de una de sus caras?, ¿cómo se expresa el volumen del cubo?
- Calcula la medida de la arista de un cubo, cuyo volumen es de 24 m^3 .

Los números racionales son un conjunto que no completa la recta numérica; es decir, que por más números decimales que usemos, siempre existirán "huecos" entre ellos. Estos huecos corresponden a los números irracionales, como $\sqrt{2}$, que completan la recta numérica.

ANALICEMOS...

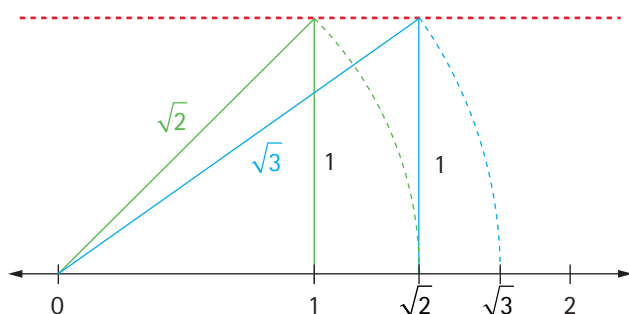
- ¿Cómo pueden ubicarse en la recta numérica algunos números irracionales?
- ¿Es posible representar todos los números correspondientes a raíces cuadradas?

Para ubicar las raíces no exactas, por ejemplo $\sqrt{2}$, se puede aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1 unidad: la hipotenusa de este triángulo será $\sqrt{2}$. Luego, al trazar un arco de circunferencia centrada en el punto 0 de la recta numérica de radio igual a la hipotenusa, en la intersección con la recta numérica estará ubicado el número $\sqrt{2}$.



En general, para localizar de manera geométrica \sqrt{n} , siendo n cualquier número natural, se puede aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo de catetos 1 y la raíz cuadrada del número natural anterior, es decir, $\sqrt{n-1}$.

Por ejemplo, con el segmento de longitud $\sqrt{2}$ y un segmento de longitud 1, se construye un nuevo triángulo rectángulo. Se traza un arco de circunferencia centrada en el punto 0, y de radio igual a la hipotenusa de este nuevo triángulo. La intersección de este arco con la recta numérica es el punto $\sqrt{3}$.



EN RESUMEN

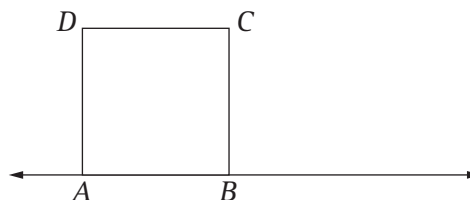
Algunos números irracionales pueden representarse en la recta numérica, como, por ejemplo, las raíces cuadradas de un número natural y expresiones compuestas que contienen raíces cuadradas.

EN TU CUADERNO

1. Ubica los números $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ en la recta numérica.

2. Completa la construcción gráfica del número áureo siguiendo las instrucciones:

- Copia en tu cuaderno la siguiente figura. Observa que $ABCD$ es un cuadrado.



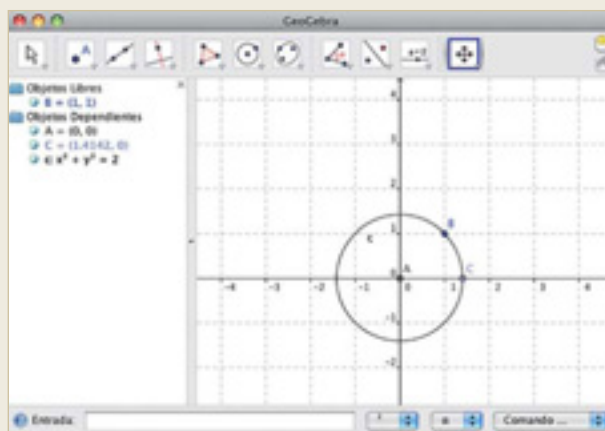
- Marca el punto medio del lado AB como el punto E .
- Con la ayuda de un compás, traza un arco de circunferencia con centro en E y radio EC .
- La intersección entre el arco de circunferencia y la recta AB determina el punto F .

Demuestra que la medida del segmento AF es igual a ϕ .

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

En esta actividad, aprenderás a ubicar números en la recta numérica usando el programa **GeoGebra**, que se encuentra disponible en el sitio web: www.geogebra.at

- Una vez instalado el programa, selecciona **Cuadrícula** y **Vista algebraica** en el menú **Vista**.
- Selecciona **Redondeo** en el menú **Opciones** para cambiar la cantidad de lugares decimales.
- Con el botón **Círculo** marca en el plano cartesiano, primero el punto $(0, 0)$ y luego el punto $(1, 1)$. De esta manera, se dibujará el círculo de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$, que es la diagonal del cuadrado correspondiente.
- Ahora, con el botón **Punto**, marca el punto de intersección entre la circunferencia dibujada y el eje horizontal de la rejilla. Para que efectivamente sea un punto de la circunferencia, esta debe ennegrecerse.

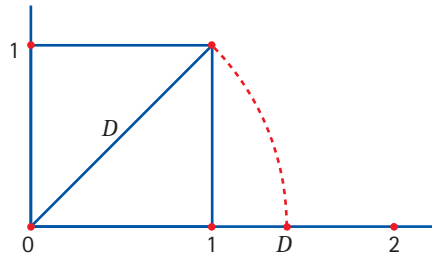


Observa las coordenadas de este punto. ¿Corresponde a $\sqrt{2}$? ¿cómo lo supiste?

Ejercicio

- Siguiendo el mismo procedimiento, ubica en la recta otras raíces no exactas.

Observa cómo se determina geométricamente la longitud de la diagonal de un cuadrado.



ANALICEMOS...

- Según los datos de la figura, ¿cuánto mide la diagonal del cuadrado D ?, ¿cómo lo supiste?
- ¿ D es un decimal finito, o un decimal infinito (periódico o semiperiódico)?
- ¿Es D un número racional?, ¿se puede representar como fracción?

Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que $D^2 = 2$. Luego, $D = \sqrt{2}$. ¿Cuánto es $\sqrt{2}$?

Al utilizar una calculadora, arrojará algo como: $\sqrt{2} = 1,4142135$

Esto **no** significa que: $\sqrt{2} = \frac{14\ 142\ 135}{10\ 000\ 000}$

Al observar el resultado de la calculadora, se podría pensar que $\sqrt{2}$ es un decimal finito, pero con muchos decimales, o bien infinito, cuyo período sea más largo que la precisión de la calculadora, o bien infinito, pero que no tenga período.

¿Es $\sqrt{2}$ un número racional? Si así fuera, $\sqrt{2}$ se debe poder escribir como una fracción irreducible, con denominador distinto de 0.

Para demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional, se debe demostrar primero que:

Sea p un número natural. Si p^2 es un número par, entonces p es par.

Demostración por reducción al absurdo: supón que la propiedad **no es cierta**. Luego, debe haber un p impar cuyo cuadrado sea par. Para este número p existen números n y m naturales que cumplen:

$$p = 2n + 1 \quad (\text{porque } p \text{ es impar})$$

$$p^2 = 2m \quad (\text{porque } p^2 \text{ es par})$$

Pero si $p = 2n + 1$, entonces, calculando p^2 se obtiene:

$$p^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1, \text{ y, necesariamente, } p^2 \text{ es impar.}$$

Por lo tanto, p^2 es un número par e impar. Lo cual es una contradicción. Entonces, la suposición era incorrecta y la propiedad queda demostrada.

GLOSARIO

Diagonal: segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

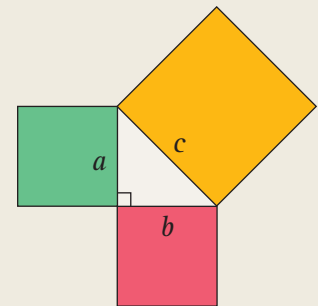
Demostración: conjunto ordenado de argumentos que permiten obtener una verdad como consecuencia lógica de otra.

RECUERDA QUE...

Teorema de Pitágoras:

Si a y b son los catetos y c la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



GLOSARIO

Reducción al absurdo: argumento de demostración, que consiste en suponer que la propiedad que se quiere demostrar **no es cierta** y deducir a partir de esto una contradicción. Entonces, como tal contradicción se debe a que la suposición era incorrecta, la propiedad debe ser cierta.

GLOSARIO

Número primo: número cuyos divisores son el 1 y él mismo.

GLOSARIO

Fracción irreducible: es aquella cuyo numerador y denominador no poseen divisores comunes distintos de 1.

Ahora, se puede demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Demostración por reducción al absurdo:

Supón que $\sqrt{2}$ es un número racional, en tal caso existen p y q , primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $q \neq 0$. De modo que $p = \sqrt{2}q$, y $p^2 = 2q^2$, por lo que p^2 es par.

Pero si p^2 es par, por la demostración anterior, se sabe que p debe ser par. Si p es par, existe un natural n tal que $p = 2n$.

Ahora, $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2n}{q}$, y elevando al cuadrado $2 = \frac{(2n)^2}{q^2}$ de donde:

$2q^2 = 4n^2$. Simplificando se obtiene: $q^2 = 2n^2$.

Por tanto, q^2 es par y, como ya vimos, q es par.

En consecuencia, si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, entonces p y q son ambos pares. Entonces, no es posible que exista una fracción irreducible. Pero todo número racional debe tener una fracción irreducible que lo represente. Esta es la contradicción. Luego, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Por lo tanto, se dice que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

La medida de la diagonal de un cuadrado, que hoy nos parece natural, generó una crisis en la escuela pitagórica, en el siglo VI a. C. en Grecia pues aparecieron cantidades "inexpresables"; es decir, que no se pueden representar como una fracción, algo que los egipcios y los babilonios ya dominaban. Este descubrimiento afectó el curso del pensamiento matemático griego y les hizo abandonar la idea de que la medición sea un gran puente entre la geometría y la aritmética de los números racionales. De hecho, el conjunto de números racionales es notoriamente inadecuado para propósitos geométricos simples, ya que en su gran mayoría aparecen números irracionales.

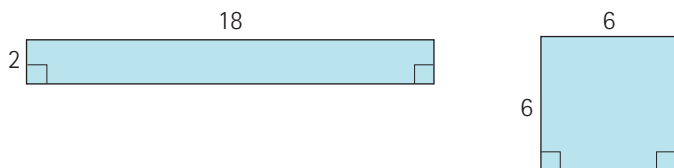
EN TU CUADERNO

1. De manera similar, demuestra que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no son números racionales. Recuerda demostrar primero la propiedad anterior correspondiente.

En cursos anteriores, aprendiste a calcular el promedio o media aritmética, ahora veremos cómo se puede obtener la media geométrica. Observa.

Para obtener la media geométrica de 2 y 18, se calcula: $\sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$.

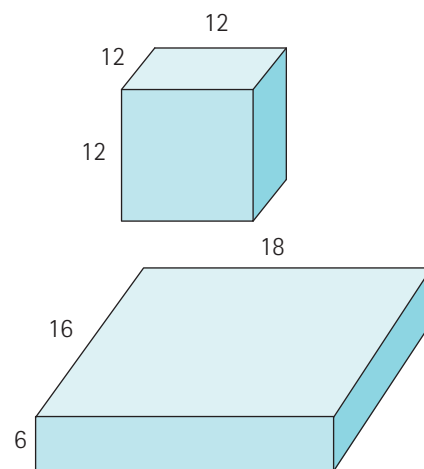
Geométricamente, este resultado se puede interpretar como la medida del lado del cuadrado que tiene igual área que un rectángulo de lados 2 y 18.



Para obtener la media geométrica de 6, 16 y 18, se calcula:

$\sqrt[3]{6 \cdot 16 \cdot 18} = \sqrt[3]{1728} = 12$, es decir, 12^3 es igual al producto de 6, 16 y 18.

Geométricamente, este resultado se puede interpretar como la medida de la arista de un cubo que tiene igual volumen que un prisma rectangular de dimensiones 6, 16 y 18.



ANALICEMOS...

- Si se necesita obtener la media geométrica de 2, 4, 9 y 18, ¿cómo se puede calcular?, ¿corresponde a $\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 18}$?, ¿por qué?
- ¿Cómo se relaciona el producto de los cuatro números con su media geométrica?
- En este caso, ¿la media geométrica se puede interpretar geométricamente?, ¿por qué? Comenta.
- En el caso de calcular la media geométrica de cinco números, ¿cómo se podría expresar ese número?

La media geométrica depende de la cantidad de números involucrados.

Luego, no se puede usar siempre la raíz cuadrada.

La media geométrica de 2, 4, 9 y 18 corresponde a la solución de la ecuación:

$x^4 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 18 = 1296$, es decir, expresado con notación de raíces:

$x = \sqrt[4]{1296}$, lo que se lee "raíz cuarta de 1296".

De la misma forma, la solución de $x^5 = a$ corresponde a $x = \sqrt[5]{a}$ y se lee "raíz quinta de a ", y así sucesivamente.

En general, la **raíz enésima** de un número a es el número que resuelve la ecuación $x^n = a$. Es decir, se busca el número cuya potencia enésima sea a .

Por ejemplo, para calcular $\sqrt[4]{625}$, se puede calcular por tanteo primero $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, luego revisar $4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, y también

GLOSARIO

La **media geométrica** de n términos x_1, x_2, \dots, x_n es la raíz enésima del producto de los n términos

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

GLOSARIO

Raíz enésima de un número: expresión que se puede representar por $\sqrt[n]{a}$, cuya enésima potencia es igual al número a .

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Entonces, por lo anterior, $\sqrt[4]{625} = 5$.

Al igual que en el caso de las raíces cuadradas y cúbicas, no todas las raíces enésimas son exactas, ni todas son números reales. Por ejemplo, la raíz cuarta de un número negativo no es un número real, porque ningún número elevado a su cuarta potencia es un número negativo.

Cuando las raíces enésimas no son exactas, existen dos posibilidades para realizar cálculos y estimaciones con ellas:

- Calcular el valor aproximado de la raíz enésima, con las cifras decimales que se requieran, por tanteo, tal como para aproximar raíces cuadradas.
- Simplificar la expresión cuando se pueda, factorizando el número apropiadamente y aplicando las propiedades de multiplicación y división de raíces.

O bien, según las características del problema, ocupar la notación de raíces, porque representa exactamente el número irracional correspondiente.

EN RESUMEN

- Si a es un número real y n un número natural, entonces la expresión $\sqrt[n]{a}$ denota al número cuya potencia enésima es a .

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- Si $a \geq 0$ y n un número par, $\sqrt[n]{a}$ existe y es siempre un número positivo.
- Si $a < 0$ y n un número par, $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.
- Cuando n es un número impar, $\sqrt[n]{a}$ conserva el signo de a y es siempre un número real.
- Al número n se le llama **índice**, y al número a se le llama **cantidad subradical**.

EN TU CUADERNO

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

a. $\sqrt[5]{-243} = -3$

e. El número $\sqrt[6]{-17}$ es real.

i. $\sqrt[6]{64} + \sqrt[4]{81} = 5$

b. $\sqrt[n]{0} = 0$ para cualquier valor de n .

f. El número $\sqrt[7]{-5}$ es real.

j. $\sqrt[4]{625} + \sqrt[5]{32} = 2$

c. $(-b)^n = -a \Leftrightarrow \sqrt[n]{-a} = -b$, n impar.

g. $\sqrt[4]{-256} = -\sqrt[4]{256}$

k. $\sqrt[4]{81} + \sqrt{\sqrt{81}} = 6$

d. $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{8} = 2$

h. $\sqrt[7]{-128} = -\sqrt[7]{128}$

l. $\sqrt[3]{\sqrt{32}} = \sqrt[5]{32}$



Felipe está buscando una estrategia para calcular raíces usando las que ya conoce. Observa.

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5$$

ANALICEMOS...

- ¿Están correctos los cálculos de Felipe? Comprueba calculando la potencia correspondiente del resultado en cada caso.
- ¿Esta estrategia se puede usar siempre?, ¿sirve para calcular una raíz quinta, por ejemplo?
- Las propiedades de las operaciones de producto y cociente de raíces cuadradas y cúbicas, ¿se extienden a las raíces enésimas?, ¿qué puedes concluir?



Para comprobar si los cálculos de Felipe están correctos, debemos calcular las potencias que corresponden. En ambos casos vemos que:

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

Y por lo tanto, ambos resultados son correctos.

Pese a lo anterior, los cálculos anteriores no justifican la estrategia usada por Felipe de separar las raíces de índice mayor, de modo que para comprobar usaremos algunas propiedades de las potencias.

Observando los resultados obtenidos, vemos que podemos escribirlos como:

$$2^6 = 2^{3 \cdot 2} = (2^3)^2 = 8^2 = 64$$

$$5^4 = 5^{2 \cdot 2} = (5^2)^2 = 25^2 = 625$$

Y por tanto, la propiedad de potencia de potencia justifica el uso de la separación de raíces de índice mayor.

Por otro lado, para calcular por ejemplo 6^5 , podemos descomponerlo como $2^5 \cdot 3^5$, obteniendo $6^5 = 2^5 \cdot 3^5 = 32 \cdot 243 = 7\,776$. Asimismo, podemos calcular la raíz quinta de 7 776 a partir del producto anterior, obteniendo:

$$\sqrt[5]{7\,776} = \sqrt[5]{32 \cdot 243} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{243} = 2 \cdot 3 = 6$$

De modo que la propiedad de potencias de igual exponente permite obtener la raíz enésima de un producto como producto de raíces enésimas.

NO OLVIDES QUE...

Con la adición y la sustracción no se puede desarrollar:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

EN RESUMEN

Si a y b son números reales, n y m números naturales, se cumplen las siguientes propiedades:

- **Adición y sustracción de raíces:** para que dos o más raíces se puedan sumar o restar, es necesario que sean semejantes; es decir, deben tener el mismo índice y la misma cantidad subradical.
- **Multiplicación de raíces de igual índice** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ (si n es par, $a, b \geq 0$)
- **División de raíces de igual índice** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, con $b \neq 0$.
- **Raíz de una raíz** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

EN TU CUADERNO

1. Resuelve.

a. $\sqrt[5]{7} + 5\sqrt[5]{7} - 2\sqrt[5]{7} + 11\sqrt[5]{7}$

c. $\sqrt[6]{9} - 3\sqrt[6]{9} - 4\sqrt[6]{18} + 15\sqrt[6]{18}$

b. $\sqrt[4]{12} + 6\sqrt[4]{12} - 4\sqrt[4]{12} + 3\sqrt[4]{12}$

d. $\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[4]{25} + 5\sqrt[3]{25} - 7\sqrt[4]{25}$

2. Calcula las siguientes multiplicaciones de raíces de igual índice.

a. $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{7}$

b. $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$

c. $\sqrt[5]{64} : \sqrt[5]{2}$

d. $\sqrt[6]{256} : \sqrt[6]{4}$

3. Expresa las siguientes raíces o productos de raíces de la forma más simple posible.

a. $\sqrt{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{54}}$

c. $\sqrt{4\sqrt[9]{3\sqrt[7]{29}}}$

e. $\sqrt[7]{3\sqrt[3]{3^4}}$

b. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{25}}$

d. $\sqrt[12]{4} \cdot \sqrt[6]{2}$

f. $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{10} \cdot \sqrt[6]{\frac{25}{4}} \cdot \sqrt[4]{5}$

4. Simplifica las siguientes expresiones, aplicando las propiedades de las raíces.

a. $1 - \frac{2}{\sqrt{8}} + \sqrt[3]{2} - \frac{2}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt{12}}{2}$

c. $\left(\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{128}\right) - \left(\frac{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt{6}}\right)$

e. $\frac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{7}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[3]{49}}$

b. $\frac{\sqrt{63}}{2} - \frac{\sqrt{63}}{6} - \sqrt[10]{7} \cdot \sqrt[5]{49}$

d. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} =$

f. $5\sqrt{9\sqrt{12\sqrt{6}}} - 3\sqrt[4]{48}$



Relación entre raíces enésimas y potencias de exponente racional

En cursos anteriores, se estudiaron las potencias con exponente entero. Por ejemplo:

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Es posible ampliar el concepto de potencia a potencias con exponente

racional, como por ejemplo: $7^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}$, $4^{\frac{3}{2}}$.

ANALICEMOS...

- Supón que se cumple $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, con n y m fracciones, ¿cuál es el resultado de $\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2$?
- Por otra parte, ¿qué número elevado al cuadrado da como resultado 7?, ¿ocurrirá siempre lo mismo?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Qué puedes concluir?

Observa que $\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 7^{\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)} = 7^1 = 7$, y por otra parte $(\sqrt{7})^2 = 7$ (por definición de raíz cuadrada), luego $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$.

De la misma manera:

$$\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8, \text{ por lo tanto } 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4^3 = 64, \text{ por lo tanto } 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Representar las raíces como potencias con exponente fraccionario permite verificar ciertas propiedades de las raíces aplicando las propiedades de las potencias.

Ejemplo

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}; \text{ con } a \geq 0, \text{ ya que } \sqrt[3]{a} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

EN RESUMEN

En general:

- Si $n \neq 0$, entonces $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- Si $n \neq 0$, entonces $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

EN TU CUADERNO

1. Expresa las siguientes potencias en forma de raíz:

a. $45^{\frac{1}{3}}$

b. $-27^{\frac{5}{3}}$

c. $\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{2}{3}}$

d. $(0,00032)^{\frac{1}{5}}$

2. Escribe las siguientes raíces en forma de potencia, y luego calcúlalas:

a. $\sqrt[3]{-343}$

b. $\sqrt[4]{324}$

c. $\sqrt[5]{-0,00001}$

d. $\sqrt[2]{512}$

3. Utilizando las propiedades anteriores:

a. ¿Cómo expresarías en forma de raíz $\left((x)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}$? b. De manera análoga, expresa como raíz $\left((a)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

4. Expresa en términos de una sola raíz las siguientes expresiones:

a. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$

b. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5\sqrt{2}}}$

c. $\sqrt[5]{\sqrt{3 \cdot \sqrt{2}}}$

d. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

5. Encuentra el valor de x .

a. $\sqrt{x\sqrt{5}} = \sqrt[20]{5}$

b. $\sqrt[x]{\sqrt{x\sqrt{13}}} = \sqrt[8]{13}$

6. Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la medida del lado de un cuadrado de área $\sqrt{2} \text{ m}^2$?

b. ¿Cuál es la medida de la arista de un cubo que tiene por volumen $\sqrt[3]{5} \text{ cm}^3$?

7. Observa el ejemplo y luego resuelve: $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$

a. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

b. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^{12}}$

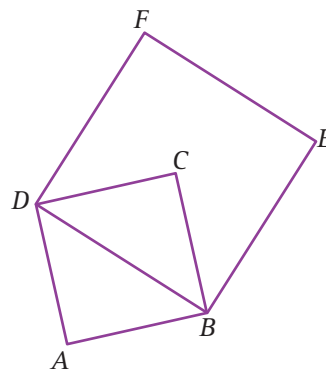
8. Dada la siguiente figura, contesta.

a. Calcular el área del cuadrado $DBEF$ si $AB = 6 \text{ cm}$.

b. Si el área $ABCD$ es 30 cm^2 , calcula el lado del cuadrado y el área del cuadrado $DBEF$.

c. Calcula el área de cada cuadrado si:

- el lado del cuadrado menor mide $x \text{ cm}$.
- el área del cuadrado menor es $y \text{ cm}^2$.



Situaciones que involucran raíces

Unidad 1

Mediante la experimentación y la aplicación de modelos matemáticos, se ha logrado determinar que la relación entre distancia d (medida en metros) desde la que cae un objeto partiendo del reposo y el tiempo transcurrido

t (medido en segundos) está expresada por la fórmula: $t = \sqrt{\frac{d}{5}}$.

Antonio y Eduardo decidieron verificar esta fórmula dejando caer una piedra desde un puente y tomando el tiempo que la piedra tarda en llegar al río.

ANALICEMOS...

- ¿Cuál es la altura del puente, según la fórmula, si la piedra cayó en 2 segundos? Explica, paso a paso, cómo lo resolviste.

Para solucionar este problema, es necesario resolver una ecuación que contiene raíces y cuya incógnita forma parte de su cantidad subradical. Observa el siguiente ejemplo y explica los pasos realizados:

$$t = \sqrt{\frac{d}{5}} \rightarrow 2 = \sqrt{\frac{d}{5}} \rightarrow 4 = \frac{d}{5} \rightarrow d = 20 \text{ m}$$

Remplaza la solución en la ecuación original y comprueba que la satisface. Siempre, al resolver una ecuación que posea alguna incógnita en la cantidad subradical, debe comprobarse que la o las soluciones encontradas realmente satisfacen la ecuación.

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} = 6$.

Se considera primero las restricciones de los valores que puede tomar x . Como la cantidad subradical de una raíz cuadrada debe ser positiva o cero, se tiene que $x+5 \geq 0$ y $x+2 \geq 0$, por lo tanto, las soluciones no pueden ser menores que -2 . Ahora, se resuelve la ecuación. Observa.

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} = 6$$

$$\sqrt{x+5} = 6 - \sqrt{x+2}$$

$$(\sqrt{x+5})^2 = (6 - \sqrt{x+2})^2$$

$$x+5 = 36 - 12\sqrt{x+2} + x+2$$

$$12\sqrt{x+2} = 33$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = \left(\frac{33}{12}\right)^2 \rightarrow x+2 = \frac{1089}{144}$$

$$\rightarrow x = \frac{801}{144} = \frac{89}{16}$$

Elevando al cuadrado

Desarrollando

Elevando al cuadrado



RECUERDA QUE...

Observa la ecuación $\sqrt{x+1} = -3$: la solución no pertenece a los números reales, pues la expresión $\sqrt{x+1}$, debe ser positiva o cero, según la definición de raíz cuadrada.

RECUERDA QUE...

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, n indica el índice de la raíz y a señala la cantidad subradical.

GLOSARIO

Ecuaciones con radicales: igualdad en la que intervienen raíces cuyas incógnitas forman parte de una o más cantidades subradicales.

Finalmente, se verifica que la solución realmente satisface la ecuación:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{89}{16}} + 5 + \sqrt{\frac{89}{16}} + 2 &= \sqrt{\frac{89+80}{16}} + \sqrt{\frac{89+32}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{169}{16}} + \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{13}{4} + \frac{11}{4} = \frac{24}{4} = 6\end{aligned}$$

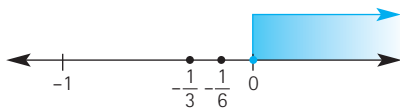
Como se satisface la igualdad original, la solución encontrada es válida.

Ejemplo 2

Considera la ecuación $\sqrt{6x+1} + \sqrt{3x} = 0$.

Antes de resolverla, se debe considerar las restricciones para el valor de x , ya que $6x+1$ y $3x$ deben ser ambos positivos. Para esto, se considera $3x \geq 0$ y $6x+1 \geq 0$, lo que da $x \geq 0$ y $x \geq -\frac{1}{6}$. Luego, la solución no puede ser menor que $-\frac{1}{6}$. Observa.

$$\begin{aligned}\sqrt{6x+1} + \sqrt{3x} &= 0 \\ (\sqrt{6x+1})^2 &= (-\sqrt{3x})^2 \\ 6x+1 &= 3x \\ 6x-3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$



Como se observa en la imagen que la solución hallada es menor que el valor determinado como restricción, esta ecuación no tiene solución en los números reales. Naturalmente, no es necesario comprobar la solución.

Ejemplo 3

Resuelve la ecuación $\sqrt{x^2+2} = x-2$.

Las restricciones para los valores de x están dadas solo por $x^2+2 \geq 0$, pero como todo cuadrado de un número es positivo, no existen restricciones en este caso. Ahora, se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2} &= x-2 \\ x^2+2 &= x^2-4x+4 \\ 4x &= 4-2 \\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Observa qué sucede al remplazar esta solución en la ecuación:

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2} - 2 \\ \sqrt{\frac{1}{4} + 2} &\stackrel{?}{=} \frac{1-4}{2} \\ \sqrt{\frac{9}{4}} &\neq -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Como la igualdad de la última línea no es cierta, la solución encontrada no satisface la ecuación. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución en los números reales.

Ejemplo 4

Resuelve la ecuación $7\sqrt{3\sqrt{x-1}} = 14\sqrt{3}$.

Las restricciones para los valores de x están dadas por la relación $x - 1 \geq 0$, ya que los coeficientes restantes son positivos, de donde $x \geq 1$.

Ahora, se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned}7\sqrt{3\sqrt{x-1}} &= 14\sqrt{3} \\ \sqrt{3\sqrt{x-1}} &= 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{x-1} &= 12 \\ x-1 &= 16 \\ x &= 17\end{aligned}$$

Y es fácil comprobar que la solución encontrada sí satisface la ecuación original.

EN RESUMEN

- Una **ecuación con radicales** es una igualdad en la que intervienen raíces cuya incógnita forma parte de una o más cantidades subradicales.
- En una ecuación con radicales, las soluciones encontradas algebraicamente deben ser siempre comprobadas, de modo que la ecuación original esté definida para valores reales.

EN TU CUADERNO

1. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales. Luego, comprueba la solución.

a. $\sqrt{x-5} = 5$

e. $\sqrt{x^2+8x+3} = x+1$

i. $2\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{x}}} = 6$

b. $\frac{2}{3}\sqrt{x-1} = 7$

f. $\frac{3}{4}\sqrt{\sqrt{x}} = 1$

j. $\sqrt{9x+1} - 1 = 3\sqrt{x}$

c. $2\sqrt{5x-1} + 1 = 7$

g. $2\sqrt{\sqrt{3x}} = 4$

k. $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2}$

d. $2\sqrt{3x+4} = 16$

h. $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}} = 1$

l. $\sqrt{x+5} + \sqrt{3} = \sqrt{x+8}$

2. ¿Por qué existen valores que no satisfacen una ecuación radical? Menciona un ejemplo para responder la pregunta.

3. Analiza las siguientes proposiciones:

a. La solución a la ecuación $\sqrt{x} = 3$ es $x = -9$. Justifica tu respuesta.

b. El valor real de x que satisface la ecuación $\sqrt{x} = -1$ es $x = 1$.

4. ¿Existe algún número natural tal que su raíz cuadrada tenga tres unidades más que la raíz cuadrada de su antecesor?, ¿por qué?

5. Indica si los siguientes procedimientos están correctos. En caso contrario, señala el error.

a. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 0$

$$\sqrt{2x+1} = -\sqrt{x} \quad | ()^2$$

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (-\sqrt{x})^2$$

$$2x + 1 = x$$

$$x = -1$$

b. $\sqrt{x-1} - \sqrt{x} = 2$

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x} + 2 \quad | ()^2$$

$$(\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{x} + 2)^2$$

$$x - 1 = x + 4\sqrt{x} + 4$$

$$-5 = 4\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = -\frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{25}{16}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{x - \sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{8}}{x + \sqrt{3}}$

b. $\frac{2x - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{18 + 2x}}$

7. ¿En cuántos centímetros cuadrados se incrementa el área de un cuadrado de 20 cm de perímetro cuando al lado se agregan $\sqrt{2}$ cm? Explica, paso a paso, cómo lo resolviste.

MI PROGRESO

1. Determina si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $7\sqrt{2} = \sqrt{98}$

b. $\sqrt{14} = \sqrt{2} + \sqrt{7}$

c. $4\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{60}$

2. Realiza las siguientes operaciones y reduce el resultado cuando sea posible.

a. $\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{64}$

c. $3\sqrt[3]{4} \cdot 5\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16}$

e. $7\sqrt[4]{3} - 3\sqrt[4]{243} + \sqrt[4]{3}$

b. $3\sqrt[5]{9} \cdot 2\sqrt[5]{27}$

d. $14\sqrt[3]{1296} : 7\sqrt[3]{6}$

f. $14\sqrt[6]{256} : 2\sqrt[6]{4}$

3. Realiza las siguientes operaciones y reduce el resultado, si es posible, expresándolo como una sola raíz.

a. $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{25}}}$

c. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{27}}}$

e. $2\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$

b. $7^{\frac{5}{6}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$

d. $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

f. $\left((11)^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{3}{6}} \cdot \left((11)^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $4\sqrt{3\sqrt{x}} = 12\sqrt{2}$

b. $2\sqrt{x-1} = 21$

c. $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-1} = 1$

5. Si tengo un terreno que tiene una superficie de 11 m^2 , ¿a qué se parecería? Escoge entre las siguientes alternativas:

- A. Una cancha de tenis.
- B. Una mesa de comedor.
- C. Una habitación.
- D. Una sala de clases.

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Resolver operaciones con raíces enésimas.	1 y 2	___ / 9
Relacionar potencias con raíces.	3	___ / 6
Resolver ecuaciones con radicales.	4	___ / 3
Aproximar raíces cuadradas.	5	___ / 1



Hasta hace casi 400 años, la tarea de un calculador podía ser agotadora, imagina calcular multiplicaciones, divisiones, potencias, o sacar raíces, no solo de números enteros sino también de fracciones y números decimales, obviamente, sin tener una calculadora.

Observa las siguientes multiplicaciones:

$16 \cdot 128$	$81 \cdot 2187$	$256 \cdot 16\,384$	$625 \cdot 78\,125$
----------------	-----------------	---------------------	---------------------

ANALICEMOS...

- Calcula los productos de las multiplicaciones anteriores sin usar calculadora y compara los resultados en tu curso. ¿Existen diferencias?, ¿por qué?
- ¿Existe alguna forma de simplificar estos cálculos, sin calculadora? Explica.
- Observa la siguiente tabla. ¿Reconoces en ella algunos de los factores anteriores?, ¿y algunos de tus resultados?, ¿qué tienen en común?

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	3125
6	64	729	4096	15 625
7	128	2187	16 384	78 125
8	256	6561	65 536	390 625
9	512	19 683	262 144	1 953 125
10	1024	59 049	1 048 576	9 765 625
11	2048	177 147	4 194 304	48 828 125
12	4096	531 441	16 777 216	244 140 625

- Escribe los factores y el resultado, en cada caso, en forma de potencias. ¿Qué puedes concluir?

Observa que todos los resultados conseguidos en la tabla anterior se ubican en la fila correspondiente a $n = 11$. Es decir, 11 es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener 2048, o el 3 para obtener 177 147, por ejemplo. Para referirnos a este exponente, al que hay que elevar el 2 para obtener 2048, decimos que el **logaritmo** de 2048, en base 2, es 11 y lo denotamos:

$$\log_2 2048 = 11, \text{ pues } 2^{11} = 2048$$

o que el logaritmo de 177 147 en base 3 es 11 y lo denotamos:

$$\log_3 177\,147 = 11, \text{ pues } 3^{11} = 177\,147$$

Y así sucesivamente.

¿Cómo se podría simplificar el cálculo de $625 \cdot 78\,125$ utilizando la tabla?

Se ubican en la tabla cada uno de los factores y se expresan como potencias con igual base: $625 \cdot 78\,125 = 5^4 \cdot 5^7 = 5^{11}$

Entonces, se busca en la tabla, en la columna que corresponde a 5^n , su valor para $n = 11$. Este valor es 48 828 125, tal como cuando resolviste la multiplicación mediante el algoritmo habitual.

De manera similar, podríamos efectuar otras operaciones, como divisiones, por ejemplo:

$$\frac{244\,140\,625}{390\,625} = \frac{5^{12}}{5^8} = 5^4 = 625$$

Además, utilizando la expresión $\log_b B = \frac{\log_c B}{\log_c b}$, se puede determinar el resultado de $\log_{27} 19\,683$.

A partir de la tabla, se observa que 19 683 y 27 son ambos potencias de 3, luego se pueden escribir utilizando los logaritmos en base 3 y ubicar los valores en la tabla. Observa.

$$\log_{27} 19\,683 = \frac{\log_3 19\,683}{\log_3 27} = \frac{9}{3} = 3. \text{ Es decir, } 27^3 = 19\,683$$

De esta manera, las multiplicaciones se pueden convertir en sumas, las divisiones en restas y las raíces por divisiones, con lo que se facilita notablemente el cálculo, más cuando los números implicados son muy grandes y se cuenta, obviamente, con tablas apropiadas.

GLOSARIO

Logaritmo: exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado.

RECUERDA QUE...

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

con $a \neq 0, n, m \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Volvamos a la definición de logaritmo: "exponente al que es necesario elevar una cantidad positiva para que resulte un número determinado". Si lo escribiera como ecuación, corresponde a resolver $\log_b a = x$, donde b es la base del logaritmo y a es su argumento, con a y b positivos.

Por ejemplo, calcular $\log_2 16$ equivale a resolver la ecuación $\log_2 16 = x$. Entonces, ya que la **base** del logaritmo es 2, el **exponente** no se conoce y 16 es el argumento, es decir, el **valor de la potencia**, se puede escribir $2^x = 16$. Y como 16 es una potencia de 2, de hecho, 2^4 , esto equivale a $2^x = 2^4$, luego, igualando los exponentes, se concluye que $x = 4$.

Ejemplo 1: Calcula el valor de $\log_7 343$

$$\log_7 343 = x \quad 7^x = 343 = 7^3 \quad x = 3$$

Luego, $\log_7 343 = 3$

Ejemplo 2: Obtener el valor de $\log_2 \sqrt{8}$

$$\log_2 \sqrt{8} = x \Rightarrow 2^x = 8^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Luego, } \log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$$

Al igual que en el caso de las raíces, no todos los logaritmos se pueden calcular. Esta es la razón de la condición de valores positivos para a y b . Observa.

Ejemplo 3: Obtener el valor de $\log_8 -512$

$$\log_8 -512 = x \Rightarrow 8^x = -512$$

Pero ¿la potencia de un número positivo puede ser negativa? No, en ningún caso. Luego, $\log_8 -512$ no existe.

Ejemplo 4: Calcula el valor de $\log_{(-2)} 8$

$$\log_{(-2)} 8 = x \Rightarrow (-2)^x = 8 = 2^3$$

En este caso, la base de la potencia es negativa y su exponente es impar, luego el valor de la potencia debiera ser negativo también. Como esto no se cumple, no existe $\log_{(-2)} 8$.

Ejemplo 5: ¿Cuánto resulta $\log_1 5$?

$$\log_1 5 = x \Rightarrow 1^x = 5$$

Ya que toda potencia de 1 es 1, no existe un valor de x , tal que 1^x sea igual a 5.

Considerando situaciones como estas, es que se ha definido que el valor de la base y el argumento del logaritmo deben ser positivos. En particular, la base debe ser distinta de 1.

En un mundo sin calculadoras, los logaritmos fueron utilizados como la principal herramienta en los cálculos aritméticos. Usándolos se ahorró un increíble esfuerzo, pues permitieron trabajar con los pesados cálculos necesarios en las aplicaciones a la agrimensura, la astronomía, y particularmente la navegación. Además, permitió realizar otros cálculos matemáticos que sin su invención no hubieran sido posibles.

Las tablas de logaritmos y las reglas de cálculo eran imprescindibles en cualquier centro de cálculo, hasta la aparición de las calculadoras y computadores. Actualmente los logaritmos ya no son necesarios para lo que fueron descubiertos. Sin embargo, ciertas características y utilidades, que durante estos siglos se les han descubierto, los han hecho sobrevivir al desarrollo de la electrónica.

EN RESUMEN

- El argumento y la base de un logaritmo son números reales positivos. Además, la base no puede ser 1. Es decir, en la expresión $\log_b a$, siempre, por definición, $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.
- Por definición, $x = \log_b a \Rightarrow b^x = a$, entonces se puede decir que el logaritmo es el exponente de una potencia.
- La expresión $\log_b a$ se lee como: “logaritmo de a en base b ”.

EN TU CUADERNO

1. Calcula cada uno de los siguientes logaritmos.

a. $\log_9 243$

c. $\log_{0,7} 0,343$

e. $\log_a \sqrt{a^8}$

g. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

i. $\log_{16} 8$

b. $\log_2 128$

d. $\log_a a^9$

f. $\log_6 \frac{1}{36}$

h. $\log_8 16$

j. $\log_a \sqrt[5]{a^2}$

2. Dada cada expresión, encuentra el valor de x .

a. $\log_2 x = 6$

b. $\log_{\frac{3}{4}} x = -2$

c. $\log_{0,3} x = 3$

d. $\log_{0,004} x = -3$

Propiedades de los logaritmos

Tomás, a partir de la definición y luego de comprobarlo con algunos valores, determinó las siguientes relaciones entre los valores de a , b y c , con $a \neq 1$:

$$\log_a b = c \qquad a^c = b \qquad a = \sqrt[c]{b}$$

ANALICEMOS...

- ¿Están correctas las relaciones que estableció Tomás? Compruébalas reemplazando con los valores correspondientes, en cada caso.
- Tal como existen propiedades para las potencias y para las raíces, ¿se pueden establecer propiedades para los logaritmos? Justifica.
- Por ejemplo, en el caso de $\log_b b^n$, ¿existe alguna propiedad que simplifique los cálculos? Explica.

Las propiedades que se cumplen para logaritmos, para cualquier valor de la base b , se pueden establecer y demostrar a partir de las propiedades de las potencias. Observa.

- **Logaritmo de la unidad:**

$$\begin{aligned}\log_b 1 = x &\Leftrightarrow b^x = 1, \text{ ya que } b > 0, b \neq 1 \\ &\Leftrightarrow b^x = b^0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

Por propiedades de potencias, ya que el valor de la potencia es 1 cuando el exponente de la potencia es cero (ya que la base es positiva y distinta de 1). Luego, $\log_b 1 = 0$, con $b \neq 1$.

Ejemplo: $\log_5 1 = 0$

- **Logaritmo de la base del sistema:**

$$\begin{aligned}\log_b b = x &\Leftrightarrow b^x = b && \Leftrightarrow b^x = b^1 \\ &&& \Rightarrow x = 1.\end{aligned}$$

Luego, $\log_b b = 1$, con $b \neq 1$.

Ejemplo: $\log_3 3 = 1$

- **Logaritmo de una potencia con igual base:**

$$\log_b b^n = x \Leftrightarrow b^x = b^n \Leftrightarrow x = n$$

Luego, $\log_b b^n = n$, con $b \neq 1$.

Ejemplo: $\log_6 6^3 = 3$.

• Cambio de base:

$$\log_b B = x \Leftrightarrow b^x = B$$

$$\log_c b^x = \log_c B \quad \leftarrow \text{Se aplican logaritmos en una base } c$$

$$x \cdot \log_c b = \log_c B \quad \leftarrow \text{Por propiedad de logaritmos que se trabajará en la página 49}$$

$$\text{Por lo tanto, } \log_b B = \frac{\log_c B}{\log_c b} \text{ para todo } b, c, B > 0; b, c \neq 1$$

$$\text{Ejemplo: } \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0,69897}{0,30103} = 2,32192$$

NO OLVIDES QUE...

- Los logaritmos de base diez, es decir, $\log_{10} x$, son llamados logaritmos decimales y en este texto los denotaremos como $\log x$.
- Las calculadoras tienen teclas para calcular el logaritmo en base 10 (\log) y el logaritmo natural en base e (\ln), pero no el logaritmo en una base cualquiera. En ese caso, se calcula usando la fórmula de cambio de base.

EN RESUMEN

Se cumple, ya que la base b del logaritmo es positiva y distinta de 1, que:

- Logaritmo de la unidad: $\log_b 1 = 0$.
- Logaritmo de la base del sistema: $\log_b b = 1$.
- Logaritmo de una potencia con igual base: $\log_b b^n = n$.
- Cambio de base: $\log_b B = \frac{\log_c B}{\log_c b}$ para todo $b, c, B > 0; b, c \neq 1$

EN TU CUADERNO

1. Calcula cada uno de los siguientes logaritmos.

a. $\log_2 64$

d. $\log_5 1$

g. $\log_{81} 27$

j. $\log_{\frac{4}{3}} \frac{16}{9}$

b. $\log_9 243$

e. $\log_3 3$

h. $\log_{128} 1$

k. $\log_{\frac{1}{2}} 128$

c. $\log_{0,7} 0,49$

f. $\log_5 5^7$

i. $\log_6 6^3$

l. $\log_5 \frac{1}{25}$

2. Utilizando una calculadora encuentra el valor de las siguientes expresiones.

a. $\log_2 3$

b. $\log_6 7$

c. $\log_7 9$

d. $\log_6 11$

3. Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones.

a. $\log_4 64 + \log 1000 + \log_5 125$

d. $3 \log_{\frac{1}{4}} 32 + 7 \log_{\frac{1}{5}} 125 - 6 \log_{\frac{1}{3}} 243$

b. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} - \log_{\frac{6}{5}} \frac{125}{216} + \log 10\,000$

e. $4 \log_{\frac{5}{7}} \frac{25}{49} + 2 \log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125} - 5 \log_{\frac{6}{7}} \frac{216}{343}$

c. $2 \log_5 25 - 3 \log_7 49 + 4 \log_8 4096$

f. $2 \log 100\,000 - 2 \log_4 256 + 4 \log_2 32$

Propiedades de las operaciones de los logaritmos

Al igual que para las potencias y las raíces, para los logaritmos también existen propiedades que permiten simplificar los cálculos. Para demostrarlas, los logaritmos se pueden escribir en forma exponencial y aplicar algunas de las propiedades de las potencias.

Por ejemplo, el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Es decir,

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$$

ANALICEMOS...

- Considera valores positivos para a , b y c , con $b \neq 1$, y replázalos en la expresión. ¿Efectivamente se cumple?, ¿por qué?
- ¿Crees que también se cumpla $\log_b (a \cdot c) = \log_b a \cdot \log_b c$? Justifica.
- A partir de esta propiedad ¿se pueden obtener otras? Explica.

Para comprobar con un ejemplo que esta propiedad se cumple, se puede resolver un logaritmo de dos maneras distintas, directamente y aplicando el logaritmo del producto. Observa:

$$\begin{aligned}\log_2 128 &\Leftrightarrow 2^x = 128 \\ &\Leftrightarrow 2^x = 2^7, \text{ luego } x = 7\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\log_2 128 &= \log_2 (4 \cdot 32) = \log_2 4 + \log_2 32 \\ &= 2 + 5 = 7\end{aligned}$$

Pero no basta con comprobar con un ejemplo para justificar que la propiedad está correcta. Es necesario demostrar que se cumple para cualquier valor de a , b o c , con $b \neq 1$.

$$\begin{aligned}\text{Considera que } \log_b a &= y &\Leftrightarrow b^y &= a \\ \log_b c &= z &\Leftrightarrow b^z &= c \\ \log_b (a \cdot c) &= x &\Leftrightarrow b^x &= a \cdot c\end{aligned}$$

$$b^x = b^y \cdot b^z \quad \leftarrow \text{Remplazando}$$

$$b^x = b^{y+z} \Rightarrow x = y + z \quad \leftarrow \text{por propiedad de potencias}$$

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c \quad \leftarrow \text{Remplazando}$$

De manera similar, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores.

$$\log_b \left(\frac{a}{c} \right) = \log_b a - \log_b c$$

$$\text{Ejemplo: } \log_3 \left(\frac{81}{243} \right) = \log_3 81 - \log_3 243 = 4 - 5 = -1$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de dicha potencia por el logaritmo de su base.

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

Ejemplo: $\log_2 4^3 = 3 \cdot \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido por el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$$

Ejemplo: $\log_4 \sqrt[6]{16} = \frac{1}{6} \cdot \log_4 16 = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

NO OLVIDES QUE...

En relación con las propiedades de los logaritmos se debe tener presente que se cumple en general:

- $\log_b (p \cdot q) \neq \log_b p \cdot \log_b q$
- $\log_b (p + q) \neq \log_b p + \log_b q$
- $\log_b (p - q) \neq \log_b p - \log_b q$

EN RESUMEN

Sean a , b , c números racionales y positivos, con la base b distinta de 1:

- Logaritmo de un cociente: $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
- Logaritmo de una potencia: $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$
- Logaritmo de una raíz: $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}$

EN TU CUADERNO

1. Desarrolla cada una de las siguientes expresiones, utilizando propiedades.

a. $\log_b (x^2 - 9x - 22)$

c. $\log_b (x^3 + y^3)^2$

b. $\log_b (100x^8 - 80x^7 + 16x^6)^{\frac{8}{3}}$

d. $\log_p \frac{a^2 b^4 c^5}{d^2}$

2. Reduce cada una de las siguientes expresiones a un solo logaritmo.

a. $\log_m a - 2 \log_m b + \log_m c - 3 \log_m d$

e. $2 \log_b 3 + 3 \log_b 2$

b. $\log_b (x^2 + 1) + \log_b (x + 1) + \log_b (x - 1)$

f. $\log_b c - 6 \log_b a$

c. $\log_p (x + y + z) - 4 \log_p (x - y - z)$

g. $\log_b a - \log_b c - \log_b d + \log_b e$

d. $\log_p (x + 3) - 4 \log_p (x - 2)$

h. $\log_b c + \log_b a - 1$

3. Si $A = \log_6 2$, $B = \log_6 3$ y $C = \log_6 5$, expresa en términos de A , B y C .

a. $\log_6 5400$

b. $\log_6 90$

c. $\log_6 \sqrt{216}$

d. $\log_6 \frac{1080}{32400}$

Ecuaciones logarítmicas

Una escala utilizada para medir la cantidad de energía liberada por un sismo es la escala de Richter, representada por la ecuación: $\log E = 1,5 \cdot R + 11,8$ donde E : energía liberada, medida en ergios y R : magnitud del sismo, medida en grados de la escala Richter. Por ejemplo, el terremoto del 13 de junio de 2005 en Huara, provincia de Iquique, tuvo una magnitud de 7,8.

ANALICEMOS...

- ¿Cuánta energía fue liberada en esa ocasión?, ¿cómo lo calculaste?
- ¿Cuánta energía más liberaría un terremoto de magnitud 8,5 en la escala de Richter? Explica.

GLOSARIO

Ecuación logarítmica: igualdad en la que intervienen logaritmos y donde la incógnita forma parte del argumento de, al menos, uno de ellos.

La ecuación logarítmica que permite responder la situación presentada es $\log x = 1,5 \cdot 7,8 + 11,8$, ya que R , en este caso, es igual a 7,8.

Luego, para calcular cuál es el valor de x , se aplican potencias de 10. Observa.

$$\log x = 1,5 \cdot 7,8 + 11,8$$

$$\log x = 23,5$$

$10^{\log_{10} x} = 10^{23,5}$ pero $10^{\log_{10} x} = x$, por definición de logaritmos.

$$x \approx 3,162 \cdot 10^{23}$$

Luego, la energía liberada en el terremoto del 13 de junio de 2005 fue de $3,162 \cdot 10^{23}$ ergios aproximadamente.

En general, para resolver una ecuación logarítmica con una incógnita, se debe manipular la ecuación de modo de escribirla de la forma $\log_b f(x) = \log_b g(x)$, donde $f(x)$ y/o $g(x)$ son expresiones que contienen la incógnita.

Como la función logarítmica es siempre creciente, o bien siempre decreciente, entonces: $\log_b f(x) = \log_b g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Lo anterior, junto con las propiedades de los logaritmos, nos permitirá resolver una ecuación.

Ejemplo 1

$$\log(x+4) = \log 2 + \log(x+1)$$

$$\log(x+4) = \log(2 \cdot (x+1)) \quad \leftarrow \text{Aplicando propiedades de los logaritmos.}$$

$$\log(x+4) = \log(2x+2)$$

$$x+4 = 2x+2 \quad \leftarrow \text{Se igualan los argumentos}$$

$$x = 2$$

Se verifica la solución, reemplazando $x = 2$ en la ecuación:

$$\log(x+4) = \log(2+4) = \log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = \log 2 + \log(2+1)$$

Por lo que $x = 2$ satisface la ecuación.

Ejemplo 2

$$\log(x^2 - 18) = \log 3 + \log x$$

$$\log(x^2 - 18) = \log(3x) \quad \leftarrow \text{Se aplican propiedades de los logaritmos.}$$

$$x^2 - 18 = 3x \quad \leftarrow \text{Igualando el argumento de ambos logaritmos.}$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x-6)(x+3) = 0 \quad \leftarrow \text{Al resolver esta ecuación de segundo grado, se obtienen dos soluciones.}$$

$$x = 6 \text{ y } x = -3$$

Al reemplazar $x = 6$ se obtiene: $\log(6^2 - 18) = \log 3 \cdot 6$. Por lo tanto, satisface la ecuación logarítmica.

Por otra parte, con $x = -3$ se obtiene $\log -9 = \log 3 + \log -3$, pero la función logarítmica no está definida para un número negativo. Por lo tanto, $x = -3$ no es una solución de la ecuación.

Ejemplo 3

$$\log(x^2 - 1) = \log(x - 1)$$

$$x^2 - 1 = x - 1 \quad \leftarrow \text{Igualando el argumento de ambos logaritmos.}$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \quad \leftarrow \text{Se resuelve la ecuación de segundo grado.}$$

$$x = 0 \text{ y } x = 1$$

Para $x = 0$ se obtiene $\log(-1)$, que no está definido.

Para $x = 1$ se obtiene $\log(0)$, que también está indefinido.

Por lo tanto, esta ecuación logarítmica no tiene solución real, aunque algebraicamente se obtuvieron valores. De aquí la importancia de comprobar siempre los resultados.

No OLVIDES QUE...

Las soluciones de una ecuación logarítmica deben ser comprobadas ya que esta función solo admite valores positivos, y podría ocurrir que el valor encontrado no satisfaga esta condición.

Ejemplo 4

$$\log_2 [\log_2 (5x + 6)] = 2$$

$$\log_2 [\log_2 (5x + 6)] = \log_2 2^2$$

$$\log_2 (5x + 6) = 4 \quad \leftarrow \text{Igualando el argumento de ambos logaritmos.}$$

$$\log_2 (5x + 6) = \log_2 2^4$$

$$5x + 6 = 2^4 \quad \leftarrow \text{Igualando el argumento de ambos logaritmos.}$$

$$5x + 6 = 16$$

$$5x = 10, \text{ luego } x = 2$$

$$\text{Comprobando, } \log_2 [\log_2 (5 \cdot 2 + 6)] = \log_2 [\log_2 16] = \log_2 4 = 2$$

EN RESUMEN

- Una ecuación logarítmica es una igualdad en la que intervienen logaritmos y donde la incógnita forma parte del argumento de al menos uno de ellos.
- Para resolver una ecuación logarítmica, se debe manipular la ecuación de modo de escribirla de la forma $\log_b f(x) = \log_b g(x)$, donde $f(x)$ y/o $g(x)$ son expresiones que contienen la incógnita. Como la función logarítmica es siempre creciente, o bien siempre decreciente, entonces:
 $\log_b f(x) = \log_b g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. Entonces, ahora se resuelve $f(x) = g(x)$
- Las soluciones de una ecuación logarítmica se deben comprobar siempre, ya que los logaritmos solo se definen para valores positivos, y podría ocurrir que el valor encontrado, al remplazarlo en la ecuación, no satisfaga esta condición.

EN TU CUADERNO

1. Obtén el valor de x en los siguientes casos.

a. $\log_2 128 = x$

c. $\log_x 100 = \frac{1}{2}$

b. $\log_7 343 = x$

d. $\log_2 32^2 = x$

2. Determina el valor de x en cada caso.

a. $\log_3 [\log_3 (5x + 2)] = 1$

d. $\log_5 (5x - 4) - \log_5 (2x - 7) = 2$

b. $\log_2 \{\log_2 [\log_2 (2x - 8)]\} = 0$

e. $\frac{\log_4 (x^2 + 8)}{\log_4 (x + 3)} = 2$

c. $\log_3 \{\log_3 [\log_3 (x + 25)]\} = 0$

f. $\log_2 x + \log_2 6 = \log_2 30 - \log_2 5$

El pH es la escala de medida que diferencia el grado de acidez o de alcalinidad de una solución. Los químicos calculan el pH de una solución (condición de ácido o base) mediante la expresión:

$pH = -\log [H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro.

ANALICEMOS...

- Determina el pH aproximado de la sangre, si tiene $[H^+] = 3,98 \cdot 10^{-8}$.
- Si el huevo tiene un $pH = 7,79$, determina $[H^+]$. ¿Cómo lo calculaste?
- Muchas soluciones tienen un rango de pH que fluctúa entre 1 y 14. ¿Qué valores de H^+ están asociados a esos valores extremos?

Para calcular el pH de la sangre, basta remplazar el valor de $[H^+]$ en la expresión. Observa.

$$pH = -\log 3,98 \cdot 10^{-8} \approx 7,4$$

En cambio, para determinar el valor de $[H^+]$ del huevo, se debe resolver la siguiente ecuación logarítmica:

$$\begin{aligned} -\log x &= 7,79 \\ \log x &= -7,79 \\ x &= 10^{-7,79} \approx 1,62 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Entonces, la concentración de iones de hidrógeno del huevo es $1,62 \cdot 10^{-8}$ aproximadamente.

EN TU CUADERNO

1. Encuentra $[H^+]$ aproximada, en cada caso, dados sus valores de pH :

- a. Bebida cola, $pH = 2,5$
- b. Vinagre, $pH = 2,9$
- c. Manzana, $pH = 3,0$
- d. Leche, $pH = 6,5$
- e. Jabón de manos, $pH = 10$

2. La lluvia más ácida que se ha medido ocurrió en Escocia en 1974. Su pH era de 2,4. Determina la concentración de iones de hidrógeno.

EN TU CUADERNO

3. Los valores de pH para los vinos varían desde 2,8 a 3,8. Determina el rango correspondiente en concentraciones de iones de hidrógeno.

4. Una famosa escala para medir la cantidad de energía liberada por un sismo es la escala de Richter, representada por la ecuación:

$$\log E = 1,5 \cdot R + 11,8$$

donde E : energía liberada medida en ergios; R : magnitud del sismo en grados de la escala Richter.

- El terremoto de mayor magnitud registrado corresponde al ocurrido en 1960 en la ciudad de Valdivia, el cual fue de 9,5 grados Richter. ¿Cuál fue la energía liberada por este sismo?
- El terremoto ocurrido el 3 de marzo de 1985, en San Antonio, fue de 7,8 grados Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso el terremoto de Valdivia que el de San Antonio?
- Averigua acerca de otros terremotos ocurridos en nuestro país y compara su magnitud con el terremoto de Valdivia (busca información en la página web del Servicio Sismológico de la Universidad de Chile <http://ssn.dgf.uchile.cl/>)

5. El nivel de decibeles del sonido (dB), se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$D = 10 \log (I \cdot 10^{12}) \text{ donde } I \text{ corresponde a la intensidad del sonido medido en watts/m}^2.$$

- Si se duplica la intensidad del sonido ¿cómo cambia el nivel de decibeles del sonido?
- El umbral auditivo es la mínima intensidad de sonido que podemos oír, y corresponde a 10^{-12} watts/m². Demuestra que el nivel de decibeles del umbral auditivo es cero.
- En una multitienda se vende un equipo musical que tiene 1000 watts/m² de salida. ¿A qué nivel de decibeles corresponde esta intensidad?
- Si en la misma tienda se vende otro equipo musical cuya intensidad es de 2000, ¿corresponde al doble del nivel de decibeles del equipo anterior?, ¿por qué?

6. Completa la siguiente tabla.

Fuente	Intensidad	Decibeles
Susurro	10^{-10}	
Tráfico callejero	10^{-5}	
Posible daño auditivo	$10^{-3,5}$	
Cercano a un trueno		120
Umbral del dolor		130
Perforación instantánea del tímpano		160
Concierto de rock		101

- ¿Qué medidas implementarías para disminuir la contaminación acústica? Discútelo con tus compañeros.

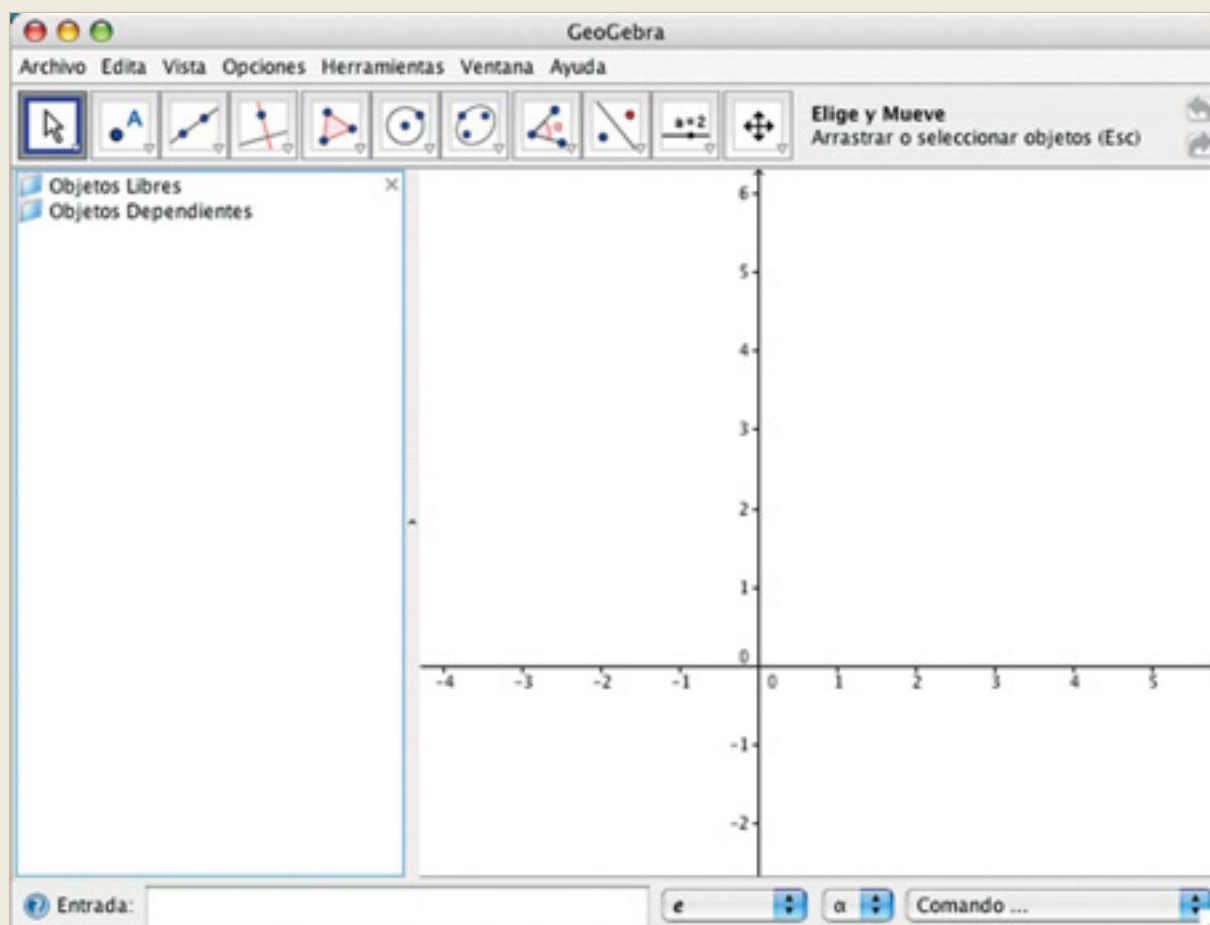
HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

GeoGebra es un *software* libre que relaciona aritmética, geometría, álgebra y cálculo. Por una parte, es un sistema de geometría interactiva, pero también se pueden ingresar las ecuaciones y coordenadas directamente y, luego, obtener las gráficas correspondientes. Esto permite construir y analizar las gráficas de diversas funciones.

Para descargar este programa ingresa a: www.geogebra.org. Luego, selecciona, en el menú de la izquierda, **Webstart-Teleinicio**, y luego, haz clic en el botón **Webstart**.

Para abrir el programa, haz doble clic en el icono GeoGebra_3_2_0_0.exe.

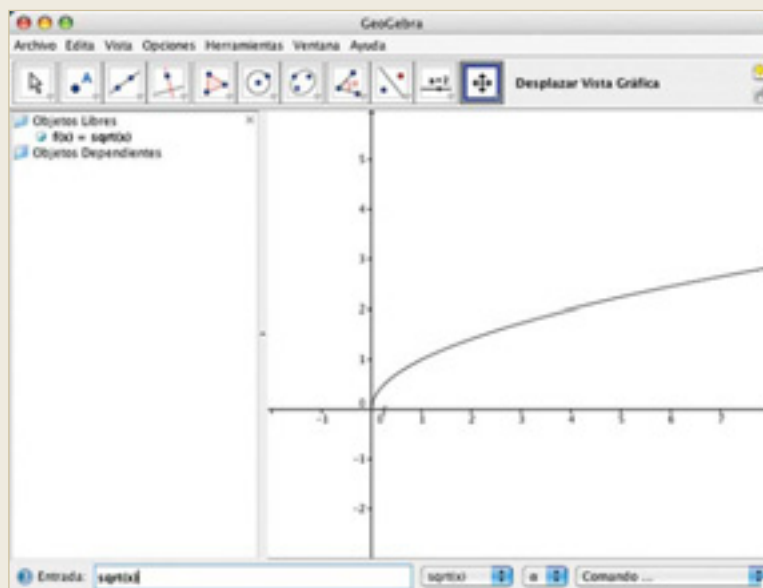
- Para graficar una función, se debe escribir directamente en la celda **Entrada**, ubicada en la parte inferior de la ventana. Si la función incluye fracciones, se debe escribir el número entre paréntesis y usando / para escribir la fracción, y si tiene potencias, los exponentes se escriben usando el símbolo $^$. Por ejemplo, para graficar $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ se escribe $f(x) = (1/2)^x$ y se presiona *enter*.



Ejercicios

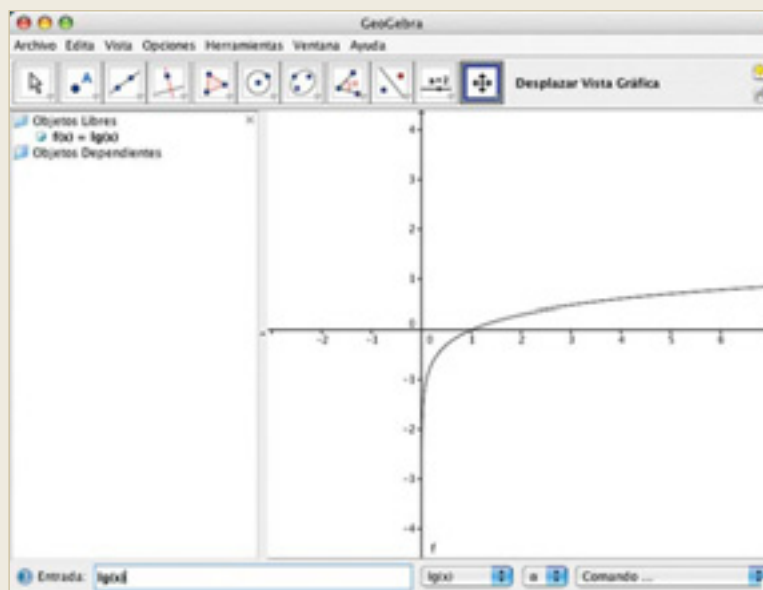
En cada caso, utiliza GeoGebra para graficar las funciones indicadas, observa sus gráficas y responde las preguntas correspondientes.

- I. Grafica la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$. Para esto, escribe en la **Entrada**: $\text{sqrt}(x)$, ya que se usa sqrt , por *square root*, "raíz cuadrada" en inglés. Debieras obtener una imagen como esta.



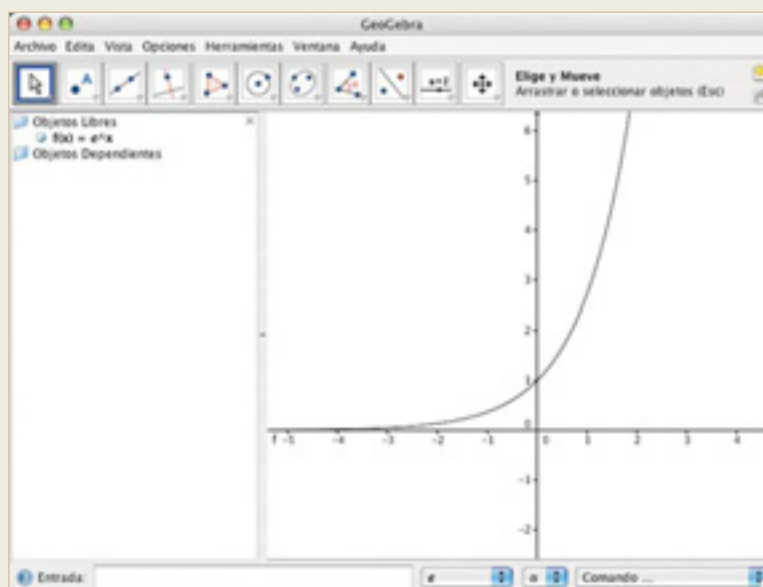
1. ¿Cuáles son sus características?, ¿por qué crees que es así? Justifica.
2. Grafica en un mismo plano las siguientes funciones:
 - a. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2 + \sqrt{x}$
 - b. $f(x) = \sqrt{x} - 4$ y $g(x) = \sqrt{x} + 4$
 - c. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2 + \sqrt{x}$
 - ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$? Explica.
 - ¿Qué puedes concluir?
3. Grafica en un mismo plano las siguientes funciones:
 - a. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$
 - b. $f(x) = -\sqrt{x} - 3$ y $g(x) = \sqrt{x} + 3$
 - c. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{-x}$
 - ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$? Explica.
 - ¿Qué puedes concluir?

- II. Grafica la función logarítmica, $f(x) = \log x$. Para esto, escribe en la **Entrada**: $\lg(x)$, que corresponde al logaritmo en base 10. También se puede utilizar $\ln(x)$, para el logaritmo natural y $\lg_2(x)$ para el logaritmo en base 2. Debieras obtener una imagen como esta.



- ¿Cuáles son sus características?, ¿por qué crees que es así? Justifica.
- Grafica en un mismo plano las siguientes funciones:
 $f(x) = \log x$, $g(x) = \ln x$ y $h(x) = \log_2 x$
 - ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$? Explica.
 - ¿Qué puedes concluir?
- Grafica en un mismo plano las siguientes funciones:
 - $f(x) = \log x$ y $g(x) = 4 + \log x$
 - $f(x) = \log x - 2$ y $g(x) = \log x + 2$
 - $f(x) = \log(x + 5)$ y $g(x) = \log(x - 5)$
 - ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$? Explica.
 - ¿Qué puedes concluir?
- Grafica en un mismo plano las siguientes funciones:
 - $f(x) = \log x$ y $g(x) = 3 \log x$
 - $f(x) = \log 4x$ y $g(x) = \log -4x$
 - $f(x) = \log\left(\frac{x}{2}\right)$ y $g(x) = -\log\left(\frac{x}{2}\right)$
 - ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$? Explica.
 - ¿Qué puedes concluir?

- III. Grafica la función exponencial, $f(x) = e^x$. Para esto, escribe en la Entrada: e^x , buscando primero el número e en la lista que está a la derecha de la Entrada (en algunos casos es necesario escribir dos veces ^ para que no se borre al escribir la x). También se puede escribir con otra base, por ejemplo, para la función $g(x) = 2^x$, se escribe 2^x . Debieras obtener una imagen como esta.



- ¿Cuáles son sus características?, ¿por qué crees que es así? Justifica.
- Grafica en un mismo plano las siguientes funciones:

a. $f(x) = e^x$ y $g(x) = 2x$	b. $f(x) = e^x$ y $g(x) = -e^x$	c. $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$
-------------------------------	---------------------------------	-----------------------------------

 - ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$? Explica.
 - ¿Qué puedes concluir?
- Grafica en un mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones.

a. $f(x) = 5^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	c. $f(x) = -2^x$ y $g(x) = 2^x$	e. $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 2^{x-1}$
b. $f(x) = 3^x$ y $g(x) = 3^{-x}$	d. $f(x) = 3 \cdot 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$	f. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

 - ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$? Explica.
 - ¿Qué puedes concluir?
- Grafica en un mismo plano las siguientes funciones:

a. $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$	b. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$	c. $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \log x$
----------------------------------	-------------------------------------	------------------------------------

 - ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$? Explica.
 - ¿Qué puedes concluir?

MI PROGRESO

1. Utilizando la tabla de la página 42, calcula los siguientes logaritmos.

a. $\log_4 16\,384$

b. $\log_5 1\,953\,125$

c. $\log_3 177\,147$

d. $\log_{16} 1\,048\,576$

2. Calcula los siguientes logaritmos.

a. $\log_6 216$

b. $\log_2 1024$

c. $\log_{10} 10\,000\,000$

d. $\log_9 1$

3. Desarrolla cada una de las siguientes expresiones, utilizando propiedades.

a. $\log_b \frac{p^2 q^2 \sqrt{r}}{s^4}$

b. $\log_b \sqrt[3]{p^2 - q^2}$

4. Reduce cada una de las siguientes expresiones a un solo logaritmo.

a. $2 \cdot \log_b (x^2 - 9) + \log_b (x - 3) - \log_b (x + 3)$

b. $\log_c (x + 2y - z) - 3 \log_c (x - y + 4z)$

5. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $\log_5 (5x - 4) - \log_5 (2x - 7) = 2$

b. $\log_2 (x^2 - 9x + 8) - \log_2 (x - 8) = 3$

6. El nivel de intensidad del sonido de un tren del Metro se midió en 98 dB. Determina la intensidad del sonido correspondiente en W/m^2 .

7. Determina cuál de las siguientes afirmaciones es falsa. Justifica tu decisión.

A. El logaritmo de una potencia es igual al producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo de la base de la potencia.

B. El valor del logaritmo cuya base es igual al argumento es siempre igual a 1.

C. La base de un logaritmo es un número real positivo.

D. Dos logaritmos en la misma base son iguales si y solo si sus argumentos son iguales.

E. Ninguna de las anteriores.

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Calcular logaritmos.	1 y 2	___ / 8
Aplicar propiedades de los logaritmos.	3 y 4	___ / 4
Resolver ecuaciones logarítmicas.	5	___ / 2
Resolver problemas asociados a ecuaciones logarítmicas.	6	___ / 1
Reconocer propiedades de los logaritmos.	7	___ / 1

Cómo resolverlo

Problema resuelto 1

A un rectángulo cuya altura es $a = 1$ cm y cuya base mide $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cm se le quita un cuadrado de lado 1 cm, de modo que resulta otro rectángulo. Halla las longitudes de sus lados y prueba que el cociente entre la longitud del lado mayor y del lado menor es el número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución:



Las dimensiones del nuevo rectángulo serán: 1 y $(b - 1)$.

Base del rectángulo resultante $(b - 1)$ \longrightarrow $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = b'; a' = 1$

Calculemos el cociente entre las longitudes del lado mayor (a') y del lado menor (b') del nuevo rectángulo:

Racionalizamos

$$\frac{a'}{b'} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Simplificamos

Hemos demostrado que el cociente entre las longitudes de los lados del rectángulo es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

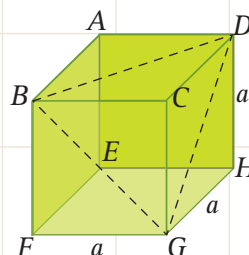
EN TU CUADERNO

1. Considera un cuadrado de lado a , el cual en su parte superior tiene un triángulo isósceles rectángulo. Calcula el perímetro de la figura formada, en términos del lado del cuadrado. Explica, paso a paso cómo lo calculaste.

Problema resuelto 2

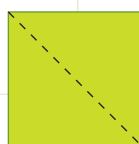
Considera que la figura representa un cubo de lado a :

- Determina la medida de BG .
- Calcula la altura del triángulo BDG .



Solución:

- BG es la diagonal de una cara del cubo, es decir, de un cuadrado de lado a .



$$BG^2 = a^2 + a^2$$

Se aplica el teorema de Pitágoras

$$BG^2 = 2a^2$$

Se reducen términos semejantes

$$BG = \sqrt{2a^2}$$

$$BG = a\sqrt{2}$$

Se aplica la propiedad

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Luego, la medida de BG es $a\sqrt{2}$.

- El triángulo BDG es equilátero, porque son las diagonales de las caras del cubo (cuadrados de lado a); es decir, los tres lados tienen igual medida.

$$\text{Por lo tanto, } BD = DG = BG = a\sqrt{2}$$

Utilizando el valor obtenido en la parte a.

Considerando que la altura de un triángulo equilátero de lado m es $h = \frac{m}{2} \sqrt{3}$ y que en este caso $m = a\sqrt{2}$, se reemplaza y se obtiene:

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Se aplica la propiedad

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Luego, la altura del triángulo BDG mide $h = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

EN TU CUADERNO

- Considera un paralelepípedo de largo $3a$, de ancho $2a$ y de alto igual al ancho.
 - Determina las medidas de las diagonales de cada una de las caras del paralelepípedo.
 - ¿Es posible calcular la altura del triángulo formado por las diagonales?, ¿cómo?



Aproximación geométrica del número π

El número irracional π corresponde a la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Esto puede llevar a pensar, dado que es posible construir con regla y compás una circunferencia y su diámetro, que puede construirse un segmento de recta cuya longitud sea este número. Sin embargo, esto es imposible. Pese a lo anterior, en la Antigüedad se dieron diversas aproximaciones para este valor, como las siguientes: los egipcios alrededor del año 1800 a. C. estimaron su valor en $\frac{256}{81}$, los griegos en el siglo II como $\frac{377}{120}$, y los chinos en el siglo V como $\frac{355}{113}$.

EN TU CUADERNO

1. Con ayuda de una calculadora científica, o consultando a tu profesor o profesora, determina el valor de π con 9 ó 10 decimales exactos.
2. Luego, calcula cada una de las aproximaciones dadas y con ayuda de una calculadora, encuentra el error de cada aproximación.
3. Luego, determina cuál de ellas es más exacta, comparando cada una.
4. Averigua de qué manera los matemáticos antiguos determinaron estas aproximaciones para el valor de π .

INVESTIGUEMOS...

Ahora, trabajen en grupos de tres personas.

1. Comparen las soluciones obtenidas por cada integrante y discutan sobre cuáles son las soluciones correctas en caso de que existan diferencias.
2. Discutan en conjunto la manera en la cual se determinaba antiguamente el valor aproximado de π .
¿Qué ventajas y desventajas presentaban cada uno de estos métodos?
3. Averigüen, en alguna página en Internet, de qué manera se obtienen actualmente valores más cercanos de π .

4. Resuelvan el siguiente problema:

Tal como se comentó al comienzo, no es posible encontrar, con ayuda de una regla y compás, un segmento de recta de longitud igual a π . Esto impide, por ejemplo, construir un cuadrado y un círculo cuyas áreas sean iguales. Sin embargo, han aparecido construcciones geométricas de segmentos cuyas medidas son, en algunos casos, muy cercanas a este número.

Con ayuda de una regla y compás, sigan estos pasos:

- Construyan una circunferencia de radio 3 cm, luego determinen un punto C sobre la circunferencia y construyan un triángulo equilátero OCD , tomando C como centro y cuyo arco pase por O .
- Ahora, construyan la simetral del segmento CD , la cual determinará puntos A y B sobre la circunferencia, de los cuales el punto A será el más cercano al segmento CD . Además, llamen G al punto medio de CD .
- A continuación, construyan una recta paralela al segmento CD , que pase por el punto A . Esta se prolonga hasta que corte a la prolongación del radio OC en un punto que llamarán E .
- A partir del punto E , en la dirección del punto A , midan un segmento de 9 cm hasta un punto que llamarán F .
- Finalmente, tracen el segmento BF .

Ahora, una aproximación para el valor de π está dada en la longitud de BF . Para comprobar esto, hagan lo siguiente:

- Como el triángulo OCD es equilátero, la longitud de OG es igual a la mitad del lado del triángulo por $\sqrt{3}$. Usando la relación entre longitudes $\frac{OG}{CG} = \frac{OA}{AE}$ (la cual se demostrará en la unidad de semejanza), determinen la longitud de AE .
- Dado que $AB = 6$ y $AF = 9 - AE$, aplicando el teorema de Pitágoras determinen la longitud de BF .
- Con ayuda de una calculadora, dividan el valor obtenido para la longitud de BF por el valor del radio de la circunferencia, que en este caso es 3 y observen el resultado obtenido. ¿Notan alguna semejanza con el número π ?

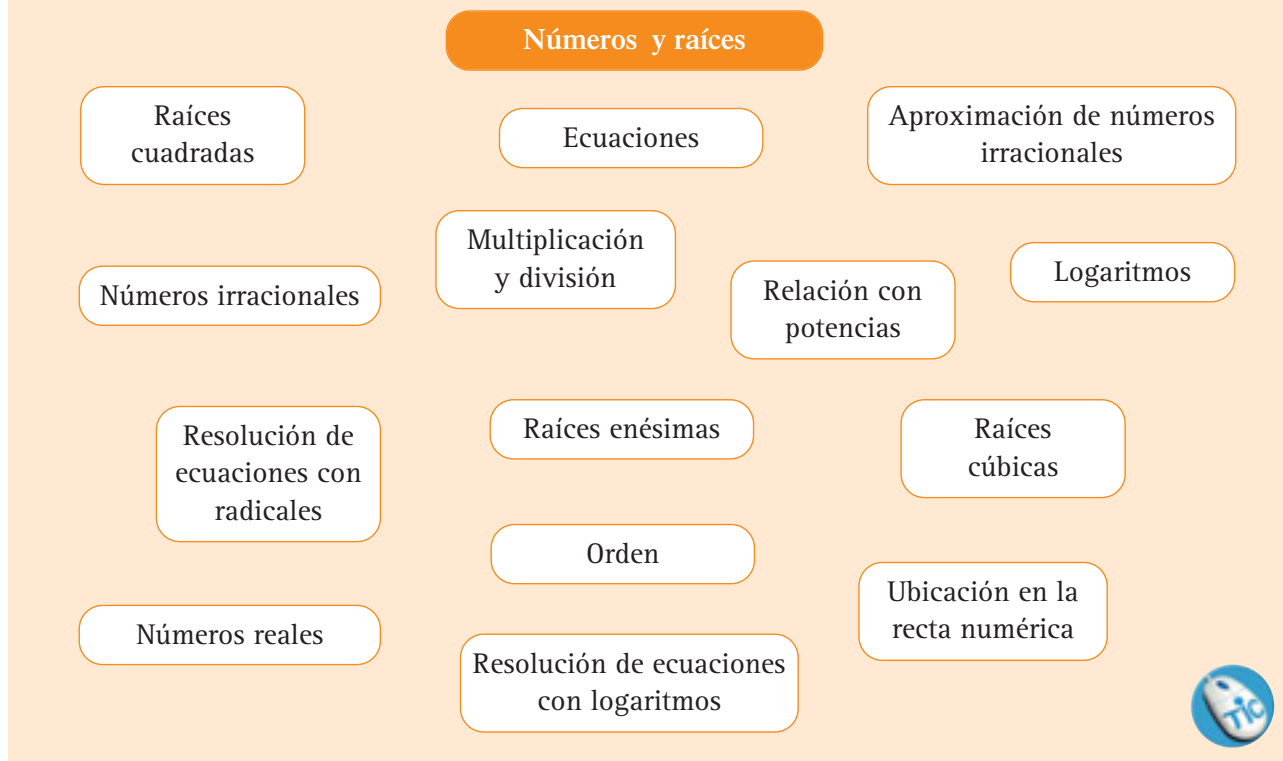
EVALUEMOS NUESTRO TRABAJO

Una vez que hayan completado la tabla, respondan las preguntas:

- Comparen los resultados obtenidos con los de sus compañeros y compañeras. ¿Obtienen los mismos resultados? De no ser así, ¿cuáles son las diferencias?
- Discutan si la construcción hecha está bien realizada y si existen otras construcciones para obtener aproximaciones geométricas del valor de π .

Síntesis de la Unidad

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.



1 Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

- Todas las potencias de exponente fraccionario son números irracionales.
- El error al aproximar $\sqrt{7} - 1$ por redondeo como 1,646 es menor que 0,0001.
- Si a 36 se resta su raíz cuadrada positiva, se obtiene 30 como resultado.
- Los logaritmos son siempre positivos.
- El número $9\sqrt[3]{3}$ es menor que 13.
- No existen logaritmos de números negativos.
- $\log_a x + \log_b x = \log_{ab} x$ para todo valor de x , siendo a y b positivos.

- h. El número $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{72}}{4\sqrt{2} - \sqrt{12}}$ es irracional.
- i. Los logaritmos están definidos para bases positivas.
- j. El número $15\sqrt{3}$ es menor que 26.
- k. La raíz cúbica de todo número entero es un número irracional.
- l. El número $\sqrt[3]{6 + 21 \cdot (\sqrt[3]{3 + 34 \cdot \sqrt{100} + 3})}$ es irracional.
- m. Las potencias de un número positivo son todas positivas.
- n. El número $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{6}}$ es irracional.
- ñ. La solución de la ecuación $\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt{x}}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ es $x = 36$.

2 Aplica lo que aprendiste en la unidad para desarrollar las siguientes actividades:



a. Resuelve las siguientes operaciones.

$$\bullet \sqrt[3]{64} + \sqrt{50} - 7\sqrt{3} - \sqrt{27} - 2\sqrt[3]{27} + 1 \qquad \bullet 7\sqrt[3]{7} + \frac{\sqrt{112}}{4} - \sqrt{147} - 3 - \frac{\sqrt[3]{2401}}{2} + \sqrt{448}$$

b. Expresa en la forma más reducida posible.

$$\bullet \log 13 + \log \sqrt{13} - 13 \qquad \bullet -\frac{1}{2}\log ab + \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b}$$

c. Dos triángulos rectángulos comparten la misma hipotenusa. Si las medidas de los catetos de uno de los triángulos son iguales a 11 cm y 3 cm y la medida de uno de los catetos del segundo triángulo es de 7 cm, encuentra la medida del cateto restante.

d. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\bullet \sqrt{x+12} - \sqrt{x-4} = 2 \qquad \bullet \log_3 3^{x^2} = 1$$

$$\bullet \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{x} = a^2 \qquad \bullet \log \sqrt{2x-3} + \log \sqrt{x-5} + 1 = \log 30$$



Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

- La expresión $\sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{243}$ es igual a:
 - 6
 - 0
 - 3
 - 6
 - Ninguna de las anteriores.
- ¿Cuál o cuáles de las siguientes propiedades son siempre verdaderas?
 - $a = b^{\log_b a}$
 - $\log_b a \cdot \log_a b = 1$
 - $\log_b \frac{1}{a} \cdot \log_a a = 0$
 - Solo I
 - Solo II
 - II y III
 - I y II
 - Todas.
- El valor de $2\sqrt{18} - 3\sqrt{50}$ es:
 - $6\sqrt{2}$
 - $15\sqrt{2}$
 - $21\sqrt{2}$
 - 42
 - Ninguna de las anteriores.
- El valor de $\sqrt[3]{2\sqrt{3} + \sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{3} - \sqrt{11}}$ es:
 - $\sqrt[3]{-5}$
 - 1
 - 3
 - 9
 - 27
- La expresión $(\sqrt{2} - \sqrt{8})^2$ es equivalente a:
 - 6
 - 2
 - 2
 - 10
 - $10 + 2$
- Al considerar 3,362 como aproximación de $\sqrt[3]{38}$, ¿cuántos decimales son correctos?
 - 3
 - 4
 - 2
 - 5
 - 1
- Al aplicar la definición de logaritmo a la expresión $\log_3 5 = a$, resulta:
 - $a^3 = 5$
 - $a^5 = 3$
 - $5^3 = a$
 - $3^5 = a$
 - $3^a = 5$
- La suma de $7^0 + 16^{\frac{1}{2}}$ es igual a:
 - $5^{\frac{1}{2}}$
 - 5
 - 11
 - 15
 - 17
- ¿Cuál es el área de la superficie total de un cubo cuyo lado mide $\sqrt{63}$ cm?
 - 378 cm^2
 - 441 cm^2
 - $27\sqrt{7} \text{ cm}^2$
 - $189\sqrt{7} \text{ cm}^2$
 - 343 cm^2
- El resultado de $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54})^6$ es:
 - 256
 - 324
 - 64
 - 125
 - 216
- $\frac{a-5}{\sqrt{a-5}}$ es igual a:
 - $\frac{\sqrt{a-5}}{a-5}$
 - $\frac{2a}{a-5}$
 - $\frac{a+5}{a-5}$
 - $\sqrt{a-5}$
 - $\frac{a^2-25}{a-5}$

12. Para el número $\sqrt{101} - 10,05$, ¿cuál de las afirmaciones es correcta?

- A. Es menor que $-0,0002$.
- B. Es igual a cero.
- C. Es positivo y menor que $0,0001$.
- D. Es negativo y mayor que $-0,0002$.
- E. Es mayor que $0,0001$.

13. Al reducir $\sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}}$ se obtiene:

- A. $^{120}\sqrt{3^4}$
- B. $^{60}\sqrt{3^{43}}$
- C. $^1\sqrt{3}$
- D. $\sqrt[3]{3}$
- E. Ninguna de las anteriores.

14. (DEMRE, 2004) Si $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{5}$, entonces ¿cuál(es) de las expresiones siguientes es(son) equivalente(s) a $\sqrt{60}$.

- I. $2bc$
- II. $\sqrt{a^2b^2c^2}$
- III. $\sqrt{a^2bc}$

- A. Solo I
- B. Solo II
- C. Solo III
- D. I y II
- E. I y III

15. La solución de la ecuación $\sqrt{x-2} = 2 + \sqrt{x}$ es:

- A. $\frac{6}{4}$
- B. $\frac{9}{4}$
- C. No tiene solución real.
- D. No se puede calcular.
- E. Ninguna de las anteriores.

16. El perímetro de un triángulo rectángulo de catetos $6\sqrt{5}$ y $8\sqrt{5}$ es:

- A. $8\sqrt{5}$
- B. 24
- C. $\sqrt{70} + 14\sqrt{5}$
- D. $24\sqrt{5}$
- E. No se puede calcular.

17. Si $A = \log x$ con $x > 1$, $B = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ y $C = \log(1+x)$, entonces se cumple:

- A. $A + B = C$
- B. $A + B + C = 0$
- C. $A + C = B$
- D. $B + C = A$
- E. Ninguna de las anteriores.

18. La siguiente fórmula relaciona los decibels según la potencia de un amplificador $D = 10 \cdot \log(I \cdot 10^{12})$ (con I : intensidad). Si en un amplificador de sonido se triplica la intensidad, ¿en cuánto aumentan los decibels?

- A. Aproximadamente 4 unidades.
- B. Aproximadamente 5 unidades.
- C. Aproximadamente 10 unidades.
- D. Aproximadamente 12 unidades.
- E. Ninguna de las anteriores.

19. El producto de $(\sqrt{x})^x \cdot (\sqrt{y})^y$ es:

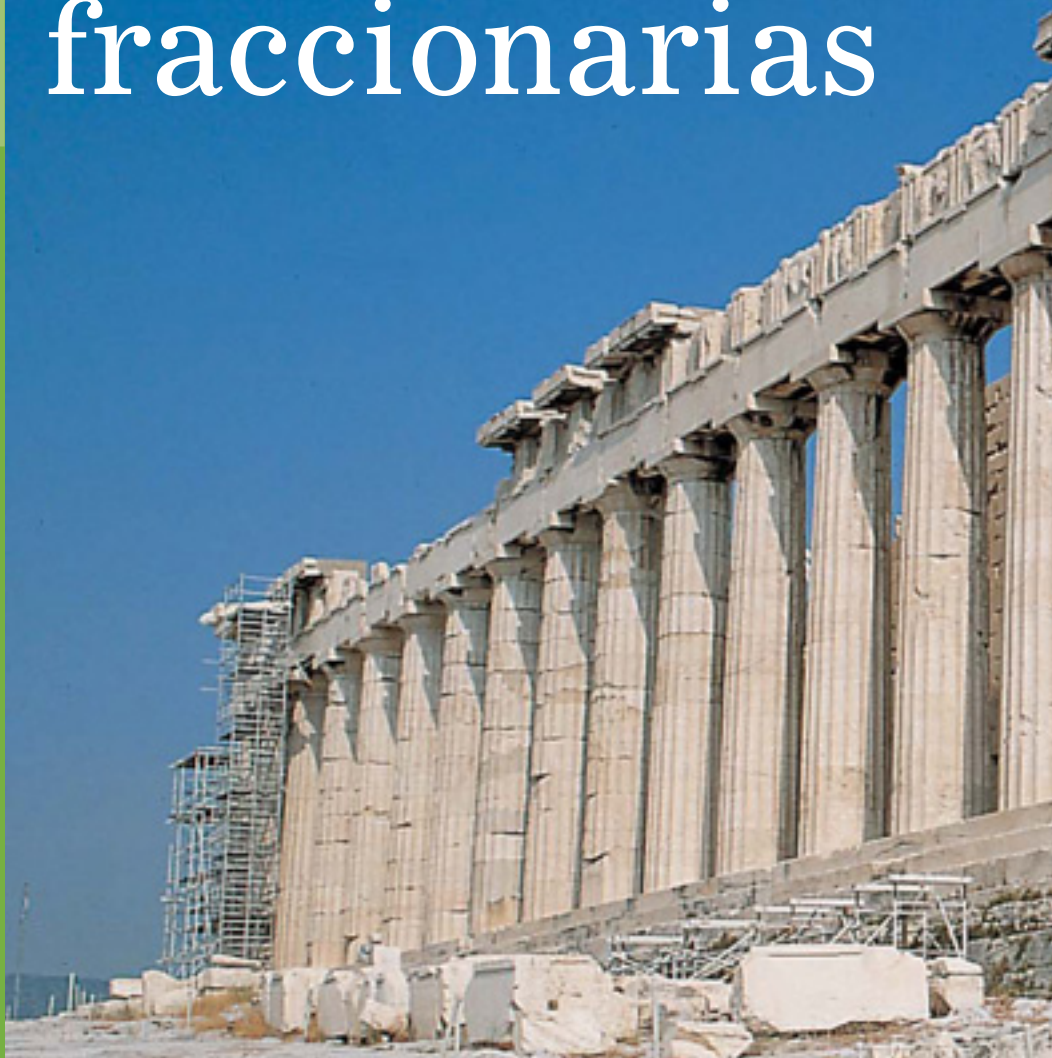
- A. $(\sqrt{xy})^{x-y}$
- B. $(\sqrt{xy})^{x+y}$
- C. $(xy)^{xy}$
- D. xy
- E. Ninguna de las anteriores.



2

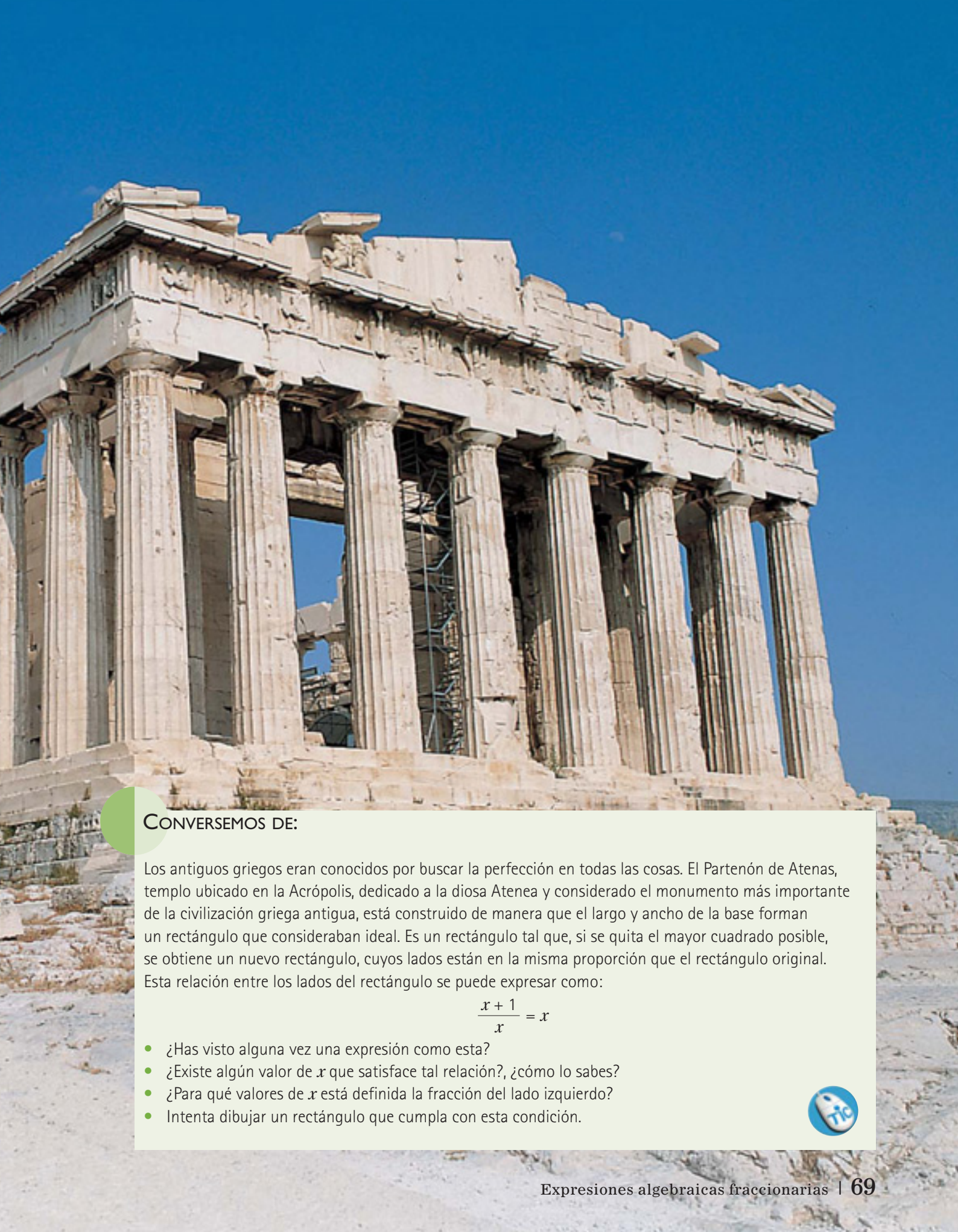
Unidad

Expresiones algebraicas fraccionarias



EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

- Interpretar las expresiones algebraicas fraccionarias como una generalización de la operatoria con fracciones numéricas.
- Reconocer para qué valores una expresión fraccionaria algebraica puede ser positiva, negativa o cero, y para qué valores se indetermina.
- Resolver situaciones en las que sea necesario simplificar fracciones algebraicas.
- Resolver situaciones en las que sea necesario sumar, restar, multiplicar o dividir fracciones algebraicas.



CONVERSEMOS DE:

Los antiguos griegos eran conocidos por buscar la perfección en todas las cosas. El Partenón de Atenas, templo ubicado en la Acrópolis, dedicado a la diosa Atenea y considerado el monumento más importante de la civilización griega antigua, está construido de manera que el largo y ancho de la base forman un rectángulo que consideraban ideal. Es un rectángulo tal que, si se quita el mayor cuadrado posible, se obtiene un nuevo rectángulo, cuyos lados están en la misma proporción que el rectángulo original. Esta relación entre los lados del rectángulo se puede expresar como:

$$\frac{x+1}{x} = x$$

- ¿Has visto alguna vez una expresión como esta?
- ¿Existe algún valor de x que satisface tal relación?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Para qué valores de x está definida la fracción del lado izquierdo?
- Intenta dibujar un rectángulo que cumpla con esta condición.



¿Cuánto sabes?

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

1. Resuelve los siguientes ejercicios con fracciones y simplifica cada vez que sea necesario.

a. $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - \left(1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)\right)$

b. $\frac{4}{5} - 8 + \frac{9}{5} - \left(\frac{6}{5} + \frac{7}{10}\right)$

c. $\frac{2}{5} + \frac{8}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{9}{7}$

d. $5 + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{9}{6} \cdot \frac{3}{2} - 2 + \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3}$

e. $\frac{1}{9} - \frac{9}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{6}{4} - 2 + \frac{1}{3}\right) + \frac{9}{4} - 5\right)$

2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. La adición de fracciones cumple con las propiedades asociativa y conmutativa.

b. Si $a \neq 0$, entonces $\frac{0}{a} = 0$

c. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a+b}{a} = b$

d. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a \cdot b}{a} = b$

e. $\frac{1}{0}$ existe.

f. La multiplicación de fracciones cumple con las propiedades conmutativa y asociativa.

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

a. $2x^6 + 5x^6$

b. $5y^2 - y^2$

c. $3x^3 \cdot 5x^4$

d. $6a^2 : 4a^3$

e. $\left(\frac{4a}{5b} - 5a^2 - 3b\right) - \left(\frac{7}{4b} - 6b + \frac{3a}{b}\right)$

$$f. \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{7}a - \frac{5}{3}b^5 - 3b^3 + \frac{2}{9}ab \right) - \left(\frac{5}{6}b - \frac{6}{5}b^3 - \frac{9}{10}a^2 - 5ab \right)$$

$$g. (ab + 2b - c) \cdot (3a^2 - c)$$

$$h. (5xy - 3x^2) \cdot (3y^2 - yx)$$

$$i. \left(\frac{6}{x^3} - x + \frac{3x}{5} \right) \cdot \left(\frac{3}{5} - x^2 \right)$$

Compara tus respuestas con las de tus compañeras y compañeros. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.



¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- Para sumar o restar fracciones con igual denominador, se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador.
- Para sumar o restar fracciones con distinto numerador, se puede amplificar o simplificar hasta obtener fracciones equivalentes con igual denominador y, luego, sumarlas o restarlas.
- Al multiplicar fracciones, se obtiene una fracción cuyo numerador corresponde al producto de los numeradores, y cuyo denominador, al producto de los denominadores.

$$\text{En general, si } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, d \neq 0 \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- Para dividir fracciones, se puede multiplicar la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda.

$$\text{En general, si } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

- Algunas factorizaciones y productos notables son:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

(cuadrado de binomio)

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

(suma por su diferencia)

$$x^2 + (a + b) \cdot x + ab = (x + a) \cdot (x + b)$$

(producto de dos binomios con un término común)

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

(cubo de binomio)

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2)$$

(suma y diferencia de cubos)

Fracciones algebraicas



Ana debe trotar cuatro vueltas a la pista de atletismo de su colegio. Su desempeño es como sigue: se demora t segundos en dar la primera vuelta, luego trota más rápido, demorándose $t - 10$ segundos en la segunda, pero cerca del final se cansa un poco, y se demora $t - 5$ segundos en la tercera vuelta y $t + 5$ segundos en dar la última vuelta.

ANALICEMOS...

- Si la distancia recorrida en una vuelta es a , ¿qué expresión permite calcular la rapidez con que recorrió cada vuelta?
- ¿En qué vuelta trotó a mayor rapidez y en qué vuelta a menor rapidez?

Si los datos de la situación anterior se organizan en una tabla, se obtiene:

	Distancia recorrida	Tiempo	Rapidez
Primera vuelta	a	t	$\frac{a}{t}$
Segunda vuelta	a	$t - 10$	$\frac{a}{t - 10}$
Tercera vuelta	a	$t - 5$	$\frac{a}{t - 5}$
Cuarta vuelta	a	$t + 5$	$\frac{a}{t + 5}$

Luego, las expresiones $\frac{a}{t}$, $\frac{a}{t - 10}$, $\frac{a}{t - 5}$ y $\frac{a}{t + 5}$ representan la rapidez de

Ana en cada vuelta. Expresiones como las anteriores son llamadas **expresiones algebraicas fraccionarias** o simplemente **fracciones algebraicas**.

Observa que corresponden a cuocientes entre expresiones algebraicas.

Tal como en las fracciones, se llama numerador y denominador a cada parte de la fracción algebraica.

Ahora, considerando que una pista de atletismo tiene 400 m se puede remplazar este valor por a , y suponiendo que en la primera vuelta Ana se demoró 80 s, se obtiene:

Primera vuelta: $\frac{a}{t} = \frac{400}{80} = 5$ Rapidez: 5 m/s

Segunda vuelta: $\frac{a}{t - 10} = \frac{400}{70} = 5,71$ Rapidez: 5,71 m/s

Tercera vuelta: $\frac{a}{t - 5} = \frac{400}{75} = 5,33$ Rapidez: 5,33 m/s

Cuarta vuelta: $\frac{a}{t + 5} = \frac{400}{85} = 4,7$ Rapidez: 4,7 m/s

Luego, Ana trotó con mayor rapidez durante la segunda vuelta, y con menor rapidez en la última vuelta.

RECUERDA QUE...

- La rapidez es el cuociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

$$v = \frac{d}{t}$$

- Los elementos de una fracción son:

$$\frac{a}{b} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Numerador} \\ \text{Denominador} \end{array}$$

GLOSARIO

Álgebra: rama de la matemática en la cual las operaciones aritméticas se generalizan empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática.

Expresión algebraica fraccionaria (o fracción algebraica): expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son expresiones algebraicas, con $b \neq 0$.

EN TU CUADERNO

1. Calcula cuál sería la rapidez de Ana en cada vuelta suponiendo ahora que en la primera vuelta se demora:

- a. 1 minuto. b. 1 minuto y 10 segundos. c. un minuto y medio.

- En cada caso, ¿en qué vueltas se tienen la mayor y menor velocidad?
- ¿Existe alguna diferencia con el ejemplo? De ser así, ¿en qué casos cambian?

2. Determina el valor de las siguientes fracciones algebraicas si $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

a. $\frac{1}{n+1}$

c. $\frac{n^2-1}{2n+7}$

e. $\frac{2+n^2}{n^3+1}$

b. $\frac{3-2n}{5n}$

d. $\frac{4n-1}{2n}$

f. $\frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$

3. Observa el siguiente ejemplo:

Las fracciones $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots$, son generadas por la fracción algebraica $\frac{n}{2n+1}$, porque se obtienen al remplazar $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 , respectivamente.

Encuentra la fracción algebraica que genera las siguientes fracciones en cada caso:

a. $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \frac{25}{36}, \dots$

c. $\frac{2}{2}, \frac{5}{9}, \frac{10}{28}, \frac{17}{65}, \frac{26}{126}, \dots$

b. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{27}, \dots$

d. $-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{17}, -\frac{5}{26}, \dots$



EN RESUMEN

Dadas dos expresiones algebraicas representadas por p y q , con $q \neq 0$, llamaremos expresión algebraica fraccionaria o **fracción algebraica** a toda expresión de la forma $\frac{p}{q}$.

Ejemplo:

Las expresiones $\frac{2}{n-1}$ y $\frac{n+1}{3n^2-n+9}$ son fracciones algebraicas.

Comparación de fracciones algebraicas



Dos socios discuten acerca de unos cambios que desean realizar en un terreno rectangular cuyo largo mide b m y su área es de a m². Uno de ellos quiere aumentar el área en 1 m² sin cambiar el largo, pero el otro quiere aumentar el largo del terreno en 1 m sin cambiar el área, y necesitan determinar en qué caso es mayor el ancho del terreno.

ANALICEMOS...

- ¿En qué caso se obtiene una medida mayor del ancho del terreno?
- ¿Cómo se puede determinar el nuevo ancho del terreno en cada caso?
- ¿Cómo se pueden comparar las nuevas medidas del ancho?

Para poder comparar las dos propuestas y decidir en qué caso se obtiene mayor ancho, considera que el ancho original del terreno es igual a $\frac{a}{b}$ m.

El primer socio desea aumentar el área total en 1 m², y como el largo sigue siendo igual a b m, la nueva medida del ancho es $\frac{a+1}{b}$ m.

El segundo socio quiere aumentar el largo en 1 m, y mantener el área total.

Por tanto, en este caso la nueva medida del ancho es $\frac{a}{b+1}$ m.

GLOSARIO

Desigualdad: expresión matemática que sirve para representar que cierta cantidad es menor o mayor que otra.

RECUERDA QUE...

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Dado que en este caso $a > 0$ y $b > 0$, ya que son medidas de área y de longitud, debemos comparar cuál de estas fracciones es mayor.

En el primer caso, las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+1}{b}$, ambas son de igual denominador (positivo), pero el numerador de la segunda fracción es mayor (ya que a también es positivo), de modo que:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b}$$

En el segundo caso, al comparar con el ancho original se tienen fracciones con igual numerador, pero el denominador de la tercera fracción es mayor, por tanto tenemos la relación:

$$\frac{a}{b+1} < \frac{a}{b}$$

Luego, se verifica la relación:

$$\frac{a}{b+1} < \frac{a+1}{b}$$

Entonces, el ancho del terreno es mayor con la modificación propuesta por el primer socio.

En otros casos, el valor de una fracción algebraica depende de solo una variable, y es necesario analizar los casos posibles. Observa.

1. Si $n > 0$, se tiene que $\frac{n+1}{n} > \frac{n-1}{n}$.
2. Considera $n < 0$, se tiene ahora la relación $\frac{n+1}{n} < \frac{n-1}{n}$.

Sea $n = -k$, $k > 0$, luego al remplazar se tiene:

$$\frac{n+1}{n} = \frac{-k+1}{-k} = \frac{k-1}{k}, \quad \frac{n-1}{n} = \frac{-k-1}{-k} = \frac{k+1}{k}$$

Y como $k > 0$ se tiene ahora $\frac{k-1}{k} < \frac{k+1}{k}$, es decir, $\frac{n+1}{n} < \frac{n-1}{n}$.

RECUERDA QUE...

- Para a, b, c, d , números naturales, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ es equivalente a $ad < bc$.
- Al multiplicar ambos lados de una desigualdad por un factor negativo, esta se invierte.

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \rightarrow \frac{-a}{b} < \frac{-c}{d} \text{ con } b, d \neq 0$$

EN RESUMEN

Para **comparar** fracciones algebraicas, observa que:

- Si las expresiones son positivas y ambas fracciones tienen igual denominador, es mayor la fracción de mayor numerador.
- Si las expresiones son positivas y ambas fracciones son de igual numerador, es mayor la fracción de menor denominador.
- Si alguna de las expresiones es negativa, se debe tener cuidado y analizar caso a caso, ya que las desigualdades pueden cambiar.

EN TU CUADERNO

1. Compara las fracciones según los valores dados en cada caso.

a. $\frac{a}{a+b}, \frac{a}{a-b}, a > 0, b > 0, a > b$.

c. $\frac{p+1}{q}, \frac{p}{q+1}, -1 < p < 0, q > 0$.

b. $\frac{p+1}{q}, \frac{p}{q+1}, p > 0, q > 0$.

d. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}, a > 0, b > 0, a < b$.

2. Determina, para cada caso, cuál de las fracciones $\frac{x+a}{x}, \frac{x}{x-a}$ es mayor:

a. $x > 0, a > 0, x > a$.

c. $x > 0, a < 0, x < -a$.

b. $x > 0, a > 0, x < a$.

d. $x > 0, a < 0, x > -a$.

Análisis de fracciones algebraicas

Además de ordenar dos o más fracciones algebraicas, también es importante decidir qué tipo de valores puede tomar una fracción algebraica, dependiendo de los valores de la o las variables. Por ejemplo, considera la fracción: $\frac{x-1}{x}$

ANALICEMOS...

- ¿Qué ocurre con la fracción algebraica dada cuando $x = 1$?, ¿ocurrirá esto para otro valor?
- Si $x < 0$, ¿qué signo tiene el numerador?, ¿qué signo tiene el denominador?, ¿y la fracción?
- En el caso de que $x > 1$, ¿qué signo tiene la fracción?, ¿por qué?
- ¿Para qué valores de x la fracción es siempre negativa?, ¿cómo lo calculaste?

RECUERDA QUE...

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Para analizar cómo cambia el signo de una fracción algebraica, se debe recordar que el signo de una fracción depende del signo del numerador y del denominador. Si tienen igual signo, la fracción es positiva, y cuando tienen distinto signo, la fracción es negativa.

En este caso, el numerador es positivo si $x > 1$ y negativo si $x < 1$. Por otra parte, el denominador es positivo si $x > 0$ y negativo si $x < 0$. Entonces, al considerarlos simultáneamente, se obtiene que la fracción es positiva si $x > 1$ y si $x < 0$, y negativa si $0 < x < 1$.

Si la fracción algebraica tiene más de una variable, se deben analizar todos los casos posibles.

GLOSARIO

Se dice que una expresión matemática se **anula** en cierto valor, si al evaluarla en ese valor la expresión tiene valor 0.

Considera, por ejemplo, la fracción $\frac{a}{b+1}$. Antes de determinar qué tipo de valores toma, se debe determinar para qué valores se anulan el numerador y denominador.

En este caso, esto ocurre para $a = 0$ y para $b = -1$, respectivamente. Entonces, para analizar la fracción no se consideran estos valores, pero son importantes para separar los casos que se van a analizar.

Observa el análisis de la fracción $\frac{a}{b+1}$:

- Si $a > 0$ y $b > -1$, tanto el numerador como el denominador son positivos, de modo que la fracción toma valores positivos.
- Si $a > 0$ y $b < -1$, el numerador es positivo, pero el denominador es negativo, y la fracción toma valores negativos.
- Si $a < 0$ y $b > -1$, el numerador es negativo, pero el denominador es positivo, y la fracción nuevamente toma valores negativos.
- Si $a < 0$ y $b < -1$, tanto el numerador como el denominador son negativos, y por lo tanto la fracción toma valores positivos.

RECUERDA QUE...

Al dividir números de igual signo se obtiene un cociente positivo, y al dividir números de distinto signo se obtiene un cociente negativo.

Finalmente, para $a = 0$, si $b \neq -1$, el valor de la fracción es cero, ya que el valor del numerador es cero.

En conclusión, la fracción toma valores positivos cuando $a > 0$, $b > -1$, y cuando $a < 0$, $b < -1$; en cambio, toma valores negativos para $a > 0$, $b < -1$, y para $a < 0$, $b > -1$, y toma el valor cero cuando $a = 0$ y $b \neq -1$.

EN RESUMEN

Para analizar los valores que toma una fracción algebraica, se debe considerar para qué valores se anulan el numerador y el denominador. Luego, se separan los casos en que cada variable es mayor o menor que estos valores hallados, para compararlos y determinar el signo de la fracción.

EN TU CUADERNO

1. Determina para qué valores de x las siguientes fracciones son positivas:

a. $\frac{3x-1}{x+2}$

c. $\frac{x}{7x+2}$

e. $\frac{x^2+4}{7-x}$

b. $\frac{x+3}{2x+1}$

d. $\frac{4x-9}{5x}$

f. $\frac{x^2+25}{(4-x)^2}$

2. ¿Cuáles de las siguientes fracciones son siempre positivas para todo $x > 1$?

a. $\frac{3x-1}{x+3}$

c. $\frac{3-x}{2-7x}$

e. $\frac{x-12}{8-x}$

b. $\frac{x-1}{7-x}$

d. $\frac{3x-1}{x+2}$

f. $\frac{3x-1}{1-x^2}$

3. Determina los valores que pueden tomar m y n , de manera que las siguientes fracciones sean negativas:

a. $\frac{3m-1}{2-n}$

b. $\frac{n+1}{11-m}$

c. $\frac{2m-1}{5+n^2}$

Restricciones en fracciones algebraicas



Pedro y Pablo necesitan analizar la fracción algebraica $\frac{x+1}{x}$. Quieren saber cuándo se obtienen valores positivos y negativos de esta expresión.

ANALICEMOS...

- Si x es un número real cualquiera, ¿cómo son los valores que se obtienen para la expresión dada?, ¿positivos o negativos?, ¿enteros o decimales? Justifica tus respuestas..
- ¿Existen valores que hacen indefinida esta expresión?, ¿cuál o cuáles?
- ¿Cómo se describe lo que ocurre para estos casos?

Para diversos valores de x , Pedro y Pablo obtienen la siguiente tabla:

Valor de x	-10	-4	-2	-1	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	1	2
$\frac{x+1}{x}$	$\frac{-9}{-10}$	$\frac{-3}{-4}$	$\frac{-1}{-2}$	$\frac{0}{-1}$	$\frac{0,5}{-0,5}$	$\frac{0,9}{-0,1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1,1}{0,1}$	$\frac{1,5}{0,5}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$
Cuociente	0,9	0,75	0,5	0	-1	-9		11	3	2	1,5

GLOSARIO

Una fracción algebraica está **indefinida** para un cierto valor de una variable si su denominador se anula para tal valor y el numerador es distinto de 0.

Si $a \neq 0$, $\frac{a}{0}$ está indefinida.

Según los valores que aparecen en la fila de los cuocientes, se observa que:

- Cuando $x = -1$, el valor de la expresión es 0.
- Si x es positivo y cercano a 0, el cuociente es cada vez mayor.
- Si x es positivo y lejano a 0, el cuociente es un número cercano a 1.
- Si x es negativo y cercano a 0, el cuociente es cada vez menor.
- Si x es negativo y lejano a 0, el cuociente es un número cercano a 1.
- Cuando $x = 0$, la expresión se indefine, y se dice que tiene una restricción.

EN RESUMEN

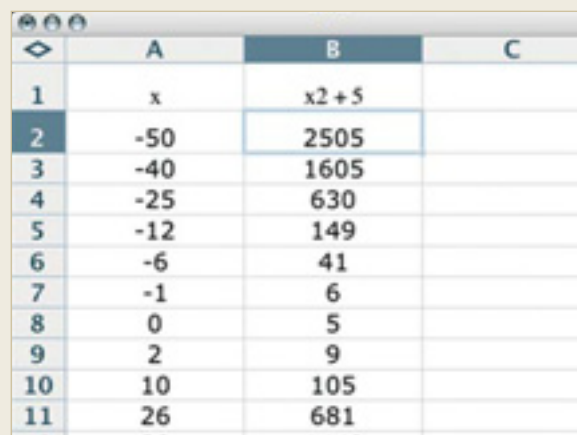
Para el análisis de expresiones algebraicas fraccionarias, es importante considerar valores distintos, positivos y negativos, grandes y pequeños. Además, se debe distinguir si la expresión se indefine y los valores para los cuales se anula.

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

En esta actividad, aprenderás cómo analizar expresiones algebraicas y obtener sus valores utilizando una planilla de cálculo como Excel.

Primero, debes familiarizarte con el procedimiento para escribir fórmulas, y la manera de remplazar valores en ellas. Considera, por ejemplo, la fórmula $x^2 + 5$.

- Selecciona en la celda **A2** y escribe un número real.
- A continuación, al lado escribe la fórmula, escribiendo en lugar de x la celda en la que escribiste tu número. Es decir, escribe como fórmula **= A2^2 + 5**.
- Aparecerá el resultado de remplazar en la fórmula el valor escrito antes.



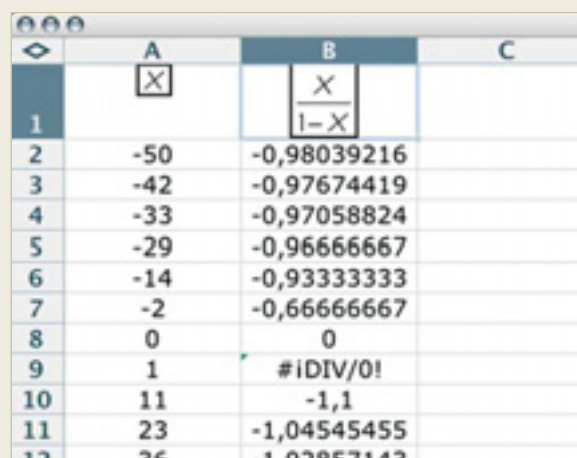
	A	B	C
1	x	$x^2 + 5$	
2	-50	2505	
3	-40	1605	
4	-25	630	
5	-12	149	
6	-6	41	
7	-1	6	
8	0	5	
9	2	9	
10	10	105	
11	26	681	

Ahora estás en condiciones de analizar fracciones algebraicas. Como ejemplo considera la expresión $\frac{x}{1-x}$.

En una planilla de cálculo como Excel, haz lo siguiente:

- En la columna **A** escribe, hacia abajo, una serie de números, los cuales pueden ser enteros, fraccionarios, positivos o negativos. Para anotar fracciones, anota en la celda correspondiente, por ejemplo **=5/7**.
- Luego, en **B1** escribe lo siguiente: **=A1/(1-A1)**, ya que con esto ingresarás la fórmula; al terminar, aprieta **enter**. El número que aparece es el resultado de remplazar en la expresión el valor escrito en **A1**.

A continuación, copia el resultado que aparece en **B1** de manera que aparezca abajo de cada valor escrito anteriormente. Lo que hace la planilla de cálculo es copiar la fórmula escrita (en este caso, la fracción algebraica) y mostrar el resultado inmediatamente. Si aparece el mensaje **#DIV/0!**, el valor al que acompaña es una restricción para x .



	A	B	C
1	$\frac{x}{1-x}$	$\frac{x}{1-x}$	
2	-50	-0,98039216	
3	-42	-0,97674419	
4	-33	-0,97058824	
5	-29	-0,96666667	
6	-14	-0,93333333	
7	-2	-0,66666667	
8	0	0	
9	1	#DIV/0!	
10	11	-1,1	
11	23	-1,04545455	
12	26	-1,03857143	

Ejercicios

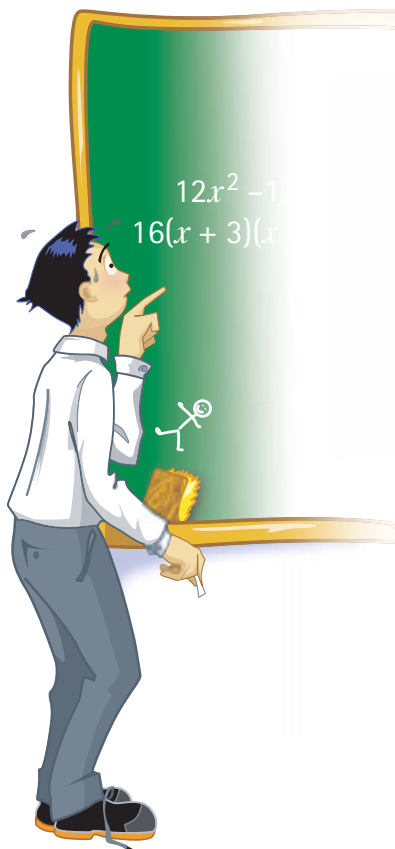
Repite el procedimiento anterior de análisis, indicando los valores de x para los cuales las expresiones son positivas, negativas o cero, además de los puntos donde la expresión no está definida.

1. $\frac{2x}{1-x^2}$

2. $\frac{1-2x}{x-4}$

3. $\frac{4x-5}{x^2+2}$

Simplificación de fracciones algebraicas



Mario y Valeria discuten acerca del siguiente problema: se les pide simplificar la expresión $\frac{12x^2 - 12}{16(x+3)(x+1)}$ y no están de acuerdo en cómo resolverlo.

Él realiza lo siguiente:

$$\frac{12x^2 - 12}{16(x+3)(x+1)} = \frac{3(x^2 - 1)}{4(x+3)(x+1)}$$

ANALICEMOS...

- ¿Es correcto lo que hizo Mario?, ¿se puede seguir simplificando?, ¿cómo?
- Valeria simplificó la expresión y obtuvo $\frac{3(x-1)}{4(x+3)}$. ¿Es correcto?, ¿por qué?

Para simplificar la expresión anterior, se pueden simplificar primero los factores numéricos comunes en el numerador y denominador. Para esto, se divide por 4, el máximo común divisor entre 12 y 16.

Entonces:

$$\frac{12x^2 - 12}{16(x+3)(x+1)} = \frac{\cancel{12}(x^2 - 1)}{\cancel{16}(x+3)(x+1)} = \frac{3(x^2 - 1)}{4(x+3)(x+1)}$$

A continuación, se debe determinar si existen factores algebraicos iguales en el numerador y denominador para simplificar. Luego, se debe factorizar también el numerador:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

y se tiene que:

$$\frac{3(x^2 - 1)}{4(x+3)(x+1)} = \frac{3\cancel{(x+1)}(x-1)}{4(x+3)\cancel{(x+1)}} = \frac{3(x-1)}{4(x+3)} \quad \text{con } x \neq -1$$

Como ahora no hay factores comunes en el numerador y denominador, la fracción es irreducible, cuya restricción para x es $x \neq -3$ y $x \neq -1$.

Por lo tanto, ambos tuvieron razón al decir que había que simplificar por números, pero Valeria tuvo razón al observar que, además, había que encontrar factores algebraicos comunes.

GLOSARIO

Factor de un número: es un divisor del número.

Factorizar: expresar un número o una expresión algebraica como producto de dos o más números o expresiones algebraicas, llamados factores.

RECUERDA QUE...

Una **fracción irreducible** es aquella cuyo numerador y denominador no poseen divisores comunes, distintos de 1.

EN RESUMEN

Para **simplificar** fracciones algebraicas, se puede factorizar completamente el numerador y el denominador y revisar si existen factores numéricos y/o algebraicos comunes en el numerador y el denominador, y si existen, dividir por estos, obteniendo una fracción algebraica irreducible. Finalmente, si es necesario, se deben indicar las restricciones para los valores que pueda tomar x .

Ejemplos:

$$1. \frac{3x-18}{x^2-5x-6} = \frac{3\cancel{(x-6)}}{\cancel{(x-6)}(x+1)} = \frac{3}{x+1}, \text{ con } x \neq -1, x \neq 6$$

$$2. \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x-30} = \frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+10)} = \frac{x-2}{x+10}, \text{ con } x \neq -10, x \neq 3$$

EN TU CUADERNO

1. Simplifica las siguientes fracciones, indicando las restricciones, si las hubiera:

a. $\frac{2x-4}{(x-2)(x+9)}$

d. $\frac{x^2-a^2+x+a}{x^2+2ax+a^2}$

g. $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$

b. $\frac{x^2-x-20}{7x+28}$

e. $\frac{x-(a-y)}{(a-y)^2-x^2}$

h. $\frac{5a^3-a^2}{a^5-2a^3}$

c. $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$

f. $\frac{x^3-1}{(x-1)^3}$

i. $\frac{3(25-x^2)}{(x^3-125)}$

2. Encuentra el valor de las siguientes expresiones fraccionarias sin desarrollarlas, como en el ejemplo:

Ejemplo: $\frac{1+(0,6)^3}{1+0,6} = \frac{\cancel{(1+0,6)}(1^2+1 \cdot (0,6)+(0,6)^2)}{\cancel{(1+0,6)}} = 1+0,6+0,36 = 1,96$

a. $\frac{(0,7)^3-(0,3)^3}{(0,7)^2-(0,3)^2}$

c. $\frac{(0,21)^2+3(0,21)+2}{(0,21)^2-1}$

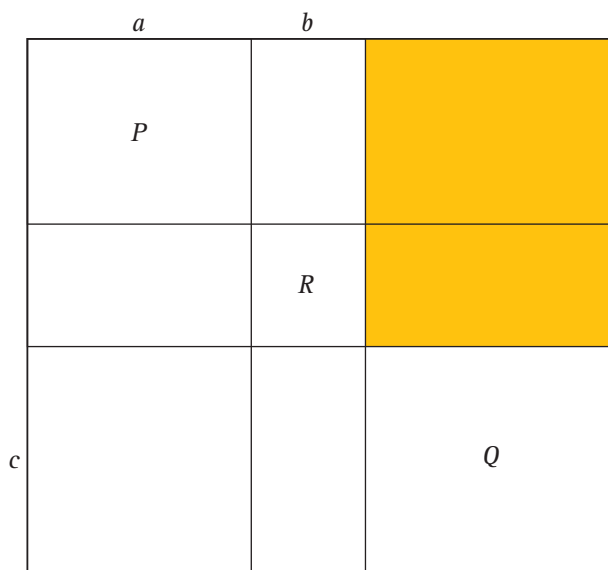
b. $\frac{8(1,1)^2-6(1,1)+1}{2(1,1)-1}$

d. $\frac{(3,1)^2-(3,1)}{(3,1)^2-2(3,1)+1}$



Multiplicación de fracciones algebraicas

Considera la siguiente figura:



ANALICEMOS...

- ¿Cuál es el área pintada en función de las áreas P , Q y R , sabiendo que $c = 3a$, $2b = a$ y $R = \frac{P}{2}$?, ¿cómo lo resolviste?
- Para multiplicar fracciones algebraicas, ¿se procede igual que con las fracciones numéricas?
- Si no es igual, ¿qué cambia en este procedimiento?

Como primer paso, se deben determinar las medidas del largo y el ancho del rectángulo pintado. Primero, se determina el ancho:

$$\text{Ancho} = \frac{Q}{c} = \frac{Q}{3a}$$

Luego, se calcula el largo, que es igual al cociente de P sobre a , más el cociente de R sobre b , de modo que se tiene:

$$\text{Largo} = \frac{P}{a} + \frac{R}{b} = \frac{P}{a} + \frac{P}{2b} = \frac{P}{a} + \frac{P}{a} = \frac{2P}{a}$$

Finalmente, el área del rectángulo se obtiene calculando el largo por el ancho hallados:

$$\text{Área} = \frac{Q}{3a} \cdot \frac{2P}{a} = \frac{2PQ}{3a^2}$$

EN RESUMEN

Para multiplicar dos fracciones algebraicas, se calcula de manera similar que para multiplicar fracciones numéricas.

Primero, se factorizan los numeradores y los denominadores en ambas fracciones; luego, se simplifican por los factores comunes que existan, tanto numéricos como algebraicos; y, finalmente, se multiplican los términos restantes.

Ejemplos:

$$1. \frac{10x}{3y} \cdot \frac{9y}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot x}{\cancel{3} \cdot y} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{3} \cdot y}{\cancel{2}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot x}{1} = 15x, \quad \text{con } y \neq 0$$

$$2. \frac{5}{4x} \cdot \frac{12x}{7} \cdot \frac{21}{25y} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{4} \cdot x} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{4} \cdot x}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7} \cdot 3}{5 \cdot \cancel{5} \cdot y} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot y} = \frac{9}{5y}, \quad \text{con } x \neq 0, y \neq 0$$

$$3. \frac{a-b}{a+3} \cdot \frac{a^2+a-6}{a^3-b^3} = \frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a+3}} \cdot \frac{(a-2)\cancel{(a+3)}}{(\cancel{a-b})(a^2+ab+b^2)} = \frac{a-2}{a^2+ab+b^2}, \quad \text{con } a \neq -3 \text{ y } a \neq b$$

$$4. \frac{1-x}{2-y} \cdot \frac{y^2-4}{x^3-1} = \frac{\cancel{-(x-1)}}{\cancel{-(y-2)}} \cdot \frac{(\cancel{y-2}) \cdot (y+2)}{(\cancel{x-1}) \cdot (x^2+x+1)} = \frac{y+2}{x^2+x+1}, \quad \text{con } x \neq 1 \text{ e } y \neq 2$$

EN TU CUADERNO

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones. Simplifica cuando sea posible.

$$a. \frac{3(x-a)}{9-a^2} \cdot \frac{(a-3)(5-x)}{x^2-a^2}$$

$$b. \frac{x^2+5}{3-3x} \cdot \frac{x^3-1}{2+2x+2x^2}$$

$$c. \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{b-a}{b^2}$$

$$d. \frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^3+1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x^3-x^2+x}$$

$$e. \frac{m^2+5m-14}{2(m-8)^2} \cdot \frac{7m-28}{3m+21}$$

$$f. \frac{(m+2)^2}{m-3} \cdot \frac{1}{11m+22} \cdot \frac{5m-15}{3m-3}$$

$$g. \frac{x-3}{x-2} \cdot \frac{y+1}{xy^3} \cdot \frac{(xy)^2}{x-3}$$

$$h. \frac{w^5-w}{x^3y^6-1} \cdot \frac{x^2y^4+xy^2+1}{w^3-w^2+w-1}$$



División de fracciones algebraicas



Aprovechando el buen tiempo, un grupo de amigos fue de excursión. Al terminar el paseo, sacaron de su mochila un envase cilíndrico lleno de agua. A continuación, sacaron vasos cilíndricos más pequeños, cuya altura era la tercera parte de la altura del envase y cuyo radio era la mitad del radio del envase.

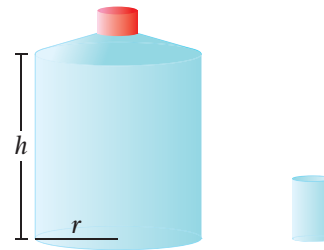
ANALICEMOS...

- ¿Cuántos vasos se podían servir?, ¿cómo lo calculaste?
- Para poder dividir fracciones algebraicas, ¿se procede igual que en la división con fracciones numéricas?
- Si no se procede de igual manera, ¿qué cosas cambian en el procedimiento?

RECUERDA QUE...

Para dividir una fracción por otra, se debe multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Observa la relación entre el tamaño del envase y el de un vaso.



Si se llama r al radio y h a la altura del envase, entonces los vasos tienen altura igual a $\frac{h}{3}$ y radio igual a $\frac{r}{2}$. Luego, se debe resolver la operación:

$$\pi r^2 h : \left[\pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 \left(\frac{h}{3} \right) \right] =$$

Para resolverla, se puede transformar en una multiplicación de fracciones, cuyo segundo término es el inverso multiplicativo del divisor. Observa.

$$\pi \cdot r^2 \cdot h : \left[\pi \cdot \left(\frac{r}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{h}{3} \right) \right] = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \frac{2^2 \cdot 3}{\pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Simplificando por los factores comunes en numeradores y denominadores, y multiplicando los demás términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi \cdot r^2 \cdot h : \left[\pi \cdot \left(\frac{r}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{h}{3} \right) \right] &= \cancel{\pi} \cdot \cancel{r^2} \cdot \cancel{h} \cdot \frac{2^2 \cdot 3}{\cancel{\pi} \cdot \cancel{r^2} \cdot \cancel{h}} \\ &= 2^2 \cdot 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Luego, el contenido del envase alcanza para servir 12 vasos de esas medidas.

Según cómo se factorice cada fracción, se puede simplificar antes de multiplicar. Observa los siguientes ejemplos.

$$1. \frac{10x^2}{3y} : \frac{20xy}{9} = \frac{10x^2}{3y} \cdot \frac{9}{20xy} = \frac{\cancel{10} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\cancel{3} \cdot y} \cdot \frac{\cancel{9} \cdot 3}{\cancel{10} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{x} \cdot y} = \frac{3x}{2y^2}, \text{ con } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

$$2. \frac{7y}{3x^3} : \frac{14}{x^2} = \frac{7y}{3x} \cdot \frac{x^2}{14} = \frac{\cancel{7} \cdot y}{3 \cdot \cancel{x^2} \cdot x} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{7} \cdot 2} = \frac{y}{6x}, \text{ con } x \neq 0$$

$$3. \frac{-2a}{a+3} : \frac{6}{5a+15} = \frac{-2a}{a+3} \cdot \frac{5a+15}{6} = \frac{\cancel{2} \cdot (-a)}{\cancel{a+3}} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{(a+3)}}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{-5a}{3}, \text{ con } a \neq -3$$

$$4. \frac{a-b}{a-2} : \frac{a^3-b^3}{a^2+a-2} = \frac{a-b}{a-2} \cdot \frac{a^2+a-2}{a^3-b^3} \\ = \frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-2}} \cdot \frac{(a+1)\cancel{(a-2)}}{\cancel{(a-b)}(a^2+ab+b^2)} = \frac{a+1}{a^2+ab+b^2}, \text{ con } a \neq 2 \text{ y } a \neq b$$

EN RESUMEN

Para dividir dos fracciones algebraicas, se procede de manera similar que para la división de fracciones numéricas; es decir, se transforma en una multiplicación de fracciones, en la cual el segundo término corresponde al inverso multiplicativo del divisor.

EN TU CUADERNO

1. Resuelve las siguientes divisiones de fracciones algebraicas y simplifica cuando sea posible. Indica las restricciones en cada caso.

a. $\frac{m^2 - 8m - 1008}{m + 4} : \frac{3m + 84}{7m + 28}$

b. $\frac{x^2 - x^4 y}{1 + 6z^2} : \frac{y - x^2 y^2}{1 - 36z^4}$

c. $\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 25} : \frac{x^2 - 16}{x^3 - 10x^2 + 25x}$

d. $\frac{15}{a^{12} - 1} : \frac{3}{a^8 - 1}$

e. $\frac{b(x-a)}{cb^2 - a^2} : \frac{b^3 x^2 - b^3 a^2}{c^2 b^4 - a^4}$

f. $\frac{x^5 y - xyw}{w^2 yz - 5w^2 x^2} : \frac{x^3 y - 5xy}{7wx^2 - 35w}$

g. $\frac{a^2 c^2 + 2}{a^6 b^6 - 2a^3 b^3 - 3} : \frac{a^4 c^4 - 4}{a^3 b^3 + 1}$

h. $\frac{z^4 + z^2 - 42}{za^2 - 7} : \frac{z^2 + 7}{z^2 a^4 - 49}$

MI PROGRESO

1. Ordena las siguientes fracciones algebraicas de menor a mayor. Considera todas las variables con valores positivos.

a. $\frac{3a}{2b}, \frac{3a-1}{2b}, \frac{6a-1}{4b}$

b. $\frac{1}{b+1}, \frac{1}{b}, \frac{2}{2b+1}$

c. $\frac{3b-1}{6b}, \frac{2b-1}{4b}, \frac{1}{2}$

2. Determina los valores de x para los cuales se anulan las siguientes fracciones algebraicas. Luego, determina los valores para los cuales quedan indefinidos.

a. $\frac{3x-1}{7x}$

b. $\frac{x^2-1}{x+2}$

c. $\frac{x(x^2-25)}{6x-7}$

d. $\frac{6x^2+5}{x^2+2}$

3. Determina los valores de x para los cuales las siguientes fracciones algebraicas son positivas:

a. $\frac{4x-2}{x+5}$

b. $\frac{x-7}{2-x}$

c. $\frac{1}{x^2-1}$

d. $\frac{x}{x^2-x-6}$

4. Calcula las siguientes multiplicaciones de fracciones algebraicas:

a. $\frac{3x-1}{7x} \cdot \frac{6x^3}{3x^2-4x+1}$

b. $\frac{3a^2-1}{6a-4} \cdot \frac{9a^2-4}{a^2-1}$

c. $\frac{4a^4(a-1)}{6a-4} \cdot \frac{a^2+a+1}{6a^4-6} \cdot \frac{9a^2-9}{a^6-a^3}$

5. Calcula las siguientes divisiones de fracciones algebraicas:

a. $\frac{21x-14}{14x} : \frac{35}{3x^4-4x^3+x^2}$

b. $\frac{a-b}{a+b} : \frac{b-a}{b^2}$

c. $\frac{x^2+5x}{1-x} : \frac{x^3-1}{x+2x^2}$

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Ordenar fracciones algebraicas.	1	___ / 3
Determinar para qué valores se anula una fracción algebraica y queda indefinida.	2	___ / 4
Determinar para qué valores una fracción algebraica es positiva.	3	___ / 4
Resolver multiplicaciones de fracciones algebraicas.	4	___ / 3
Resolver divisiones de fracciones algebraicas.	5	___ / 3

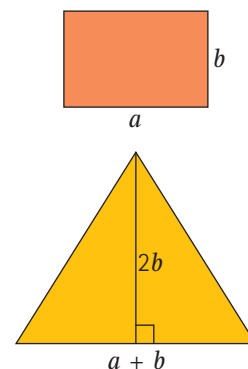
Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

Unidad 2

Diego recibió de regalo un tablero separado en dos partes, cada una con bloques triangulares y rectangulares iguales entre sí. Como es curioso, notó que la altura de los triángulos era el doble del largo del rectángulo y que la base de los triángulos medía la suma del largo y del ancho del rectángulo.

ANALICEMOS...

- Si hay suficientes bloques de cada forma como para cubrir una misma área, ¿cuál es la menor área que puede cubrirse con bloques de una misma forma?
- ¿Es posible encontrar el mínimo común múltiplo (mcm) de expresiones algebraicas de la misma forma que en el caso numérico?, ¿por qué?



En la situación anterior, se debe determinar cuál es la menor área que puede cubrirse con bloques de una misma forma.

Considera que a es el largo y b el ancho del rectángulo. Entonces, la base del triángulo mide $a + b$, y la altura del triángulo es igual a $2b$.

Ahora, observa cómo calcular el área de cada figura:

Área del rectángulo: $a \cdot b = ab$

Área del triángulo: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot 2b = ab + b^2$

Ahora, se calcula el mcm de ambas expresiones. Una buena idea es factorizar cada una de las expresiones, y buscar su mcm. En este caso, se obtiene como factores a , b y $(a + b)$. Por lo tanto, el mcm de ab y de $b(a + b)$ es igual a $ab(a + b)$. Luego, a triángulos cubren la misma área que $(a + b)$ rectángulos.

Como debe ser el menor de los múltiplos comunes, hay que fijarse en los factores para no considerar más factores de los necesarios. Observa.

1. Encuentra el mcm de $a^2 - ab$ y $a^2 - b^2$. Factorizando:

$$a^2 - ab = a \cdot (a - b)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Los factores que contienen son a , $(a - b)$ y $(a + b)$, y por tanto el mcm es $a \cdot (a - b) \cdot (a + b) = a^3 - ab^2$.

2. Encuentra el mcm de $a^2 - 10a + 21$ y $a^2 - 9$. Factorizando:

$$a^2 - 10a + 21 = (a - 3) \cdot (a - 7)$$

$$a^2 - 9 = (a - 3) \cdot (a + 3)$$

Los factores que contienen son $(a - 7)$, $(a - 3)$ y $(a + 3)$, y por tanto el mcm es $(a - 7)(a - 3)(a + 3)$.

RECUERDA QUE...

El área de un rectángulo de lados x e y es $x \cdot y$.

El área de un triángulo de base b y altura h es $\frac{b \cdot h}{2}$.

GLOSARIO

Múltiplos de un número: números que se obtienen al multiplicar el número dado por otro.

Mínimo común múltiplo (mcm): entre dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de ellos.

3. Encuentra el mcm de $4a^2 - 16ab + 16b^2$ y $2a^2 - 8b^2$. Factorizando:

$$4a^2 - 16ab + 16b^2 = 4 \cdot (a^2 - 4ab + 4b^2) = 2^2 \cdot (a - 2b)^2$$

$$2a^2 - 8b^2 = 2 \cdot (a^2 - 4b^2) = 2 \cdot (a + 2b) \cdot (a - 2b)$$

Los factores que se obtienen son 2, $(a - 2b)$ y $(a + 2b)$, y el mcm es $4(a - 2b)^2(a + 2b)$.

EN RESUMEN

Para encontrar el mcm de expresiones algebraicas, se sugiere factorizar cada expresión, si es posible, y luego multiplicar todos los factores encontrados. Si hay algún factor que se repite, se elige el de exponente mayor.

EN TU CUADERNO

1. Encuentra el mcm de las expresiones:

a. $8x^3, 4x^2, 12x$

b. ax^3, bx^4y, a^2xb

c. $a - 1, a^2 - 1, (a - 1)^2$

d. $a + 2, a^3 + 8, a^2 - 4$

e. $10 - 20x, 4x^2 - 20, x - 2$

f. $a^2 - 13a + 30, a^2 - 100, a^2 - 9$

g. $9x + 6y, 3x + 2y, 9x^2 + 12xy + 4y^2$

h. $x^2 + 6x + 9, x^2 - x - 12, x^2 - 16$

2. Amplifica por el factor necesario para igualar los denominadores en las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\frac{z^3a - b}{zc + d}, \frac{a^3 - z^2}{(zc - d)^2}$

b. $\frac{z^3}{ab - cx}, \frac{a^3 - z^2}{ax - c}$

c. $\frac{abx - 54}{x^3 - 1}, \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

d. $\frac{a^2 - b}{c^3}, \frac{a^3 - z^2}{a^2bc^3}, \frac{cd - z}{b^2a}$

Se requiere terminar la construcción de un edificio, y solamente falta pintar su interior, para lo cual se contrata a dos grupos con igual cantidad de trabajadores, todos de igual eficiencia y con la misma cantidad de horas de trabajo diario. El segundo grupo comenzará a trabajar algunos días después que el primero.

ANALICEMOS...

- Si al comienzo solamente trabaja el primer grupo, ¿qué fracción del trabajo total logran hacer diariamente cada uno de ellos y en conjunto?
- Si el segundo grupo debe pintar la superficie, menos 1 000 metros cuadrados que le corresponden a la primera, ¿qué parte del trabajo realiza a partir de este momento?
- ¿Qué parte del trabajo diario realizan ambos grupos a partir del momento que ingresa el segundo de ellos a trabajar?

En la situación anterior, no se sabe la cantidad de trabajadores que se van a contratar, entonces se pueden asignar variables. Sea N la cantidad de metros cuadrados que se deben pintar al interior del edificio, h la cantidad de hombres que conforman cada grupo y n la cantidad de metros cuadrados que puede pintar cada uno de los trabajadores del primer grupo al día. De esta manera, cada uno de ellos hace una fracción del trabajo igual a $\frac{n}{N}$, y por lo tanto, el primer grupo hace diariamente una fracción del trabajo igual a $h \cdot \frac{n}{N} = \frac{hn}{N}$.

Para el segundo grupo, se debe notar que no pueden trabajar sobre 1 000 metros cuadrados que corresponden al primero. De modo que cada trabajador del segundo grupo realiza al día una fracción igual a $\frac{n}{N - 1000}$, y, por tanto, el trabajo realizado por el segundo grupo es igual a $\frac{hn}{N - 1000}$.

A partir del momento que ingresa el segundo grupo, el trabajo diario realizado por ambos grupos es igual a $\frac{hn}{N} + \frac{hn}{N - 1000}$. Para reducir a una fracción, se amplifica cada fracción para tener el mismo denominador, que en este caso es $N(N - 1000)$:

$$\frac{hn}{N} = \frac{hn(N - 1000)}{N(N - 1000)} \quad \frac{hn}{N - 1000} = \frac{hnN}{N(N - 1000)}$$

Es decir, el trabajo en conjunto hecho diariamente es igual a:

$$\frac{hn}{N} + \frac{hn}{N - 1000} = \frac{hn(N - 1000) + hnN}{N(N - 1000)} = \frac{2hnN - 1000hn}{N(N - 1000)} = \frac{2hn(N - 500)}{N(N - 1000)}.$$

Que corresponde a la parte que realizan ambos grupos cuando comienzan a trabajar juntos.

RECUERDA QUE...

Para sumar fracciones de igual denominador, simplemente se suman los numeradores.

Cuando se suman fracciones algebraicas, el procedimiento es similar al que se aplica en las fracciones numéricas. Observa.

$$1. \quad \frac{3b}{4} + \frac{7b}{10} = \frac{3b \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{7b \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{15b + 14b}{20} = \frac{29b}{20}$$

$$2. \quad \frac{3}{2x^2 - 4xy} + \frac{5}{2x} = \frac{3}{2x \cdot (x - 2y)} + \frac{5 \cdot (x - 2y)}{2x \cdot (x - 2y)} = \frac{3 + 5x - 10y}{2x \cdot (x - 2y)}$$

EN RESUMEN

Para sumar fracciones algebraicas, debemos ver si sus denominadores son iguales. De no ser así, debemos encontrar fracciones equivalentes de denominador igual al mínimo común hallado. Finalmente, se suman los numeradores de las fracciones equivalentes halladas.

EN TU CUADERNO

1. Valoriza las fracciones correspondientes al trabajo diario realizado por cada grupo por separado y en conjunto en el ejemplo de la página anterior para:

a. $h = 10, n = 18, N = 3\,000$

b. $h = 20, n = 15, N = 4\,000$

c. $h = 15, n = 15, N = 4\,500$

2. Resuelve las siguientes adiciones de fracciones algebraicas:

a. $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{3xz}$

e. $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{2}{xy + y^2} + \frac{1}{x}$

b. $\frac{x^2}{x^4 - 16} + \frac{3}{x^2 + 4}$

f. $\frac{4}{3x + 9} + \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{2}{3x - 9}$

c. $\frac{x - d}{x + d} + \frac{x^2 + 2xd - 3d^2}{x^2 - d^2}$

g. $\frac{x}{9x^2 - 3x - 2} + \frac{x}{3x + 1} + \frac{x}{3x - 2}$

d. $\frac{3x - 1}{3x + 3} + \frac{8x}{2x(x + 1)}$

h. $\frac{1}{1 - x^3} + \frac{2}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 + x + 1}$

3. Se requiere llenar un estanque usando dos llaves, una de las cuales demora las tres cuartas partes del tiempo (en minutos) que se demora la otra.

a. Determina la parte del estanque que llenan ambas por minuto.

b. Intenta calcular cuántos minutos demoran ambas llaves en llenar el estanque.



A medida que pasan los días, el personal a cargo de la construcción ha quedado satisfecho con el trabajo de ambos grupos, de modo que comienzan a comparar el trabajo realizado por cada grupo y a sacar conclusiones.

ANALICEMOS...

- Si el segundo grupo comenzó a trabajar dos semanas después del primero y trabajan cinco días por semana, ¿qué parte del trabajo llevan después de cuatro semanas de trabajo?
- ¿Cuánto más de avance tendrían en el caso que ambos grupos hubiesen comenzado a trabajar al mismo tiempo?
- ¿Cuántos días menos habrían tardado en terminar la obra si ambos grupos comenzaban a trabajar juntos?

Dado que el primer grupo comenzó a trabajar solo durante dos semanas, el trabajo diario realizado por este grupo es igual a $\frac{hn}{N}$, luego, al pasar

cuatro semanas (20 días de trabajo), ha hecho $\frac{20hn}{N}$ del trabajo total.

Hasta entonces, el segundo grupo ha trabajado durante dos semanas (10 días), y como al día realizan $\frac{hn}{N-1000}$ del trabajo, a la fecha han hecho $\frac{10hn}{N-1000}$ del trabajo total. De modo que, el trabajo de ambos grupos juntos es:

$$\frac{20hn}{N} + \frac{10hn}{N-1000} = \frac{20hn(N-1000)}{N(N-1000)} + \frac{10hnN}{N(N-1000)} = \frac{10hn(3N-2000)}{N(N-1000)}$$

En el caso de que ambos grupos empezaran a trabajar al mismo tiempo, cada día realizarían $\frac{2hn(N-500)}{N(N-1000)}$ del total, y durante las cuatro semanas

hubiesen realizado $\frac{40hn(N-500)}{N(N-1000)}$ del trabajo total.

Por lo tanto, la diferencia de avance entre el caso que ambos comienzan al mismo tiempo menos el trabajo efectivamente realizado en las cuatro semanas es igual a:

$$\frac{40hn(N-500)}{N(N-1000)} - \frac{10hn(3N-2000)}{N(N-1000)} = \frac{10hnN}{N(N-1000)}$$

Que corresponde a la fracción de trabajo que realizaría el segundo grupo durante los días que no pudo estar presente.

RECUERDA QUE...

El signo menos, cuando está antes de un paréntesis, indica que al momento de eliminar el paréntesis, los signos + y - que estaban dentro de este cambian.

$$-(a + b - c) = -a - b + c$$

EN RESUMEN

Para restar fracciones algebraicas, se siguen los mismos pasos de la adición; es decir, se busca el mcm de los denominadores y se transforman en fracciones equivalentes con denominador igual al mcm hallado. Luego, se restan los numeradores.

Ejemplos:

$$1. \frac{3x}{5} - \frac{6x}{11} = \frac{3x \cdot 11}{5 \cdot 11} - \frac{6x \cdot 5}{11 \cdot 5} = \frac{33x - 30x}{55} = \frac{3x}{55}$$

$$2. \frac{3}{a-5} - \frac{6}{a^2-25} = \frac{3 \cdot (a+5)}{(a-5) \cdot (a+5)} - \frac{6}{a^2-25} = \frac{3a+9}{a^2-25}$$

EN TU CUADERNO

1. Valoriza las fracciones correspondientes al trabajo hecho por ambos grupos a la fecha y en el caso que hubieran comenzado al mismo tiempo en el ejemplo de la página anterior, para:

a. $h = 20, n = 16, N = 4\,000$

b. $h = 15, n = 15, N = 4\,500$

c. $h = 25, n = 20, N = 5\,000$

2. Resuelve las siguientes sustracciones de fracciones algebraicas:

a. $\frac{x+yz}{4x^2} - \frac{2y}{18xz}$

b. $\frac{x}{1-x^2} - \frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x^2+2x+1}$

c. $\frac{1}{2a+2} - \frac{2}{4a-1} - \frac{a}{a^2-a}$

d. $\frac{x}{x^2+2x-3} - \frac{x-3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

e. $\frac{1}{x^2-2x-3} - \frac{2}{x+3} - \frac{x}{6-2x}$

f. $\frac{1+x}{1-x} - \frac{2x+2}{x-1} - \frac{x}{x+1}$

g. $\frac{(1+x)}{1-x^6} - \frac{5x+25}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$

h. $\frac{1}{w} - \frac{w-1}{w+2} - \frac{w+2}{w-1} - \frac{w}{w^2-1}$

Lee atentamente el siguiente enunciado:

¿Qué número debe sumarse al numerador y restarse del denominador de la fracción $\frac{13}{31}$ y simultáneamente restarse del numerador y sumarse al denominador de $\frac{52}{47}$ para que las fracciones resultantes sean equivalentes?

ANALICEMOS...

- ¿Cómo se traduce el enunciado en fracciones algebraicas?
- ¿Cómo se puede escribir la incógnita y los datos conocidos?
- Compara la ecuación con un compañero o compañera, ¿cuál de las ecuaciones obtenidas es más sencilla?
- ¿Existe una única manera de expresar la ecuación?, ¿por qué?
- ¿Cómo se puede resolver la ecuación planteada?

Para responder este enunciado, se puede plantear una ecuación. Observa que, si se asigna la incógnita x al número buscado, la ecuación que lo representa es:

$$\begin{aligned}\frac{13+x}{31-x} &= \frac{52-x}{47+x} \\ (13+x) \cdot (47+x) &= (52-x) \cdot (31-x) \\ 611 + 60x + x^2 &= 1612 - 83x + x^2 \\ 143x &= 1001 \\ x &= 7\end{aligned}$$

En el caso de las ecuaciones con incógnitas en el denominador, al finalizar se debe verificar la pertinencia de la solución obtenida. Es decir, que el número obtenido realmente resuelva el enunciado o situación planteada. En este caso:

$$\frac{13+7}{31-7} = \frac{52-7}{47+7}$$

$\frac{20}{24} = \frac{45}{54}$, que son fracciones equivalentes, luego, la solución es correcta.

RECUERDA QUE...

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

No OLVIDES QUE...

Además de verificar si la solución efectivamente satisface la ecuación, debe verificarse que ninguna de las fracciones de la ecuación se indefina en el valor de la solución.

EN RESUMEN

Para resolver ecuaciones que involucran fracciones algebraicas, se procede de manera similar a las ecuaciones con coeficientes fraccionarios, esto es, se puede transformar la ecuación en una con coeficientes enteros, multiplicando cada miembro de ella por el mcm de los denominadores de las fracciones algebraicas.

EN TU CUADERNO

1. Escribe los siguientes enunciados como una ecuación:

- Halla un número tal que su séptima parte, más la tercera parte de su inverso multiplicativo, sea igual al número más 4.
- Halla un número tal que la diferencia entre la tercera parte del número y la cuarta parte de su inverso multiplicativo sea igual al doble, del número aumentado en 3.
- Encuentra un número tal que la diferencia entre su cuadrado y el doble de su inverso multiplicativo sea igual a 3.

2. Plantea las ecuaciones que representan los siguientes problemas y, luego, resuélvelas:

- Halla un número que sumado a 21 veces su inverso multiplicativo da como resultado 10.
- Un número es tal que la mitad de este es igual a 8 veces su inverso multiplicativo. ¿Cuál es el número?
- Un número es tal que la novena parte de 5 veces el número, aumentada en 1, es igual a 3 veces la sexta parte del número menos 2. ¿Cuál es el número?

3. Resuelve las siguientes ecuaciones para la incógnita x :

a. $\frac{3x-5}{2x} = \frac{39}{x}$

b. $\frac{3}{4x} + \frac{13}{x} = \frac{4}{x}$

c. $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x^2-4} = 0$

d. $5x - \left(5x - \frac{2x-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{3}\right)$

e. $-\frac{24}{5} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}}$

f. $\frac{1}{m} - \frac{n}{x} = \frac{1}{mn} - \frac{1}{x}, mn \neq 0$

g. $\frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{x+3}{4x^2-1}$

h. $\frac{x+a}{a} - \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{x+b}{b} - 2, a \neq 0 \text{ y } b \neq 0$

i. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 5$

j. $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2+2x+4} = \frac{x^2}{x^3-8}$



Un acuario requiere ser llenado mediante un par de llaves ubicadas en uno de sus costados. Se sabe que ambas llaves juntas llenan el acuario en tres horas y que una de las llaves sola se demora la mitad de tiempo que la otra llave sola.

ANALICEMOS...

- ¿Cuánto tiempo demora cada una de las llaves por separado?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Qué tipo de expresiones determinan los tiempos de cada una de las llaves?
- ¿Qué operaciones se requieren para resolver el problema?



En la situación anterior, para determinar el tiempo en horas que demora cada llave para llenar el acuario, se asigna la variable x , tiempo (en horas) que necesita la primera llave para llenar el acuario.

Por las condiciones del problema, se tiene:

$2x$ = tiempo (en horas) que tarda la segunda llave en llenar el acuario.

Además, se debe saber qué parte del acuario llena cada llave por separado por unidad de tiempo (en este caso, una hora). De este modo, se tiene:

la llave A llena $\frac{1}{x}$ del acuario;

la llave B llena $\frac{1}{2x}$ del acuario.

Y por tanto, la fracción que llenan ambas llaves juntas en una hora es igual a la suma de cada una de las partes:

$$A + B = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \right) \text{ del acuario}$$

Por otro lado, ambas llaves llenan el acuario en 3 horas, es decir,

en una hora llenan $\frac{1}{3}$ del acuario. Entonces, se tiene la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} &= \frac{1}{3} \\ \frac{2}{2x} + \frac{1}{2x} &= \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2x} &= \frac{1}{3} \\ 2x &= 9 \\ x &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera llave demora cuatro horas y media en llenar el acuario sola, y la segunda lo hace en nueve horas.

EN RESUMEN

Para resolver un problema que involucra expresiones algebraicas fraccionarias, se debe reconocer la incógnita y plantear la ecuación según el contexto y las condiciones del problema.

EN TU CUADERNO

1. Plantea las ecuaciones y resuelve los siguientes problemas:

- a. Determina qué número disminuido en sus $\frac{3}{8}$ equivale a su triple disminuido en 11.
- b. La suma de la quinta parte de un número con los $\frac{3}{8}$ del número excede en 49 al doble de la diferencia entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$ del número. Halla el número.
- c. La edad de Juan es los $\frac{3}{5}$ de la de Marta, y si ambas edades se suman, la suma excede en 4 años al doble de la edad de Juan. Halla la edad de Juan.
- d. El triple de un número excede en 48 al tercio del mismo número. Halla el número.
- e. Escribe dos números consecutivos tales que los $\frac{4}{5}$ del mayor sean equivalentes al menor disminuido en 4.
- f. Tenía cierta cantidad de dinero. Gasté \$ 2 000 y presté $\frac{2}{3}$ de lo que me quedaba. Si ahora tengo \$ 1 000, ¿cuánto tenía al principio?
- g. Después de gastar la mitad de lo que tenía y de prestar la mitad de lo que me quedó, tengo \$ 2 500. ¿Cuánto tenía al principio?
- h. La edad de Marcos es $\frac{1}{3}$ de la edad de Karen, y hace 15 años la edad de Marcos era $\frac{1}{6}$ de la de Karen. ¿Cuáles son las edades actuales?

2. Escribe un problema que involucre expresiones algebraicas fraccionarias. Junto con un compañero o compañera, intercambien sus enunciados y cada uno plantee la ecuación correspondiente.

MI PROGRESO

1. Encuentra el mcm de:

a. $3a^2 - 12, 14a - 28, a^2 + 5a - 14$

b. $a^2b^3 - 12ab, ab + a^2b^3$

c. $3(x-2)(x+1), 6(x+2)(x+1), 8(x-2)(x+2)$

d. $9x^2(x+1), 6x(x+2), 15(x+2)$

2. Resuelve las siguientes operaciones:

a. $\frac{1}{7x} + \frac{3}{x+1}$

d. $\frac{x+5}{x+1} - \frac{x-5}{x-1}$

b. $\frac{x-1}{x^2+2} + \frac{x^2}{(x^2+2)^2}$

e. $\frac{9}{x(x+1)} - \frac{5}{(x+1)^2}$

c. $\frac{3}{x-3} + \frac{x-2}{x^2-9}$

f. $\frac{9x-1}{x^3+1} - \frac{1}{x+1}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{3x^2+7x-1}{6x^2-3x+40} = \frac{1}{2}$

b. $-4x + \frac{12}{x+3} = \frac{8}{x+3} + 12 + \frac{8}{2x+6}$

c. $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{50}{x^2-16}$

4. Determina un número positivo, tal que, si se le resta 24 veces su inverso multiplicativo, se obtiene 2.

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Determinar el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas.	1	___ / 4
Resolver adiciones y sustracciones de fracciones algebraicas.	2	___ / 6
Resolver ecuaciones que contienen fracciones algebraicas.	3	___ / 3
Resolver problemas que involucran fracciones algebraicas.	4	___ / 1

Cómo resolverlo

Problema resuelto 1

$A \text{ cm}^2$	
$B \text{ cm}^2$	$C \text{ cm}^2$

Se considera un rectángulo dividido en cuatro partes como se muestra en la figura. Si se conoce el área de tres de estas partes, determina el área del rectángulo azul en función de las áreas conocidas.

Solución:

Primero, se debe considerar que no se conocen las longitudes de los lados de ningún rectángulo, de modo que debemos ponerles nombres provisionales. De esta forma, el largo y el ancho del mayor de los rectángulos menores serán m cm y p cm, respectivamente. De modo que tenemos la relación:

$$m \cdot p = A$$

El segundo rectángulo, ubicado debajo del que tiene área A , tiene el mismo largo (igual a m cm), pero es de ancho distinto (digamos, q cm).

Por tanto, tenemos:

$$m \cdot q = B$$

Y el tercer rectángulo de área conocida, tiene el mismo ancho del segundo (es decir, q cm), pero su largo es distinto del de los anteriores (digamos, n cm), luego tenemos:

$$n \cdot q = C$$

De lo anterior, podemos deducir que el rectángulo desconocido tiene el mismo largo del tercer rectángulo (es decir, n), y que su ancho es igual al del primer rectángulo (es decir, p). Por tanto, podemos calcular su área:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= n \cdot p \\ &= \left(\frac{C}{q}\right) \cdot \left(\frac{A}{m}\right) \\ &= \frac{A \cdot C}{m \cdot q} = \frac{A \cdot C}{B}\end{aligned}$$

El área del rectángulo azul es igual a $\frac{A \cdot C}{B} \text{ cm}^2$.

NO OLVIDES QUE...

Si el problema tiene datos con unidades de medida, la respuesta al problema se debe escribir con la unidad de medida correspondiente.

EN TU CUADERNO

1. Un terreno rectangular se divide en cuatro partes, de manera que tres de sus partes tienen áreas iguales a 40, 160 y 80 hectáreas. Determina el área del rectángulo restante.
2. Un cuadrado se divide en 4 partes, de forma que el área de la parte mayor es la suma de las áreas de los rectángulos restantes. ¿En qué proporción quedaron los lados del cuadrado después de los cortes?

Problema resuelto 2

Un tren va a una rapidez de v km/h. Un pasajero que va en él ve pasar a otro tren en sentido contrario, y el tiempo que tarda este en pasar por su vista es de 2 segundos y medio. Si la rapidez del tren en que va era las dos terceras partes de la del otro tren, y ambos mantienen su rapidez en ese instante, ¿cuál es la longitud del tren que vio el pasajero?

Solución:

Primero se debe determinar la longitud del tren que el pasajero ve pasar por cada segundo. Entonces, su longitud es igual al producto de la longitud que ve pasar cada segundo por el tiempo que lo ve pasar.

Cada segundo que avanza el tren en el que viaja, recorre como distancia

$\frac{v}{3,6}$ metros.

Pero, a su vez, el tren que viaja en sentido contrario recorre $\frac{3}{2}$ de la distancia del primer tren, ya que su rapidez es dos tercios la rapidez del primer tren.

Es decir, el otro tren recorre en el sentido contrario $\frac{3}{2} \cdot \frac{v}{3,6}$ metros en un segundo,

y como los trenes van en sentido contrario, en realidad el pasajero ve pasar cada segundo la suma de las distancias recorridas por ambos trenes, es decir:

$$\frac{v}{3,6} + \frac{3}{2} \cdot \frac{v}{3,6} = \frac{5}{2} \cdot \frac{v}{3,6}$$

Como el pasajero ve el segundo tren durante 2 segundos y medio en total, entonces el largo del tren es igual a:

$$\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{v}{3,6} \right) \cdot \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{v}{18} \right) \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5v}{18} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125 \cdot v}{72}$$

Es decir, el largo del tren corresponde a $\frac{125}{72} \cdot v$ metros.



RECUERDA QUE...

$$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$$

Luego, v km/h corresponde a

$$\frac{v}{3,6} \text{ m/s.}$$

EN TU CUADERNO

1. Determina la longitud del tren en el caso de que el pasajero viaje a 80 km/h y vea pasar el tren en sentido contrario a 120 km/h.
2. Determina la longitud del tren que ve el pasajero, para el caso en que ambos trenes viajen a la misma rapidez.
3. Encuentra la longitud del tren que ve si el pasajero viaja a 70 km/h, el segundo tren está inmóvil, y lo ve durante 5 segundos.



Ley de enfriamiento de Newton

Newton figura como uno de los más grandes pensadores de la historia, tanto por el impacto de sus teorías como por los giros radicales que significaron en su época. Una de las tantas aplicaciones del cálculo que Newton desarrolló es la llamada ley de enfriamiento, la que dice:

La rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que lo rodea.

El modelo matemático de esta ley se expresa por:

$$T(t) = T_0 + \Delta T \cdot e^{-kt}$$

En este modelo, k es una constante positiva, T_0 es la temperatura del ambiente, ΔT es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del medio que lo rodea, y el tiempo t está expresado en horas. En algunos casos, sirve para determinar la hora de muerte de las personas. Veamos el siguiente ejemplo:

El doctor llegó al lugar de los hechos a las 10 de la mañana y la temperatura del cadáver a esa hora era de 29 °C. La temperatura de la pieza donde se encontró el cuerpo era de 23 °C. Una hora y media después, la temperatura del cuerpo bajó a 27 °C. El doctor necesitaba saber la hora exacta de la muerte de su paciente para llenar el certificado de defunción. Considerando $k = 0,27031007$, ¿a qué hora murió el paciente?

EN TU CUADERNO

1. Con ayuda de una calculadora, y usando la aproximación $e = 2,71828$, encuentra los valores de T_0 y de ΔT , a fin de determinar el modelo.
2. Luego, encuentra una aproximación para la temperatura del cuerpo humano, si se sabe que murió a las 7 de la mañana.
 - El tiempo está considerado en horas.
 - Observa que para este caso debes considerar un valor negativo de t , dado que la muerte del paciente fue antes de las 10 de la mañana.
3. ¿Qué otros tipos de problemas se pueden resolver mediante este modelo?
4. ¿Qué otras situaciones se pueden modelar usando esta fórmula?
5. ¿De qué manera el valor de k depende de los datos aportados en el problema?

INVESTIGUEMOS...

Ahora trabajen en grupos de cuatro personas:

1. Comparen las soluciones obtenidas por cada integrante y discutan sobre cuál debería ser la solución correcta en caso de que existan diferencias entre los resultados obtenidos.
2. Discutan en conjunto si existe una manera de determinar el valor de la constante k , ya que para este caso fue dada.
3. El valor de k dado en el ejemplo, ¿depende de las condiciones del problema? Discutan.
4. Cada uno resuelva el siguiente problema:
Un objeto fue colocado en una habitación que se encuentra a temperatura constante de 15°C ; sin embargo, solamente luego de un instante se toma la temperatura, la cual es en ese momento de 26°C .
¿Qué temperatura tiene el objeto pasados 10 minutos después de ese instante?, ¿con qué temperatura el objeto ingresó a la habitación, si pasaron 10 minutos antes de que fuese tomada esta?

Para todos los cálculos, consideren $k = 0,031$ y sigan estos pasos:

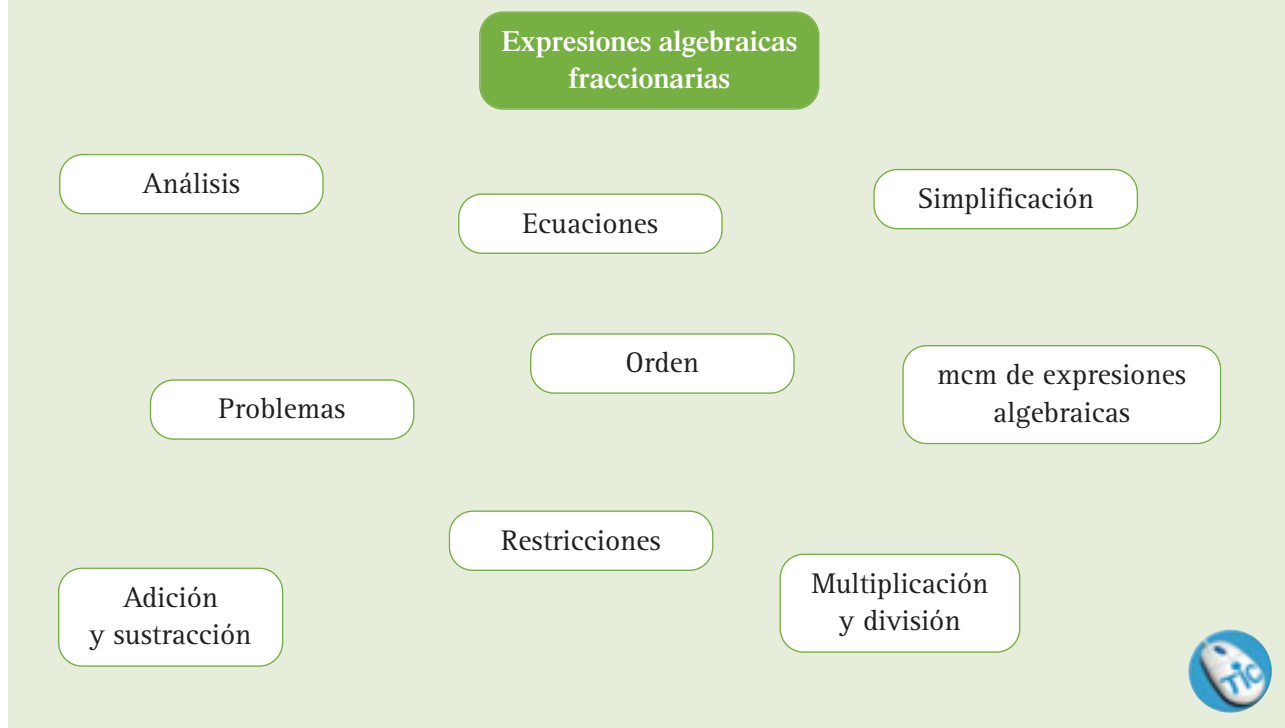
- Primero, dado que el tiempo está expresado en minutos, deben considerar la variable t como tiempo transcurrido desde que se toma la temperatura al objeto, en minutos.
- Luego, se rempazan los valores dados en la fórmula, y con esto encuentra el valor de ΔT .
- Conocido este valor, se encuentra la temperatura del objeto pasados 10 minutos.
- Finalmente, dado que se desea saber la temperatura en un instante anterior al primer registro, se debe considerar un valor de t negativo para saber la temperatura con la cual ingresó el objeto a la habitación.

EVALUEMOS NUESTRO TRABAJO

- Comparen sus resultados con los obtenidos por sus compañeros y compañeras. ¿Se obtienen los mismos valores? De no ser así, ¿cuáles son las diferencias?
- ¿Qué sucede si el tiempo se mide ahora en horas o en segundos?
- El valor de k considerado ¿sirve para este caso o debe ser cambiado? De ser así, ¿cómo podría determinarse el nuevo valor de k ?
- ¿Se relaciona de alguna manera el valor de la constante k con los parámetros y unidades de medida usados? ¿Existe una dependencia de los datos conocidos?, ¿por qué?

Síntesis de la Unidad

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual, en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.



1 Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

- Para simplificar una fracción, basta dividir numerador y denominador por un número entero cualquiera.
- La fracción algebraica $\frac{a^3 - 125b^3}{7a^2 + 35ab + 175b^2}$ es irreducible.
- Una fracción algebraica queda indefinida en $a = 3$ si su denominador se anula para tal valor de a .
- La fracción $\frac{a-1}{7+b^2}$ es mayor que la fracción $\frac{2a-1}{14+2b^2}$, para $a > 0$ y $b < 0$.
- Una fracción algebraica aumenta de valor si el numerador queda fijo y el de su denominador disminuye.
- Para determinar los valores donde una fracción algebraica queda indefinida, es necesario revisar los valores para los cuales el numerador se anula.
- El mínimo común múltiplo de $6ab^2$ y $4a^2b(a+1)$ es $12a^2b^2(a+1)$.

- h. Las fracciones $\frac{1}{13}, \frac{2}{21}, \frac{3}{31}$ son generadas por la expresión $\frac{n-2}{n^2+n-1}$.
- i. La única solución positiva de la ecuación $x+2 = \frac{8}{x}$ es $x = 2$.
- j. Para dividir dos fracciones algebraicas, es necesario multiplicar la primera, por el inverso multiplicativo de la segunda.
- k. En el caso $x > 0, a > 0, x < a$, el valor de la fracción $\frac{x-a}{a}$ es menor que -1 .
- l. La expresión $\frac{2a^3-32}{3(a^2+2a-1)}$ se anula únicamente para $a = -4$.
- m. La única solución de la ecuación $x+2 - \frac{8}{x} = 0$ es $x = 2$.
- n. Las fracciones $\frac{3}{7}, \frac{6}{26}, \frac{9}{63}$ son generadas por la expresión $\frac{3n}{(n+1)^3-1}$.

2 Aplica lo que aprendiste en la unidad para desarrollar las siguientes actividades:



- a. Halla un número positivo tal que, al restarle 63 veces su inverso multiplicativo, se obtenga 2. ¿Es el único número que satisface esta propiedad?, ¿cómo lo sabes?
- b. Dos aviones se utilizan para fumigar una parcela. Si uno de ellos se demora la mitad del tiempo que el otro, y juntos se demoran 5 horas, encuentra el tiempo que le toma a cada avión por sí solo cubrir toda la parcela.
- c. Resuelve la ecuación $\frac{2x^2-x+5}{10x^2+6x-19} = \frac{1}{5}$.
- d. Un grupo de 60 estudiantes de un colegio acordaron poner una cuota para asistir al cine. Pero 10 de ellos se retiran, debiendo el resto poner \$ 400 adicionales. Determina el valor original de la cuota.
- e. Factoriza las siguientes expresiones y determina los valores de x para los cuales no están definidas.
- i. $\frac{x^3(x+1)}{12x^3-12x}$ ii. $\frac{(x^2+1)(2x+2)}{14x^9-14x}$



Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

1. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor para $a > 1$?

A. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{a}{2a+1}$

B. $\frac{a+1}{2a}$ E. $\frac{a}{2a-1}$

C. $\frac{a-1}{2a}$

2. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la menor para $a > 0$?

A. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2a-1}{4a}$

B. $\frac{4a-3}{8a}$ E. $\frac{a-1}{2a}$

C. $\frac{3a-2}{6a}$

3. Si $a > 1$, ¿cuál de las siguientes fracciones es la más cercana a $\frac{1}{2}$?

A. $\frac{a+1}{2a}$ C. $\frac{a}{2a+1}$ E. B y C

B. $\frac{a-1}{2a}$ D. A y B

4. ¿Cuál de las siguientes no es una restricción para la fracción $\frac{(x-2)^2(x-5)}{(x^3-x)(x+5)}$?

A. $x = -5$ D. $x = 1$

B. $x = -1$ E. $x = 2$

C. $x = 0$

5. ¿Qué fracción no está generada por la misma expresión que las restantes?

A. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{8}{14}$ E. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{10}{17}$ D. $\frac{6}{11}$

6. El resultado de $\frac{a^2-1}{2b} \cdot \frac{m^2+4}{a-1} \cdot \frac{6b^3}{m^4-16}$ es:

A. $\frac{a^2+1}{3b(m^2+4)}$ D. $\frac{a+1}{3b(m^2-4)}$

B. $\frac{3b(a+1)}{m^2+4}$ E. $\frac{3b^2(a+1)}{m^2-4}$

C. $\frac{3b(a+1)}{m^2-4}$

7. El resultado de $\frac{a^2+4a+3}{a^2-4} : \frac{a+1}{4a+8}$ es:

A. $\frac{a-3}{4(a-2)}$ D. $\frac{4(a+3)}{a-2}$

B. $\frac{a+3}{4(a-2)}$ E. $\frac{4(a+3)}{a+2}$

C. $\frac{4(a-3)}{a-2}$

8. El resultado de $\frac{10}{a^2-1} : \frac{14}{a^3-1}$ es:

A. $\frac{5(a+1)}{7(a^2+a+1)}$ D. $\frac{a^2+a+1}{a+1}$

B. $\frac{7(a+1)}{5(a^2+a+1)}$ E. $\frac{5(a^2+a+1)}{7(a+1)}$

C. $\frac{a+1}{a^2+a+1}$

9. La expresión $\frac{a+3}{a+1}$ no es equivalente a:

A. $\frac{a^2 + 4a + 3}{(a+1)^2}$

B. $\frac{a^2 - 9}{a^2 - 2a - 3}$

C. $\frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 - 1}$

D. $\frac{(a+3)^2}{a^2 + 4a + 3}$

E. $\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - 3a + 2}$

10. El resultado de $\frac{3}{a-1} + \frac{6}{a^2-1}$ es igual a:

A. $\frac{3a+3}{a^2-1}$

D. $\frac{6a+3}{a^2-1}$

B. $\frac{3(a+3)}{a^2-1}$

E. $\frac{3a-3}{a^2-1}$

C. $\frac{3(2a+3)}{a^2-1}$

11. La solución para x de la ecuación

$$\frac{3x^2 - 3x + 6}{2x^2 + 4x - 2} = \frac{3}{2} \text{ es:}$$

A. $x = 1$

B. $x = -1$

C. $x = 2$

D. $x = -2$

E. $x = 0$

12. La operación $\frac{3}{m-2} + \frac{6}{m^2-4} - \frac{1}{m+2}$ da como resultado:

A. $\frac{2(m+5)}{m^2-4}$

B. $\frac{2m+5}{m^2-4}$

C. $\frac{2(m+7)}{m^2-4}$

D. $\frac{2m-7}{m^2-4}$

E. $\frac{2(m-7)}{m^2-4}$

13. Determina un número positivo tal que si se le suma 7, el resultado se divide por 3, y si finalmente se le suma nuevamente 7, se obtiene 20 veces el inverso multiplicativo del número.

A. 2

D. 5

B. 4

E. 1

C. 3

14. Por asistir a cierto lugar, a un grupo de amigos se les cobraba \$ 6 000 en total. Pero dos de ellos no pudieron asistir, de modo que cada uno de ellos debió pagar \$ 150 más, pues el precio por el grupo se mantuvo. ¿Cuántos amigos había al comienzo?

A. 7

D. 12

B. 8

E. 15

C. 10



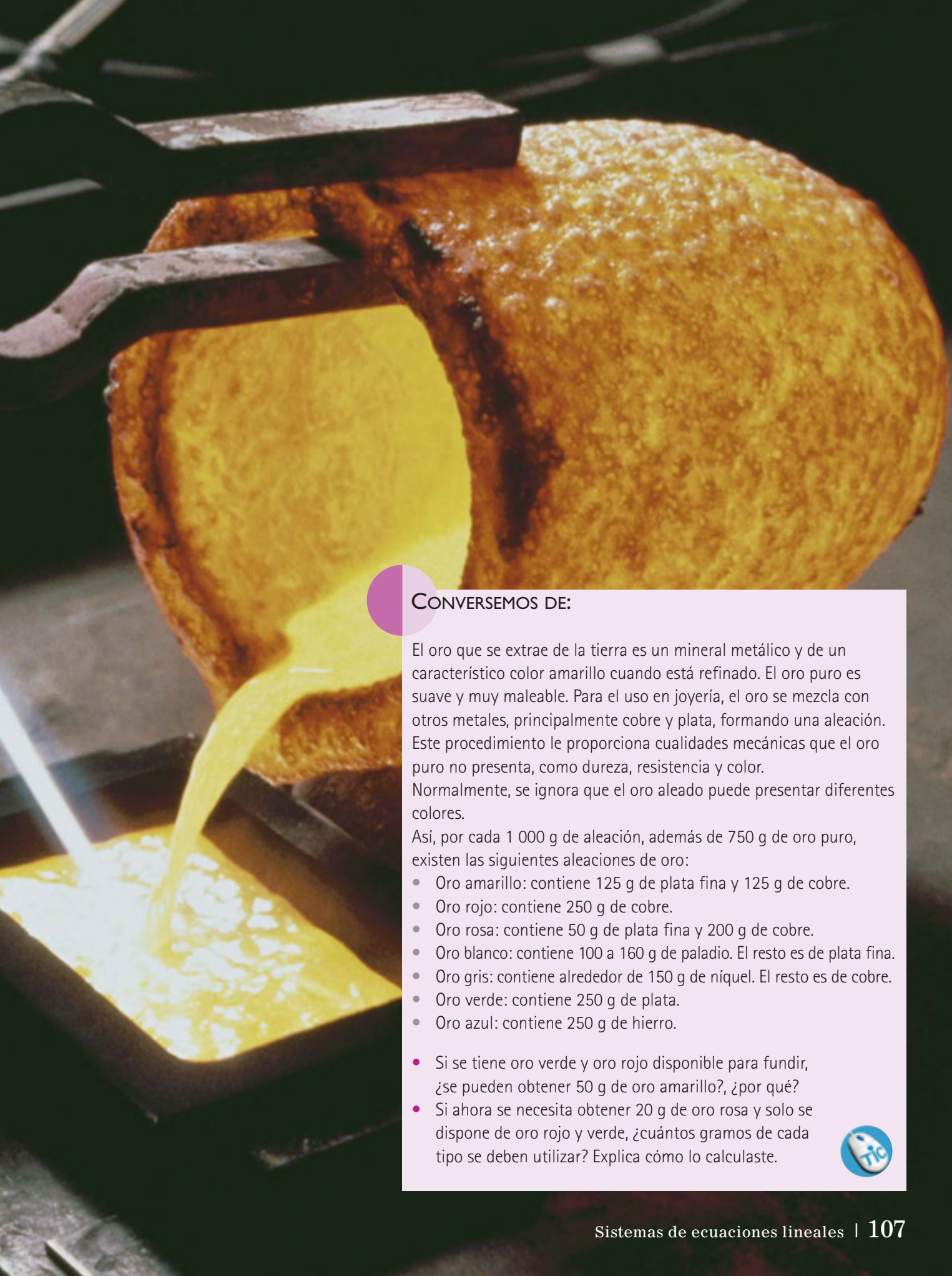
3

Unidad

Sistemas de ecuaciones lineales

EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

- Plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Conocer y utilizar diversos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Representar sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano.
- Utilizar un *software* gráfico para representar sistemas de ecuaciones lineales y analizar sus soluciones.
- Discutir la existencia y pertinencia de las soluciones de problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolver problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.



CONVERSEMOS DE:

El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación. Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores.

Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:

- Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.
 - Oro rojo: contiene 250 g de cobre.
 - Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.
 - Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.
 - Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.
 - Oro verde: contiene 250 g de plata.
 - Oro azul: contiene 250 g de hierro.
-
- Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?
 - Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar? Explica cómo lo calculaste.



¿Cuánto sabes?

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

1. Responde las siguientes preguntas.

- a. ¿Qué es una ecuación?
- b. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal con una incógnita?
- c. ¿Qué significa que dos ecuaciones sean equivalentes?
- d. ¿Cómo es la gráfica de la función afín f , definida por $f(x) = mx + n$?
- e. ¿Qué representan los parámetros m y n en la gráfica de esta función?
- f. ¿Cuántos puntos son suficientes para determinar una recta?

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a. $-7(x-6) + \frac{5}{7} + \frac{9}{7} = 1$
- b. $0,1x + 1,9 = 13,74$
- c. $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$
- d. $ay + b = c$
- e. $5cx = \frac{b}{11} - 9c$
- f. $4a + 4b = xa + xb$

3. Decide si son equivalentes los siguientes pares de ecuaciones. Justifica tu respuesta.

- a. $3x + 5 = \frac{1}{3}$, $9x + 15 = 1$
- b. $-x - 8 = 0$, $x = 8$
- c. $-\frac{5}{3} - x = 0$, $-5x = 6$
- d. $7x + \frac{3}{5} = 5$, $35x + 3 = 5$

4. Traza la gráfica de las siguientes funciones en el plano cartesiano.

- a. $f(x) = 2x + 8$
- b. $f(x) = -x + 3$
- c. $f(x) = -2x - 4$
- d. $f(x) = 5x$
- e. $f(x) = 3$
- f. $f(x) = 0$

- ¿Qué tienen en común las gráficas obtenidas?

5. Evalúa cada expresión para los siguientes valores: $a = 1$; $b = -1$; $c = \frac{1}{2}$; $d = 0$.

- a. abc
- b. $abd - abc$
- c. $(a - b) + (c - d)$
- d. $d(a + b + c) + (a + b + c)$
- e. $(d + a) - (d + b) - (d + c)$
- f. $-(ab + ac + ad) - (ba + bc + bd)$
- g. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - \frac{d}{c}$
- h. $\frac{c}{a} + \frac{b}{c} - \frac{a(c + d)}{b}$

6. Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

- a. La solución de la ecuación $3x + 5 = 0$ es $-\frac{5}{3}$.
- b. Una ecuación lineal con una incógnita tiene dos soluciones.
- c. La ecuación $ax + b = c$ es equivalente a $ax + b - c = 0$.
- d. En la función afín f definida por $f(x) = ax + b$, el número b representa la pendiente de la recta asociada.

7. Para cada enunciado: define las variables, plantea y resuelve una ecuación.

- a. La mitad de un número impar menos el doble de este es igual a $-\frac{33}{2}$. Determina cuál es el número.
- b. En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos están en proporción de 2 : 7. ¿Cuánto mide el menor de los ángulos agudos?
- c. Sergio tiene 35 años y su hijo Gabriel, 7 años. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que el padre doble en edad al hijo?

Compara tus respuestas con las de tus compañeras y compañeros. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.



¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- Una **ecuación** es una igualdad en la que hay una o más variables desconocidas llamadas **incógnitas**.
- Las incógnitas, en general, se representan por las letras minúsculas x , y , z , etc. La letra utilizada no es importante; $3(s - 1) + 5 = 0$ y $3(x - 1) + 5 = 0$ representan la misma ecuación.
- El **grado de una ecuación** está determinado por el mayor grado del exponente de la incógnita.
- Una ecuación se dice **lineal** si todas sus incógnitas son de grado 1 y no están multiplicadas entre sí.
- Una **solución** de la ecuación es un número que, al ser remplazado por la incógnita, satisface la igualdad.
- Dos ecuaciones son **equivalentes** si poseen idénticas soluciones.
- Al sumar o restar a una ecuación cualquier número, así como al multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero, la ecuación resultante es equivalente a la original.
- La **gráfica** de la función afín $f(x) = mx + n$ es una recta en el plano que no pasa por el origen. El valor m es la pendiente de la recta asociada y n se relaciona con su intersección con el eje Y .
- Para resolver un problema que involucra ecuaciones, es preciso leer y comprender su enunciado. Esto facilitará identificar la incógnita y plantear la ecuación pedida transformando el problema de un lenguaje verbal a un lenguaje matemático. Una vez resuelta la ecuación se debe verificar si el valor obtenido es solución del problema.

Ecuaciones lineales con dos incógnitas



Una tienda de música recaudó en una semana \$ 360 000 por la venta de discos compactos de *reggaeton* y de rock. El precio de los CD de *reggaeton* es \$ 6 000 y el de los CD de rock es \$ 8 000.

ANALICEMOS...

- Si quisiéramos saber cuántos discos compactos de cada tipo de música se vendieron, ¿cuáles son las variables del problema?
- ¿Podrías plantear una ecuación para resolver la situación?, ¿cuál?
- ¿Es correcto afirmar que se vendieron 20 CD de *reggaeton* y 30 de rock?, ¿por qué?
- ¿La situación anterior solo tiene una solución?, ¿por qué crees que ocurre esto?

Para resolver un problema como el presentado, es conveniente plantear o modelar el problema a través de ecuaciones. Observa:

Sea x cantidad vendida de CD de *reggaeton*.

Sea y cantidad vendida de CD de rock.

Una ecuación que representa la situación anterior es:

$$6\,000x + 8\,000y = 360\,000$$

Para esta ecuación, hay varias posibles soluciones. Una de ellas es:

$$x = 20 \text{ e } y = 30 \text{ pues, } 6\,000x \cdot 20 + 8\,000x \cdot 30 = 360\,000$$

Sin embargo, no es la única solución; dando valores a x se pueden obtener distintos valores de y . Observa la siguiente tabla.

x	0	18,6	25	40	46,6	60
y	45	31,05	26,25	15	10,05	0

Estas soluciones son correctas desde el punto de vista matemático; sin embargo, para la situación planteada, solo son pertinentes: $x = 0$ e $y = 45$; $x = 40$ e $y = 15$; $x = 60$ e $y = 0$, ya que no es posible haber vendido 26,25 CD, por ejemplo.

En general, si hay más incógnitas que ecuaciones, hay infinitas soluciones matemáticas; sin embargo, hay que evaluar su pertinencia en el contexto del problema.

Si a la situación anterior se agrega el hecho de que el total de discos compactos que se vendieron entre ambos grupos fue 55, se puede agregar una nueva ecuación al problema:

$$x + y = 55$$

Así pues, el problema se reduce ahora a resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$6\,000x + 8\,000y = 360\,000$$

$$x + y = 55$$

Por ahora, al observar la tabla anterior de posibles soluciones, se tiene que el par $x = 40$ e $y = 15$ es solución de ambas ecuaciones (40 CD de *reggaeton* y 15 CD de rock).

EN RESUMEN

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. En cambio, una situación que se modela por una ecuación con dos incógnitas no tiene necesariamente infinitas soluciones, pues se debe comprobar la pertinencia de las soluciones encontradas.

EN TU CUADERNO

1. Verifica si $x = -1$ e $y = 8$ son soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $2x + y = 6$

b. $7x - y = 11$

c. $x - y = 7$

d. $x + y = 7$

2. Plantea una ecuación para cada situación y encuentra, por tanteo, dos posibles soluciones en cada caso.

a. La suma de dos números es 25. ¿Cuáles son los números?

b. Un número más el doble de otro es 12. ¿Cuáles son los números?

c. Un número excede a otro en 10 unidades. ¿Cuáles son los números?

d. Una madre reparte entre sus dos hijos \$ 5 000. ¿Cuánto le da a cada uno?

e. El perímetro de un rectángulo es 60 m. ¿Cuánto miden sus lados?

f. Dos ángulos son suplementarios. ¿Cuánto mide cada ángulo?

g. La razón entre las edades de dos hermanos es 2 : 3. ¿Cuáles son las edades?

h. 8 litros de aceite y 10 litros de vinagre cuestan \$ 10 500. ¿Cuál es el precio de cada litro de aceite y de vinagre?

i. En un teatro hay 46 personas, entre niños y niñas. ¿Cuántos niños y niñas hay?

j. Para hacer un queque, la razón entre la cantidad de tazas de harina y la cantidad de huevos es de 1 : 2. ¿Cuántas tazas de harina y cuántos huevos se necesitan para hacer un queque?

3. Encuentra, por tanteo, cuatro soluciones para cada ecuación lineal de dos incógnitas.

a. $x - y = 10$

b. $2x - 3y = 8$

4. Para cada enunciado, escribe en lenguaje algebraico cada situación, definiendo el significado de cada variable.

a. Dos ángulos son complementarios. La medida de uno de ellos es el doble que el otro.

b. Dos números suman 34, y su diferencia es 8.

c. Un padre reparte entre sus dos hijos \$ 56 000. Al hijo mayor le da la mitad que al hijo menor.

Planteo de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas



Catalina y Felipe preparan bombones de chocolate para vender. Para comprar todos los ingredientes disponen de \$ 45 000. La materia prima necesaria para completar una caja grande les cuesta \$ 500 y para una caja pequeña, \$ 300.

ANALICEMOS...

- ¿Cuántas cajas de cada tamaño podrían completar?
- ¿Se puede representar algebraicamente esta situación?, ¿cómo?
- Esta ecuación ¿tiene más de una solución?, ¿cuántas?
- Si en esta ocasión Catalina y Felipe quieren completar 100 cajas en total, ¿cómo afecta esto en la o las soluciones encontradas?
- Al agregar otra condición, ¿siempre es posible encontrar una solución?

Para representar algebraicamente esta situación, se asigna x a la cantidad de cajas grandes e y a la cantidad de cajas pequeñas que Catalina y Felipe podrían completar, entonces la condición que impone el dinero disponible se expresa como:

$$500x + 300y = 45\,000$$

Catalina propone preparar solo cajas grandes, entonces reemplaza $y = 0$ en la ecuación, y obtiene $x = 90$. Esta es una posibilidad. Por su parte, Felipe propone preparar solo cajas pequeñas, es decir, $x = 0$, y por lo tanto $y = 150$. Esta es otra posibilidad. Pero, también existen posibilidades intermedias. Por ejemplo, si se reemplaza $x = 60$, la ecuación queda: $30\,000 + 300y = 45\,000$, por lo que $y = 50$.

Como Catalina y Felipe quieren completar 100 cajas en total, se plantea una segunda ecuación que representa esta condición:

$$x + y = 100.$$

Si Catalina y Felipe quieren completar 100 cajas, para saber cuántas cajas grandes y cuántas pequeñas pueden completar con el dinero que disponen, se debe cumplir simultáneamente:

$$500x + 300y = 45\,000$$

$$x + y = 100$$

Este es un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas**.

Una solución del sistema anterior es $x = 75$ e $y = 25$, que se puede expresar como el par ordenado $(75, 25)$. Más adelante aprenderás diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, por ahora puedes verificar que esta es la solución, reemplazando los valores en ambas ecuaciones y viendo que ambas se satisfacen.

Realmente, estos valores son la **única solución** posible de este sistema. Catalina y Felipe no tienen más opciones que cumplan las dos condiciones simultáneamente.

GLOSARIO

Ecuación: igualdad en la que hay una o más variables desconocidas llamadas incógnitas.

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas: corresponde a resolver simultáneamente dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Solución: valores de las incógnitas de una ecuación que la satisfacen.

GLOSARIO

Un **par ordenado** es un par de elementos tales que uno puede ser distinguido como el primero y el otro, como el segundo.

Generalmente se escriben (x, y) en el plano, donde las coordenadas cartesianas x e y se denominan **abscisa** y **ordenada**, respectivamente. De esta manera, $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son pares ordenados distintos.

EN RESUMEN

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas. Una solución al sistema corresponde a un valor para cada incógnita, de modo que al remplazarlas en las ecuaciones se satisface la igualdad.
- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y , tiene las siguientes representaciones:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

En este Texto usaremos la tercera.

- Generalmente, las soluciones de un sistema de ecuaciones se expresan como pares ordenados (x, y) .

EN TU CUADERNO

1. Al hacer el recuento de boletas en una librería, se constató que en una de ellas se anotó un total de 40 lápices por un valor de \$ 20 000. Si solo hay dos tipos de lápices a la venta:
 - a. ¿Se puede calcular cuántos lápices de cada tipo se vendieron?, ¿cómo?
 - b. ¿Qué ecuaciones plantearías? Comparte tu respuesta con tus compañeros y compañeras.
2. En un monedero hay un total de \$ 8 500 distribuidos en 33 monedas, de las cuales 20 son de \$ 100 y el resto son de \$ 500. De acuerdo a estos datos, Pilar y Mario escribieron dos sistemas de ecuaciones diferentes.

Pilar

$$\begin{cases} x + y = 33 \\ 100x + 500y = 8\,500 \end{cases}$$

Mario

$$\begin{cases} x + y = 8\,500 \\ \frac{x}{500} + \frac{y}{100} = 33 \end{cases}$$

- a. ¿Qué representa x e y en cada caso, en el contexto de la situación inicial?
 - b. ¿Cuáles son valores posibles para x e y ? Explica cómo lo calculaste.
3. Identifica la solución que satisface cada sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

A. (2, 3)

B. (3, 2)

C. (3, 1)

D. (1, 3)

$$\begin{cases} 2x + 2y = -10 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$$

A. (6, -1)

B. (-1, 6)

C. (-6, 1)

D. (1, -6)



Método gráfico



Elisa es pastelera y quiere aprovechar una oferta de decoración para tortas. El paquete de perlititas cuesta \$ 150 y el de mostacillas \$ 100. Si con \$ 1 800 necesita comprar en total 14 paquetes, ¿cuántos paquetes puede comprar de cada uno?

Elisa asigna las incógnitas y escribe el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 150x + 100y = 1\,800 \end{cases}$$

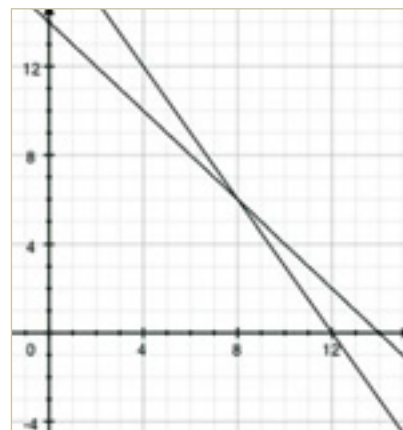
RECUERDA QUE...

- La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos (x, y) donde $y = f(x)$.
- La gráfica de una función afín es una línea recta.
- Por dos puntos en el plano pasa una única recta.

ANALICEMOS...

- Escribe cada una de las ecuaciones, expresada en términos de x .
- De acuerdo a lo anterior, ¿cómo se relaciona una ecuación lineal con dos incógnitas con una función lineal o afín?
- Dibuja en un mismo plano cartesiano las gráficas correspondientes a estas ecuaciones. Entonces, ¿cuál es la interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones?, ¿cuál es la solución, en este caso?

Elisa escribe cada ecuación en términos de x , luego, observa que, de la primera ecuación, los puntos que satisfacen la expresión $y = -x + 14$ corresponden a la gráfica de la función afín definida por $f(x) = -x + 14$ con $y = f(x)$, mientras que, de la segunda ecuación, la función correspondiente es $g(x) = -1,5x + 18$. De este modo, cada ecuación corresponde a una recta. Observa sus gráficas.



Si el sistema de ecuaciones tiene solución en el plano cartesiano, el punto correspondiente a la solución es un punto que pertenece a ambas rectas. En este caso, en el plano se observa que el punto de intersección es $(8, 6)$, es decir, Elisa puede comprar 8 paquetes de perlititas y 6 paquetes de mostacillas.

Cuando el sistema tiene infinitas soluciones, las rectas tienen infinitos puntos de intersección, es decir, son coincidentes. Y si el sistema no tiene solución en el plano, las rectas correspondientes son paralelas. Considerando esto, se pueden resolver gráficamente los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, haciendo uso del plano cartesiano.

Ejemplo 1

Analiza gráficamente y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$$

Primero, se despeja la incógnita y para escribirlo en la forma de una función afín.

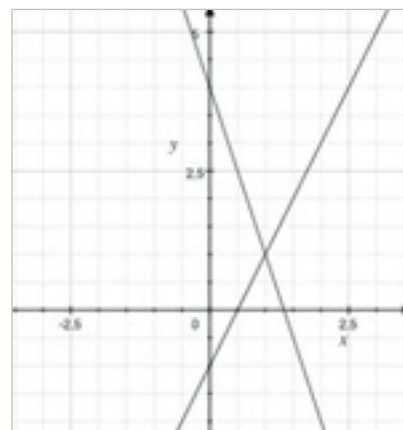
$$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Para trazar las rectas, se asignan dos valores distintos a x y se calcula el correspondiente valor de y , en cada caso. Se marcan estos dos puntos en el plano cartesiano. Luego, se traza la recta que pasa por estos dos puntos, y se repite el procedimiento para la otra ecuación.

En este caso, en la primera ecuación, si $x = 0$, entonces $y = 4$, esto corresponde al punto $(0, 4)$. Por otro lado, si $x = 2$, entonces $y = -2$, que corresponde al punto $(2, -2)$.

De la misma manera, en la segunda ecuación, si $x = 0$, entonces $y = -1$; si $x = 2$, entonces $y = 3$, correspondiente a los puntos $(0, -1)$ y $(2, 3)$, respectivamente.

Con esto se pueden graficar ambas rectas.



Las rectas se intersecan en el punto $(1, 1)$. Entonces, $x = 1$, $y = 1$ es solución del sistema.

Ejemplo 2

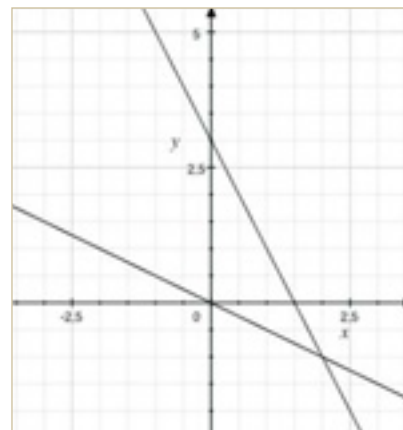
Considera el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Reescribiendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

Dando valores $x = -2$ y $x = 4$ en la primera ecuación se obtienen los puntos $(-2, 7)$ y $(4, -5)$. Asimismo, en la segunda ecuación, se obtienen los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -2)$. Se ubican estos puntos en el plano cartesiano y se trazan las rectas correspondientes a cada ecuación.



El punto de intersección de ambas rectas es $(2, -1)$. Por lo tanto, la solución del sistema es $x = 2$ e $y = -1$.



HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Aprenderás a usar el programa **Graphmatica** para construir y analizar gráficas que representan sistemas de ecuaciones lineales. Para bajar este programa, ingresa a www.graphmatica.com/espanol

Sobre la cuadrícula, hay una barra en blanco que permite escribir ecuaciones, las que se escriben usando las variables x e y . Una vez ingresada la ecuación, presiona el botón **dibujar gráfica** o simplemente presiona **enter**. A continuación, aparecerá en la cuadrícula la gráfica de la función.

Se puede cambiar la escala de la gráfica de la función y el aspecto de la cuadrícula de la siguiente forma:

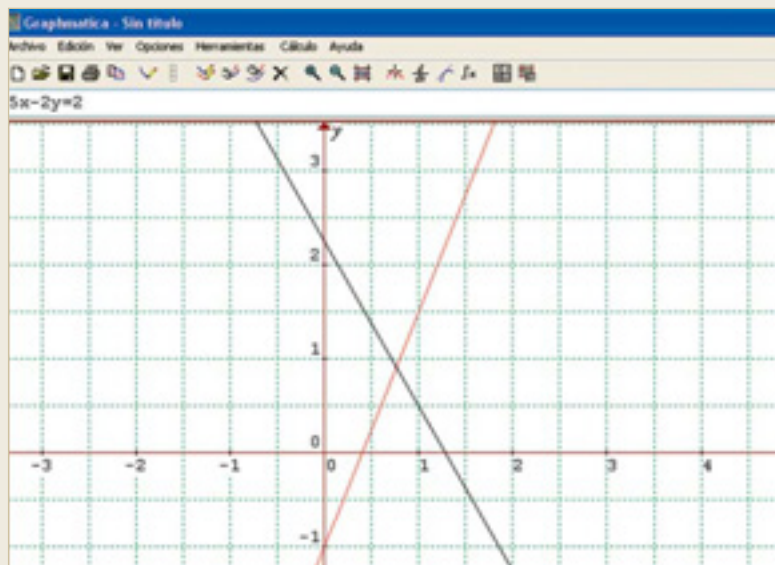
- Para cambiar la escala, haz clic en el menú **Ver**, y selecciona **Rango de la cuadrícula**. En el cuadro que aparece se puede modificar el rango horizontal (opciones **izquierda** y **derecha**) y el rango vertical (opciones **arriba** y **abajo**).
- Para cambiar los colores del plano cartesiano o de la gráfica de la función, entre otras cosas, en el menú **Opciones** selecciona **papel gráfico**. Aquí se puede modificar el color de las gráficas, el color de fondo, así como etiquetar los ejes, etcétera.



Para analizar gráficamente un sistema de ecuaciones, se debe escribir en la barra en blanco sobre la cuadrícula cada una de las ecuaciones.

Por ejemplo, considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 9 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

Escribe la primera ecuación del sistema, presiona **enter** y observa la gráfica que aparece. A continuación, escribe la segunda ecuación y presiona nuevamente **enter**. Obtendrás en pantalla ambas gráficas, tal como se muestra en la siguiente imagen.



Si en algún momento cometiste un error al ingresar los datos, puedes corregirlo de la siguiente manera: Para ocultar la última gráfica realizada presiona el botón , y para ocultar todas las gráficas realizadas utiliza el botón .

Además, para borrar las gráficas, selecciona la función o relación que deseas borrar y utiliza el botón .

Para determinar la solución del sistema (si tiene solución única), a partir de la gráfica, basta que ubiques el cursor sobre el punto de intersección.

Ejercicios

1. Utiliza el programa Graphmatica para graficar las funciones:

- a. $y = 2x + 1$
- b. $y = -3 - x$
- c. $2x + 3y - 5 = 0$
- d. $x - y = 7$

2. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

- | | | | |
|---|---|---|--|
| a. $\begin{cases} 6x - 4y = 11 \\ 15x - 10y = 13 \end{cases}$ | b. $\begin{cases} 7x - y = -1 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$ | c. $\begin{cases} -x + 4y = -3 \\ 3x - 12y = 9 \end{cases}$ | d. $\begin{cases} 3x - 3y = 11 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$ |
|---|---|---|--|

3. Si dos sistemas son equivalentes, ¿cómo son las gráficas de sus ecuaciones?

4. ¿Te parece que el método gráfico es apropiado para resolver cualquier sistema? Por ejemplo, si la solución de un sistema es $\left(\frac{1}{155}, -\frac{7}{11}\right)$, ¿crees que sería apropiado utilizar el método gráfico?, ¿por qué?

EN RESUMEN

- Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se representa en el plano cartesiano como dos rectas.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales significa hallar los valores que satisfacen las ecuaciones.
- La solución del sistema, si existe y es única, es el **punto de intersección de ambas rectas**.

Análisis de las soluciones en el plano cartesiano

Como ya vimos, la solución de un sistema de ecuaciones se representa en el plano cartesiano como el punto de intersección entre las rectas que representan al sistema. Sin embargo, hay algunos casos en que no existe este punto de intersección.

Las siguientes gráficas corresponden a tres sistemas de ecuaciones distintos:

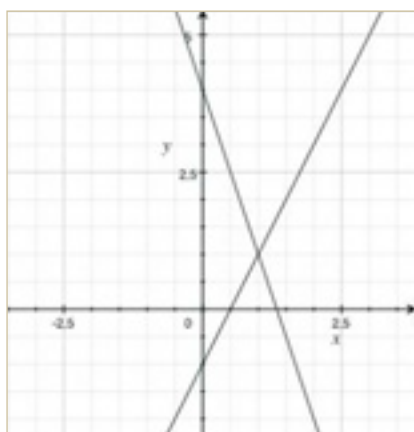


Gráfico 1

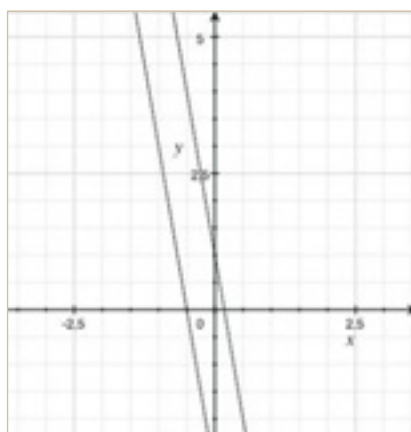


Gráfico 2

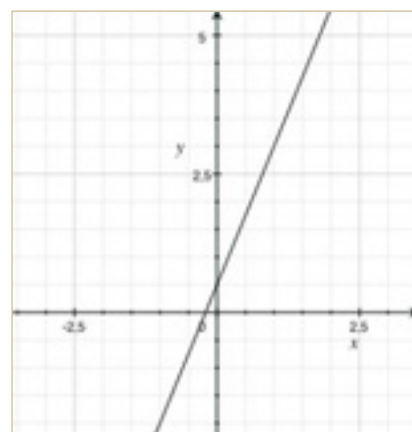


Gráfico 3

ANALICEMOS...

- ¿Cuál es la solución del sistema en cada caso? Explica.
- ¿Es correcto decir que el sistema que se representó en el segundo gráfico no tiene solución?, ¿por qué?, ¿ocurrirá esto siempre?
- En el tercer gráfico, ¿el par $(1, 3)$ es solución?, ¿y el $(-1, -2)$?, ¿tendrá otras soluciones este sistema?, ¿cuántas?, ¿ocurrirá esto siempre?

Al representar en un plano cartesiano un sistema de ecuaciones, se pueden observar tres situaciones, dependiendo de la posición relativa entre las rectas en el plano cartesiano. En cada caso, esto se relaciona con la cantidad de soluciones del sistema de ecuaciones correspondiente.

Si las rectas correspondientes son paralelas entre sí (ver gráfico 2), no existe el punto de intersección, y el sistema de ecuaciones **no tiene solución**.

Ahora, si en el plano las dos ecuaciones del sistema se representan por la **misma recta** (ver gráfico 3), las soluciones son todos los puntos que pertenecen a ella, o sea, infinitos. Luego, el sistema tiene **infinitas soluciones**. Solo si las rectas que representan un sistema son **secantes** (ver gráfico 1), es decir, se intersectan en un solo punto, el sistema tiene **solución única**.

Por lo tanto, la representación gráfica de un sistema de ecuaciones en el plano cartesiano ayuda a analizar el problema de la **existencia** y **unicidad** de las soluciones de un sistema.

EN TU CUADERNO

1. Decide, en cada caso, si el sistema de ecuaciones tiene solución y si son infinitas soluciones. En el caso de que la solución sea única, encuentra la solución aplicando el método gráfico.

a.
$$\begin{cases} 2y - x = 13 \\ y + x = -1 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 3y + 3x = -9 \\ y = -x - 3 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 5 \\ y - 2x = -6 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2y + 2x = -2 \\ y + x = 3 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 2y - 3x + 10 = 0 \\ 4y + 20 = 6x \end{cases}$$

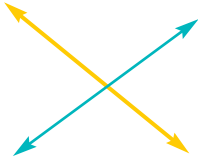

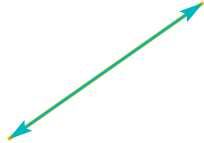
f.
$$\begin{cases} \frac{5}{3}y - 5x = -\frac{5}{3} \\ -y + 3x = -13 \end{cases}$$

2. Si un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas se representa en el plano cartesiano mediante tres rectas no paralelas, ¿cuántos sistemas distintos se podrían formar utilizando dos de sus ecuaciones, de modo que cada sistema tenga solución única?
3. Comenta con tus compañeros y compañeras sobre cómo creen que se puede representar gráficamente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.



EN RESUMEN

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas gráficamente es encontrar el punto (x, y) de intersección entre dichas rectas. Por esta razón, un sistema puede tener:
 - una **única solución**, si y solo si su representación en el plano cartesiano es a través de dos rectas secantes. En este caso, se dice que el sistema es **compatible**.
 - infinitas soluciones**, si y solo si se representa en el plano como una única recta. En este caso, se dice que el sistema es **compatible indeterminado**.
 - ninguna solución**, si y solo si en el plano se representa como dos rectas paralelas. En este caso, se dice que el sistema es **incompatible**.
- Al graficar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden observar tres situaciones, dependiendo de la posición relativa entre las rectas en el plano cartesiano:

Rectas secantes	Rectas paralelas	Rectas coincidentes
		
Hay una solución: sistema compatible.	No hay solución: sistema incompatible.	Hay infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado.

MI PROGRESO

1. Determina cuál es la gráfica de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. Determina la solución en cada caso y comprueba tus soluciones reemplazando los valores obtenidos.

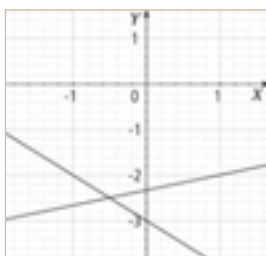


Gráfico 1

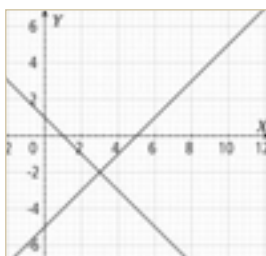


Gráfico 2

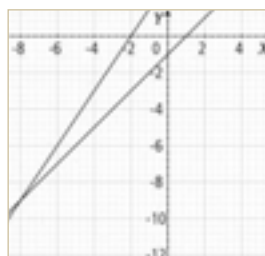


Gráfico 3

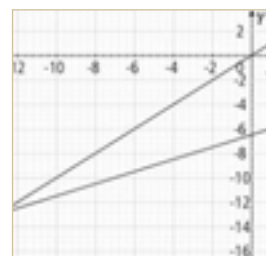


Gráfico 4

- a.
$$\begin{cases} -\frac{3x}{2} + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
- b.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$
- c.
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = \frac{13}{2} \\ x - y = 0 \end{cases}$$
- d.
$$\begin{cases} -x + 3y = -7 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta en cada caso.

- a. Sistemas de ecuaciones con solución única y común se representan mediante las mismas rectas.
- b. Sistemas de ecuaciones con soluciones distintas están representados mediante rectas distintas.
- c. Si un sistema de ecuaciones no tiene solución, está representado en el plano cartesiano por dos rectas paralelas.
- d. Dos rectas perpendiculares forman un sistema con solución única.

3. Decide en cada caso si el sistema tiene solución. No resuelvas ningún sistema.

- a.
$$\begin{cases} \frac{4x}{3} + \frac{y}{6} = 2 \\ 4x + \frac{y}{2} = 6 \end{cases}$$
- b.
$$\begin{cases} 6x + 6y = 20 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$
- c.
$$\begin{cases} 200x + 101y = 20 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$$

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Resolver sistemas de ecuaciones gráficamente.	1	___ / 4
Relacionar las soluciones de un sistema de ecuaciones con su representación gráfica.	2	___ / 4
Determinar existencia y unicidad de soluciones.	3	___ / 3

Sebastián lee el siguiente acertijo:

"Un zoológico tiene varias avestruces y jirafas. Si entre todas se cuentan 15 cabezas y 44 patas, ¿cuántas avestruces y cuántas jirafas hay?"

Y lo intenta resolver mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x + 4y = 44 \end{cases}$$

ANALICEMOS...

- ¿El sistema de ecuaciones representa correctamente el problema?, ¿a qué corresponde x ?, ¿a qué corresponde y ?
- Escribe el sistema de modo que cada ecuación x esté escrita en términos de y . Para resolverlo, ¿se puede resolver cada ecuación por separado?, ¿por qué?
- Si dos expresiones son iguales a x , en este caso, ¿son también iguales entre sí? Justifica.
- ¿Al igualar las expresiones, se puede resolver esta ecuación?, ¿y el sistema?, ¿por qué?



Sebastián asignó x a la cantidad de avestruces e y a la cantidad de jirafas. Luego, escribió el sistema como:

$$\begin{cases} x = 15 - y \\ x = 22 - 2y \end{cases}$$

Como ambas expresiones son iguales a x , por transitividad, deben ser iguales entre sí: $15 - y = 22 - 2y$. Esta es una ecuación de primer grado con una incógnita. Su solución es: $y = 7$.

Luego, se reemplaza y en cualquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo, en la primera ecuación, se obtiene: $x + 7 = 15$, luego, $x = 8$.

Entonces, $x = 8$, e $y = 7$ es solución del sistema, ya que satisface **ambas** ecuaciones. Y la respuesta al acertijo es: hay 8 avestruces y 7 jirafas.

Esta forma de resolver un sistema de ecuaciones se llama **método de igualación**.

Ejemplo

Considera ahora el sistema
$$\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible según lo discutido en la sección anterior, es decir, el sistema no tiene solución.

GLOSARIO

Una relación satisface la **transitividad** cuando se cumple: siempre que un elemento se relaciona con otro y este último con un tercero, entonces el primero se relaciona con el tercero. Por ejemplo, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Si se intenta resolver el sistema con este método, se obtiene:

$$x = -5 - 2y$$

$$x = 7 - 2y$$

Al igualar las ecuaciones: $-5 - 2y = 7 - 2y$

De lo que se obtiene que $-5 = 7$, lo que no es cierto.

Por lo tanto, no existe solución para este sistema de ecuaciones.

EN TU CUADERNO

1. Resuelve los siguientes sistemas usando el método de igualación:

a.
$$\begin{cases} x + 4y = 5 \\ x - 7y = -17 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -5x + y = 1 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} -2x - 9y = 25,1 \\ 8x - 5y = 2,1 \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} 0,1x + 0,5y = 2,3 \\ -0,2x + y = 1,2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 5x + 6y = 1 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} \frac{x}{5} + y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{4y}{3} = -1 \\ \frac{2x}{3} + \frac{3y}{2} = 1 \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + 3y = 6 \\ 5x - \frac{1}{2}y = -3 \end{cases}$$

- ¿Cuál o cuáles de los sistemas de ecuaciones anteriores al representarlos gráficamente resultan dos rectas secantes?, ¿cuál o cuáles corresponden a dos rectas paralelas?, ¿por qué?
- Comenta con tu compañero o compañera cuáles son las características de los sistemas de ecuaciones que conviene resolver por este método. Justifiquen su decisión con un ejemplo.

2. Si al denominador y el numerador de una fracción se suma 2, el resultado es $\frac{4}{5}$. En cambio, si se les resta 4 el resultado es 2. Determina la fracción.

3. Considera dos ángulos suplementarios. Si un tercio de la medida del ángulo mayor excede al menor en 20° , ¿cuáles son los ángulos?

EN RESUMEN

El método de igualación conviene usarlo cuando las incógnitas no tienen coeficientes iguales a 1 y consiste en:

- despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar estas expresiones.
- Resolver la ecuación y remplazar la solución obtenida en cualquiera de las ecuaciones del sistema para determinar el valor de la incógnita restante;
- el par (x, y) obtenido es una **solución** del sistema.

Cuando el sistema no tiene solución, el método lleva a una conclusión absurda.

Cuando el sistema tiene infinitas soluciones, con este método se obtiene una igualdad siempre verdadera.

Dos estantes contienen en total 400 libros. Al traspasar 50 libros de un estante a otro, resulta que uno queda con el triple del otro.

ANALICEMOS...

- ¿Cuántos libros había originalmente en cada estante?
- Paula representó estas condiciones mediante el siguiente sistema:
 $x + y = 400$
 $x - 50 = 3 \cdot (y + 50)$
¿El sistema de ecuaciones representa correctamente el problema?, ¿a qué corresponde x ?, ¿a qué corresponde y ?
- Paula escribió x en términos de y , y luego lo reemplazó en la segunda ecuación. ¿Qué ecuación obtuvo Paula de esta forma?, ¿le sirve para resolver el sistema?, ¿por qué?



Observa que la primera ecuación se puede escribir como $x = 400 - y$.

Al reemplazar $x = 400 - y$ en la segunda ecuación, se obtiene una ecuación con una incógnita:

$400 - y - 50 = 3 \cdot (y + 50)$, luego, $350 - y = 3y + 150$, y la solución es $y = 50$.

Tal como en el método de igualación, una vez obtenido el valor de y , se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales. Así, $x + 50 = 400$, luego, $x = 350$.

Esta forma de resolver un sistema de ecuaciones se llama **método de sustitución**.

Ejemplo

Si Pedro tiene 3 veces la edad de Josefina y en 5 años más Pedro duplicará la edad de Josefina, ¿cuál es la edad de cada uno?

Las incógnitas corresponden a la edad de Pedro, representada por x , y la edad de Josefina representada por y . Entonces, la frase "Pedro tiene tres veces la edad de Josefina" se traduce en una ecuación como:

$$x = 3y$$

Y la frase "en 5 años más Pedro duplicará la edad de Josefina":

$$x + 5 = 2(y + 5)$$

Al reemplazar la primera ecuación en la segunda, se obtiene:

$$3y + 5 = 2(y + 5)$$

De donde $y = 5$, y luego, $x = 15$.

Es decir, Pedro tiene 15 años y Josefina tiene 5 años, lo que, claramente, cumple con el enunciado del problema.

EN TU CUADERNO

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de sustitución:

a.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 4x + 10y = -20 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = -2 \\ \frac{9x}{5} - 6y = 0 \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x + \sqrt{8}y = 1 \\ -3\sqrt{8}x - 2\sqrt{2}y = 1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ -6x + 12y = 1 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} -\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{11y}{2} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} \sqrt{27}x + 2\sqrt{9}y = \frac{\sqrt{3}}{9} \\ -4\sqrt{9}x - 9\sqrt{3}y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- ¿Cuál o cuáles de los sistemas de ecuaciones anteriores al representarlos gráficamente resultan dos rectas secantes?, ¿cuál o cuáles corresponden a dos rectas paralelas?, ¿por qué?
- Comenta con tu compañero o compañera cuáles son las características de los sistemas de ecuaciones que conviene resolver por este método. Justifiquen su decisión con un ejemplo.

- Un rectángulo tiene un perímetro de 100 m. Si la razón entre sus lados es 2 : 5, determina las dimensiones del rectángulo.
- Antonia tiene la mitad de la edad de Emilia. En 20 años, Emilia será 10 años mayor que Antonia. ¿Cuál es la edad de cada una?
- En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?
- En una librería, han vendido 20 libros a dos precios distintos: unos a \$ 8 000 y otros a \$ 12 000, con los que han obtenido \$ 192 000. ¿Cuántos libros han vendido de cada precio?

EN RESUMEN

- El **método de sustitución** conviene usarlo cuando alguna de las incógnitas tiene coeficiente 1 y consiste en:
 - despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema;
 - luego, reemplazar esta expresión en la ecuación restante, reduciendo el problema a una ecuación con una incógnita;
 - una vez resuelta esta ecuación, se reemplaza su solución en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema original y se resuelve la ecuación obtenida para la incógnita restante.

Juan pagó \$ 4 830 por 3 cajas de clavos y 5 cajas de tornillos. Pedro compró 5 cajas de clavos y 7 de tornillos y tuvo que pagar \$ 7 210.

ANALICEMOS...

- ¿Cuál es el precio de cada caja de clavos y de cada caja de tornillos?

- Ximena representó esta situación con el sistema:
$$\begin{array}{r} 3x + 5y = 4\,830 \\ 5x + 7y = 7\,210 \end{array}$$

¿El sistema de ecuaciones representa correctamente el problema?, ¿a qué corresponde x ?, ¿a qué corresponde y ?

- Multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por -3 y luego suma las dos ecuaciones. ¿Qué obtienes? Ahora, ¿puedes resolver el sistema?
- ¿Esta solución es también solución del sistema original?, ¿por qué?



Al multiplicar la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por -3 , se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{array}{r} 15x + 25y = 24\,150 \\ -15x - 21y = -21\,630 \end{array}$$

Si ahora se suman ambas ecuaciones, respetando lo que está a cada lado de la igualdad, se obtiene:

$$\begin{array}{r} 15x + 25y = 24\,150 \\ (+) -15x - 21y = -21\,630 \\ \hline 4y = 2\,520 \end{array}$$

Observa que se obtuvo una ecuación que no tiene la incógnita x . Ahora se puede obtener fácilmente el valor de y . Esta es la esencia del **método de reducción**: obtener sistemas equivalentes de modo que al sumar las ecuaciones se **elimina una de las incógnitas**.

Luego, se obtiene el valor de la incógnita, $y = 630$ en este caso, y se reemplaza en alguna de las ecuaciones originales para calcular el valor de la incógnita restante. En este caso, $x = 560$.

Entonces, el precio es: \$ 560 cada caja de clavos y \$ 630 cada caja de tornillos.

Ejemplo

Resuelve el sistema

$$\begin{array}{r} 2x - y = 5 \\ 3x - 2y = 3 \end{array}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por -1 , al sumar las ecuaciones se obtiene una ecuación donde **no aparece y** .

GLOSARIO

Sistemas equivalentes: son sistemas de ecuaciones contruidos por manipulación de las ecuaciones del sistema original, de modo que poseen la misma solución.

$$\begin{array}{r} 4x - 2y = 10 \\ (+) \quad -3x + 2y = 3 \\ \hline x = 7 \end{array}$$

Evidentemente, $x = 7$ si se reemplaza en $2x - y = 5$, se obtiene $14 - y = 5$. Luego, $y = 9$.

EN RESUMEN

- El método de reducción consiste en:
 - **multiplicar cada ecuación** por números, de modo que para una de las incógnitas se obtengan coeficientes que sean inversos aditivos;
 - **sumar** ambas ecuaciones, para obtener una ecuación en una sola incógnita.
 - Una vez resuelta esta ecuación, se **reemplaza** su solución en una de las ecuaciones del sistema original y se resuelve la ecuación para la incógnita restante.
- Una ventaja de este método es que puede usarse para resolver un sistema mayor, por ejemplo, con tres ecuaciones y tres incógnitas.

EN TU CUADERNO

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de reducción.

a.
$$\begin{array}{r} 18x + y = 150 \\ 35x + y = 303 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} -5x - 21y = 4 \\ -10x + 42y = 1 \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{r} 2x - 4y = 0 \\ 11x + 2y = 1 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 2x - y = \frac{43}{12} \\ 2x + 2y = \frac{16}{3} \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{r} -\frac{3x}{5} + \frac{y}{5} = \frac{11}{12} \\ x + \frac{y}{3} = \frac{1}{36} \end{array}$$

f.
$$\begin{array}{r} \frac{3x}{5} + \frac{3y}{2} = -\frac{1}{7} \\ \frac{2x}{5} + \frac{7y}{2} = \frac{1}{3} \end{array}$$

- ¿Cuál o cuáles de los sistemas de ecuaciones anteriores al representarlos gráficamente resultan dos rectas secantes?, ¿cuál o cuáles corresponden a dos rectas paralelas?, ¿por qué?
- Comenta con tu compañero o compañera cuáles son las características de los sistemas de ecuaciones que conviene resolver por este método. Justifica con un ejemplo.

2. Si un sistema no tiene solución, aplicar el método de reducción nos lleva a expresiones sin sentido. Comprueba esto para los siguientes sistemas:

a.
$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 9 \\ 15x + 9y = 14 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 21x + 6y = 15 \\ 35x + 10y = 33 \end{array}$$



Lucas y Emilia necesitan resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 10y = 15 \\ x + 3y = -11 \end{cases}$$

Lucas dividió la primera ecuación por 5 y conservó la segunda:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = -11 \end{cases}$$

Emilia primero sumó las ecuaciones de Lucas y luego restó las originales:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -8 \\ 4x + 7y = 26 \end{cases}$$



ANALICEMOS...

- ¿El sistema original tiene solución?, ¿y el de Lucas?, ¿y el de Emilia? Explica.
- Resuelve los tres sistemas de ecuaciones. ¿Cuál fue más fácil de resolver?, ¿por qué?
- ¿Qué tienen en común los tres sistemas?
- Escribe otro sistema de ecuaciones que tenga la misma solución. Justifica.

Lo que hicieron Lucas y Emilia fue determinar sistemas equivalentes al original, que les permitieran determinar más fácilmente su solución. Recuerda que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si poseen idénticas soluciones. Observa que, además de sustituir una de las ecuaciones por otra que sea equivalente, también se puede operar con ambas simultáneamente, como lo hizo Emilia.

Las siguientes son algunas de las operaciones que permiten obtener sistemas de ecuaciones equivalentes al original:

- Multiplicar o dividir una de las ecuaciones por un número (distinto de 0) y conservar la otra.
- Sumar o restar las dos ecuaciones para obtener una nueva ecuación y conservar una de las originales.

Ejemplo 1

Considera el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 6 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2 y se conserva la segunda, se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Observa que las dos ecuaciones del sistema son la misma ecuación. De modo que la solución del sistema es la solución de la ecuación $x + 2y = 12$. Pero esta ecuación tiene infinitas soluciones; luego, el sistema original tiene infinitas soluciones.

En general, si una de las ecuaciones es múltiplo de la otra, el sistema tiene infinitas ecuaciones.

Ejemplo 2

Considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

¿Es posible que dos números sumados den 12 y también 10? Como esto es imposible, el sistema no tiene solución alguna. Como ya se sabe, este es un sistema **incompatible**.

EN TU CUADERNO

1. Decide si los siguientes sistemas son equivalentes en cada caso. Justifica.

a.
$$\begin{cases} 12x - 7y = 9 \\ -x + 8y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x - 14y = 9 \\ -2x + 16y = 22 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x + 6y = 1 \\ x - 4y = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 16 \\ x - 4y = 23 \end{cases}$$

2. Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen solución. Justifica.

a.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x + 13y = 1 \\ 10x + 65y = 6 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x - 4y = 10 \\ 4x + 16y = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + y = 1 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 7x + 3y = 0 \\ 21x + 12y = 0 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} 5x - y = 1 \\ \frac{10}{3}x - \frac{2}{3}y = \frac{4}{6} \end{cases}$$

- ¿Cuál o cuáles de los sistemas de ecuaciones anteriores al representarlos gráficamente resultan dos rectas secantes?, ¿cuál o cuáles corresponden a dos rectas paralelas?, ¿por qué?

EN RESUMEN

- Un sistema de ecuaciones puede tener una **única solución**, **infinitas soluciones** (si una de las ecuaciones es múltiplo de la otra) o **no tener solución alguna** (cuando el sistema es incompatible).
- Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**.

Un atleta se entrena nadando en un río. Primero nada contra la corriente y demora 30 minutos en recorrer 2000 metros. Luego, nada a favor de la corriente y demora 15 minutos en recorrer la misma distancia.

ANALICEMOS...

- ¿Cuál es la velocidad del nadador respecto del río?, ¿y la velocidad del río respecto a la orilla?
- ¿Cuántas cantidades desconocidas involucra el problema?, ¿cuáles son?
- ¿Cuáles son los datos conocidos del problema?
- ¿Qué condiciones impone el problema sobre estas cantidades?, ¿cómo se expresan matemáticamente estas condiciones?

En este problema, se conoce la distancia recorrida y el tiempo que demora el atleta en recorrerla en cada caso, y lo que se busca resolver es la velocidad de la corriente del río y la del atleta respecto del río, suponiendo que mantiene su esfuerzo en ambos casos.

Entonces, se asigna a para la velocidad del atleta respecto del río y c para la velocidad de la corriente del río. Observa que estas velocidades se suman cuando el atleta nada a favor de la corriente, y se restan si nada contra la corriente.

En el primer tramo, el atleta nada contra la corriente y demora 30 minutos. Luego, se tiene que $30(a - c) = 2000$.

En el segundo tramo, nada a favor de la corriente y demora 15 minutos. Luego, se tiene $15(a + c) = 2000$.

El sistema correspondiente es:

$$\begin{cases} 30a - 30c = 2000 \\ 15a + 15c = 2000 \end{cases}$$

Luego, $60a = 6000$, $a = 100$, y $c = \frac{100}{3}$

¿Qué significan estos valores en el contexto del problema? Observa que la unidad de distancia utilizada es el metro, y la unidad de tiempo utilizada es el minuto; luego, a , la velocidad del atleta respecto del río, corresponde a 100 m/min, que equivalen a 6000 m/h, que a su vez equivalen a 6 km/h. De la misma manera, c , la velocidad de la corriente del río, corresponde a $\frac{100}{3}$ m/min, equivalentes a 2 km/h.

RECUERDA QUE...

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

Luego, también se puede expresar:

$$\text{tiempo} \cdot \text{velocidad} = \text{distancia}$$

NO OLVIDES QUE...

Densidad · volumen = masa.

Ejemplo

Un vaso de vidrio contiene agua y aceite. Como no se mezclan, se puede observar que $\frac{2}{3}$ del volumen del vaso está ocupado por aceite y $\frac{1}{3}$ por agua. Si la densidad del agua es 1 g/cm^3 , la del aceite es 3 g/cm^3 y la masa total de líquido dentro del vaso es 1000 g , determina el volumen ocupado por el agua y el aceite.

Se asigna x e y al volumen de agua y de aceite que hay en el vaso, respectivamente. La primera ecuación corresponde al volumen de cada líquido. Como, en este caso, el volumen de aceite es el doble del volumen de agua, se tiene que $y = 2x$.

La segunda ecuación corresponde a la masa (en gramos), que se calcula usando los datos de la densidad del agua y del aceite. Como la masa total es $1\,000 \text{ g}$, se tiene que $x + 3y = 1000$.

La solución del sistema es $x = \frac{1000}{7}$ e $y = \frac{2000}{7}$. Es decir, en el vaso hay $\frac{1000}{7} \text{ cm}^3$ de agua y $\frac{2000}{7} \text{ cm}^3$ de aceite.

EN RESUMEN

Resolver un problema involucra los siguientes pasos:

- Reconocer las **incógnitas** del problema y nombrarlas (x , y , z , etc.).
- Reconocer las **relaciones** entre incógnitas y escribirlas como ecuaciones.
- Resolver las ecuaciones para las incógnitas requeridas.
- **Comprobar** las soluciones para asegurarse de que los valores calculados son **pertinentes** en el contexto del problema planteado.

EN TU CUADERNO

1. En un estacionamiento, hay 45 vehículos entre automóviles y motos. Si el total de ruedas es 125, ¿cuántos automóviles y cuántas motos hay? ¿Qué ocurre con el resultado? Explica.

Otros sistemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales

Observa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 10 \end{cases}$$

ANALICEMOS...

- ¿Las ecuaciones de este sistema son lineales?, ¿por qué?
- ¿Se podrían aplicar los métodos aprendidos en este caso? Explica.
- ¿Se puede escribir un sistema de ecuaciones lineales que permita resolver el sistema dado manipulando adecuadamente las ecuaciones?
- ¿Cuál es la solución del sistema?

Observa que las expresiones $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$ están en ambas ecuaciones, esto sugiere que, considerando estas expresiones como incógnitas, se pueden reemplazar por las **incógnitas auxiliares** $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$. Si se reemplaza en el sistema, se obtiene:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u - v = 10 \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales con las incógnitas u y v , y se puede resolver con cualquiera de los métodos ya aprendidos. Su solución es $u = 7$, $v = -3$.

Pero las incógnitas del sistema pedido son x e y , luego, la solución se debe calcular para x e y . Esto es, reemplazar en las expresiones correspondientes a las incógnitas auxiliares el valor calculado para u y v , y resolver las ecuaciones.

En este caso, $7 = \frac{1}{x}$, $-3 = \frac{1}{y}$, de donde se obtiene que: $x = \frac{1}{7}$, $y = -\frac{1}{3}$.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{5}{x-8} - \frac{7}{y+2} = -\frac{11}{6} \\ \frac{9}{x-8} - \frac{20}{y+2} = -7 \end{cases}$$

Utilizando las incógnitas auxiliares $u = \frac{1}{x-8}$, $v = \frac{1}{y+2}$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 5u - 7v = -\frac{11}{6} \\ 9u - 20v = -7 \end{cases}$$

No OLVIDES QUE...

Siempre se debe verificar que los valores obtenidos mediante el uso de incógnitas auxiliares sí resuelven el sistema original. En algunos casos, esto no ocurre.

Al resolver este sistema, se obtiene $u = \frac{1}{3}$, $v = \frac{1}{2}$.

Remplazando en las expresiones para u y v , se tiene:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x-8} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} \end{array} \right|$$

Al resolver cada ecuación, se obtiene que la solución del sistema es $x = 11$, $y = 0$.

EN RESUMEN

- Es posible resolver algunos sistemas de ecuaciones no lineales mediante el uso de **incógnitas auxiliares**, las cuales se eligen de modo que el nuevo sistema sea **lineal** para las nuevas incógnitas.
- Los valores obtenidos como solución del sistema lineal se usan luego para obtener los valores de las incógnitas originales x e y .
- Siempre se deben verificar las soluciones obtenidas en el sistema original.

EN TU CUADERNO

1. Resuelve los siguientes sistemas usando incógnitas auxiliares adecuadas en cada caso.

a.
$$\left| \begin{array}{l} \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = 5 \\ -\frac{8}{x} + \frac{6}{y} = -1 \end{array} \right|$$

c.
$$\left| \begin{array}{l} \frac{3x}{y} - 6y = 0 \\ \frac{4x}{y} + 2y = 1 \end{array} \right|$$

e.
$$\left| \begin{array}{l} \frac{13}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{y-6}} = \frac{50}{49} \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{49}{\sqrt{y-6}} = \frac{14}{13} \end{array} \right|$$

b.
$$\left| \begin{array}{l} 5x + \frac{1}{y} = 21 \\ 51x - \frac{8}{y} = 1 \end{array} \right|$$

d.
$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2 \cdot (3x+1)} + \frac{2}{2y-3} = 1 \\ \frac{-3}{2 \cdot (3x+1)} + \frac{1}{2y-3} = 18 \end{array} \right|$$

f.
$$\left| \begin{array}{l} \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt{y}} = 4 \\ -\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{10}{\sqrt{y}} = -4 \end{array} \right|$$

2. Tres veces el inverso multiplicativo de un número más dos veces el inverso multiplicativo de otro dan $\frac{19}{15}$. La resta de sus inversos multiplicativos me da $-\frac{1}{15}$. Determina los números.



MI PROGRESO

1. Determina si los siguientes sistemas son equivalentes.

a.
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 4x + 7y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 11y = 23 \\ 8x + 14y = 22 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 8x + 3y = 10 \\ 4x + y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 3y = 39 \\ 20x + 9y = 1 \end{cases}$$

2. Utilizando el método de igualación, resuelve.

a.
$$\begin{cases} 6x + y = 16 \\ 5x - y = 21 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ 7x - 2y = 9 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

3. Utilizando el método de sustitución, resuelve:

a.
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ -5x + 3y = 12 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 13x - y = 78 \\ -9x - y = 12 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 20x + 40y = 340 \\ -7x - 20y = -119 \end{cases}$$

4. Utilizando el método de reducción, resuelve:

a.
$$\begin{cases} \frac{3x}{7} - 5y = 4 \\ 3x + 14y = -14 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 60x + 51y = -12 \\ 15x + 12y = 36 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} -\frac{x}{9} - \frac{2y}{7} = 2 \\ 7x + 2y = -2 \end{cases}$$

5. Un estudiante rindió un examen consistente en 100 preguntas con alternativas. El profesor asigna 5 puntos por cada respuesta correcta y descuenta 1 punto por cada 4 respuestas incorrectas.

- a. Si el estudiante contestó 59 preguntas y obtuvo 169 puntos, ¿cuántas preguntas correctas tuvo?
- b. Con estas condiciones, ¿puede ser 56,5 y 43,5, respectivamente, una solución al problema?, ¿por qué?

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe tu puntaje en el cuadro.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Determinar si dos sistemas son equivalentes.	1	___ / 2
Resolver sistemas de ecuaciones utilizando métodos algebraicos.	2, 3 y 4	___ / 9
Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones.	5	___ / 2

Cómo resolverlo



GLOSARIO

Que una solución esté al 25% significa que en un litro de solución el 25% corresponde al soluto (ácido) y el otro 75%, al solvente (agua).

RECUERDA QUE...

El $a\%$ de una cantidad dada b es

$$a \cdot \frac{b}{100}$$

Resolviendo por reducción,
al multiplicar la primera
ecuación por -5 , se obtiene:

Sumando la primera ecuación
y la segunda se obtiene:

Problema resuelto 1

Si se tienen dos soluciones de ácido nítrico, una al 25% y la otra al 65%, ¿cuántos litros de cada solución se deben mezclar para obtener 5 litros de solución de ácido nítrico al 50%?

Solución:

Sea x los litros de solución al 25% que se utilizarán e y los litros de solución al 65%. Como se desea preparar 5 litros, la ecuación es: $x + y = 5$.

La cantidad de ácido de la primera solución es igual al 25% de x , o sea $25 \cdot \frac{x}{100}$. Asimismo, la segunda solución es el 65% de y , es decir, $65 \cdot \frac{y}{100}$. La suma de ambas cantidades representa la cantidad total de ácido en la mezcla, que debe ser igual al 50% del total. Esto es:

$$25 \cdot \frac{x}{100} + 65 \cdot \frac{y}{100} = 50 \cdot \frac{5}{100}$$

Al multiplicar por 20, se obtiene la ecuación equivalente $5x + 13y = 50$, que junto a la primera ecuación planteada forman el sistema:

$$\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 5x + 13y = 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -5x - 5y = -25 \\ 5x + 13y = 50 \end{array}$$

$$8y = 25$$

De donde $y = \frac{25}{8}$. Remplazando en la primera ecuación, se obtiene $x = \frac{15}{8}$.

Comprobación:

$$\text{Se tiene que } x + y = \frac{25}{8} + \frac{15}{8} = \frac{40}{8} = 5.$$

$$\text{Por otro lado, } 5x + 13y = 5 \cdot \frac{15}{8} + 13 \cdot \frac{25}{8} = \frac{75}{8} + \frac{325}{8} = \frac{400}{8} = 50.$$

Es decir, las soluciones satisfacen también la segunda ecuación del sistema.

Por lo tanto, $x = \frac{15}{8}$ litros e $y = \frac{25}{8}$ litros es la solución del problema.

EN TU CUADERNO

1. Si ahora se tienen soluciones de ácido nítrico al 45% y al 70%, ¿cuántos litros de cada solución se deben mezclar para obtener 10 litros de solución al 60%?
2. Si la gasolina y el etanol cuestan \$ 700 y \$ 400 el litro, respectivamente, ¿cuántos litros de etanol y gasolina se deben usar para obtener 100 litros de una mezcla que cueste \$ 600 el litro?

Problema resuelto 2

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 11 \\ 2x - y + z = -3 \\ -x + 2y - z = 7 \end{cases}$$

Solución:

El sistema puede resolverse usando el método de reducción. Para esto, se debe comenzar por eliminar una de las incógnitas y reducir este sistema a uno de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$3x - z = 8$$

$$3x + z = 1$$

Se suman las primeras dos ecuaciones para eliminar la incógnita y .

Entonces, se ha reducido el sistema original al sistema:

$$\begin{cases} 3x - z = 8 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

Para obtener una segunda ecuación sin la incógnita y , se multiplica la segunda ecuación por 2, y se suma a la tercera ecuación.

el cual es sencillo de resolver.

Ya que los coeficientes de z son 1 y -1 en ambas ecuaciones, basta con sumarmas para eliminar z y obtener $6x = 9$, luego $x = \frac{3}{2}$.

Remplazando este valor, por ejemplo, en la primera ecuación del último sistema de ecuaciones se obtiene $3 \cdot \frac{3}{2} - z = 8$, y por tanto $z = -\frac{7}{2}$.

$$2 \cdot \frac{3}{2} - y - \frac{7}{2} = -3 \text{ de donde } y = \frac{5}{2}$$

Se remplazan los valores de x y de z en cualquiera de las ecuaciones del sistema original, por ejemplo en la segunda.

De modo que la solución del sistema es $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{7}{2}$.

EN TU CUADERNO

1. Usando la idea presentada, resuelve el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ -2x - y - z = 5 \end{cases}$$

2. El siguiente sistema no tiene solución. Intenta justificar esto sin resolverlo:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 4z = 1 \\ -4x - 3y + z = -4 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$



Oferta y demanda

Los bienes necesarios para la subsistencia cambian de precio constantemente. Con frecuencia se oye hablar de cambios en el precio del pan, de la gasolina, de alimentos, del vestuario, entre otros bienes, ya que en general estos precios son inestables en el tiempo. Para poder predecir el comportamiento en el tiempo de los precios y disponibilidad de determinados bienes, se establecieron las leyes económicas conocidas como ley de la demanda y ley de la oferta, según las cuales el precio se establece en función de la solicitud de los consumidores y la cantidad provista por los productores, generando un punto de equilibrio. Estas leyes afirman:

Ley de la demanda: el incremento en el precio causa una disminución en la cantidad demandada, y la disminución del precio eleva la cantidad demandada.

Ley de la oferta: el incremento en el precio causa un incremento en la cantidad ofrecida y una disminución en el precio reduce la cantidad ofrecida.

Con estas leyes se modelan situaciones elementales en economía, como la siguiente:

Debido a incendios forestales, hubo un año en que bajó la producción de madera, y por tanto, los productores que disponían de suficiente stock pudieron vender y a altos precios, ya que los clientes no tenían muchas opciones donde comprar. Al año siguiente, la cantidad de incendios disminuyó y hubo una mayor producción de madera, por lo tanto, los precios bajaron de manera importante respecto de la temporada pasada. El modelo de oferta está dado por la función $p(q) = 130\,000q$, donde q es la cantidad de toneladas de madera, y p es el precio total por venta, con p y q positivos.

Es muy importante que evitemos la propagación de los incendios forestales pues estos dañan irreversiblemente los bosques y la vida silvestre de nuestro país.
En el siguiente link: <http://www.educacionmedia.cl/links/10M2136.html> hallarás algunas recomendaciones que te permitirán prevenir la formación de estos incendios.

EN TU CUADERNO

1. Usando Graphmatica, grafica la función dada. Si es necesario, cambia la escala de los parámetros.
2. Según la gráfica, ¿qué sucede con la cantidad demandada si aumenta el precio?, ¿qué sucede con el precio si la cantidad demandada aumenta?
3. Según el modelo, ¿cuántas toneladas de madera está dispuesto a comprar alguien si se dispone de \$ 1 500 000, \$ 2 000 000 ó \$ 3 000 000?
4. ¿Es posible determinar una cantidad máxima de madera a ser ofrecida, según el modelo?
5. El tipo de modelo presentado ¿sirve para todos los casos?

INVESTIGUEMOS...

Ahora trabajen en grupos de cuatro personas:

1. Comparen las soluciones obtenidas por cada integrante y discutan sobre cuál debería ser la solución correcta en caso de que existan diferencias entre los resultados obtenidos.
2. Discutan si existe una manera de corregir el modelo, de manera que ahora:
 - la cantidad requerida posible sea mayor que la que permite el modelo;
 - la cantidad requerida sea la mitad de la cantidad permitida por el modelo.
3. Resuelvan el siguiente problema:

Para ese año, algunos compradores de madera estaban dispuestos a negociar la cantidad a pagar por tonelada, y acordaron entre ellos la posibilidad de comprar aproximadamente a precios similares a fin de no verse demasiado perjudicados con los precios de mercado. Decidieron comprar cada tonelada a \$ 125 000, lo cual comunicaron a los vendedores. Este modelo de demanda está dado por la función $p(q) = 3\,000\,000 - 125\,000q$.

Al año siguiente, los vendedores decidieron invertir en mejoras en el proceso de producción, lo cual ocasionó un aumento de la producción en el mercado, y por tanto, una corrección del modelo de oferta, el cual es ahora $p(q) = 130\,000q - 390\,000$. A su vez, los compradores mayoritarios, que al principio no se interesaban en pagar un precio adicional, al ver que la calidad había mejorado, decidieron pagar un poco más, con lo cual la función de demanda es ahora $p(q) = 3\,375\,000 - 135\,000q$.

Para determinar lo que están dispuestos a pagar en cada caso, sigan estos pasos.

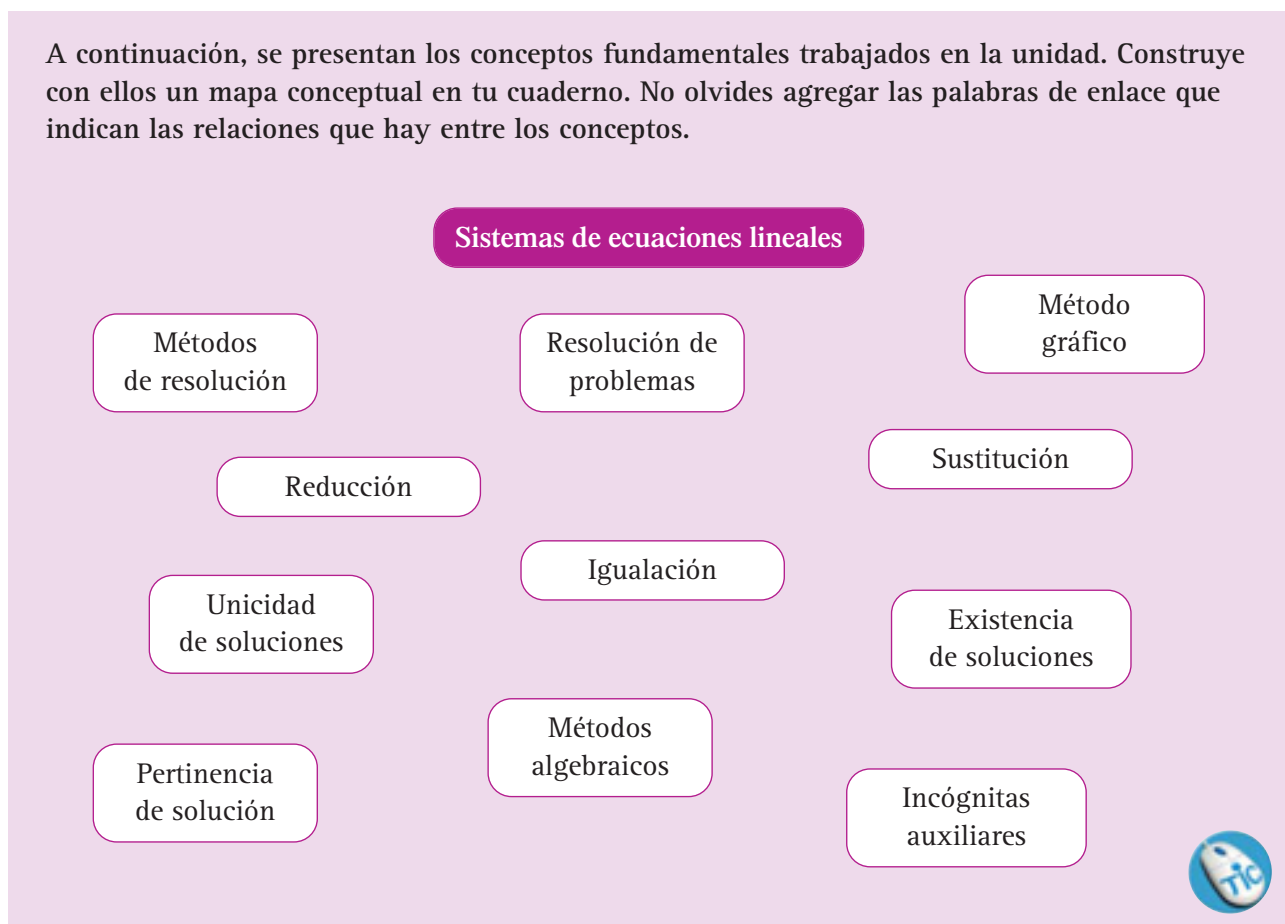
- Construyan, en un programa como Graphmatica, la gráfica de la función de demanda dada en el primer párrafo, junto con la de oferta ya construida antes.
- Dado que ahora tienen representado un sistema de ecuaciones, encuentren su solución, la que corresponde al punto de intersección. El punto de equilibrio indica la cantidad de toneladas que comprará cada uno y el precio por tonelada.
- De la misma forma, construyan gráficas para cada una de las funciones dadas en el segundo párrafo. Encuentren el punto de intersección de ambas y, a partir de esto, determinen la cantidad de toneladas que cada comprador llevará y cuál es el precio por cada una.
- Comparen los gráficos contruidos para cada una de las siguientes situaciones y determinen qué factor o factores hicieron cambiar el punto de equilibrio en cada situación.

EVALUEMOS NUESTRO TRABAJO

- Comparen los resultados obtenidos con los de sus compañeros y compañeras. ¿Se obtienen los mismos resultados? De no ser así, ¿cuáles son las diferencias?
- ¿Cómo creen que se reflejan, gráficamente, cambios como la mejora en la producción o pago de impuestos al comprar?
- ¿Creen que pueda crearse un único modelo de oferta y demanda en el cual se integran todos estos cambios según condiciones externas?, ¿por qué?
- ¿A qué creen que se deba que todas las gráficas de oferta se representen mediante rectas paralelas?

Síntesis de la Unidad

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.



1 Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas siempre se representa como dos rectas en el plano.
- En general, una solución a un sistema es un par de números que satisface ambas ecuaciones.
- El sistema formado por $2x + 7y = 9$ y $5x + 2y = 7$ tiene solución única.
- Un sistema de ecuaciones tiene siempre al menos una solución.
- Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- La solución de un sistema de ecuaciones (si existe) se representa mediante una recta en el plano.
- El sistema formado por $\frac{3}{(x+1)} + \frac{7}{(y+2)} = \frac{7}{9}$ y $\frac{4}{(x+1)} + \frac{2}{(y+2)} = \frac{2}{7}$ puede reducirse a un sistema de ecuaciones lineales.

- h. Los métodos de igualación y sustitución conviene usarlos cuando los coeficientes de las incógnitas son 1 y distinto de 1, respectivamente.
- i. Para resolver un sistema de más de dos ecuaciones y con dos incógnitas, el más adecuado sería el método de reducción.
- j. La solución de un sistema de ecuaciones se representa por el punto de intersección de dos rectas en el plano.
- k. Un sistema de ecuaciones se puede resolver o estimar su solución, mediante un dibujo.
- l. La existencia y unicidad de las soluciones de un sistema depende de la posición relativa de sus gráficas en el plano.
- m. Existen sistemas de ecuaciones para los que es recomendable utilizar incógnitas auxiliares.
- n. El sistema formado por $2x + 7y = 9$ y $6x + 21y = 27$ no puede resolverse por reducción, pero sí puede resolverse por igualación.
- ñ. Un sistema de ecuaciones sin solución se representa gráficamente mediante una única recta en el plano.
- o. El sistema formado por $3x + 5y = 1$ y $9x + 15y = 7$ posee una única solución.
- p. Para hacer 6 litros de una solución al 40%, se necesitan 2,4 litros de solución al 70% y 3,6 litros de solución al 20%.
- q. El sistema formado por $\frac{1}{x} + \frac{1}{(x+y)} = \frac{1}{9}$ y $\frac{3}{x} + \frac{2}{(x+y)} = \frac{2}{7}$ no se reduce a un sistema de ecuaciones lineales.

2 Aplica lo que aprendiste en la unidad para resolver los siguientes problemas:



- a. Una prueba consta de 80 preguntas, las cuales dan 4 puntos por respuesta correcta, y se descuenta un punto por cada incorrecta.
 - Si un estudiante dejó 15 preguntas sin contestar y obtuvo 205 puntos, determina cuántas preguntas correctas e incorrectas tuvo en la prueba.
 - Si otro estudiante contestó 68 de las preguntas y obtuvo 187 puntos, determina la diferencia entre la cantidad de preguntas correctas y las preguntas incorrectas.
- b. Carlos tiene 2 cajas con nueces. De la primera caja, que tiene más nueces que la segunda, toma las necesarias para dejar en la segunda el doble de las que había. Luego, toma de la segunda caja las que necesita para dejar en la primera el doble que las que quedaron en el paso anterior. Si al final quedaron 48 nueces en cada caja, ¿cuántas nueces había en cada una originalmente?
- c. Determina tres cantidades tales que, sumadas dos a dos, se obtienen 45, 54 y 63. (Sugerencia: suma las tres ecuaciones resultantes, y luego, a la ecuación hallada, resta una ecuación cualquiera del sistema inicial).



Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

1. La solución del sistema $\begin{cases} \frac{x}{2} - 3y = 0 \\ \frac{x}{4} + 5y = 0 \end{cases}$ es:

- A. $x = 3, y = \frac{1}{2}$
- B. $x = -20, y = 1$
- C. $x = 3, y = 1$
- D. $x = 0, y = 0$
- E. $x = 0, y = -\frac{1}{3}$

2. La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ x - y = 6 \end{cases}$ es:

- A. $x = 5, y = 1$
- B. $x = 5, y = -1$
- C. $x = -5, y = 1$
- D. $x = \frac{1}{5}, y = 1$
- E. No es única.

3. El sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 19 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases}$ tiene solución:

- A. $x = 2$
- B. $y = -3$
- C. $x = 2, y = -3$
- D. $x = -3, y = 2$
- E. No tiene solución.

4. ¿Cuál es el punto de intersección entre las rectas $x + y = 0$ y $x - y = 1$?

- A. No se intersecan.
- B. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- C. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- D. $(1, -1)$
- E. $(-1, 1)$

5. El sistema $\begin{cases} 2x - 6y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

- A. Tiene una única solución.
- B. Posee una solución con $x = y$.
- C. Ambas ecuaciones son equivalentes.
- D. Tanto C como B son ciertas.
- E. Ninguna de las anteriores.

6. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ 6x + 4y = 4 \end{cases}$$

De su representación en el plano cartesiano y solución, se puede decir que:

- A. se representa como dos rectas paralelas y no tiene solución.
- B. se representa como dos rectas perpendiculares y tiene solución.
- C. se representa como una recta y tiene infinitas soluciones.
- D. se representa como dos rectas y tiene una única solución.
- E. Ninguna de las anteriores.

7. Sobre el sistema $\begin{cases} 4x - y = -3 \\ 8x - 2y = -6 \end{cases}$, ¿cuál de las

siguientes alternativas es falsa?

- A. $x = 0, y = 3$ y $x = -1, y = -1$ son soluciones.
- B. $y = 0, x = \frac{3}{4}$ es solución.
- C. La solución anterior corresponde a la intersección de dos rectas distintas.
- D. Una de las ecuaciones corresponde a una recta con pendiente positiva.
- E. El sistema tiene infinitas soluciones.

8. Considera el sistema

$$\begin{cases} \frac{2x}{5} = \frac{3y}{10} - \frac{1}{5} \\ 30x - 4y = 19 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

¿Cuántas soluciones tiene el sistema planteado?

- A. Una.
- B. Infinitas.
- C. Dos.
- D. Tres.
- E. Ninguna de las anteriores.

9. Si $x + y = 15$ ¿Cuánto es xy ?

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

- A. 44
- B. 240
- C. 0
- D. -150
- E. Ninguna de las anteriores.

10. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 5x + y = -1 \end{cases}$$

No produce un sistema equivalente el formado por:

- A. la primera ecuación más la segunda junto a la primera.
- B. la segunda ecuación menos la primera junto a la primera más la segunda.
- C. dos veces la segunda menos la primera junto a la primera menos dos veces la segunda.
- D. la primera dividida por 7 junto a la segunda.
- E. la segunda dividida por 5 junto a la primera más la segunda.

11. Para el sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes aseveraciones es correcta?

- A. Con las incógnitas auxiliares $u = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{1}{y}$ se transforma el sistema en lineal.
- B. Con las incógnitas auxiliares $u = xy$ y $v = x + y$ se transforma el sistema en lineal.
- C. Un poco de operatoria algebraica transforma el sistema en un sistema lineal.
- D. El sistema no es equivalente a uno lineal.
- E. El sistema no tiene solución.

12. De la ecuación $5x + y = 35$, no son solución:

- A. $x = 15, y = -40$
- B. $x = 0, y = 7; x = 1, y = 30; x = 0, y = 30$
- C. Todos los (x, y) tales que $\frac{y}{5} - 7 = -x$
- D. $x = 0, y = 35; x = 7, y = 0$
- E. A y D

13. Las rectas que representan a dos sistemas de ecuaciones se intersecan de a pares:

- A. siempre en un punto.
- B. siempre en un punto, infinitos puntos o no se intersecan.
- C. siempre en uno o dos puntos.
- D. siempre en cuatro o seis puntos.
- E. Ninguna de las anteriores.




4

Unidad

Semejanza

EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

- Comprender el concepto de semejanza y su relación con formas semejantes presentes en el entorno.
- Demostrar proposiciones simples utilizando conceptos y propiedades relacionadas con la semejanza de figuras planas.
- Identificar y utilizar criterios de semejanza de triángulos para el análisis de la semejanza en diferentes figuras planas.
- Aplicar criterios de semejanza en modelos a escala.
- Aplicar el teorema de Thales sobre trazos proporcionales.
- Dividir interiormente un trazo en una razón dada y usar un procesador geométrico para verificar relaciones.
- Demostrar los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad de trazos en el triángulo rectángulo.
- Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.
- Usar un procesador geométrico para visualizar las relaciones que se producen al desplazar figuras homotéticas en el plano.

An aerial photograph showing a city with a grid-like street pattern, surrounded by green agricultural fields and some forested areas. The city is in the upper right, and the fields are in the lower left and bottom. A teal circle is on the left side of the page.

CONVERSEMOS DE:

Hoy es posible obtener imágenes satelitales que muestran aspectos del relieve terrestre, como la cordillera, la costa, los bosques y desiertos, mares y lagos, desde una perspectiva completamente distinta. En el caso de una fotografía aérea, además de aspectos del relieve, se pueden observar los campos sembrados, las ciudades e incluso se pueden distinguir detalles, como la distribución de las calles, por ejemplo, y la forma de las correspondientes manzanas. A menor altura, se pueden ver más claramente las formas del entramado urbano. Si fuera menor aún, se observa que los tamaños cambian, pero nunca su forma.

Esta fotografía corresponde a Linares, tomada por el Servicio Aerofotogramétrico de la FACH (Fuerza Aérea de Chile). Si se pudieran observar simultáneamente fotografías del mismo lugar, pero obtenidas desde distintas alturas, sería posible notar cómo varían los tamaños de las manzanas, distinguiendo, en mayor o menor medida, edificios, plazas y lugares públicos. Sin embargo, otras cosas no varían, como los ángulos en que se intersecan las calles, o la proporción entre sus longitudes.

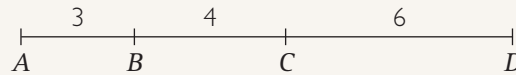
- Imagina cómo se verían desde el aire los alrededores de tu casa o de tu escuela.
- Dibuja dos de estas fotografías aéreas, tal como te las imaginas si se tomaran desde distintas alturas.
- Observa y compara tus dibujos y los de tus compañeros y compañeras. ¿En qué se parecen?, ¿en qué se diferencian?
- En general, ¿cambia la forma de las manzanas o de otros lugares cercanos?, ¿cambia su tamaño?, ¿cambia la proporción entre las longitudes de sus sitios?, ¿qué puedes concluir?



¿Cuánto sabes?

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

- De acuerdo a la figura, determina en qué razón están las medidas de los segmentos dados, en cada caso:



a. $\frac{AB}{AC} =$

c. $\frac{AB}{AD} =$

b. $\frac{AC}{AD} =$

d. $\frac{AC}{BD} =$

- Encuentra el valor de la incógnita en las siguientes proporciones:

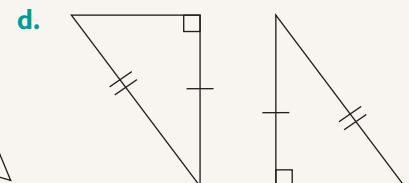
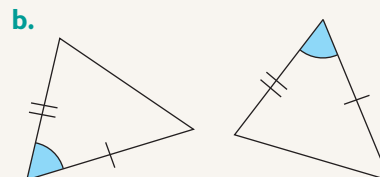
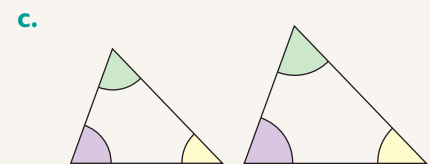
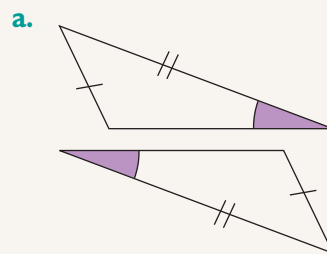
a. $\frac{21}{14} = \frac{3}{x}$

c. $\frac{27}{y} = \frac{y}{3}$

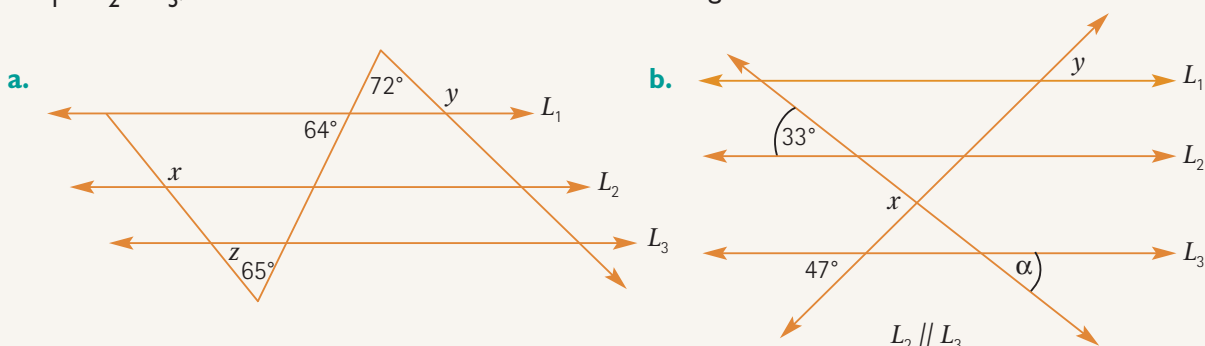
b. $\frac{15}{25} = \frac{x}{10}$

d. $\frac{5}{(5 + y)} = \frac{24}{25}$

- En las siguientes parejas de triángulos están marcados algunos elementos congruentes. Determina si los triángulos son congruentes. Justifica tu decisión.



4. Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, determina en cada caso la medida de los ángulos.

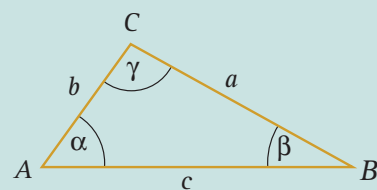
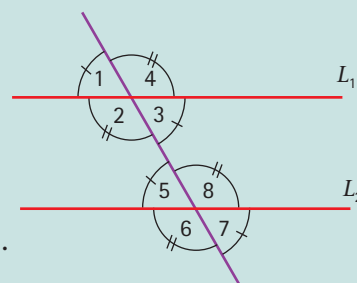


Compara tus respuestas con las de tus compañeros y compañeras. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.



¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- Las medidas a y b están en una razón r si se cumple que: $\frac{a}{b} = r$.
- Teorema fundamental de las proporciones: Si se tiene la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.
- Las siguientes proporciones son equivalentes: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
- Composición de proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
- Descomposición de proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
- Si $L_1 \parallel L_2$ entonces se tiene que:
 - Ángulos alternos internos: 3 y 5; 2 y 8.
 - Ángulos alternos externos: 1 y 7; 4 y 6.
 - Ángulos correspondientes: 1 y 5; 4 y 8; 2 y 6; 3 y 7.
 - Ángulos opuestos por el vértice: 1 y 3; 2 y 4; 5 y 7; 6 y 8.
- Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño.
- Dado un triángulo de vértices A , B y C , los ángulos respectivos se denotan por α , β y γ , y los lados opuestos a cada vértice se denotan por a , b , y c , respectivamente.
- Dos triángulos son **congruentes** si sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales. Esto es: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ si y solo si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$



Semejanza de figuras

La imagen muestra la letra **A** tal como se ve cuando se pega, como imagen, en un editor de texto, como el Word. Cuando se quiere modificar esta imagen, ya sea ampliarla, reducirla o expandirla, se debe arrastrar con el *mouse* alguno de los puntos en los que aparece la doble flecha.

Observa cómo se modifican las imágenes, en cada caso:



ANALICEMOS...

- Entre ellas, ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian?
- Mide los ángulos del triángulo central de cada una de las letras. En cada caso, ¿son iguales a la primera?, ¿por qué?
- Mide la longitud de cada parte de la letra. En cada caso, ¿son proporcionales a la primera?, ¿por qué?
- ¿Cuál de ellas se parece más a la letra original? Justifica.

En la situación anterior, se puede observar que cuando se ubica el cursor en el punto central de uno de los lados y se arrastra, la letra **A** se expande solo de manera horizontal, y se ve más ancha. De hecho, se deforma, ya que los ángulos del triángulo interno cambian y la proporción entre sus medidas no se mantiene constante.

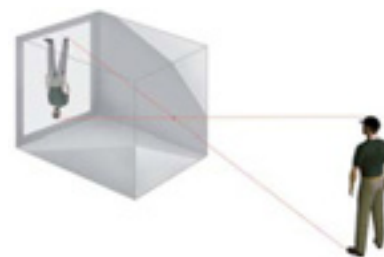
Ahora, si se ubica el cursor en el punto central, de arriba o de abajo y se arrastra, la letra se expande solo de manera vertical, y la letra **A** aparece alargada. Como en el caso anterior, cambian los ángulos del triángulo interno y la proporción entre sus lados.

GLOSARIO

Congruencia: propiedad de dos figuras de tener la misma forma y tamaño; cuando al poner una figura sobre la otra, ambas coinciden.

Finalmente, si se ubica el cursor en el punto ubicado en alguna de las esquinas, y se arrastra en diagonal, la letra **A** se expande de forma vertical y horizontal simultáneamente, y se mantiene la forma, ya que los ángulos son congruentes y todas las proporciones se conservan. En este caso, diremos que la figura inicial y la resultante son **semejantes**.

Otra forma de visualizar figuras semejantes es imaginar qué sucede al proyectar una imagen en la pared. Puede ser utilizando un proyector de diapositivas o con imágenes formadas por sombras. También existe la cámara oscura, que es el fundamento de las cámaras fotográficas. Este instrumento produce figuras semejantes, pero invertidas.



EN RESUMEN

- Dos figuras son semejantes si todos sus correspondientes ángulos son congruentes y la razón entre sus correspondientes lados es constante.

EN TU CUADERNO

1. Utiliza un par de escuadras y verifica que solo en el último caso el lado izquierdo de la letra **A** es paralelo al de la letra original. ¿Sucederá lo mismo para los otros lados de las letras **A**?, ¿por qué?
2. Dibuja en tu cuaderno dos figuras que sean semejantes. Luego, une los correspondientes puntos de cada letra con una recta. Comprueba que siempre estas rectas se cortan en un solo punto.
3. Explica por qué dos figuras no son semejantes si alguno de sus ángulos no son congruentes.
4. Dos cuadriláteros tienen, cada uno, sus cuatro lados iguales y el lado de uno mide el doble del lado del otro. ¿Es suficiente para que sean semejantes? Haz un dibujo y justifica tu respuesta.
5. Dos cuadriláteros que tienen, cada uno, sus cuatro ángulos interiores congruentes. ¿Son necesariamente semejantes? Justifica tu respuesta y haz el dibujo correspondiente.
6. Determina si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.
 - a. Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
 - b. Todos los cuadrados son semejantes.
 - c. Todos los rectángulos son semejantes.
 - d. Todos los círculos son semejantes.
 - e. Dos figuras planas semejantes tienen sus correspondientes ángulos distintos.
 - f. Si dos figuras son semejantes, la razón entre dos segmentos de una figura es igual a la razón de los correspondientes dos segmentos de la otra.
 - g. Dos figuras semejantes son figuras congruentes.
 - h. Dos figuras congruentes son figuras semejantes.



Semejanza de triángulos: criterio AA

A partir de lo visto en la sección anterior, dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y las medidas de los lados correspondientes son proporcionales. Sin embargo, no siempre es posible determinar u obtener todos estos datos.

ANALICEMOS...

- ¿Cómo concluir que dos triángulos son semejantes?
- ¿Es necesario conocer todas las medidas de sus lados y de sus ángulos?
- Si no se conocen todos los datos, ¿es aún posible concluir semejanza?
- ¿Cuál o cuáles datos pueden ser suficientes para determinar semejanza?

Ya sabemos que en las figuras semejantes se conservan las medidas entre los correspondientes ángulos y las razones entre los lados correspondientes.

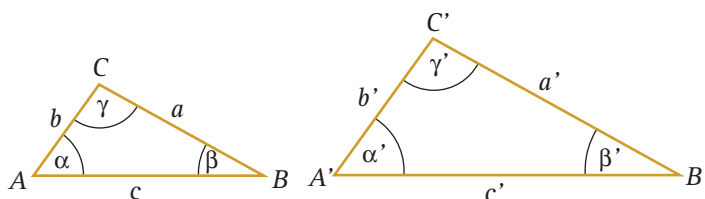
Si se aplica esto al caso de los triángulos, la semejanza se resume así:

GLOSARIO

A' se lee: "A prima".

$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ se lee:

"el triángulo $A'B'C'$ es semejante al triángulo ABC ".



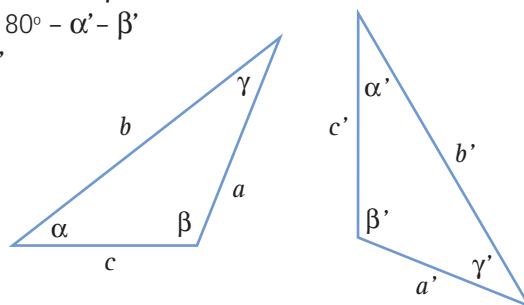
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \text{ si y solo si } \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma', \text{ y } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Es decir, se deberían conocer todas las medidas de los lados y ángulos, para determinar si dos triángulos son semejantes o no. Pero, al igual que para determinar la congruencia de triángulos, existen tres teoremas que permiten establecer la semejanza de triángulos sin verificar necesariamente todas las igualdades.

Por ejemplo, se puede afirmar que dos triángulos son semejantes solo comprobando que dos de sus correspondientes ángulos son iguales. Observa.

Si se cumple que $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$, se puede concluir que $\gamma = \gamma'$, ya que:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \\ &\rightarrow \gamma' = 180^\circ - \alpha' - \beta' \\ &\rightarrow \gamma = \gamma' \end{aligned}$$



RECUERDA QUE...

- Dos triángulos son congruentes si sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales. Esto es, si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$.
- En todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es 180° , es decir, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Por lo tanto, como ahora los tres ángulos correspondientes son iguales, los triángulos son semejantes. Pero, en realidad, solo basta con dos. Esto se conoce como **primer criterio de semejanza** o **criterio AA (ángulo-ángulo)**.

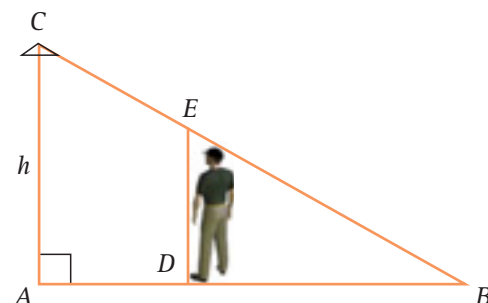
Observa el siguiente ejemplo, en que se establece la semejanza con el primer criterio.

Durante la noche, Miguel observa que un poste de luz ilumina en un radio de 6 m y que la sombra de don José, de pie junto al poste, es de 4 m. Si Miguel estima la altura de don José en 1,7 m, ¿cuánto medirá el poste?

Se puede considerar que el poste y don José están perpendiculares al suelo. De este modo, $\angle CAB$ y $\angle EDB$ son ángulos rectos.

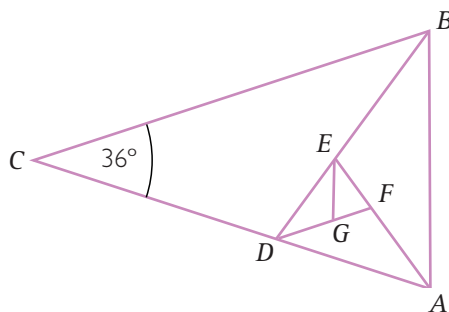
Observa que además $\angle CBA$ es el mismo $\angle EBD$. Entonces, por el **criterio AA**, $\triangle ABC \sim \triangle DBE$, por lo tanto, los correspondientes lados son proporcionales y se cumple:

$$\frac{h}{1,7} = \frac{6}{3} \rightarrow h = 3,4 \text{ m}$$



EN TU CUADERNO

1. Determina cuáles triángulos de la siguiente figura son semejantes. Considera que todos estos triángulos son isósceles, \overline{DF} es bisectriz de $\angle EDA$ y $\angle BE$, \overline{AE} y \overline{EG} son bisectrices de $\angle ABC$, $\angle CAB$ y $\angle FED$, respectivamente. Justifica tu respuesta.

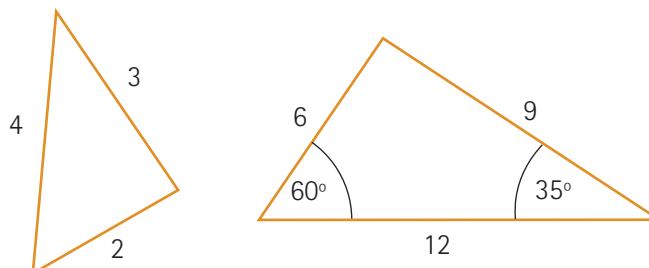


EN RESUMEN

- Dos triángulos son **semejantes** si todos los lados correspondientes son proporcionales y si las medidas de los ángulos correspondientes son iguales.
- **Criterio AA**: dos o más triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Semejanza de triángulos: criterio LLL

Martín necesita determinar si los siguientes triángulos son semejantes. Observa.



RECUERDA QUE...

- En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo, y del mismo modo, a menor lado se opone menor ángulo.
- **Criterio de congruencia LLL:**
Si dos triángulos tienen las medidas de sus lados correspondientes iguales, es decir, $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$, entonces son congruentes.

ANALICEMOS...

- ¿Martín puede aplicar el **criterio AA** en este caso?, ¿por qué?
- ¿Se pueden ordenar los triángulos de modo que la razón entre sus correspondientes lados sea la misma?, ¿por qué?
- ¿Estos triángulos son semejantes? Explica.

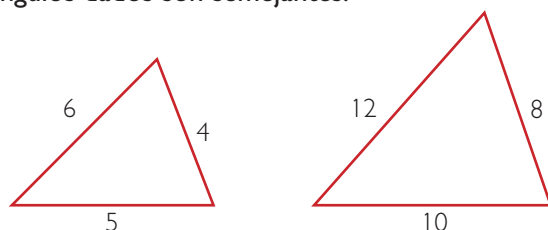
Observa que los triángulos tienen lados aparentemente proporcionales. Comenzando por el lado mayor, los lados correspondientes tienen la relación $\frac{4}{12} = \frac{3}{9} = \frac{2}{6}$. Como esta razón es constante, los lados correspondientes son proporcionales y, luego, los triángulos son semejantes. Esto se conoce como **segundo criterio de semejanza** o **criterio LLL** (lado-lado-lado).

EN TU CUADERNO

1. En un triángulo ABC , $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm y $CA = 10$ cm. En otro triángulo $A'B'C'$, $A'B' = 3$ cm, $B'C' = 6$ cm y $C'A' = 15$ cm. ¿Son semejantes los triángulos ABC y $A'B'C'$?
2. ¿Son semejantes dos triángulos de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm y $a' = 12$ cm, $b' = 16$ cm, $c' = 21$ cm, respectivamente?
3. Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{3}$. Los lados del triángulo ABC son $a = 3$ cm, $b = 10$ cm, $c = 8$ cm. Halla las longitudes de los lados del $\Delta A'B'C'$.
4. Dos triángulos ABC y PQR son semejantes.
 - a. Si $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 4$ cm, $PQ = 2,25$ cm, $RP = 1,8$ cm, ¿cuánto mide \overline{QR} ?
 - b. Si $AB = 2$ cm, $BC = 2$ cm, $CA = 3$ cm, $PQ = 4$ cm, $PR = 2x - 2$ cm y $QR = x$, ¿cuál es el valor de x ? ¿Cuánto mide \overline{PR} ?

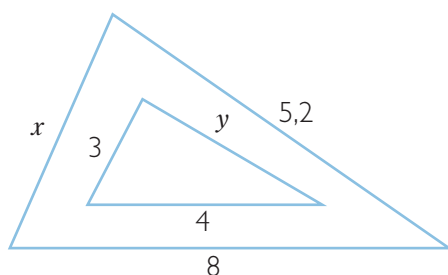
5. Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, tales que $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$, y si se tiene que $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm y $AC = 7,5$ cm, calcula las medidas de los lados del $\triangle DEF$.

6. Prueba que los triángulos dados son semejantes.

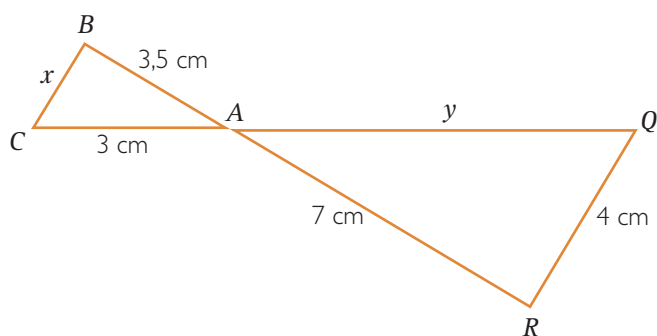


7. Determina los valores de x e y si los triángulos son semejantes.

a.



b.

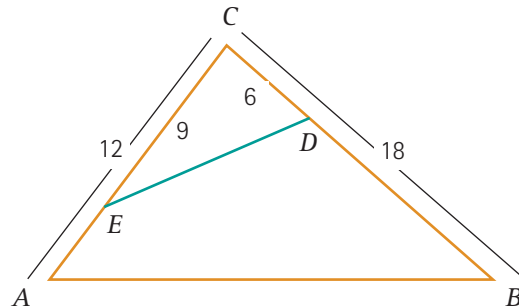


EN RESUMEN

- Criterio de semejanza LLL: dos o más triángulos son semejantes si tienen todos sus lados correspondientes en igual proporción.

Semejanza de triángulos: criterio LAL

Matías dice que estos triángulos no pueden ser semejantes, porque no se ven como si el triángulo mayor fuera la ampliación del más chico. Antonia, en cambio, dice que los lados correspondientes están en distinta posición, por eso se ve raro.



NO OLVIDES QUE...

- Al relacionar dos o más triángulos, el orden en que se nombran sus vértices indica cuáles son los vértices correspondientes, según el orden de las letras. Si $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, A se corresponde con D, B con E y C con C, en este caso. Luego, por ejemplo, el lado AB se corresponde con el lado DE , y $\angle BAC$ se corresponde con el $\angle EDC$.

ANALICEMOS...

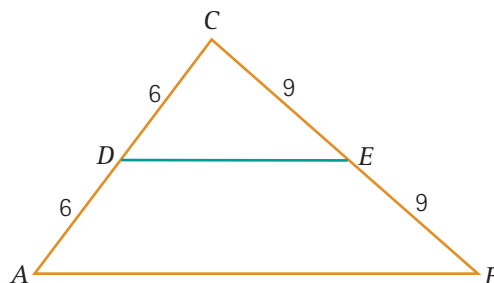
- ¿Quién tiene la razón, Matías o Antonia?, ¿por qué?
- En este caso, ¿se puede utilizar el **criterio AA**?, ¿por qué?
- ¿Y con el **criterio LLL**, se puede establecer la semejanza?, ¿por qué?
- ¿Son semejantes los triángulos ABC y DEC ? Justifica tu respuesta.

Observa que $\frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CD}$ ya que: $\frac{18}{9} = \frac{12}{6} = 2$. Además $\angle ACB = \angle DCE$

ya que, como se ve en la figura, es exactamente el mismo ángulo.

Otra forma de establecer la semejanza entre triángulos es verificar que dos de los lados correspondientes son proporcionales y que el ángulo determinado por estos lados es igual en cada triángulo. Este resultado se conoce como **tercer criterio de semejanza** o **criterio LAL (lado-ángulo-lado)**.

Para probarlo, basta aplicar transformaciones isométricas a uno de los triángulos, de manera que coincida uno de los correspondientes pares de lados, por ejemplo, a y a' . De esta forma, los lados b y b' son paralelos y los ángulos γ y γ' son iguales (porque son ángulos correspondientes entre paralelas). Por lo tanto, los triángulos son semejantes, según el **criterio AA**.



RECUERDA QUE...

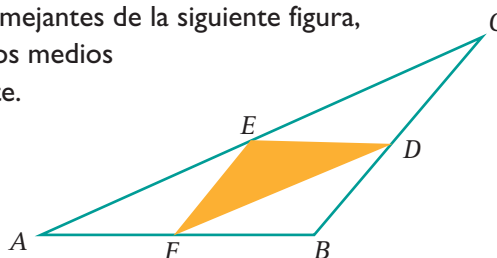
- Criterio de congruencia LAL:** si tienen dos de sus lados correspondientes de igual medida y los ángulos determinados por estos lados son de igual medida, es decir, si $b = b'$, $c = c'$ y $\alpha = \alpha'$, entonces los triángulos son congruentes.

EN TU CUADERNO

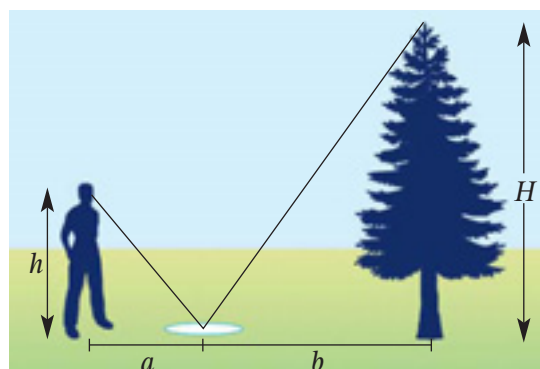
1. Comenta y determina con tus compañeros y compañeras si se puede afirmar que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, si solo se sabe que si $b = b'$, $c = c'$ y $\gamma = \gamma'$.
2. Prueba en cada caso si los triángulos dados son semejantes.



3. Establece todos los triángulos semejantes de la siguiente figura, si se sabe que D , E y F son puntos medios de BC , CA y AB , respectivamente.



4. En la figura, considera que el ángulo de incidencia x es igual al ángulo de reflexión y .
 - a. Demuestra que los dos triángulos son semejantes.
 - b. Calcula la altura H si se sabe que $h = 1,5$ m, $a = 2$ m y $b = 6$ m.
 - c. Explica por qué siempre se cumple que $H = \frac{bh}{a}$.



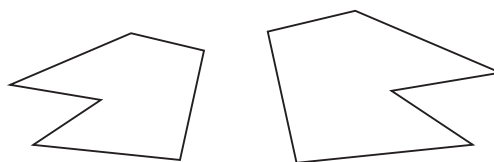
EN RESUMEN

Para establecer la semejanza entre dos triángulos, se pueden utilizar los siguientes teoremas, conocidos como criterios de semejanza:

- **Criterio AA o primer criterio de semejanza:** si dos triángulos tienen dos de sus ángulos iguales, entonces los triángulos son semejantes.
- **Criterio LLL o segundo criterio de semejanza:** si dos triángulos tienen todos sus lados correspondientes en igual proporción, entonces los triángulos son semejantes.
- **Criterio LAL o tercer criterio de semejanza:** si dos triángulos poseen dos de sus lados correspondientes en igual proporción y los ángulos comprendidos por dichos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

Análisis de semejanza en figuras planas

Andrea necesita determinar si las siguientes figuras son semejantes, pero solo tiene un transportador; entonces, decide dividirla en triángulos.



ANALICEMOS...

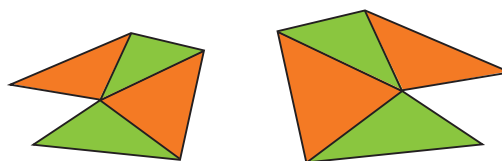
- ¿Por qué Andrea dividió las figuras en triángulos?, ¿cómo crees que verificará ahora que son semejantes?
- ¿Qué se debe cumplir para determinar si dos triángulos son semejantes?
- ¿Se puede determinar la semejanza de triángulos solamente verificando que sus ángulos correspondientes son iguales? Justifica tu respuesta.

GLOSARIO

Polígono: figura geométrica plana, cerrada y cuyos lados son rectas.

Polígono regular: todos los lados y ángulos interiores del polígono son iguales.

Toda figura geométrica (formada por segmentos rectos) se puede descomponer en triángulos. Por esta razón, el estudio de los triángulos es tan importante en geometría. Por ejemplo, para determinar si estos polígonos son semejantes, se descomponen en triángulos y se determina si los correspondientes triángulos, en cada caso, son semejantes. Observa:

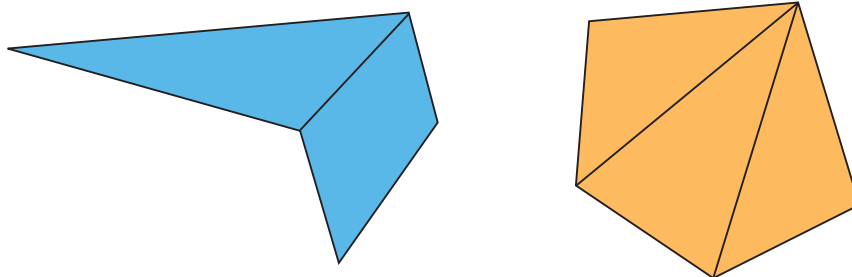


Entonces, se debe verificar la semejanza de cada par de triángulos correspondientes para concluir que ambas figuras son semejantes. En cambio, basta comprobar que un par de triángulos no sea semejante para concluir que las figuras no son semejantes.

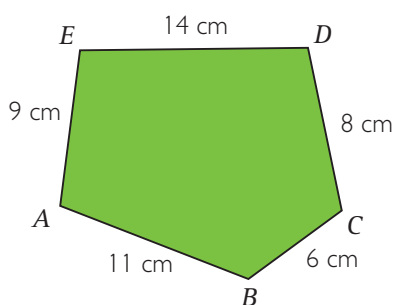
Como Andrea tiene solo un transportador, se debe usar en cada caso el **criterio AA** de semejanza. Para esto, ella nombra los vértices de la primera figura desde el vértice superior como A, B, C, D, E y F , en sentido horario, y los de la segunda, como A', B', C', D', E' y F' en sentido antihorario, ya que estas figuras no tienen la misma orientación. Así, Andrea mide los ángulos correspondientes y comprueba que $\triangle ABE$ y $\triangle A'B'E'$ son semejantes, así como $\triangle BCE$ y $\triangle B'C'E'$, $\triangle CDE$ y $\triangle C'D'E'$, $\triangle AFE$ y $\triangle A'F'E'$. Por lo tanto, como cada par de triángulos correspondientes son semejantes, se concluye que ambas figuras son semejantes.

EN TU CUADERNO

1. Sobre una hoja de papel cuadriculado, realiza una figura semejante a las dadas a continuación cuyas medidas sean el doble de las medidas originales.



2. Un rectángulo mide 18 cm de largo por 12 cm de ancho. Un segundo rectángulo, semejante al primero, mide 12 cm de largo.
- Determina la razón de semejanza entre el primer y segundo rectángulo.
 - Calcula el ancho del segundo rectángulo y el área de este.
 - Calcula el cociente entre el área del primer y segundo rectángulos.
 - ¿Qué relación tiene el cociente obtenido con la razón de semejanza?
3. Dos triángulos rectángulos semejantes son tales que, para el primero, la medida del cateto mayor es 28 cm y su área es de 294 cm^2 y, para el segundo, la medida del cateto menor es 12 cm y su área es de 96 cm^2 . Determina la razón de semejanza.
4. Dado el pentágono de la figura, calcula el perímetro de otro de menor tamaño si la razón de semejanza es 4 : 3.



EN RESUMEN

- Para analizar si dos figuras planas con lados rectos son o no semejantes, se pueden descomponer en triángulos y asociar los pares de triángulos correspondientes.
- Si en todos los casos estos triángulos son semejantes, entonces las figuras son semejantes.
- Si en algún caso los triángulos correspondientes no son semejantes, las figuras tampoco lo son.

Aplicación de la semejanza en modelos a escala

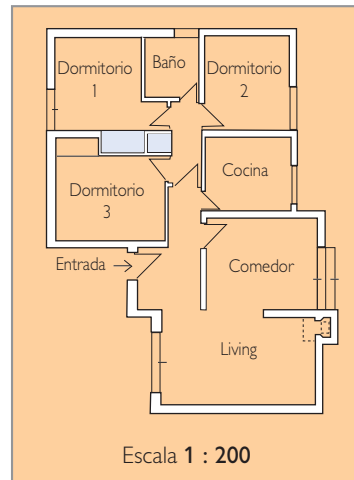
Javiera ha decidido con su familia la ampliación de su casa, para agregar un dormitorio. El arquitecto fue a conversar con ellos y medir la casa y, días después, les mostró el plano de la casa, con la ampliación incluida. Observa.

GLOSARIO

Escala de un plano o mapa: es la razón de semejanza entre la medida de un segmento en el plano y la medida de ese mismo segmento en la realidad.

Razón: comparación entre dos cantidades por medio de un cociente.

Razón de semejanza entre dos figuras (k): es el cociente de las medidas de segmentos homólogos o correspondientes.



ANALICEMOS...

- ¿A qué se refiere la expresión "Escala 1 : 200" que aparece en el plano?
- ¿Cuáles son las medidas reales del dormitorio 3 de la casa?
- ¿Cuál es la superficie total del dormitorio 3?

Primero, observa que en todo plano o mapa aparece la escala en que está dibujado. Esto indica cuántas veces el dibujo es más pequeño que la realidad, y, por lo tanto, es una razón entre las longitudes, esto es, entre las medidas en un plano y las medidas reales del objeto o del terreno.

De modo que, para obtener las medidas reales, se debe medir con una regla cada habitación, y con estos datos se puede calcular cuál es la superficie total de la casa.

Por ejemplo, en el plano, el comedor mide 1,5 cm de largo y 1,2 cm de ancho; luego, las medidas reales se calculan utilizando proporciones; para el largo:

$$\frac{1}{1,5} = \frac{200}{l} \text{ y para el ancho } \frac{1}{1,2} = \frac{200}{a}.$$

Luego, el comedor mide 300 cm de largo, es decir, 3 m, y 240 cm ó 2,4 m de ancho.

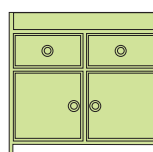
En un plano se puede determinar a simple vista si un dormitorio es más grande que otro, porque todas las medidas son proporcionales; luego, si en el plano es posible distinguir que el baño es más pequeño que la cocina, entonces a escala real también es más pequeño.

EN TU CUADERNO

1. Determina las dimensiones reales de cada uno de los dormitorios de la casa y calcula la superficie total de la casa.
2. Si en un plano un segmento de 5 cm representa 300 m en la realidad, ¿a qué escala está construido el plano?
3. Un plano se encuentra a escala 1 : 500. Si una superficie se representa por un rectángulo de 6 cm de largo por 4 cm de ancho, determina las medidas de la superficie real.
4. En un mapa a escala 1 : 625 000, dos ciudades se encuentran a 32 cm. ¿A qué distancia se encuentran realmente?
5. Dos pueblos se encuentran separados a 90 km. Si en un mapa de la zona se encuentran a 3,5 cm, determina la escala en que está dibujado.
6. Una maqueta de una avioneta hecha a escala 1 : 50 tiene las siguientes medidas: 32 cm de largo, 24 cm de ancho y 8 cm de alto. Determina las dimensiones reales del aparato.
7. Observa el dibujo del siguiente mueble.

- a. Calcula el largo, ancho y alto del mueble.
- b. Calcula el tamaño de sus puertas.
- c. Calcula el volumen de sus cajones.
- d. ¿Cuántas cajas de discos compactos de 14,2 cm de largo; 12,5 cm de ancho y 1 cm de alto caben en los cajones?

Visto de frente



Escala 1 : 50

Visto de arriba



Escala 1 : 50

EN RESUMEN

- La escala de un plano o mapa es la razón de semejanza entre la distancia de dos puntos cualesquiera en el plano y la distancia de los correspondientes puntos en la realidad.
- Para calcular las distancias reales respecto de las distancias en un plano o mapa a escala, se escribe la proporción correspondiente, considerando la escala indicada en el plano o mapa.

MI PROGRESO

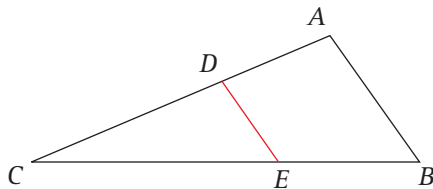
- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones caracteriza a las figuras semejantes?
 - Sus ángulos correspondientes son iguales y la razón entre sus lados no es constante.
 - Sus ángulos correspondientes son iguales y la razón entre sus lados es constante.
 - Sus ángulos correspondientes no son iguales y la razón entre sus lados es constante.
 - Sus ángulos y lados correspondientes son iguales.
- ¿Qué afirmación es correcta acerca de dos cuadriláteros si solo se sabe que tres de sus ángulos son iguales?
 - Las figuras no son semejantes ni congruentes.
 - Las figuras son semejantes, pero no son congruentes.
 - Las figuras son congruentes, pero no son semejantes.
 - No puede determinarse si son o no semejantes.
- Considera $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Los lados del $\triangle ABC$ miden 3 cm, 10 cm y 8 cm, respectivamente. Si la razón de semejanza es de 2 : 3, determina las medidas de los lados del $\triangle DEF$.
- En un $\triangle ABC$, $BC = 11$ cm y $CA = 7$ cm, y $\angle BCA = 70^\circ$. Si $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ y la razón de semejanza es 2, determina las medidas de $B'C'$ y $C'A'$.
- Si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son tales que $\angle ABC$ y $\angle EDF$ miden 63° , y $\angle BCA$ y $\angle DEF$ miden 74° , ¿pueden ser semejantes?, ¿por qué?
- Si en un plano un segmento de 12 cm representa 600 m en la realidad, ¿a qué escala está construido el plano?
- En un mapa cuya escala es 1 : 375 000, dos ciudades se encuentran a 24 cm. ¿A qué distancia se encuentran realmente?

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Reconocer figuras semejantes.	1 y 2	___/2
Aplicar criterios de semejanza de triángulos.	3, 4 y 5	___/3
Aplicar el concepto de escala.	6 y 7	___/2

Considera el $\triangle ABC$, y un segmento de recta, paralelo a AB , tal que interseca a los lados del triángulo en los puntos D y E .



ANALICEMOS...

- ¿Se cumple que $\angle CDE$ y $\angle CAB$ tienen igual medida?, ¿por qué?
- ¿Hay otros pares de ángulos que tengan igual medida en la figura?, ¿cuáles?
- ¿ $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$ son congruentes?, ¿son semejantes? Justifica tu respuesta.
- ¿ AC , DC , BC y EC son proporcionales?, ¿por qué?

Observa que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, y \overline{CA} es transversal a ellos, entonces:

$\angle CAB = \angle CDE$, son ángulos correspondientes entre paralelas.
 $\angle ACB = \angle DCE$, por construcción, son el mismo ángulo.
 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, por el criterio **AA** de semejanza.

Luego, los segmentos AC , DC , BC y EC son proporcionales.

Teorema de Thales: toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corte a los otros dos lados divide a estos últimos en segmentos proporcionales.

Ahora, cabe preguntarse ¿si un segmento DE corta a los lados AC y BC en segmentos proporcionales, se cumple que $DE \parallel AB$?

Recíproco del teorema de Thales: si una recta divide dos lados de un triángulo en una misma proporción, la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

GLOSARIO

Rectas paralelas: rectas que no se intersectan.

RECUERDA QUE...

Las cantidades a, b, c, d se dicen proporcionales si existe una proporción entre ellas, es decir, si se cumple que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = r.$$

GLOSARIO

Hipótesis: suposición o condición a partir de la cual se pretende establecer una consecuencia.

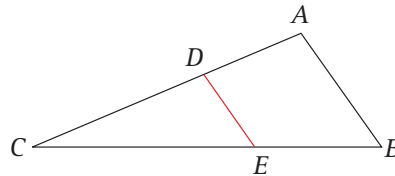
Demostración.

En el $\triangle ABC$, sea \overline{DE} el segmento que cumple la hipótesis, esto es, tal que sobre los lados \overline{AC} y \overline{BC} se cumple la proporción $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$. Entonces:

$\angle ACB = \angle DCE$, ya que, por construcción, $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$ tienen en común el ángulo con vértice en el punto C .

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}, \text{ por hipótesis y componiendo } \frac{CD + DA}{CD} = \frac{CE + EB}{CE}.$$

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$, por el **criterio LAL** de semejanza.

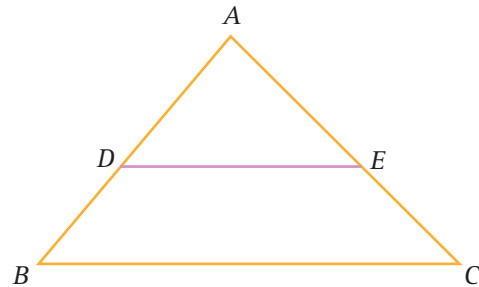


Como consecuencia de la semejanza, los ángulos correspondientes restantes de cada triángulo son iguales. Dicho de otra forma, $\angle CDE = \angle CAB$ y $\angle DEC = \angle ABC$. Por lo tanto, los segmentos DE y AB son paralelos.

EN TU CUADERNO

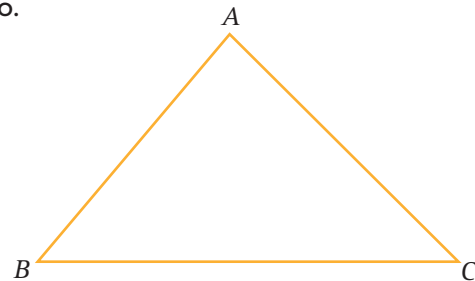
1. En la figura siguiente, $BC \parallel DE$.

- a. Determina EC , si $AD = 3$, $DB = 4$ y $AE = 4,5$.
- b. Determina EC , si $AD = 3,5$, $DB = 4$ y $AE = 5,25$.
- c. Determina BC , si $AD = 3$, $DB = 4,5$ y $DE = 4$.

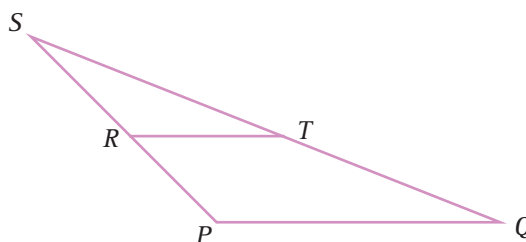


2. En cada caso, considera que D es un punto del segmento AB y E es un punto del segmento AC , y determina si los segmentos DE y BC son paralelos o no.

- a. Si $AD = 3$, $DB = 4,5$, $AE = 4,5$ y $EC = 5,75$.
- b. Si $AD = 2$, $DB = 2$ y $DE = 3$ y $BC = 6$.
- c. Si $AB = 6$, $AD = 2$, $DB = 4$, $BC = 7,5$ y $DE = 2,5$.

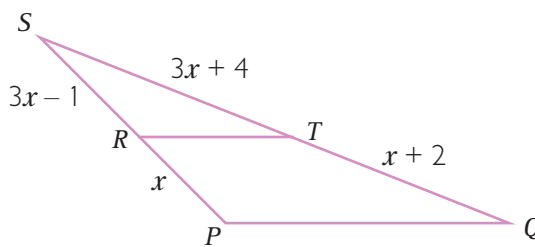


3. En la figura, $RT \parallel PQ$.



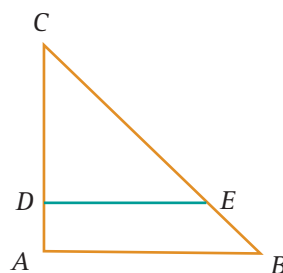
- Escribe todas las proporciones que se pueden establecer entre los segmentos de la figura.
- Si $SR = 40$ m, $ST = 42$ m y $TQ = 63$ m, calcula las medidas de RP y SP .

4. Determina el valor de x de manera que se cumpla $RT \parallel PQ$.



5. ¿Con cuál de los siguientes conjuntos de medidas se cumple que $DE \parallel AB$?

- $CD = 20$, $DA = 5$, $CE = 24$ y $EB = 6$.
- $CD = 18$, $DE = 6$, $CA = 21$ y $AB = 7$.
- $CB = 30$, $EB = 4$, $CD = 21$ y $DA = 3$.

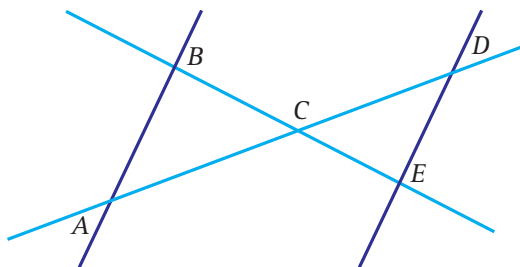


EN RESUMEN

- Teorema de Thales:** toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corte a los otros dos lados divide a estos últimos en segmentos proporcionales.
- Si una recta divide dos lados de un triángulo en una misma proporción, la recta es paralela al tercer lado.

Teorema general de Thales

A partir de la conclusiones de la página anterior, considera ahora la siguiente figura, con $AB \parallel DE$:



ANALICEMOS...

- ¿Se cumple que $\angle CDE$ y $\angle CAB$ tienen igual medida?, ¿por qué?
- ¿Hay otros pares de ángulos que tengan igual medida en la figura?, ¿cuáles?
- ¿ $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$ son semejantes? Justifica.
- ¿ AC , DC , BC y EC son proporcionales?, ¿por qué?

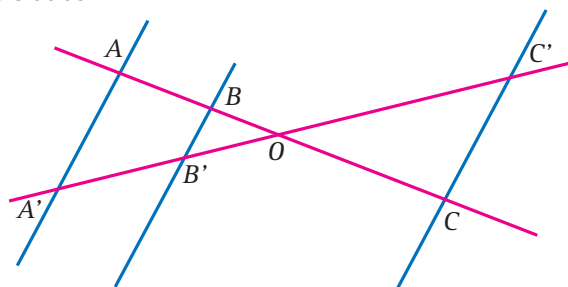
$\angle ACB$ y $\angle DCE$ tienen la misma medida, ya que son ángulos opuestos por el vértice. Por otra parte, $\angle CAB$ y $\angle CDE$ tienen la misma medida, ya que son ángulos alternos internos entre paralelas. Entonces, por **criterio AA**, $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, y los segmentos AC y DC , BC y EC son proporcionales.

Pero no se cumple solo en un triángulo con una paralela, sino que, en general, si existen rectas paralelas cortadas por transversales, siempre se obtienen segmentos proporcionales.

Teorema general de Thales: si tres o más rectas paralelas cortan a dos o más secantes, entonces los segmentos que se determinan en las secantes son proporcionales.

Si $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ y O es el punto de intersección de las rectas secantes, entonces se cumple: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O} = \frac{OC}{OC'}$

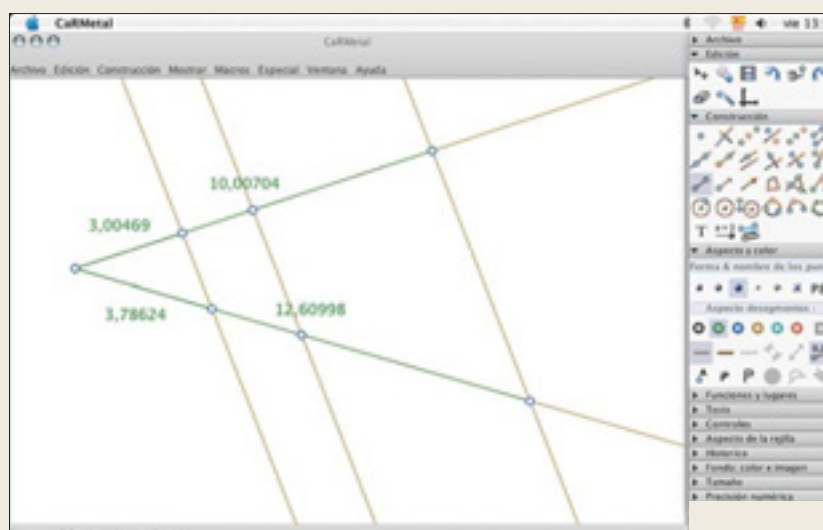
Además, por semejanza, se pueden probar $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{OC}{CC'}$; $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{OC}{CC'}$, entre otras.



HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

En esta actividad, aprenderás a verificar el teorema general de Thales, que se refiere a los segmentos proporcionales de rectas secantes que se cortan por tres o más rectas paralelas, usando el programa **CarMetal**. Para acceder al programa ingresa a www.geometriadinamica.cl/carmetal/ y haz clic en el botón **Abre CarMetal**.

- Una vez instalado el programa, con el botón **Semirrecta**, marca dos puntos, y la semirrecta quedará determinada. Luego, construye otra cuyo origen sea el mismo de la primera semirrecta.
- A continuación, marca los dos puntos que están uno en cada semirrecta, y con el botón **Recta** construye la recta que pasa por *A* y *B*. Luego, con el botón **Recta paralela**, marca la recta recién construida, y un nuevo punto en cada semirrecta, para obtener tres paralelas.
- Marca los puntos restantes que corresponden a la intersección de paralelas con las semirrectas secantes. Deberías tener 7 puntos marcados.
- Para comprobar las relaciones del teorema de Thales, selecciona **Segmento** y luego **Medida de segmentos**. Entonces marca la medida de los segmentos correspondientes en la figura. Puedes tomar, por ejemplo, las medidas que se dan en la imagen de abajo.

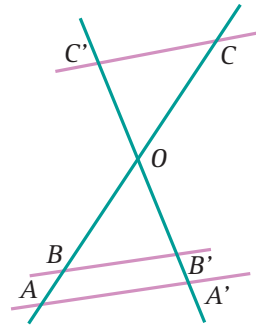


Ejercicios

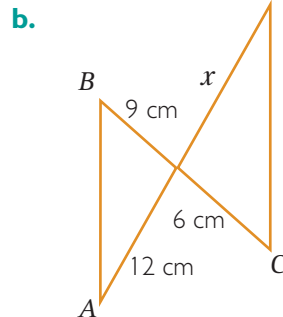
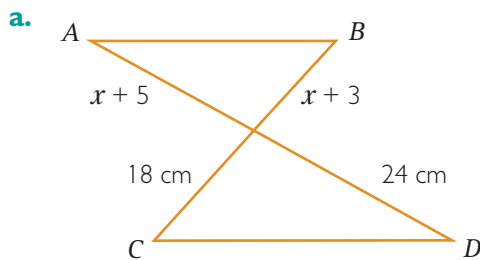
1. Con ayuda de una calculadora, comprueba que la razón entre las medidas correspondientes es la misma para ambas semirrectas.
2. Comprueba las otras relaciones del teorema de Thales, obteniendo las medidas restantes y calculando las relaciones entre medidas de segmentos correspondientes.

EN TU CUADERNO

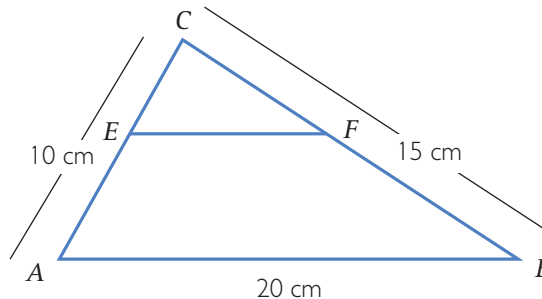
1. Si $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ y $CO = 3$, $OB = 4$, $OB' = 4$, $AA' = \frac{10}{3}$, $BB' = \frac{25}{12}$, calcula las medidas de: CC' , OC' , $A'B'$ y AB .



2. Determina el valor de x , en cada caso, de manera que AB y CD sean paralelas.

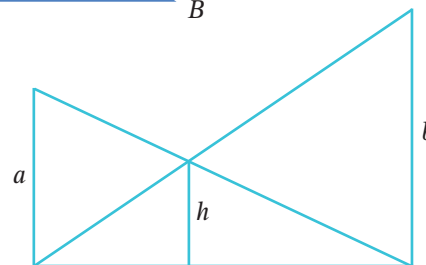


3. Calcula la medida de EF , si E y F dividen respectivamente a AC y BC en la razón $2 : 3$, con $AE > EC$.



4. Demuestra que, en la siguiente figura, la expresión de h en términos de a y b corresponde a:

$$h = \frac{ab}{a + b}$$



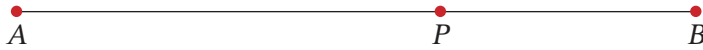
EN RESUMEN

- Teorema general de Thales: si tres o más rectas paralelas cortan a dos o más secantes, entonces los segmentos respectivos que se determinan en las secantes son proporcionales.

División de un trazo en una razón dada

Unidad 4

Dado un segmento AB , se puede dividir el trazo en dos: AP y PB , ubicando el punto P en AB , entre A y B .

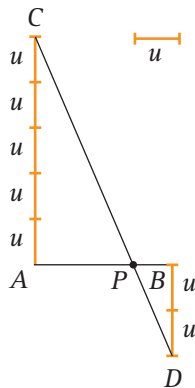


ANALICEMOS...

- Mide los segmentos y calcula el valor de $\frac{AP}{PB}$.
- Dibuja en tu cuaderno un segmento CD , pero más largo, y ubica en él un punto Q , de modo que la razón $\frac{CQ}{QD}$ sea la misma que $\frac{AP}{PB}$.
¿Cómo determinaste dónde se ubica el punto P ?
- En general, ¿un segmento AB puede dividirse en una razón dada cualquiera? Es decir, ¿existe un punto P del segmento tal que $\frac{AP}{PB}$ sea exactamente la razón dada?

El siguiente procedimiento permite dividir al segmento AB en la razón $\frac{5}{2}$, basado en la semejanza de los triángulos que se forman. Observa.

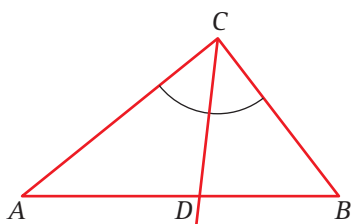
1. Se dibujan rectas paralelas entre sí y secantes a AB en los puntos A y B .
2. Con un compás y utilizando la misma abertura del compás (como unidad), se marcan: C a 5 unidades hacia arriba de A , y D , a 2 unidades hacia abajo de B .
3. Se unen los puntos C y D . El punto P , donde CD interseca a AB , divide al trazo AB en la razón $\frac{5}{2}$, es decir: $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{2}$.



Como $\triangle APC \sim \triangle BPD$, entonces: $\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BD} = \frac{5}{2}$.

No OLVIDES QUE...

- Para dividir segmentos en una razón dada, esta razón siempre es un número positivo, porque las medidas de los segmentos son positivas.



Ejemplo

La bisectriz interior de uno de los ángulos de un triángulo divide el lado opuesto al ángulo en la razón de los otros dos lados del triángulo.

Es decir, si CD es bisectriz de $\angle ACB$ entonces $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$.

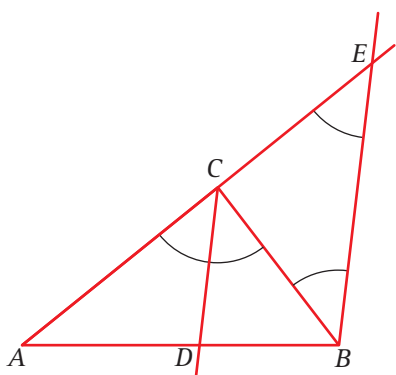
Demostración:

Se dibuja una recta paralela a CD que pase por B y se prolonga la recta AC . El punto donde intersecan es el punto E . Entonces, como $BE \parallel CD$, se tiene $\angle ACD = \angle AEB$ (son ángulos correspondientes) y $\angle DCB = \angle CBE$ (son ángulos alternos internos). Luego, los cuatro ángulos marcados son iguales.

Y como $BE \parallel CD$, por teorema de Tales, $\frac{AD}{AC} = \frac{DB}{CE}$.

Pero $\triangle BEC$ tiene dos ángulos iguales, por lo tanto es isósceles y $BC = CE$.

Remplazando BC en CE en la proporción anterior, se obtiene: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$ (que es lo que se quería demostrar).



EN TU CUADERNO

1. Dado un segmento AB , cópialo y divídelo en las siguientes razones en cada caso:

a. $\frac{3}{7}$

b. $\frac{2}{5}$

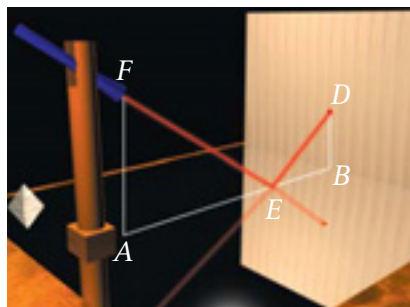
c. $\frac{1}{6}$

d. $\frac{5}{4}$

- ¿Qué puedes observar en estos casos?, ¿se acerca P al punto A o al punto B ? ¿Qué puedes concluir?

2. En la figura aparece un rayo láser que se emite desde el punto F , rebota en un espejo en el punto E y llega al punto D . Si A , E y B están en la misma línea, en el espejo,

- ¿cómo son los triángulos AEF y BED ?
- ¿qué sucede con el punto D si, al girar el foco, E se mueve hacia el punto B ?
- ¿qué sucede en la razón $\frac{AE}{EB}$ al realizar esto?

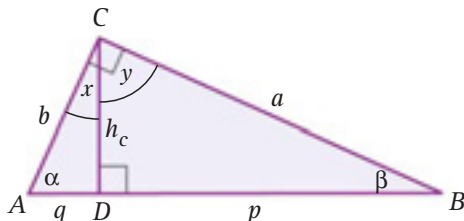


EN RESUMEN

Para dividir un segmento AB en una razón $\frac{p}{q}$:

- Se trazan por A y B rectas paralelas y secantes a AB .
- Se marca un punto C a p unidades sobre A y un punto D a q unidades bajo B y se unen C y D .
- CD interseca a AB en un punto P , tal que $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q}$.

En el $\triangle ABC$, rectángulo en C , se traza la altura h_c desde este vértice al lado AB , al que interseca en un punto D , y se obtienen dos nuevos triángulos: $\triangle ACD$ y $\triangle CBD$.



ANALICEMOS...

- ¿ $\triangle ACD$ es un triángulo rectángulo?, ¿por qué?
- ¿ $\triangle ACD$ es semejante al $\triangle ABC$?, ¿por qué?
- Si son semejantes, ¿qué proporciones se pueden establecer entre los lados correspondientes?
- ¿Se puede establecer lo mismo para el $\triangle CBD$?
- ¿Estas proporciones son siempre ciertas para cualquier triángulo rectángulo?, ¿por qué?

Como el $\triangle ABC$ es rectángulo en C , se cumple la relación $\alpha + \beta = 90^\circ$. Como CD divide el ángulo recto en dos ángulos, entonces $x + y = 90^\circ$. Además, como $\angle CDA$ es un ángulo recto, en el $\triangle ACD$ se tiene la relación $x + \alpha = 90^\circ$, por lo tanto $x = \beta$.

Luego, se cumple que $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ y $\triangle CBD$ tienen dos ángulos iguales: β y el ángulo recto, en cada caso. Por criterio **AA**, los tres triángulos son semejantes y sus lados correspondientes son proporcionales.

Ahora, sea h_c la medida de la altura sobre la hipotenusa y p y q las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, observa en el $\triangle ABC$:

- $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, ya demostrado

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{CD},$$
 son sus lados correspondientes

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{p} = \frac{b}{h_c}, \text{ de donde se concluye } a^2 = c \cdot p.$$

- $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, ya demostrado

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD},$$
 son sus lados correspondientes

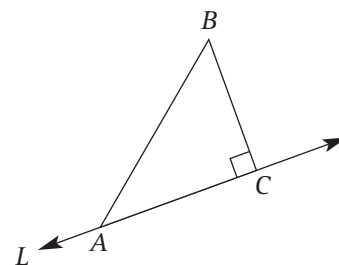
$$\frac{c}{b} = \frac{a}{h_c} = \frac{b}{q}, \text{ de donde se concluye } b^2 = c \cdot q.$$

GLOSARIO

Altura de un triángulo: segmento que une un vértice del triángulo con el lado opuesto (o una prolongación de este) formando un ángulo recto.

GLOSARIO

Proyección: dado un segmento \overline{AB} y una recta L que contiene al punto A , la proyección de \overline{AB} sobre L es el segmento \overline{AC} tal que \overline{BC} es perpendicular a L .



RECUERDA QUE...

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } a \cdot d = b \cdot c.$$

$$b, d > 0$$

- $\triangle ACD \sim \triangle CBD$, ya demostrado.
 $\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$, son sus lados correspondientes.
- $\frac{b}{a} = \frac{h_c}{p} = \frac{q}{h_c}$, de donde se concluye $h_c^2 = p \cdot q$.

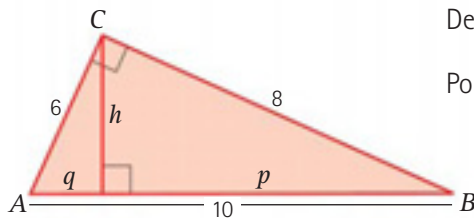
Estas tres relaciones se conocen como el teorema de Euclides.

Ejemplo

Determina los valores de p , q y h en el triángulo rectángulo ABC :

Por el teorema de Euclides, se cumplen las siguientes relaciones:

- $8^2 = 10 \cdot p$, luego $p = \frac{64}{10} = 6,4$,
- $6^2 = 10 \cdot q$, luego $q = \frac{36}{10} = 3,6$,
- $h^2 = p \cdot q$, es decir, $h^2 = 6,4 \cdot 3,6 = 23,04$, luego, aproximadamente, $h = 4,8$.



EN TU CUADERNO

1. En el ejemplo anterior, verifica las relaciones $h^2 + q^2 = 36$ y $h^2 + p^2 = 64$.

2. Considera que $p \geq q$, o bien que $a \geq b$, y determina:

a. p , q , h si $a = 24$, $b = 7$.

c. a , b , q y h_c si $c = 5$, $p = 3,2$.

b. a , b , c y q si $h_c = 3$, $p = \sqrt{3}$.

d. a , b , p y h si $c = 13$, $q = \frac{25}{13}$.

3. Demuestra que para todo triángulo rectángulo se cumple:

a. $a \cdot b = c \cdot h_c$.

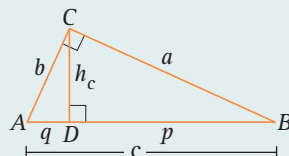
b. $\frac{1}{h_c} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.



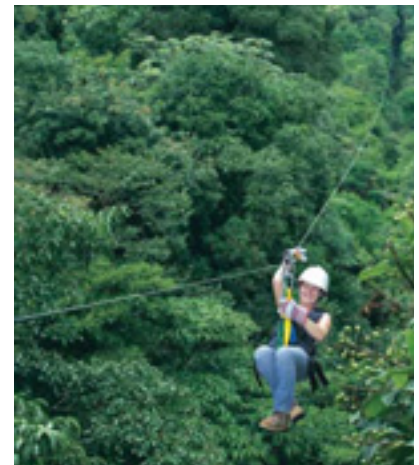
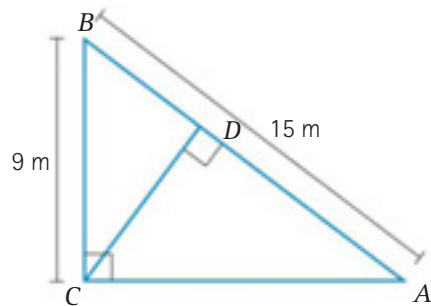
EN RESUMEN

- En $\triangle ABC$, rectángulo en C , la altura desde C interseca al lado AB en un punto D , formando dos nuevos triángulos rectángulos $\triangle ACD$ y $\triangle CBD$, que son semejantes al $\triangle ABC$, y semejantes entre sí.
- Las medidas de sus lados forman las siguientes relaciones, conocidas como **teorema de Euclides**:

- $a^2 = c \cdot p$
- $b^2 = c \cdot q$
- $h_c^2 = p \cdot q$



Durante las vacaciones, Tamara decidió lanzarse en *canopy*, que básicamente consiste en lanzarse por un cable atado a grandes distancias y diferentes alturas mediante una polea y un arnés sostenido a ella. El punto de partida está a 9 m de altura y recorre en su bajada 15 m.



ANALICEMOS...

- ¿En qué lugar está Tamara más cerca de Andrés, que observa todo desde la base del punto de partida (representada por C)?, ¿antes de partir?, ¿al llegar?, ¿en algún punto intermedio? Justifica.
- ¿Cuánto debe desplazarse la polea para que la distancia entre D y C sea la menor posible?, ¿qué distancia es?

RECUERDA QUE...

La distancia más corta entre una recta y un punto fuera de ella es la perpendicular trazada desde el punto a la recta.

Como se busca calcular el segmento de menor longitud, que corresponde al segmento perpendicular AB , en este caso, y ya que el $\triangle ABC$ de la figura es rectángulo, entonces se puede determinar la medida de BD aplicando el teorema de Euclides. Observa.

Por el teorema de Euclides, se cumple la relación $BC^2 = AB \cdot BD$.

Remplazando los valores correspondientes, se tiene $81 = 15 \cdot BD$, de donde

$$BD = \frac{81}{15} = 5,4.$$

Luego, el punto D debe estar a 5,4 m del punto B .

Por otro lado, para determinar la medida del segmento CD , se debe usar la relación para la altura, que en este caso corresponde a CD , es decir, $CD^2 = AD \cdot BD$. Antes se debe calcular la medida de AD :

$$AD = AB - BD = 15 - 5,4 = 9,6$$

Y ahora se puede calcular la medida de CD :

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{9,6 \cdot 5,4} = \sqrt{51,84} = 7,2$$

Por lo tanto, a medida que Tamara hace el recorrido, la menor distancia al punto C es de 7,2 metros. Esta distancia se consigue al hacer 5,4 metros del recorrido.

EN RESUMEN

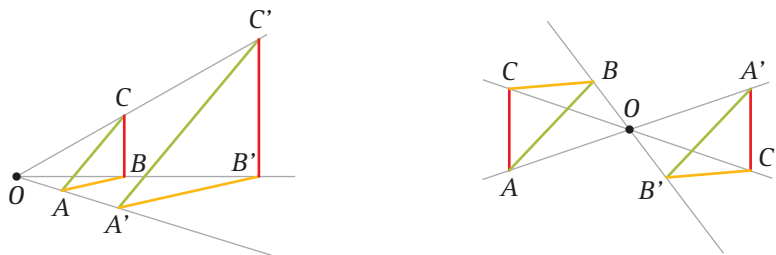
- Para resolver un problema en el cual se debe aplicar el teorema de Euclides, es necesario representar gráficamente el problema, determinar los datos conocidos y, luego, aplicar la o las relaciones correctas, según la pertinencia del problema.

EN TU CUADERNO

1. En un rectángulo $ABCD$, se traza desde el vértice A la perpendicular a la diagonal BD . Sabiendo que la diagonal queda dividida en dos segmentos que miden 4 cm y 9 cm, determina las medidas de los lados del rectángulo.
2. Considera la recta dada por la ecuación $2x + y = 7$.
 - a. Construye la gráfica de la recta.
 - b. Calcula la menor distancia al origen y encuentra el punto que lo verifica.
 - c. Calcula la distancia entre este punto y la intersección con cada uno de los ejes.
3. El dueño de un terreno rectangular de 150 m de ancho y 250 m de largo desea construir su casa en uno de los vértices del terreno y un puente sobre el río que cruza diagonalmente el terreno. Si desea que el puente esté lo más cercano posible a su casa:
 - a. ¿En qué punto sobre el río lo construirá?
 - b. ¿A qué distancia de su casa estará el puente?
4. Construye triángulos rectángulos tales que sus alturas desde la hipotenusa midan exactamente $\sqrt{11}$ cm, $\sqrt{15}$ cm y $2\sqrt{6}$ cm.
5. A partir del teorema de Euclides, deduce el teorema de Pitágoras.
6. Si el largo de las vigas de un techo de 12,5 m de ancho están en razón 3 : 4 y deben formar un ángulo recto, ¿cuál es la altura del techo?
7. Considera la recta dada por la ecuación $3x + 2y = 12$.
 - a. Grafica la recta.
 - b. Determina la menor distancia al origen.
 - c. ¿Puedes determinar qué punto de la recta es el más cercano al origen?
8. La medida de la diagonal de un rectángulo mide 34 cm y sus lados están en razón 15 : 8. Determina el área del rectángulo.
9. En un triángulo rectángulo, una altura interseca a la hipotenusa, definiendo dos segmentos de longitudes 25 cm y 4 cm. Halla la longitud de la altura.



Las transformaciones isométricas del plano (traslación, reflexión y rotación) conservan la forma y el tamaño de las figuras, de modo que la figura resultante es congruente a la figura inicial. Sin embargo, no todas las transformaciones del plano conservan el tamaño de las figuras, como, por ejemplo, las aplicadas en las siguientes imágenes. Observa:



ANALICEMOS...

- ¿ $\triangle OBC$ y $\triangle O'B'C'$ son semejantes en cada caso?, ¿por qué?
- ¿Hay otros triángulos semejantes en estas figuras? Justifica.
- ¿Cómo describirías las figuras obtenidas respecto de la original? Explica.
- ¿De qué depende que la imagen resultante esté o no invertida?
- ¿Qué tienen en común las líneas que unen los puntos de la figura original y de la resultante en cada caso?

En cada caso, la figura resultante tiene la misma forma original, pero no las mismas medidas. Es decir, son figuras semejantes, ya sean de menor o mayor tamaño.

En la primera figura, la imagen resultante se puede construir con ayuda de rectas que pasan por el mismo punto O . De este modo, al medir y comparar los segmentos correspondientes (por ejemplo, OA con OA' , OB con OB' , etc.), se observa que la razón de estos segmentos es una constante positiva.

Se dice que una de las figuras es la imagen de la otra bajo una transformación llamada **homotecia**. La homotecia está definida por el punto O , el **centro** de la homotecia, y un número k , que es la **razón** entre la longitud de los segmentos correspondientes en esa transformación. El número k es distinto de cero, ya sea positivo o negativo.

Vectorialmente, la homotecia se describe así: se considera O como el origen de todos los vectores, cuyo punto final corresponde a cada uno de los puntos A , B , C , etc. Dado que la homotecia tiene una razón positiva k , se puede concluir que la magnitud del vector OA' es k veces igual a la magnitud del vector OA . Lo mismo ocurre para los vectores OB , OC , etc., respecto de los vectores OB , OC , etc., lo cual se denota como:

$$OA' = k \cdot OA, OB' = k \cdot OB, OC' = k \cdot OC, \dots$$

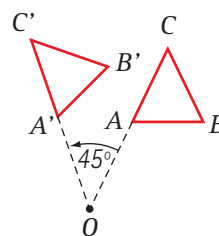
GLOSARIO

Homotecia: transformación en el plano con respecto a un centro O que permite obtener un polígono semejante a otro polígono dado.

Factor de una homotecia: es la razón entre las medidas de los lados correspondientes de los polígonos semejantes.

GLOSARIO

Imagen bajo una transformación: elemento (punto, segmento o figura) obtenido a partir de otro similar mediante una transformación del plano.



En la segunda figura, también se pueden ver triángulos semejantes y configuraciones de paralelas sobre rectas secantes. Eso sí, las rectas paralelas se **recorren en sentidos contrarios**. Por ejemplo, AB y $A'B'$ están sobre rectas paralelas, pero para ir de A hasta B hay que subir, y para ir de A' hasta B' hay que bajar. Ocurre igual si es de izquierda a derecha o en otra dirección. Por lo tanto, en este caso se considera $k < 0$, aunque al determinar la relación entre longitudes se obtiene:

$$\frac{OA}{OA} = \frac{OB}{OB} = \frac{OC}{OC} = \dots = k$$

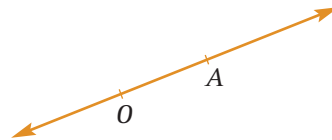
Dado que la homotecia tiene razón $-k$, puede darse una interpretación vectorial más exacta. Tomando el centro de la homotecia O como origen, se debe notar que el vector OA está en la misma dirección pero en sentido contrario al vector OA . Si se asigna la dirección positiva a los vectores OA , OB , OC , etc., esto se interpreta dando el signo negativo a los vectores OA , OB , OC , etc., obteniendo las siguientes relaciones, esta vez aplicadas a vectores:

$$OA = -k \cdot OA, OB = -k \cdot OB, OC = -k \cdot OC, \dots$$

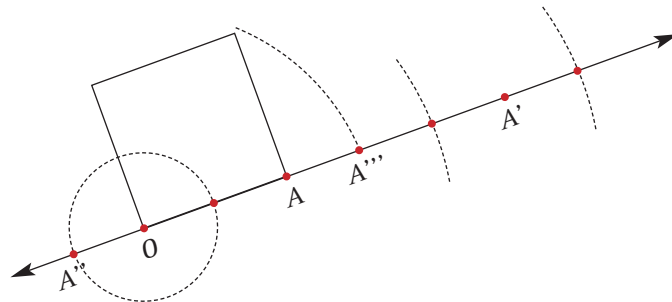
Ejemplo:

Dados los puntos O y A , construir A' , A'' y A''' de A en los siguientes casos:

Razón de homotecia $k = \frac{5}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$ y $k = \sqrt{2}$



Para construir los nuevos puntos habrá que construir tres segmentos de longitudes $\frac{5}{2} OA$, $\frac{1}{2} OA$, y $\sqrt{2} OA$. Luego, hay que llevarlos sobre la recta OA y colocarlos a partir del punto O , al mismo lado que A (es decir, a la derecha) si $k > 0$ y al lado opuesto de A (es decir, a la izquierda) si $k < 0$. Observa.



De este modo, se tiene que $OA' = \frac{5}{2} OA$, $OA'' = -\frac{1}{2} OA$ y $OA''' = \sqrt{2} OA$.

EN TU CUADERNO

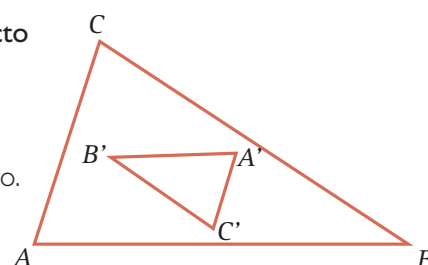
1. En la figura, el punto A' es homotético al punto A . ¿Cuál es el centro de homotecia?, ¿cuál es la razón de homotecia?



2. Si el punto A' es homotético al punto A con razón $\frac{1}{3}$ y centro de homotecia O , ¿cuál es la longitud del segmento OA' cuando $OA = 9$ cm?, ¿cuál es la longitud del segmento $A'A$?

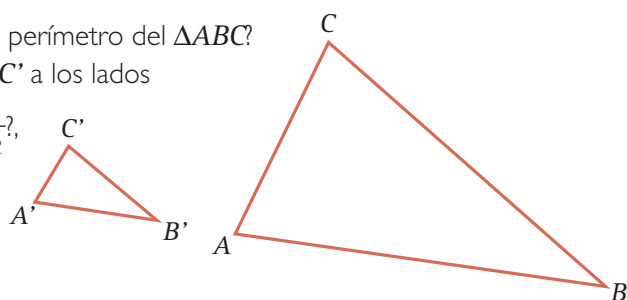
3. Determina si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes respecto de la homotecia de la figura dada. Justifica tus respuestas.

- a. El centro de homotecia está fuera del $\triangle A'B'C'$.
b. El factor k de la homotecia que envía $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ es negativo.



4. Considera la homotecia con centro en O y razón k que transforma $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$. Responde las siguientes preguntas y justifica:

- a. ¿ $k > 0$ o $k < 0$?
b. El perímetro del $\triangle A'B'C'$, ¿es igual a k veces el perímetro del $\triangle ABC$?
c. Sean h_c y $h_{c'}$ las alturas respectivas desde C y C' a los lados opuestos c y c' . ¿Se verifica la relación $\frac{hc}{hc'} = \frac{1}{k}$?, ¿por qué?



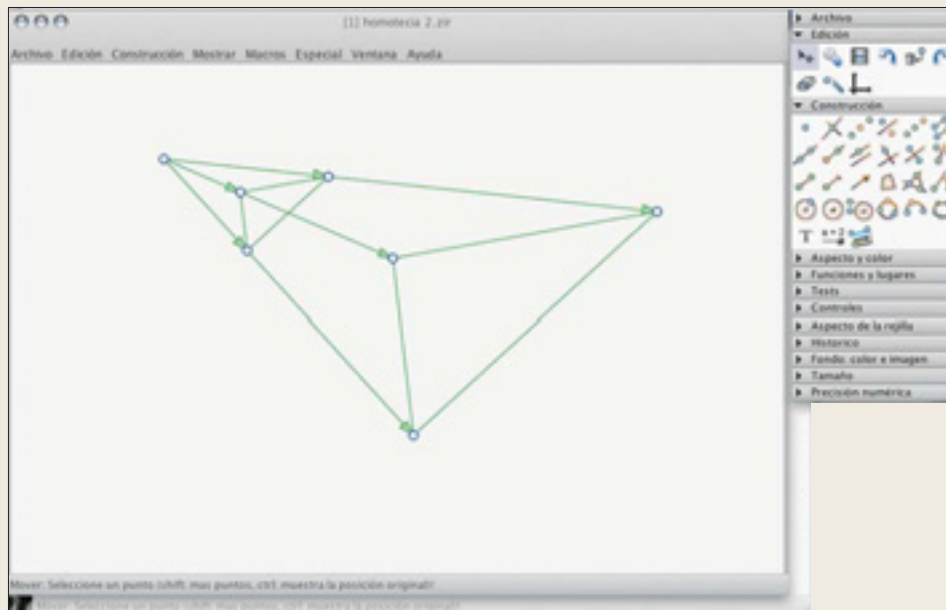
EN RESUMEN

- Una homotecia de centro O y razón k (número real distinto de cero) es una transformación que deja fijo el punto O y mueve cualquier punto P a un único punto P' , tal que O, P y P' están en una misma recta y $OP' = k \cdot OP$. Entonces, transforma todo segmento AB en un segmento paralelo $A'B'$, tal que $A'B' = k \cdot AB$.
- Si la razón es positiva, la homotecia preserva el sentido de las figuras. Si la razón es negativa, la homotecia invierte las figuras.
- Vectorialmente, una homotecia de razón k transforma un vector OP en un vector OP' , tal que $OP' = k \cdot OP$.

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Aprenderás a analizar gráficamente el concepto de homotecia usando el programa **CarMetal**, con el cual trabajaste en la página 163 de este Texto.

- Con el comando **vector**, construye 3 ó 4 vectores cuyo punto de origen sea el mismo para todos los vectores.
- A continuación, selecciona del menú **Macros**, la opción **Vectores** y luego **Vect. mult. por un real (dlog)**. Selecciona uno de los vectores, y luego marca el punto de origen del vector.
- Escribe la razón de homotecia en un cuadro que aparecerá más abajo (no muy grande, por ejemplo 2,0 ó 2,5) y presiona **enter**. Aparecerá en pantalla un segundo vector con el mismo origen y en la dirección del primero.
- Repite el paso anterior para cada uno de los demás vectores, cuidando de multiplicar todos los vectores por el mismo factor. La razón de homotecia será el factor de multiplicación, ya que al indicar el origen del vector, el segundo vector toma como origen este mismo punto.
- Finalmente, presiona el botón **mover** o selecciona esta opción del menú **Edición**. Puedes mover tanto el centro de homotecia (el origen de los vectores que construiste) como los puntos finales de estos. Obtendrás algo como lo que se muestra en la siguiente imagen:

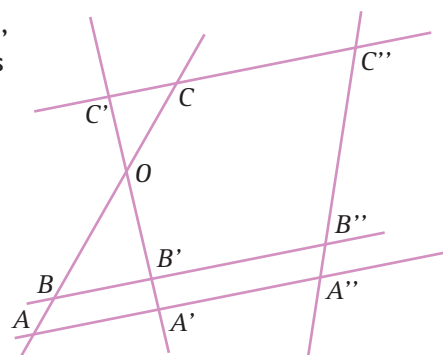


Ejercicios

1. Comprueba que la razón de homotecia se mantiene, independiente de mover el origen o cualquiera de los puntos de la figura original.
2. Para la figura obtenida, ¿cuál es la razón entre las áreas de la figura resultante y la original?, ¿se relaciona con el factor k ?
3. Considera ahora una homotecia con un factor k negativo, de modo que el origen quede entre la imagen original y la resultante, y cuidando de mantener la misma proporción entre los nuevos vectores. ¿Cuál es la razón entre las áreas de la figura resultante respecto de la original?

MI PROGRESO

1. Si $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$ y $OC = 3$, $OB = 5$, $OB' = 2,5$, $A'B' = 1$, $AA' = 6,5$, $CC' = 8$ y $A''B'' = 1,5$, calcula las medidas de los segmentos: OC , CC' , AB , BB' y $C'B''$.



2. Dibuja en tu cuaderno un segmento AB .

- a. Encuentra puntos que dividan a AB en razón $\frac{1}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{3}$ y 4.
- b. Si Q divide al segmento AB en la razón $\frac{2}{1}$, ¿de qué punto está más cerca?
- c. Si R divide al segmento AB en la razón $\frac{4}{7}$, ¿de qué punto está más cerca?

3. Si P divide a AB en razón áurea y $AB = 7$, determina la medida de AP .

4. Copia la siguiente figura en tu cuaderno y construye las siguientes homotecias como se indica:

- a. Con el centro en el punto O_1 , con $k = 2$; $k = \frac{1}{2}$; $k = -1$; $k = -\frac{3}{2}$.
- b. Con el centro en O_2 , con $k = 3$; $k = 0,9$; $k = -\frac{1}{3}$; $k = -3$.



¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Aplicar el teorema de Thales.	1	___ /6
Dividir trazos en una razón dada.	2 y 3	___ /6
Aplicar homotecias.	4	___ /8

Cómo resolverlo

Problema resuelto 1

Considera el siguiente rectángulo $ABCD$. Calcula la medida del segmento RS sabiendo que $\frac{AR}{RC} = \frac{5}{2}$, $AR = 20$ cm y $BC = 15$ cm.

Solución:

Como $\frac{AR}{RC} = \frac{5}{2}$ y $AR = 20$ cm, se reemplaza y se obtiene la medida de RC .

$$\frac{20}{RC} = \frac{5}{2}$$

$$RC = \frac{20 \cdot 2}{5} = 4 \cdot 2 = 8$$

$AC = AR + RC = 20 + 8 = 28$ cm y, por Pitágoras, se obtiene el valor de AB .

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$28^2 = AB^2 + 15^2$$

$$784 = AB^2 + 225$$

$$784 - 225 = AB^2$$

$$\sqrt{559} = AB^2 \approx 23,6 \text{ cm}$$

Como el $\triangle ABC$ es semejante con el $\triangle ARS$ (por tener sus tres ángulos correspondientes congruentes), se aplica el teorema de Thales.

Entonces tenemos que:

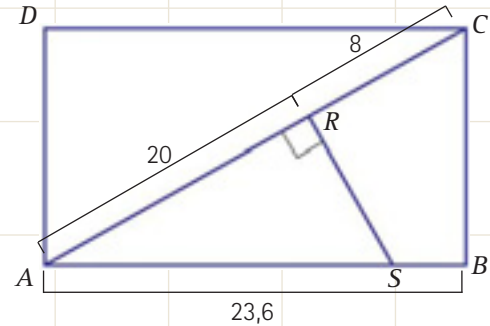
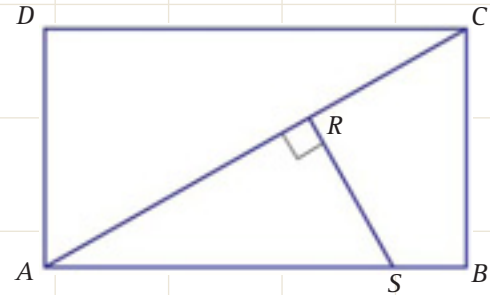
$$\frac{AB}{AR} = \frac{BC}{RS}$$

$$\frac{23,6}{20} = \frac{15}{RS}$$

$$RS = \frac{15 \cdot 20}{23,6}$$

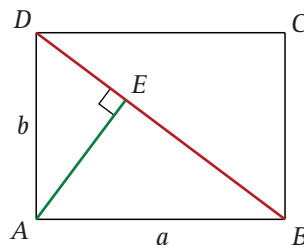
Se obtiene la medida de RS .

$$RS = 12,71 \text{ cm}$$



EN TU CUADERNO

1. En el rectángulo de la figura, $a : b = 4 : 3$ y la diagonal $BD = 10$ cm. ¿Cuánto mide AE ?



Problema resuelto 2

Si $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$,

- Determina la razón entre sus perímetros.
- Determina la razón entre sus áreas.

Solución:

- Ya que las figuras semejantes tienen sus lados proporcionales, sus perímetros necesariamente también están en la misma proporción.

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, entonces se cumple $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$.

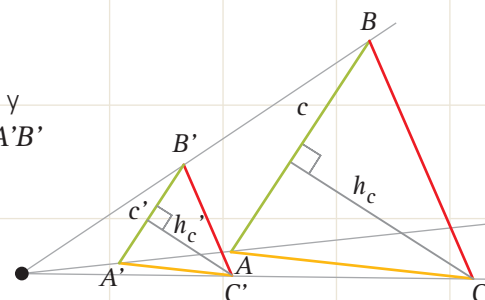
Luego, se cumple que: $A'B' = k \cdot AB$; $B'C' = k \cdot BC$; $C'A' = k \cdot CA$;

De donde: $A'B' + B'C' + C'A' = k \cdot (AB + BC + CA)$;

Es decir: $\text{perímetro } \Delta A'B'C' = k \cdot \text{perímetro } \Delta ABC$,

O bien: $\frac{\text{perímetro } \Delta A'B'C'}{\text{perímetro } \Delta ABC} = k$.

- Por otro lado, si dos triángulos son semejantes, entonces se pueden dibujar de manera que se relacionen por una homotecia de centro O y razón k , que transforme el segmento AB en un segmento paralelo $A'B'$ tal que $c' = k \cdot c$, como se muestra en la figura.



Naturalmente, este k es el mismo de la parte anterior. De modo que la altura h_c' es el segmento homólogo de h_c y satisface la relación $h_c' = k \cdot h_c$.

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \text{Área } \Delta A'B'C' &= \frac{1}{2} \cdot c' \cdot h_c' \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot c \cdot k \cdot h_c = k^2 \cdot \text{Área } \Delta ABC. \end{aligned}$$

$$\text{Entonces, } \frac{\text{Área } \Delta A'B'C'}{\text{Área } \Delta ABC} = k^2.$$

EN TU CUADERNO

- Si a un triángulo equilátero de 12 cm de lado se aplica una homotecia tal que $k = 3$, determina el área del triángulo resultante.
- El área de un cuadrado es de 64 cm^2 . Luego de aplicar una homotecia, se obtiene un cuadrado de área 4 cm^2 . ¿Cuál es el factor de esta homotecia?
- Si a un cuerpo de volumen 27 cm^3 se aplica una homotecia con $k = \frac{5}{3}$, determina el volumen del cuerpo resultante.

Dibujo de planos a escala

La escala se refiere a la cantidad de veces que la representación del plano o del mapa es más pequeña que la realidad, y, por convención, está señalada en centímetros. Por ejemplo, si en un mapa, con escala "1 cm = 10 km", dos lugares están separados por 2,5 cm, en realidad distan 25 km uno del otro. Si un plano está dibujado a escala 1 : 10 000, entonces un centímetro del plano equivale a 100 metros en la realidad.

De esta forma, puede construirse desde el plano de una casa, un edificio o de una ciudad, hasta mapas que representan regiones, países o el mundo completo.



EN TU CUADERNO

1. Consigue un plano de un edificio o un sector de la ciudad y fíjate en la escala en la que está dibujado. Toma sus medidas y calcula, aproximadamente, la superficie que representa.
2. Si la escala de un mapa es mayor que la de otro mapa del mismo sector, ¿qué puedes decir de la superficie que representa? Explica.
3. Según el plano que tienes, ¿a qué distancia se encuentran en realidad dos puntos que en el plano están separados por 1 cm?, ¿y por 1,5 cm?, ¿y por 3 cm?
4. A mayor escala, ¿pueden distinguirse más detalles o menos detalles?, ¿por qué ocurre esto?
5. Si se debe representar con cierto detalle una región pequeña, ¿es más conveniente una escala pequeña o una escala grande?, ¿por qué?

INVESTIGUEMOS...

Ahora, trabajen en grupos de dos personas.

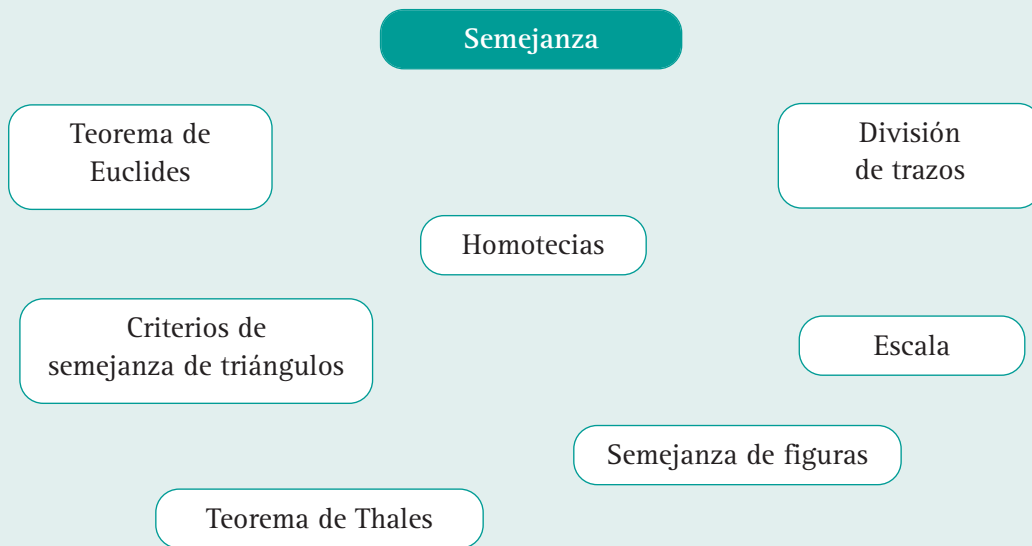
1. Comparen las soluciones obtenidas por cada uno y discutan sobre cuál debería ser la solución correcta. Recuerden que no todos los planos están en una misma escala, lo que lleva a resultados diferentes.
2. Discutan si existe una manera de cambiar la escala del plano usado por cada uno, de manera que el plano obtenido sea mayor (por ejemplo, del doble de largo y ancho) que el original.
3. Repitan el problema anterior ahora, para el caso de que se necesite que el plano sea menor (por ejemplo, la mitad de largo y ancho) que el original.
4. Elijan uno de los planos que tengan y cambien la escala del plano, manteniendo tantos detalles como sea posible, según la nueva escala del mapa que van a construir. Necesitarán cinta adhesiva y un pliego de papel mantequilla. Para esto, junto con tu compañero o compañera, sigan estos pasos:
 - a. Elijan uno de los planos. Luego, deben fijarlo en una superficie lisa, sobre el papel de mantequilla ya extendido.
 - b. Marquen un punto O , ubicado suficientemente lejos del plano elegido, el que será el centro de la homotecia.
 - c. Marquen los puntos correspondientes a las esquinas o bordes del plano, y tracen líneas rectas desde cada uno de estos puntos hasta el punto O . Después, marquen los puntos medios de cada recta y únanlos formando un nuevo rectángulo, que será el borde del plano, pero a una nueva escala.
 - d. Luego, marquen puntos correspondientes a otras marcas importantes del plano, y desde cada uno tracen líneas rectas hasta el punto O , y marquen el punto medio de cada recta, el que, en cada caso, debería estar dentro del rectángulo previamente demarcado.
 - e. Finalmente, unan estos puntos formando figuras semejantes a las que aparecen en el plano original. Obtendrán un nuevo plano, esta vez en una escala que es la mitad de la del plano original.
 - f. Determinen la escala del nuevo plano y comprueben que la superficie representada por el plano original y el que construyeron a una nueva escala es la misma.

EVALUEMOS NUESTRO TRABAJO

- Comparen los resultados obtenidos con los de sus compañeros y compañeras. ¿Se obtienen los mismos resultados? De no ser así, ¿cuáles son las diferencias?
- ¿Es posible mantener a esta nueva escala todos los detalles que tiene el plano original?, ¿por qué?
- ¿Creen que estos pasos descritos puedan aplicarse para crear un plano de mayores dimensiones? En caso de que no sea posible, ¿qué cosas deberían cambiar?

Síntesis de la Unidad

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.



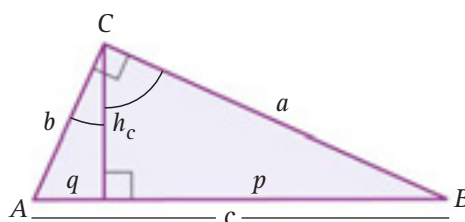
1 Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

- Si dos figuras planas son semejantes, entonces son congruentes.
- Al dividir un trazo AB en razón 1, el punto de división es el punto medio de A y B .
- Todos los pentágonos regulares son semejantes entre sí.
- El teorema de Euclides se aplica a todo tipo de triángulo.
- Dos triángulos semejantes poseen igual área.
- Si una recta corta dos lados de un triángulo de modo que determina segmentos proporcionales, la recta es paralela al tercer lado.
- Todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí.
- Si dos hexágonos se relacionan mediante una homotecia de razón $k = -2$, la figura resultante es de mayor tamaño que la original.
- Al dividir un trazo AB en razón 2, el punto de división está más cerca de A que de B .
- Si dos triángulos poseen dos de sus lados de medidas proporcionales, entonces son semejantes.
- Una homotecia de razón $k = -1$ no preserva longitudes de segmentos.
- Si dos figuras planas son congruentes, entonces son semejantes.
- Todos los triángulos rectángulos son semejantes entre sí.

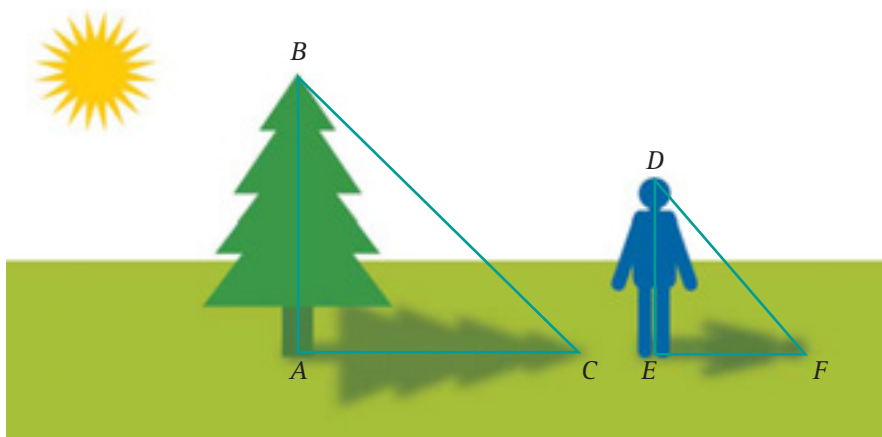
2 Aplica lo que aprendiste en la unidad para resolver los siguientes problemas:



- Paloma mide 1,60 m y quiere calcular la altura del edificio donde vive. Sabe que, a una cierta hora, su sombra mide 2,50 m y la sombra del edificio mide 62,5 m. ¿Cuál es la altura del edificio?
- Si un segmento AB de 75 cm de longitud está dividido en razón $1 : 4$ por un punto P , encuentra la diferencia entre las medidas de los segmentos AP y PB .
- En un $\triangle ABC$ isósceles, sus lados iguales miden 13 cm y el ángulo comprendido entre ellos mide 50° . Otro $\triangle DEF$ isósceles tiene sus lados iguales de medida 7 cm y uno de sus ángulos basales mide 65° . Comprueba que ambos triángulos son semejantes.
- Considera un triángulo rectángulo como el de la figura. Si $a = 3b$, prueba que $p = 9q$.



- Una figura plana tiene como imagen bajo una homotecia una figura semejante, cuya área es la quinta parte del área de la figura original. Determina el factor k de la homotecia.
- En este dibujo, se muestra otra forma de medir la altura de un árbol.



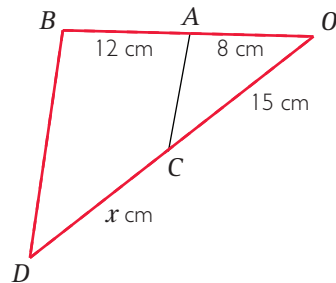
- Determina si los dos triángulos son semejantes.
- ¿Qué criterio de semejanza te sirve para demostrarlo? Completa la demostración.
- Calcula la medida de AB si $AC = 12$ m, $EF = 1$ m y $ED = 1,5$ m.



Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

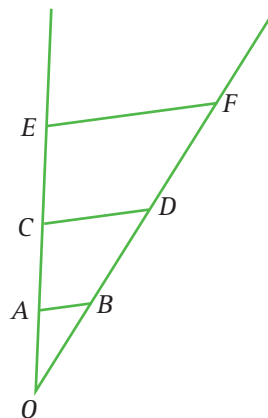
1. En la figura, $AC \parallel BD$, entonces x mide:

- A. 5 cm
- B. 6,4 cm
- C. 10 cm
- D. 17 cm
- E. 22,5 cm



2. Con respecto a la figura, donde $AB \parallel CD \parallel EF$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

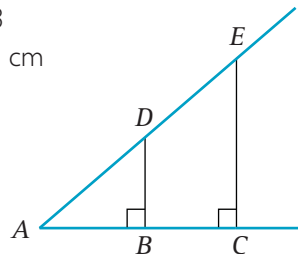
- A. $\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$
- B. $\frac{OA}{CE} = \frac{OB}{DF}$
- C. $\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{EF}$
- D. $\frac{OC}{CE} = \frac{OD}{DF}$
- E. $\frac{EF}{AB} = \frac{FO}{BO}$



3. En la figura, $AC = 14$ cm, $AE = 21$ cm y $AD : DE = 4 : 3$. ¿Cuál(es) de la(s) afirmación(es) es(son) verdadera(s)?

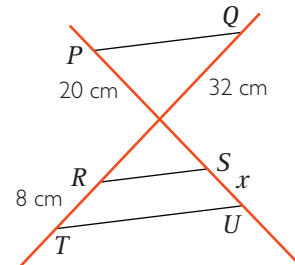
- I. $DB : EC = 4 : 3$
- II. $AD + BC = 18$ cm
- III. $DB = \sqrt{80}$ cm

- A. Solo I
- B. Solo III
- C. I y II
- D. II y III
- E. Ninguna de las anteriores.



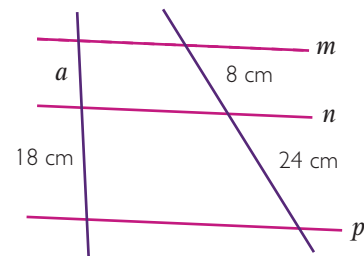
4. En la figura, $PQ \parallel RS \parallel TU$, ¿cuánto mide x ?

- A. 5 cm
- B. 12,8 cm
- C. 24 cm
- D. 80 cm
- E. Ninguna de las anteriores.



5. Las rectas m , n y p de la figura son paralelas. ¿Cuánto mide a ?

- A. 6 cm
- B. 9 cm
- C. 10 cm
- D. 18 cm
- E. 24 cm



6. En un plano, la distancia entre el casino y la biblioteca es de 8 cm. Si la distancia real entre dichos lugares es 200 m, ¿cuál es la escala del plano?

- A. 1 : 20
- B. 1 : 250
- C. 1 : 2500
- D. 4 : 100
- E. Ninguna de las anteriores.

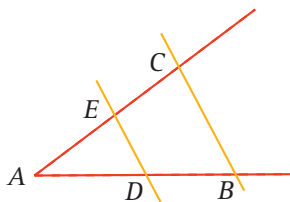
7. Un segmento AB de 7 cm está dividido interiormente por un punto P en la razón $\frac{2}{3}$.

Calcula las longitudes de los segmentos

AP y PB .

- A. $AP = 2$ y $PB = 5$
- B. $AP = 3$ y $PB = 4$
- C. $AP = 2,8$ y $PB = 4,2$
- D. $AP = 2,1$ y $PB = 4,9$
- E. $AP = 1,4$ y $PB = 2,1$

8. En la siguiente figura, $AD : DB = 3 : 2$ y $ED \parallel BC$. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) afirmación(es) es(son) verdadera(s)?

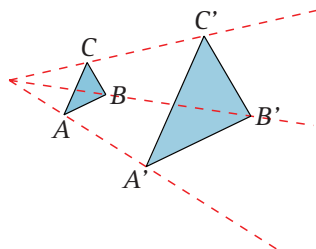


- I. $AE : EC = 3 : 2$
- II. $DE : CB = 3 : 2$
- III. $AD : DE = AC : CB$

- A. Solo I
- B. Solo III
- C. I y III
- D. II y III
- E. Ninguna de las anteriores.

9. En la figura se observa una homotecia de factor 2,5. Si el perímetro del $\triangle A'B'C'$ es 35 cm, ¿cuál es el perímetro del $\triangle ABC$?

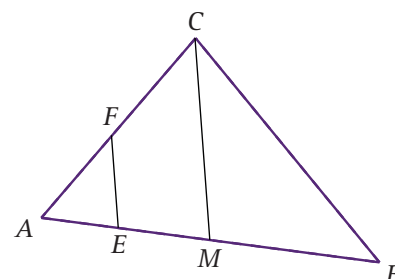
- A. 7 cm
- B. 14 cm
- C. 17,5 cm
- D. 87,5 cm
- E. 105 cm



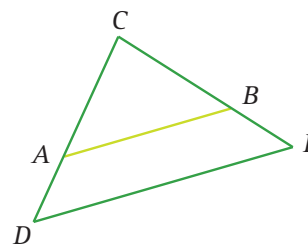
10. En la figura, M es punto medio de AB , $AE = \frac{1}{5} AB$, $EF \parallel CM$ y $AC = 20$ cm.

¿Cuánto mide FC ?

- A. 8 cm
- B. 12 cm
- C. 15 cm
- D. 18 cm
- E. 50 cm



11. En la figura, $AB \parallel DE$. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) afirmación(es) es(son) falsa(s)?



I. $CB \cdot BE = CA \cdot AD$

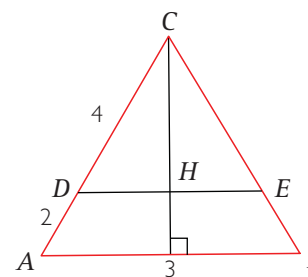
II. $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DE}$

III. $CB \cdot CA = CE \cdot CD$

- A. Solo I.
- B. Solo II.
- C. I y III.
- D. I, II y III.
- E. Ninguna de las anteriores.

12. En el $\triangle ABC$ isósceles de la figura, $DE \parallel AB$. Entonces el valor de CH es:

- A. 1
- B. 1,5
- C. 3
- D. $\sqrt{2}$
- E. $\sqrt{15}$




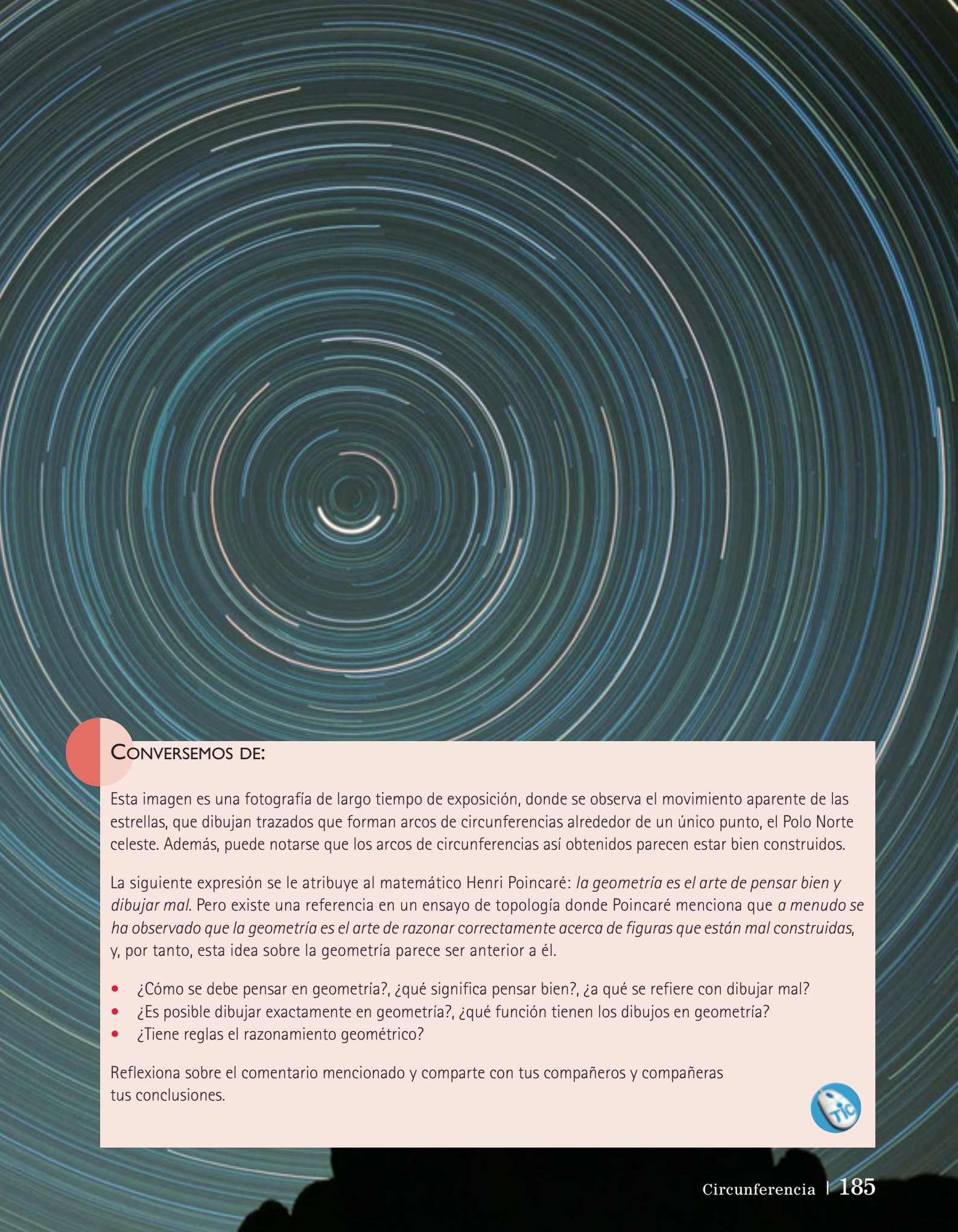
5

Unidad

Circunferencia

EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

- Identificar ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia.
- Relacionar la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito.
- Relacionar las medidas de ángulos interiores y exteriores en una circunferencia con las medidas de los arcos que subtienden.
- Aplicar la noción de semejanza en la demostración de relaciones entre segmentos de cuerdas, secantes y tangentes en una circunferencia.



CONVERSEMOS DE:

Esta imagen es una fotografía de largo tiempo de exposición, donde se observa el movimiento aparente de las estrellas, que dibujan trazados que forman arcos de circunferencias alrededor de un único punto, el Polo Norte celeste. Además, puede notarse que los arcos de circunferencias así obtenidos parecen estar bien contruidos.

La siguiente expresión se le atribuye al matemático Henri Poincaré: *la geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal*. Pero existe una referencia en un ensayo de topología donde Poincaré menciona que *a menudo se ha observado que la geometría es el arte de razonar correctamente acerca de figuras que están mal contruidas*, y, por tanto, esta idea sobre la geometría parece ser anterior a él.

- ¿Cómo se debe pensar en geometría?, ¿qué significa pensar bien?, ¿a qué se refiere con dibujar mal?
- ¿Es posible dibujar exactamente en geometría?, ¿qué función tienen los dibujos en geometría?
- ¿Tiene reglas el razonamiento geométrico?

Reflexiona sobre el comentario mencionado y comparte con tus compañeros y compañeras tus conclusiones.

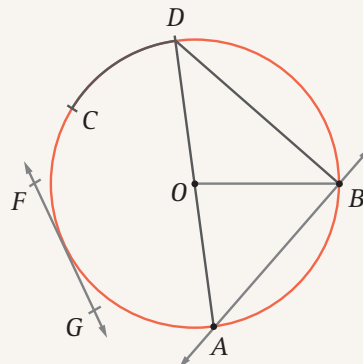


¿Cuánto sabes?

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

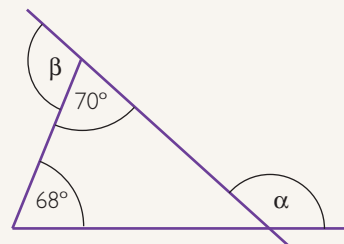
1. Identifica en la circunferencia los siguientes elementos:

- a. diámetro.
- b. secante.
- c. arco.
- d. tangente.
- e. radio.
- f. cuerda.

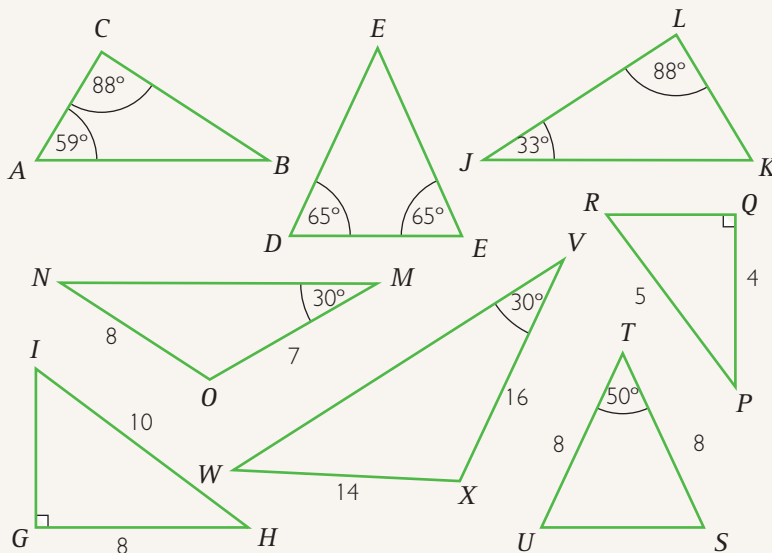


2. ¿Cuál es la diferencia entre un círculo y una circunferencia? Comenta con tus compañeros y compañeras.

3. Calcula el valor de α y β .



4. Encuentra la mayor cantidad posible de parejas de triángulos semejantes e indica en cada caso el criterio que fundamenta la semejanza.

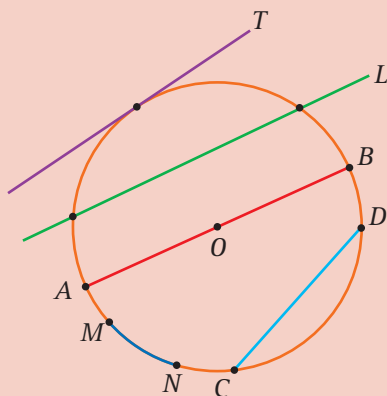


Compara tus respuestas con las de tus compañeros y compañeras. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.



¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- Un **ángulo** es la unión de dos semirrectas, llamadas **lados**, con el extremo común, llamado **vértice**.
- La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia o equidistan de un punto fijo llamado **centro**. Algunos de sus elementos son:
 - **Radio**: es cualquiera de los segmentos que unen el centro con un punto de la circunferencia.
 - **Cuerda**: segmento que une dos puntos de la circunferencia.
 - **Diámetro**: cuerda que contiene al centro de la circunferencia.
 - **Recta secante**: recta que corta la circunferencia en dos puntos.
 - **Recta tangente**: recta que corta a la circunferencia en un punto.
 - **Arco**: parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.



- Dos figuras son **semejantes** si todos sus correspondientes ángulos son iguales y la razón entre sus correspondientes lados es constante.
- Dos triángulos son **semejantes** si todos los lados correspondientes son proporcionales y si las medidas de los ángulos correspondientes son iguales.
- Para establecer la semejanza entre dos triángulos, se pueden utilizar los siguientes criterios:
 - **Criterio AA o primer criterio de semejanza**: si dos triángulos tienen dos de sus ángulos iguales, entonces los triángulos son semejantes.
 - **Criterio LLL o segundo criterio de semejanza**: si dos triángulos tienen todos sus lados correspondientes en igual proporción, entonces los triángulos son semejantes.
 - **Criterio LAL o tercer criterio de semejanza**: si dos triángulos poseen dos de sus lados correspondientes en igual proporción y los ángulos comprendidos por dichos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

Medición de arcos



En el reloj se ha marcado el arco \widehat{AB} , que corresponde al recorrido del segundero durante 20 segundos.

ANALICEMOS...

- Si mides con una regla el arco \widehat{AB} , ¿cuánto obtienes?
- ¿Obtuvieron tus compañeros y compañeras la misma medida?, ¿por qué?
- Si midieras con la regla el arco correspondiente al recorrido del segundero durante 40 segundos, ¿medirá el doble?, ¿por qué?
- ¿De qué otra manera se puede medir un arco? Explica.

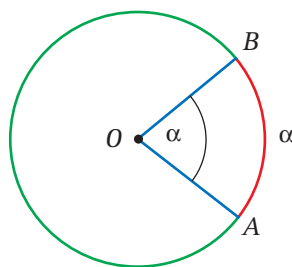
RECUERDA QUE...

- Los **arcos** en una circunferencia se leen en sentido contrario de los punteros del reloj; en la figura, con rojo se marca el arco \widehat{AB} y con verde el arco \widehat{BA} .

Medir un arco de una circunferencia no es una tarea fácil; a continuación, veremos dos métodos para hacerlo.

En unidades de longitud

El arco de circunferencia es una curva; luego puede medirse en las unidades de longitud que correspondan (metros, centímetros, kilómetros, etc). Por lo general, esta medida se calcula como una fracción de la longitud de la circunferencia, proporcional a su medida en grados. Observa.



GLOSARIO

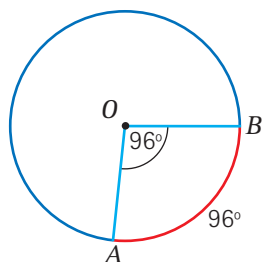
Se llama **ángulo del centro** al formado por dos radios de una circunferencia.

La razón entre el ángulo α y el ángulo completo, 360° , forman una proporción con la longitud del arco y la longitud de la circunferencia. Luego, se puede obtener la medida de longitud si se conoce la medida del radio de la circunferencia de la siguiente manera. Observa.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\widehat{AB}}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ}$$

En grados sexagesimales

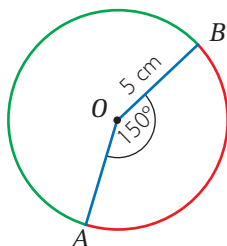
Observa que los lados del $\angle AOB$ intersecan a la circunferencia en los puntos A y B . Se dice que el $\angle AOB$ **subtiende** el arco AB . La medida de un arco también se puede expresar en grados sexagesimales, así, el arco de la circunferencia mide lo mismo que el ángulo del centro que lo subtiende.



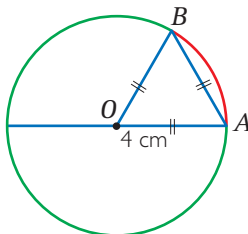
EN TU CUADERNO

1. Mide en unidades de longitud los arcos marcados con rojo.

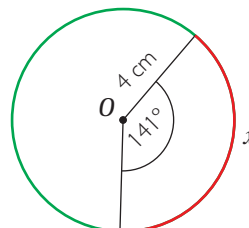
a.



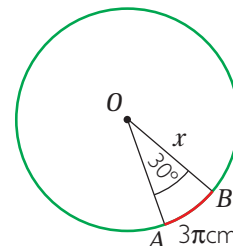
b.



c.



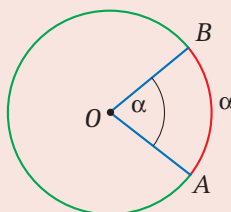
d.



EN RESUMEN

- Un **ángulo del centro** subtiende el arco que determinan los radios sobre la circunferencia. En la figura, $\angle AOB$ subtiende el arco \widehat{AB} .
- La medida de un arco (en grados) es directamente proporcional a su longitud (en cm, m, etc.).

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\widehat{AB}}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ}$$

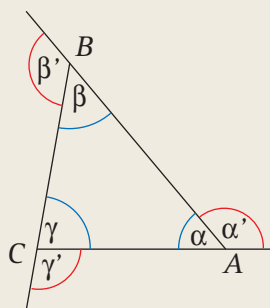


Ángulos del centro y ángulos inscritos

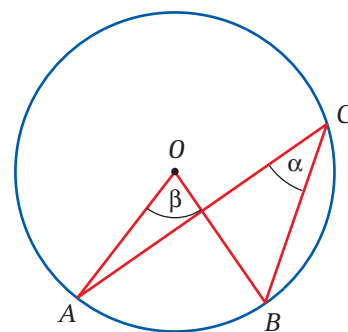
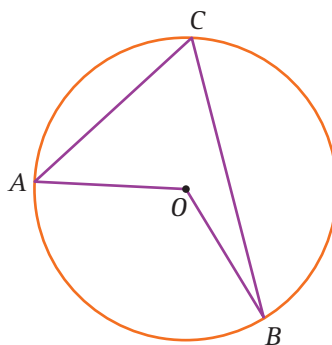
RECUERDA QUE...

- El arco AB se lee en sentido **contrario** al del reloj.
- La medida de un **ángulo exterior** de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

$$\alpha' = \beta + \gamma$$



Considera las siguientes figuras, en las que se han determinado ángulos a partir de los arcos que subtienden.



ANALICEMOS...

- ¿Qué tienen en común $\angle ACB$ y $\angle AOB$?, ¿cuál es la diferencia entre ellos?, ¿dónde está ubicado el vértice del ángulo, en cada caso?
- Con la ayuda de un transportador, mide $\angle ACB$ y $\angle AOB$; ¿existe una relación entre ambas medidas en cada caso?
- En tu cuaderno traza una circunferencia, marca el centro O y tres puntos en la circunferencia: A , B y C . Traza los segmentos AC , AO , CB y OB y, con la ayuda de un transportador, mide $\angle ACB$ y $\angle AOB$. ¿En este caso existe una relación entre ambas medidas?
- Comenta tus resultados con tus compañeros y compañeras; ¿qué puedes concluir?

GLOSARIO

Radio: segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.

Ángulo inscrito en una circunferencia: ángulo formado por dos cuerdas y su vértice sobre la circunferencia.

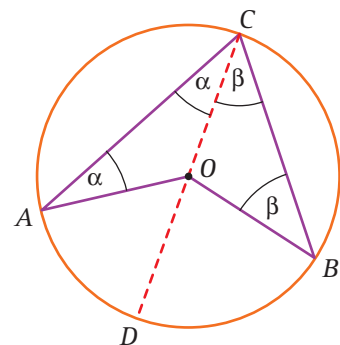
Ángulo del centro: ángulo formado por dos radios y que tiene su vértice en el centro de la circunferencia.

En las figuras, como el $\angle AOB$ tiene su vértice en el centro de la circunferencia, es un **ángulo del centro**. Además, subtiende al arco AB .

Por otro lado, el $\angle ACB$ tiene su vértice en la circunferencia, luego, es un **ángulo inscrito**. Observa que este ángulo también subtiende al arco AB .

Tal como se comprueba al medir cada ángulo, si subtienden el mismo arco, el ángulo inscrito mide la mitad de la medida del correspondiente ángulo del centro. La pregunta es si esto ocurre **siempre**.

Para realizar la demostración, en el primer caso, se puede dibujar el diámetro CD . Observa que se forman dos triángulos isósceles, como en el dibujo.

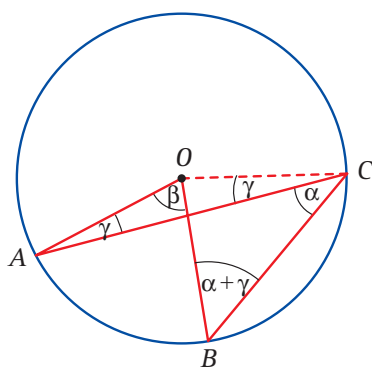


Sean α y β los ángulos basales en cada uno de estos triángulos. Luego, los ángulos exteriores, esto es, $\angle AOD$ del $\triangle AOC$ y $\angle DOB$ del $\triangle BOC$ miden 2α y 2β , respectivamente.

De la imagen anterior, se concluye claramente que:

$$\angle AOB = \angle AOD + \angle DOB = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot \angle ACB$$

En el caso de que el ángulo inscrito no contenga al centro de la circunferencia, no se puede justificar con la demostración vista anteriormente. Sin embargo, es posible usar una idea similar, trazando el segmento OC , como muestra la figura.



Observa que $\angle ACB = \angle BCO - \angle ACO$ y, por lo tanto, $\angle BOC = 180^\circ - 2(\alpha + \gamma)$.

Por otro lado, en $\angle AOC$, se tiene la relación:

$$2\gamma + \beta + 180^\circ - 2\alpha - 2\gamma = 180^\circ$$

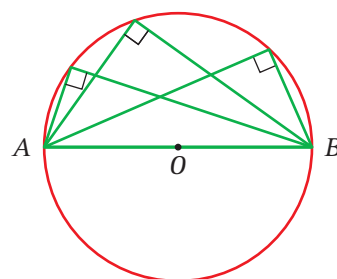
De donde se obtiene la relación $\beta = 2\alpha$, es decir, $\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB$.

Por lo tanto, en esta situación también se concluye que la medida del ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la medida del ángulo del centro, si ambos ángulos subtienden al mismo arco.

Ejemplo 1

Observa la figura siguiente. Los ángulos están inscritos en una semicircunferencia.

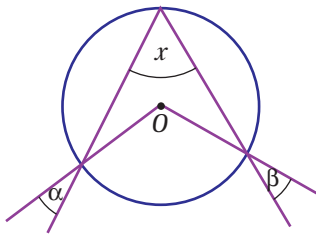
Independiente de la posición del ángulo, si un ángulo está inscrito en una semicircunferencia, necesariamente es un ángulo recto, ya que mide la mitad del ángulo del centro correspondiente, que en este caso mide 180° .



No OLVIDES QUE...

Solo una **demostración** matemática permite aseverar que una proposición se cumpla para todos los casos. Justificarla a través de algunos casos no basta.

En cambio, para justificar que una proposición es falsa, sí basta con mostrar un ejemplo que satisfaga las premisas, pero no cumpla con la conclusión.



Ejemplo 2

Si $\alpha = 50^\circ$ y $\beta = 60^\circ$, ¿cuánto mide el ángulo x ? El dibujo está desproporcionado intencionalmente. La solución debe fundamentarse en las ideas.

Si se dibuja el radio que une el centro O con el vértice del ángulo x , los triángulos que se forman son ambos isósceles, cuyos ángulos basales son α y β , ya que ángulos opuestos por el vértice son iguales. Además, como ambos triángulos formados son isósceles, se tiene la relación:

$$\angle x = \alpha + \beta$$

Por lo tanto, $\angle x = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ$.

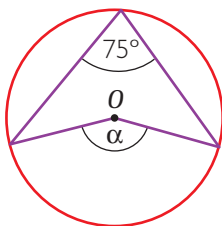
EN RESUMEN

- Si un ángulo del centro y un ángulo inscrito subtenden el mismo arco de circunferencia, la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro.
- No depende de las medidas de otros ángulos.
- Esto se cumple tanto si el centro de la circunferencia está dentro o fuera del ángulo inscrito.
- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

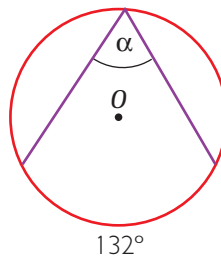
EN TU CUADERNO

1. Calcula el valor del ángulo pedido en cada caso.

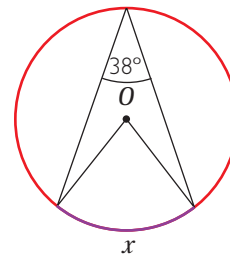
a.



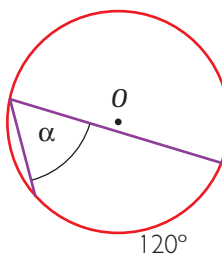
c.



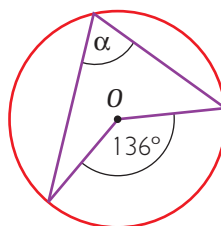
e.



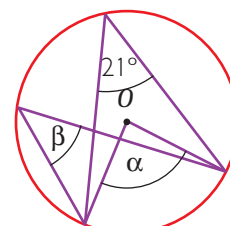
b.



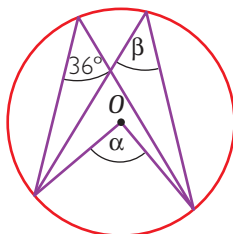
d.



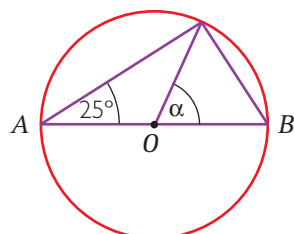
f.



g.

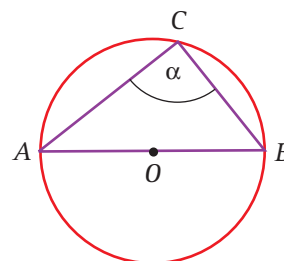


h.



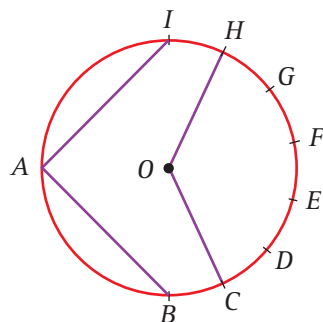
AB es diámetro

i.

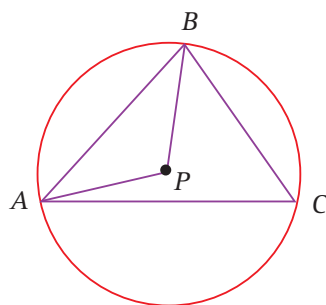


AB es diámetro

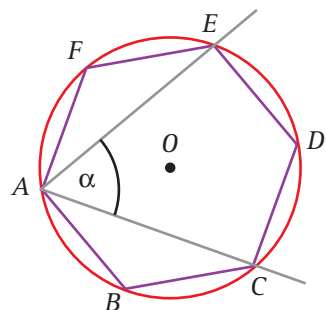
2. En la circunferencia de centro O , los arcos BC , CD , DE , EF , FG , GH y HI son congruentes. Si el ángulo $BAI = 84^\circ$, determina la medida del ángulo COH .



3. En la figura, AC es un arco de circunferencia de centro P , donde $\angle ACB = 45^\circ$. Determina qué tipo de triángulo es el $\triangle APB$.

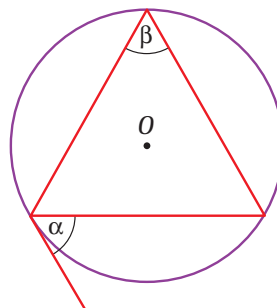


4. En la figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular. Determina la medida de α .



Ángulos semi-inscritos

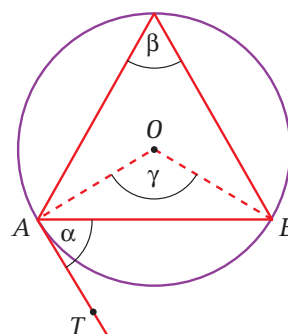
Considera ahora la tangente a la circunferencia en uno de los puntos de un ángulo inscrito, como indica la figura.



ANALICEMOS...

- ¿Se puede determinar la medida del ángulo α ?
- Supón que conoces la medida del ángulo α , ¿existe alguna relación con el ángulo inscrito β ?
- ¿Existe alguna relación con el ángulo del centro correspondiente (es decir, que subtiende el mismo arco)?

Primero, observa que el ángulo α no es ángulo del centro ni inscrito, pese a que el vértice está sobre la circunferencia, ya que uno de sus lados está fuera de la circunferencia, razón por la cual se llama **ángulo semi-inscrito**. Por ahora, observa el siguiente $\triangle AOB$. Si la medida del ángulo del centro es, por ejemplo, γ , la medida de los otros ángulos es fácil de determinar.



GLOSARIO

Cuerda: segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Tangente a una circunferencia: es una recta que interseca a una circunferencia en un solo punto, llamado punto de tangencia. Si se dibuja el radio que une el centro con el punto de tangencia, se obtiene un trazo perpendicular a la tangente.

Ángulo semi-inscrito: en una circunferencia, se le llama al ángulo formado por una tangente y una cuerda, en el punto de tangencia.

Como el $\triangle AOB$ es isósceles, $\angle OAB$ y $\angle OBA$ son iguales, y miden:

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2} \cdot (180 - \gamma) = 90 - \frac{\gamma}{2}.$$

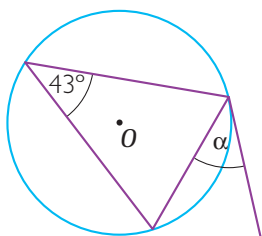
A partir de la figura anterior, $\gamma = 2\beta$. Además, la tangente AT es perpendicular al radio OA y, por tanto, $\angle OAB = \angle OBA = 90 - \alpha$, de donde $2\alpha = \gamma$.

Por lo tanto, se tiene $\alpha = \beta$. Es decir, la medida determinada por el ángulo semi-inscrito es igual a la del ángulo inscrito correspondiente y a la mitad del ángulo del centro correspondiente.

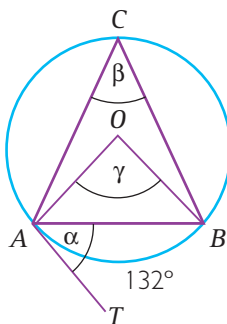
EN TU CUADERNO

1. Calcula la medida de los ángulos α , β y γ marcados en cada caso.

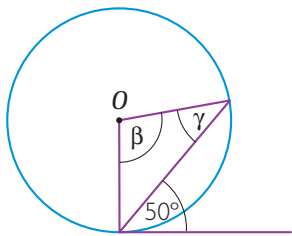
a.



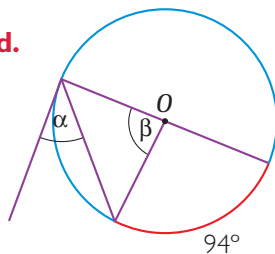
b.



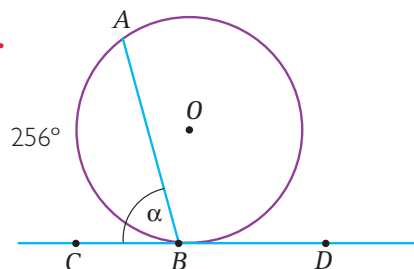
c.



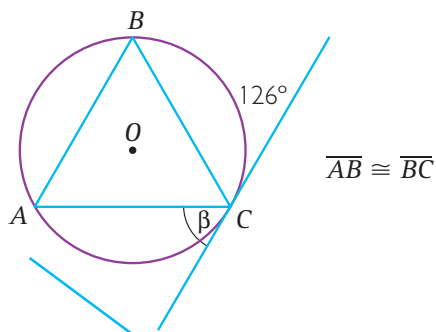
d.



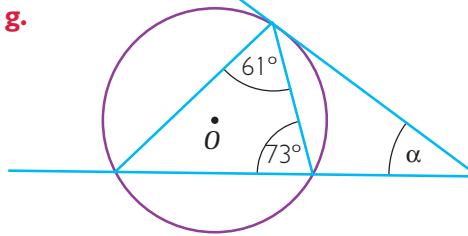
e.



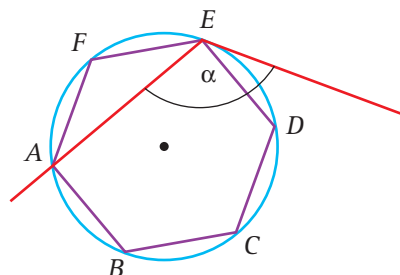
f.



g.



h.



$ABCDEF$ es hexágono regular.



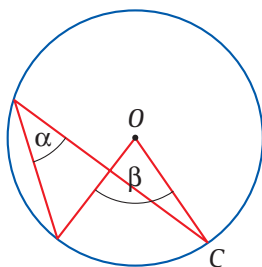
EN RESUMEN

- La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.
- El ángulo semi-inscrito mide la mitad del arco que subtiende.

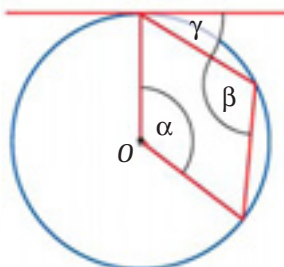
MI PROGRESO

1. Clasifica los ángulos α , β , γ en: ángulo del centro, inscrito o semi-inscrito, según corresponda.

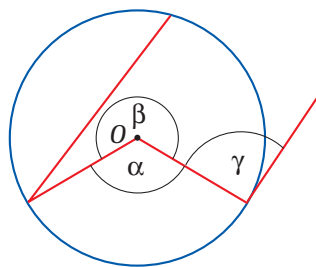
a.



b.

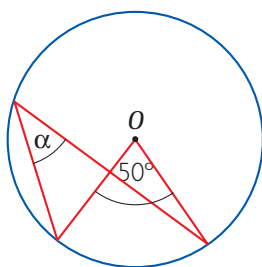


c.

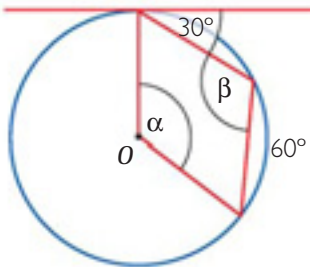


2. Determina la medida de los ángulos indicados, en cada caso.

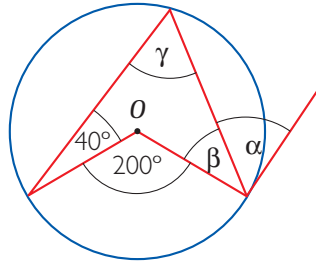
a.



b.

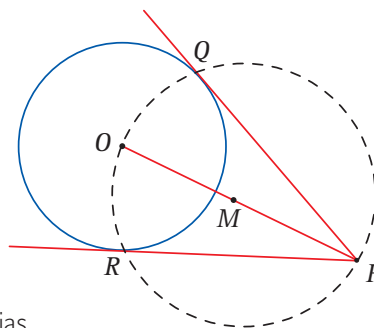


c.



3. Justifica por qué de la construcción de la tangente a una circunferencia que pasa por un punto P fuera de ella, que se presenta a continuación, se obtiene que las rectas PQ y PR son tangentes a la circunferencia inicial.

- Se dibuja un segmento OP .
- Se marca punto medio M de OP .
- Se traza la circunferencia con centro en M y radio OM .
- Se nombra Q y R a las intersecciones de ambas circunferencias.



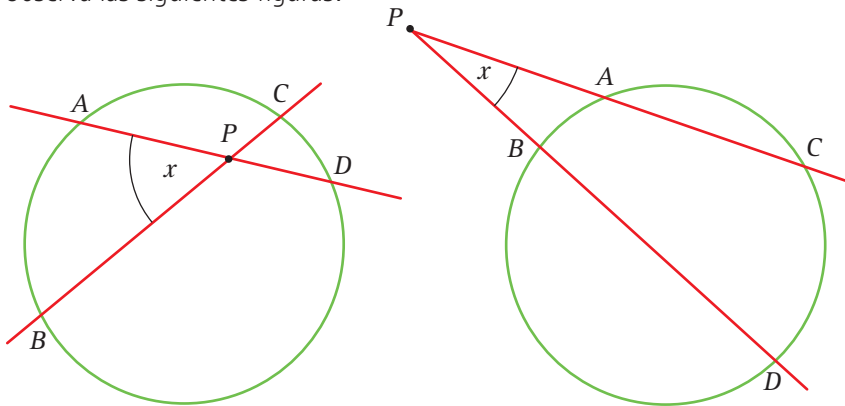
¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Reconocer ángulos en la circunferencia.	1	___/9
Aplicar propiedades según el tipo de ángulo.	2	___/6
Justificar a partir de una construcción geométrica.	3	___/1

Ángulos interiores y ángulos exteriores a una circunferencia

Observa las siguientes figuras:



GLOSARIO

Secantes a una circunferencia:

una recta secante corta a la circunferencia en dos puntos. Si dos secantes a una circunferencia se cortan en un punto forman un **ángulo interior**, cuando este punto es interior a la circunferencia, y un **ángulo exterior**, si dicho punto es exterior.

ANALICEMOS...

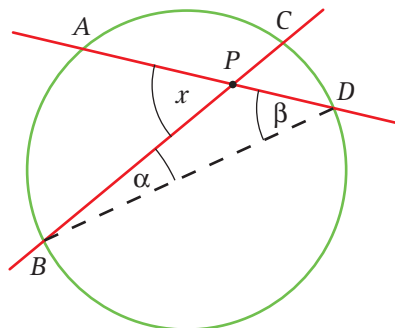
- En cada caso, $\angle APB$ y $\angle CPD$ ¿son ángulos inscritos?, ¿son ángulos semi-inscritos?, ¿por qué?
- ¿Qué característica tiene el vértice P en cada caso?
- Si se conocieran las medidas de los arcos AB y CD , ¿se podría calcular la medida del ángulo x , en cada caso?, ¿por qué?
- Copia las figuras en tu cuaderno y traza la cuerda BD en la primera figura y la cuerda BC en la segunda figura. Llama α y β a los ángulos inscritos que se formaron. ¿Cuál es la relación entre α , β y x ? Explica.

Estos ángulos se nombran dependiendo de dónde está el vértice del ángulo. En la primera figura, el vértice P es interior a la circunferencia, luego los ángulos $\angle APB$, $\angle BPD$, $\angle APC$ y $\angle CPD$ son ángulos **interiores**. En cambio, en la segunda figura, el vértice P está en el exterior de la circunferencia, luego $\angle CPD$ es un ángulo **exterior**.

En el caso del ángulo interior, $\triangle BDP$ nos muestra que $x = \alpha + \beta$. Como los ángulos α y β son ángulos inscritos, que miden la mitad de los respectivos ángulos del centro que subtienden a los mismos arcos,

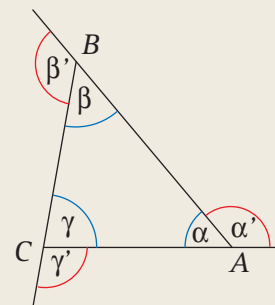
entonces, $\alpha = \frac{\widehat{DC}}{2}$ y $\beta = \frac{\widehat{AB}}{2}$ y luego,

$$x = \frac{\widehat{DC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{(\widehat{DC} + \widehat{AB})}{2}$$

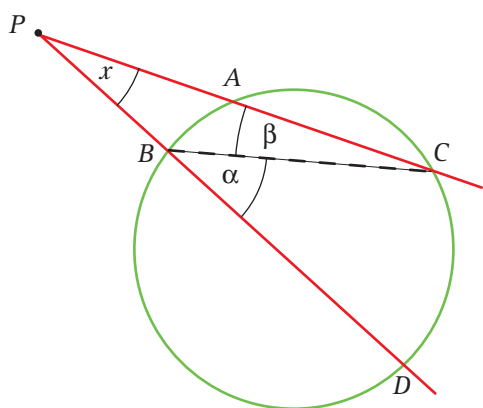


RECUERDA QUE...

- La medida del **ángulo exterior de un triángulo** es igual a la suma de las medidas de sus dos ángulos interiores no adyacentes.



$$\begin{aligned}\alpha' &= \beta + \gamma \\ \beta' &= \alpha + \gamma \\ \gamma' &= \alpha + \beta\end{aligned}$$



En el caso del ángulo exterior, $\triangle PBC$ nos muestra que $x = \alpha - \beta$. Como los ángulos α y β son ángulos inscritos, que miden la mitad del arco que subtienden, entonces, $\alpha = \frac{\widehat{DC}}{2}$ y $\beta = \frac{\widehat{AB}}{2}$ y luego,

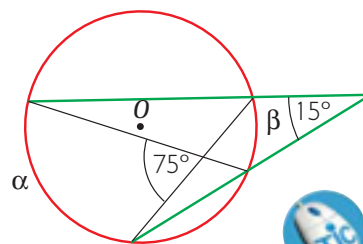
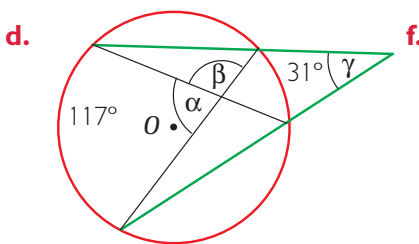
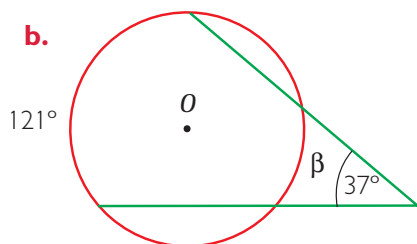
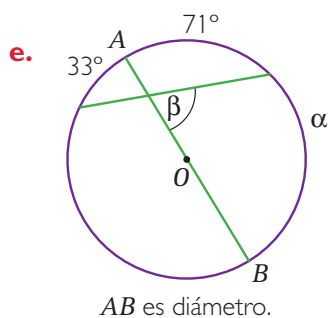
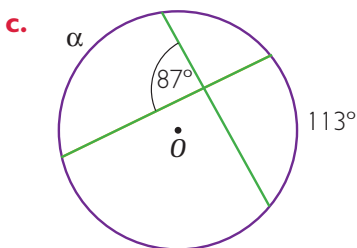
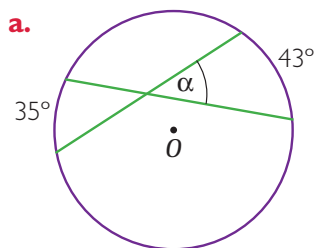
$$x = \frac{\widehat{DC}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{(\widehat{DC} - \widehat{AB})}{2}$$

EN RESUMEN

- Un **ángulo interior** a una circunferencia puede definirse como el ángulo formado por dos cuerdas que se cortan.
- Un ángulo interior mide la semi-suma de los arcos que subtiende.
- Un **ángulo exterior** de una circunferencia es aquel cuyo vértice está en el exterior de la circunferencia y cuyos lados son secantes o tangentes.
- Un ángulo exterior mide la semi-diferencia de los arcos que subtiende.

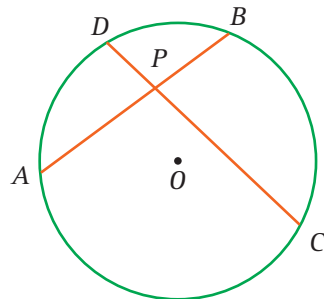
EN TU CUADERNO

1. Calcula la medida de los elementos pedidos en cada una de las figuras siguientes.



Proporcionalidad entre las cuerdas de una circunferencia

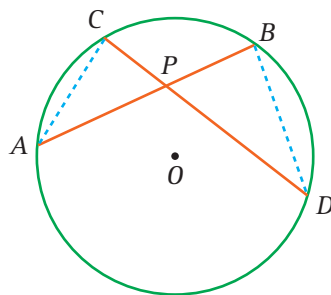
Observa la siguiente figura. AB y CD son cuerdas de la circunferencia.



ANALICEMOS...

- Mide con una regla los segmentos AP , PB , CP y PD . ¿Hay alguna relación entre estas medidas?
- ¿En qué razón están los segmentos AP y PB ?, ¿y los segmentos CP y PD ?
- ¿Estos valores se pueden ordenar en una proporción?, ¿por qué?
- Traza una circunferencia en tu cuaderno. Marca en ella cuatro puntos y traza las cuerdas correspondientes, de modo que se intersecten en un punto. Mide y compara los segmentos tal como lo hiciste en la figura anterior. ¿Estas medidas se pueden ordenar en una proporción?, ¿por qué?, ¿qué puedes concluir?
- ¿Cómo se demuestra que esto se cumple siempre? Explica.

Para determinar la proporción en que el punto P divide ambos segmentos, se debe demostrar la semejanza de los triángulos correspondientes. Considera formar dos triángulos trazando las cuerdas AC y BD .



Observa:

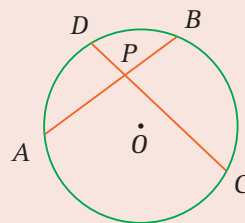
$\angle APC = \angle BPD$, ya que son opuestos por el vértice,
 $\angle ABD = \angle ACD$, ya que subtenden al mismo arco AD ,
 $\triangle APC \sim \triangle DPB$, por el criterio **AA** de semejanza,
 $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$, ya que $\triangle APC \sim \triangle DPB$;
de donde se obtiene $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

RECUERDA QUE...

- **Criterio AA de semejanza:**
Si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes.

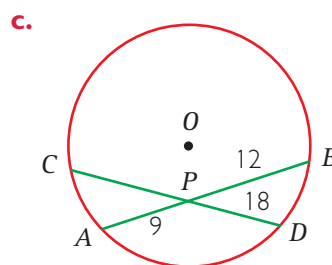
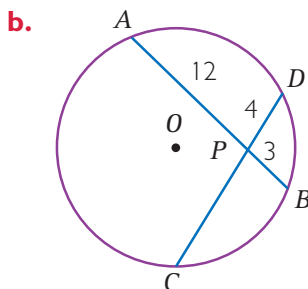
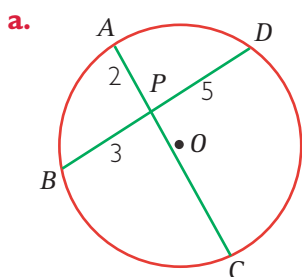
EN RESUMEN

- Si dos cuerdas de una circunferencia se intersectan, su punto de intersección las divide en segmentos proporcionales. De aquí se concluye que $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.



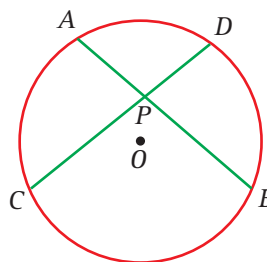
EN TU CUADERNO

1. En los siguientes ejercicios, determina la medida de PC .



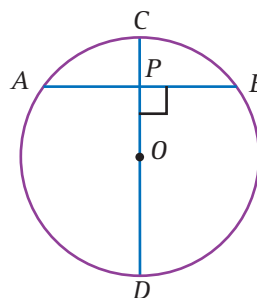
2. Considera la figura siguiente y determina:

- la medida de PD , si $AP = 10$, $PB = 6$, $CP = 12$.
- la medida de CP , si $AB = 15$, $PB = 8$, $PD = 4$.
- la medida de PB , si $AP = 6$, $PD = 4$, $CD = 13$.
- la medida de AP , si $PD = 5$, $PB = 2 \cdot AP$, $CD = 15$.



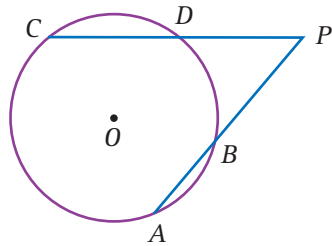
3. En la figura siguiente, el diámetro CD es perpendicular a la cuerda AB . (Ayuda: en este caso, los segmentos AP y PB tienen igual medida).

- Determina AB , si $OD = 10$, $OP = 8$.
- Determina OD , si $AB = 24$, $OP = 5$.
- Determina AB , si $OD = 25$, $PC = 18$.
- Determina PC , si $AB = 8$, $OD = 5$.



Proporcionalidad entre las secantes de una circunferencia

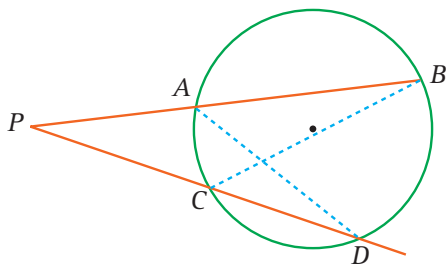
Observa la siguiente figura. AP y CP son secantes de la circunferencia, que la intersecan en los puntos B y D , respectivamente.



ANALICEMOS...

- Mide con una regla los segmentos AP , PB , CP y PD . ¿Hay alguna relación entre estas medidas?
- ¿En qué razón están los segmentos AP y PB ?, ¿y los segmentos CP y PD ?
- ¿Estos valores se pueden ordenar en una proporción?, ¿por qué?
- Traza una circunferencia en tu cuaderno. Traza dos secantes, de modo que se intersequen en un punto exterior. Mide y compara los segmentos tal como lo hiciste en la figura anterior. ¿Estas medidas se pueden ordenar en una proporción?, ¿por qué?, ¿qué puedes concluir?
- ¿Cómo se demuestra que esto se cumple siempre? Explica.

Tal como en la sección anterior, para establecer la proporcionalidad, primero se debe establecer la semejanza. Para esto, se trazan las cuerdas AD y BC , para formar los triángulos necesarios.

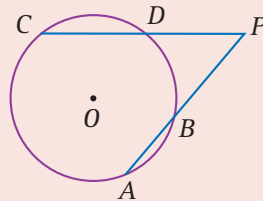


Observa:

$\angle PBC = \angle PDA$, ya que ambos subtienden el arco AC ;
 $\angle APD = \angle CPB$, ángulo en común de $\triangle APD$ y $\triangle CPB$,
 $\triangle APD \sim \triangle CPB$ por el criterio **AA** de semejanza;
 $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, ya que $\triangle APD \sim \triangle CPB$;
de donde se obtiene $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

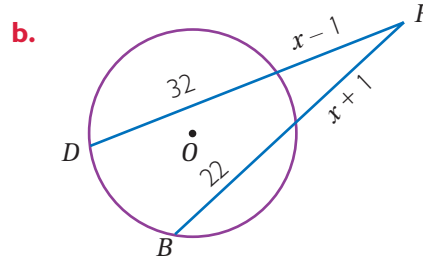
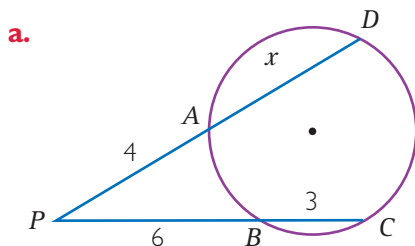
EN RESUMEN

- Si dos secantes a una circunferencia se cortan en un punto fuera de ella, los puntos de intersección de cada una con la circunferencia determinan segmentos proporcionales.
De aquí se concluye que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



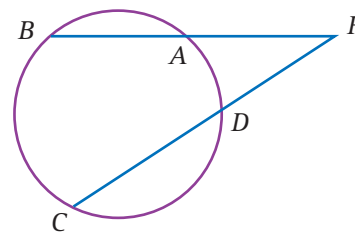
EN TU CUADERNO

1. Determina la medida de x .



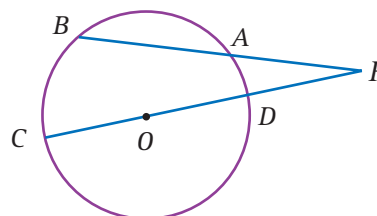
2. En la figura siguiente, los segmentos PB y PC son secantes a la circunferencia.

- Determina PC , si $PB = 14$, $PA = 4$, $PD = 7$.
- Determina BA , si $PC = 8$, $PD = 6$, $PA = 3$.
- Determina PC , si $BA = 5$, $PA = 7$, $PD = 4$.
- Determina PA , si $PA = AB$, $DC = 14$, $PD = 4$.



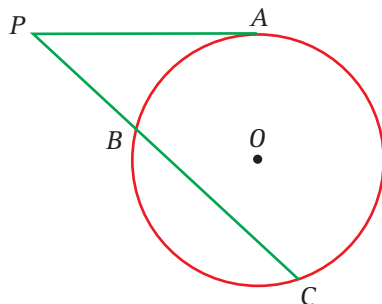
3. En la figura siguiente, los segmentos PB y PC son secantes a la circunferencia, CP es diámetro.

- Determina PB , si $OC = 3$, $PD = 6$, $PA = 8$.
- Determina OC , si $BA = 7$, $PA = 7$, $PD = 2$.
- Determina PD , si $OC = 11$, $PB = 15$, $PA = 5$.
- Determina PA , si $OC = 5$, $PD = 6$, $BA = 4$.



Proporcionalidad entre las secantes y tangentes de una circunferencia

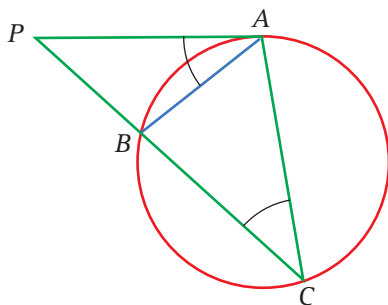
En el caso de una tangente con una secante a la circunferencia, tenemos que considerar al ángulo exterior que ellas forman.



ANALICEMOS...

- ¿Cuál es la medida de $\angle CPA$?, ¿se relaciona con alguno de los ángulos inscritos?
- Entonces, ¿es posible relacionar las medidas de los segmentos?
- Supón que conoces la medida del segmento AP , ¿puedes determinar las medidas de PB o de PC ?
- Suponiendo que conoces todas las medidas, ¿existe alguna relación entre estas?

Primero, debes notar que el vértice de $\angle CPA$ está fuera de la circunferencia, por lo que es un **ángulo exterior**. Ahora, se trazan las cuerdas AB y AC , obteniendo triángulos como se muestra en la figura.



Observa:

$\angle PAB = \angle BCA$, ya que subtienden al mismo arco AB ;

$\angle CPA = \angle BPA$ ángulo en común de $\triangle APB$ y $\triangle CPA$;

$\triangle APB \sim \triangle CPA$, por el **criterio AA** de semejanza;

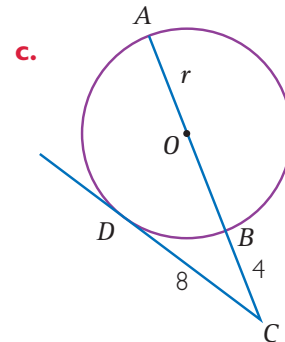
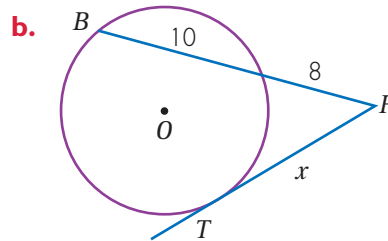
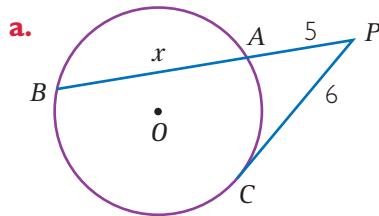
$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA}, \text{ ya que } \triangle APB \sim \triangle CPA;$$

de donde se obtiene $PA^2 = PB \cdot PC$.

Es decir, si una tangente y una secante se trazan desde un mismo punto, la tangente es la media proporcional de los segmentos determinados por la secante hasta cada punto de intersección con la circunferencia.

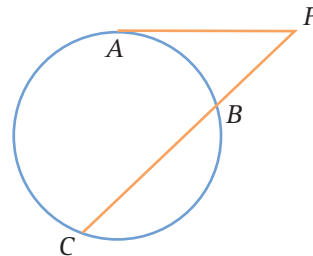
EN TU CUADERNO

1. Calcula la medida del segmento pedido en cada caso.



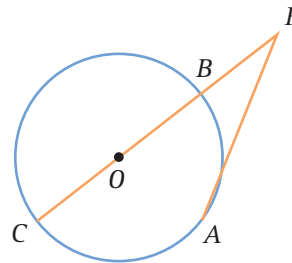
2. En la figura siguiente, el segmento PA es tangente a la circunferencia.

- Determina PA , si $PC = 16$, $PB = 4$.
- Determina PA , si $CB = 5$, $PB = 4$.
- Determina PC , si $PA = 6$, $PB = 3$.
- Determina PB , si $PC = 20$, $PA = 10$.
- Determina CB , si $PA = 12$, $PB = 9$.

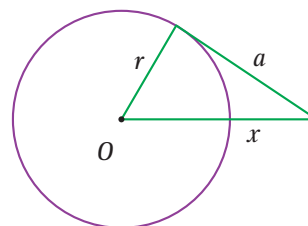


3. En la figura siguiente, el segmento PA es tangente a la circunferencia y CB es diámetro.

- Determina PA , si $PB = 6$, $OB = 9$.
- Determina CB , si $PB = 2$, $PA = 8$.
- Determina OB , si $PB = 5$, $PA = 10$.
- Determina OB , si $PA = 12$, $PC = 18$.
- Determina PB , si $OB = 5$, $PA = 12$.



4. En el dibujo, O es el centro de la circunferencia.
Prueba que se cumple la relación $a^2 = x \cdot (x + 2r)$

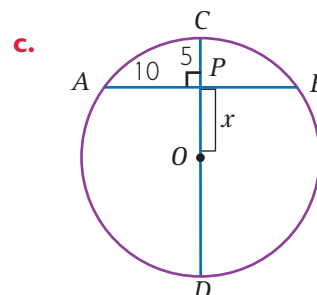
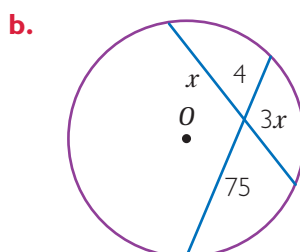
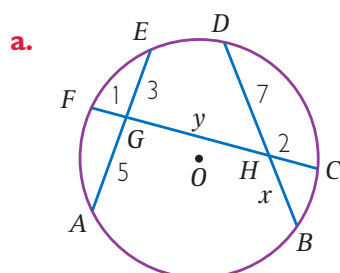
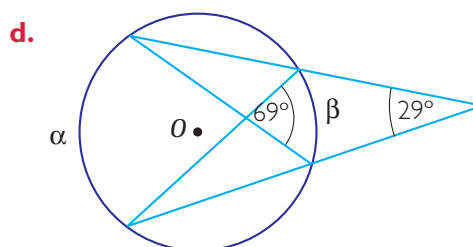
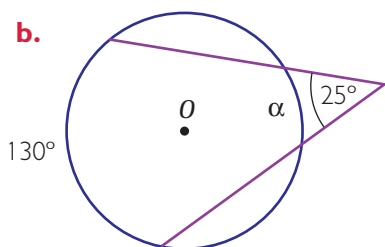
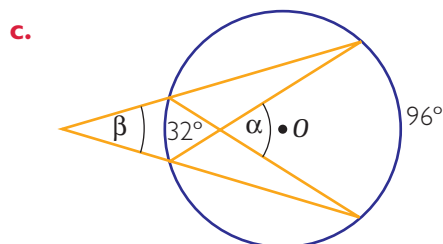
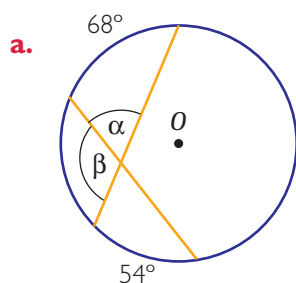


EN RESUMEN

- Si una tangente y una secante se trazan desde un mismo punto, la tangente es la media proporcional de los segmentos determinados por la secante hasta cada punto de intersección con la circunferencia.

MI PROGRESO

1. Determina el valor desconocido en los siguientes casos.


 2. Determina el valor de α y β en cada caso.


¿Cómo voy?

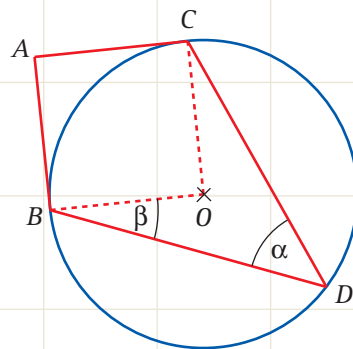
- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Aplicar propiedades de cuerdas, secantes y tangentes.	1	___/3
Calcular ángulos interiores y exteriores.	2	___/4

Cómo resolverlo

Problema resuelto 1

En la figura, $ABOC$ es un cuadrado y los arcos CD y BD son iguales. ¿Qué valores tienen los ángulos α y β ?



Solución:

Como el ángulo α es un ángulo inscrito, se tiene la relación $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \widehat{CB}$.

$\sphericalangle COB$ que es ángulo recto.

Además, \widehat{CB} es el arco subtendido por el ángulo del centro $\sphericalangle COB$.
Luego, si el arco $\widehat{CB} = 90^\circ$, entonces $\alpha = 45^\circ$.

Como $CD = BD$ y $CB = 90^\circ$,
se reemplaza en la igualdad.

Por otro lado, para determinar β , ya que $\widehat{DC} + \widehat{BD} + \widehat{CB} = 360^\circ$,
de donde se obtiene $90^\circ + 2 \cdot \widehat{BD} = 360^\circ$, y por tanto, $\widehat{BD} = \widehat{CD} = 135^\circ$.

Uniendo B con C se observa que el arco \widehat{DC} corresponde al arco que
subtiende el ángulo inscrito CBD . Luego, se tiene $\sphericalangle CBD = \frac{1}{2} \cdot 135^\circ$.

La diagonal de un cuadrado
es bisectriz del ángulo
respectivo.

Pero $\sphericalangle CBD = 45^\circ + \beta$, obteniendo finalmente,

$$\beta = \sphericalangle CBD - 45^\circ = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ.$$

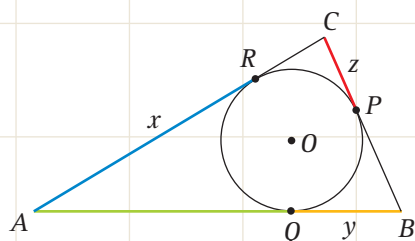
Por lo tanto, $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 22,5^\circ$.

EN TU CUADERNO

1. Determina las medidas de los ángulos α y β para el caso que el cuadrado $ABOC$ se reemplaza por:
 - a. un pentágono regular.
 - b. un hexágono regular.
2. Con el dibujo de arriba, fija la medida del $\sphericalangle BOC$ arbitrario, y muestra que siempre se cumple la relación $\sphericalangle BOC = 4 \cdot \sphericalangle OBD$.

Problema resuelto 2

En la figura, se considera una circunferencia tangente al $\triangle ABC$ en los puntos P , Q , y R . Si las medidas de los lados del triángulo son $AB = 14$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 11$ cm, muestra que las medidas de AR y CP son 9 cm y 2 cm, respectivamente.



Solución:

Es evidente, a partir de la figura, que los lados del triángulo satisfacen las relaciones

$$\begin{cases} AQ + QB = AB \\ AR + RC = AC \\ BP + PC = BC \end{cases}$$

En primer lugar, los segmentos AB y AC son tangentes a la circunferencia en Q y R , respectivamente. Por lo tanto, las medidas de AR y AQ son iguales. De la misma manera, las medidas de CR y CP son iguales entre sí, y las medidas de BP y BQ son iguales entre sí.

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x + z = 11 \\ y + z = 7 \end{cases}$$

Como hay más incógnitas que ecuaciones, es necesario determinar cuáles son las relaciones entre estos segmentos.

Se asigna $AR = x$, $BQ = y$, $CP = z$

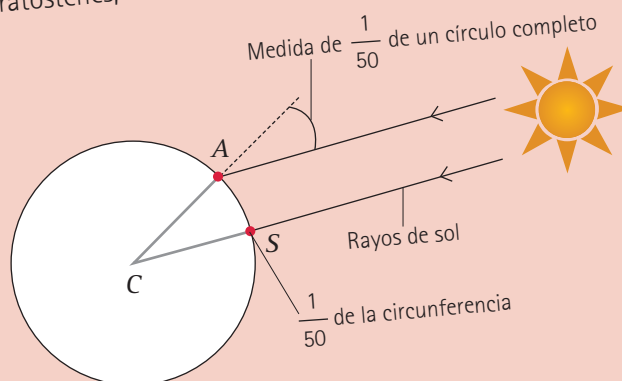
Restando la tercera ecuación de la primera se obtiene la ecuación $7 = x - z$, la que, junto con la segunda ecuación, forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es $x = 9$, $z = 2$. Por lo tanto, la medida de AR es de 9 cm, y la medida de CP es de 2 cm.

EN TU CUADERNO

1. Comprueba, basado en estos cálculos, que $BQ = 5$ cm.
2. Si las medidas del triángulo están dadas por $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, comprueba que las medidas de x , y , z están dadas por $x = \frac{b + c - a}{2}$, $y = \frac{a + c - b}{2}$, $z = \frac{a + b - c}{2}$.

Medición de la Tierra

Uno de los más espectaculares logros de la ciencia matemática de la Antigüedad fue la determinación de la medida de la circunferencia de la Tierra, es decir, la distancia alrededor de la Tierra medida a lo largo de cualquier círculo que pase a través de los polos. El más preciso de estos cálculos fue el de Eratóstenes, cerca del año 200 a. C. Observa.



Se sabía que, en un momento determinado, el Sol estaba exactamente encima de Siene (actualmente Asuán), en Egipto, (el punto S en la figura). En ese mismo momento, en Alejandría, situada directamente al norte de Siene (el punto A), se midió la posición del Sol y fue de $\frac{1}{50}$ de círculo.

EN TU CUADERNO

1. ¿A cuántos grados corresponde el arco de $\frac{1}{50}$ de circunferencia?
2. ¿Se puede considerar que los rayos de sol son paralelos?, ¿por qué?
3. Considerando los datos, ¿cuánto mide $\angle ACS$?, ¿por qué?
4. Si la distancia entre Alejandría y Siene es de 845 km, ¿cuánto mide el perímetro de la Tierra? Justifica tus cálculos.

INVESTIGUEMOS...

Ahora trabaja en grupos de tres personas:

Cuando Galileo observó la Luna, vio “altas montañas y profundos valles”. Midió la sombra que proyectaban las montañas para calcular su altura aproximada. Galileo concluyó que tenían 6,4 km de altura (y pensó que eran más altas que cualquier montaña en la Tierra).

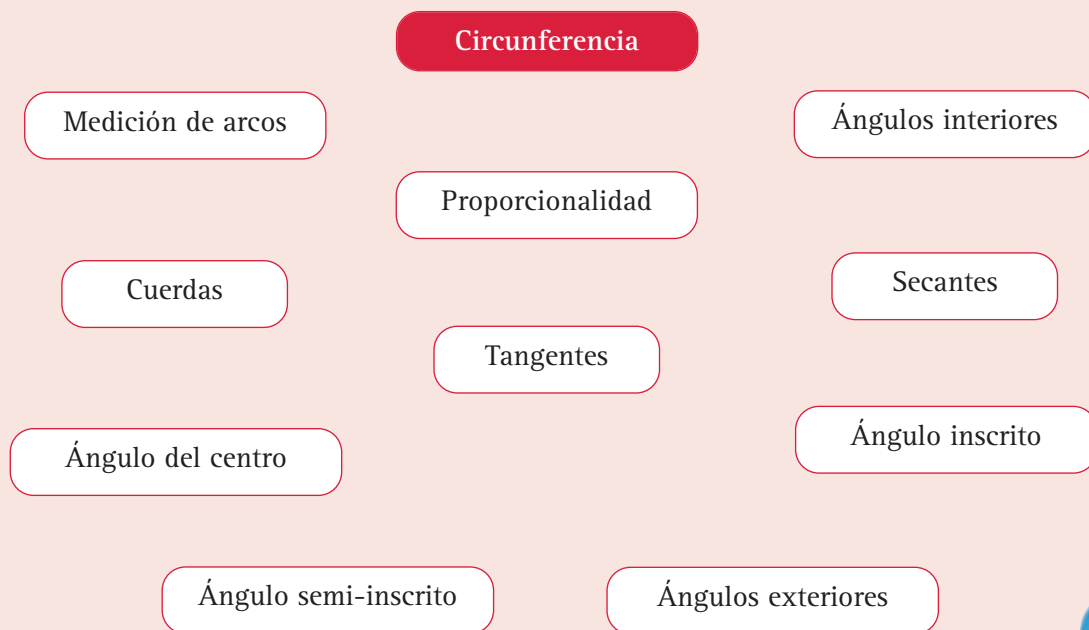
- Galileo determinó que la razón entre el diámetro de la Tierra y el de la Luna era $7 : 2$, y creía que el diámetro de la Tierra era 11 256 km. Usando estos datos, calculen:
 - el diámetro de la Luna.
 - la circunferencia de la Tierra.
 - la circunferencia de la Luna.
- Dibujen una figura que muestre una vista de la Luna parcialmente iluminada. Marquen un punto T , que represente la cima de la montaña lunar, cuya altura deseaba encontrar Galileo, y tracen la recta AT , tangente a la Luna en A , que representa un rayo de luz.
 - ¿La superficie de la Luna que está inmediatamente bajo el segmento AT está en la sombra de la montaña? Justifiquen su respuesta.
 - Marquen en la figura el punto C , el centro de la Tierra, dibujen el segmento TC y llamen B a la intersección de este segmento con la superficie de la Luna. Galileo determinó que la medida del arco AB era $\frac{1}{20}$ del diámetro de la Luna. Pensó que su longitud sería aproximadamente igual a la longitud del segmento AT . ¿Qué dato utilizó Galileo para la longitud AT ?
- ¿Qué antecedente permitió a Galileo establecer que el triángulo ACT era un triángulo rectángulo?
- Pueden hacer ahora lo que él hizo y calcular la longitud de CT , es decir, la distancia desde el centro de la Luna hasta la cima de la montaña.
- Finalmente, pueden calcular la longitud del segmento BT , que es la altura de la montaña lunar. Comparen sus cálculos con los de Galileo.

EVALUEMOS NUESTRO TRABAJO

- La figura que realizaron ¿les permitió establecer las relaciones necesarias para calcular la altura de la montaña lunar?, ¿por qué?
- ¿Obtuvieron un resultado similar al de Galileo?

Síntesis de la Unidad

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.



1 Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

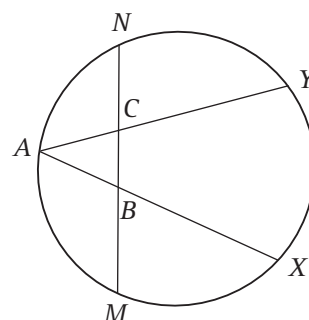
- Si un ángulo del centro subtiende el mismo arco que un ángulo inscrito, el ángulo del centro mide la mitad del ángulo inscrito.
- Se puede calcular la medida de un ángulo interior a una circunferencia a partir de la suma de los arcos que subtiende.
- Dada la medida de un ángulo exterior formado por dos tangentes a una circunferencia, se obtiene la medida de los arcos que determinan las tangentes sobre la circunferencia.
- Si dos secantes se trazan desde un mismo punto, la suma de las medidas de cada secante hasta cada punto de intersección es constante.
- Si un ángulo inscrito es tal que la cuerda que une los extremos del arco subtendido pasa por el centro de la circunferencia, el ángulo es recto.
- Todo cuadrilátero formado por dos tangentes a una circunferencia es inscriptible a esta.
- Dada la medida de un ángulo exterior formado por dos secantes a una circunferencia, se obtiene la medida de los arcos que determinan las secantes sobre la circunferencia.

- h. Si la cuerda que une los extremos de un arco subtendido por un ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia, entonces el ángulo es recto.
- i. Si una tangente y una secante se trazan desde un mismo punto, la medida hasta el punto de tangencia es la suma de las medidas de la secante hasta cada punto de intersección.

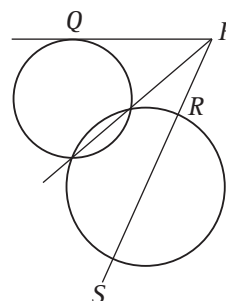
2 Aplica lo que aprendiste en la unidad para resolver los siguientes problemas:



- a. En la figura, M es punto medio del arco AX y N punto medio del arco YA . ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle ABC$?

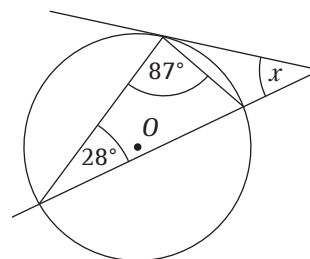


- b. Si en la figura, $PQ = 72$ cm, ¿cuánto es $PR \cdot PS$?

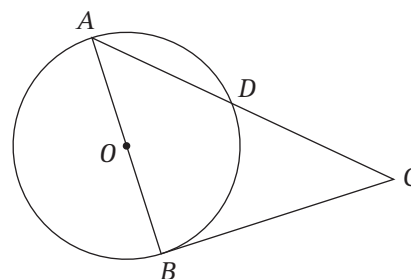


- c. En una circunferencia se trazan dos cuerdas que resultan ser del mismo tamaño. Prueba que están a la misma distancia del centro.

- d. Calcula la medida del ángulo x .



- e. El triángulo ABC es rectángulo en B . \overline{AB} diámetro de la circunferencia de radio 6 cm. Si $m(\widehat{BC}) = 16$ cm, calcula la medida de \overline{AD} .

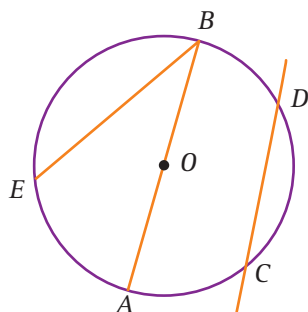




Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

1. Con respecto a la figura, es falso que:

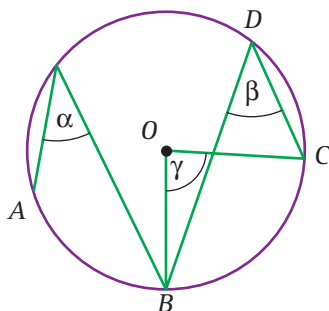
- A. EB es cuerda.
- B. EBA es inscrito.
- C. CD es cuerda.
- D. OA es radio.
- E. AB es diámetro.



2. En la figura $\widehat{AB} = \widehat{BC}$, entonces es verdad que:

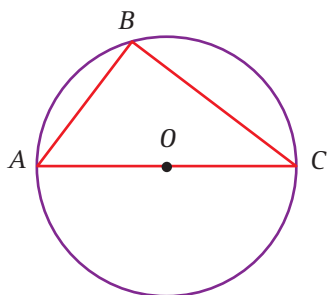
- I. $\alpha = \beta$
- II. $\alpha + \beta = \gamma$
- III. $\gamma = \frac{\alpha}{2}$

- A. Solo I
- B. I y II
- C. II y III
- D. I y III
- E. I, II y III



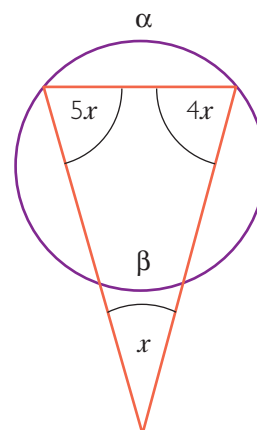
3. En la figura $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ y $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$.
¿Cuánto mide el arco CB ?

- A. 30°
- B. 60°
- C. 90°
- D. 120°
- E. Falta información.



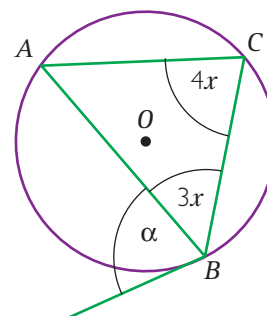
4. En la figura $\alpha = 2\beta$ y el ángulo α mide:

- A. 18°
- B. 36°
- C. 72°
- D. 144°
- E. Otro valor.



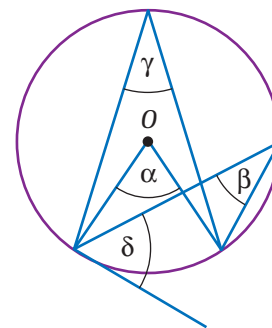
5. En la figura $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ y la medida del ángulo α es:

- A. 10°
- B. 40°
- C. 54°
- D. 72°
- E. Otro valor.

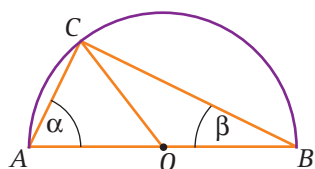


6. Según lo que se observa en la figura, es falso que:

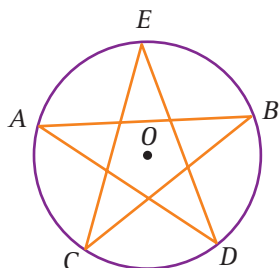
- A. $\beta = \delta$
- B. $\gamma = \beta$
- C. $\alpha = 2\gamma$
- D. $\delta = \alpha$
- E. $\alpha = 2\beta$



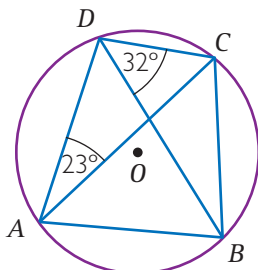
7. Con respecto a la figura, es falso que:



- A. $\angle ACB = 90^\circ$
 B. $\alpha + \beta = 90^\circ$
 C. $\angle ACO = \alpha$
 D. $\angle COB = 2\alpha$
 E. $\angle OAC = \beta$
8. Las 5 cuerdas formadas en la figura son congruentes; el valor de $\angle DAB$ es:

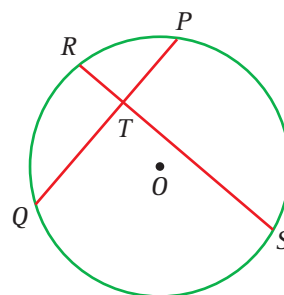


- A. 108°
 B. 72°
 C. 60°
 D. Otro valor.
 E. Falta información.
9. La amplitud de $\angle BCD$ en la figura tiene un valor de:

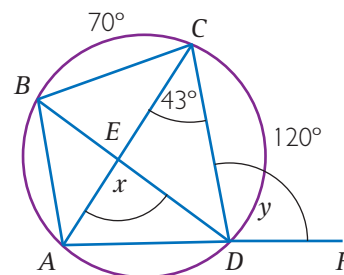


- A. 55°
 B. 125°
 C. 148°
 D. 157°
 E. Otro valor.

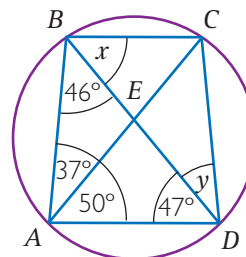
10. (Ensayo oficial PSU, 2004) En la figura, los puntos P, Q, R y S están sobre la circunferencia de centro O . Si $QT : TP = 3 : 4$, $QT = 6$ cm y $ST = 12$ cm, entonces RT mide:



- A. 4 cm
 B. 6 cm
 C. 8 cm
 D. 9 cm
 E. 10 cm
11. Las medidas de $\angle AED$ y $\angle CDF$ son, respectivamente:



- A. 86° y 60° .
 B. 43° y 120° .
 C. 78° y 103° .
 D. 120° y 78° .
 E. 60° y 86° .
12. Las medidas de $\angle CBD$ y $\angle CDB$ son, respectivamente:



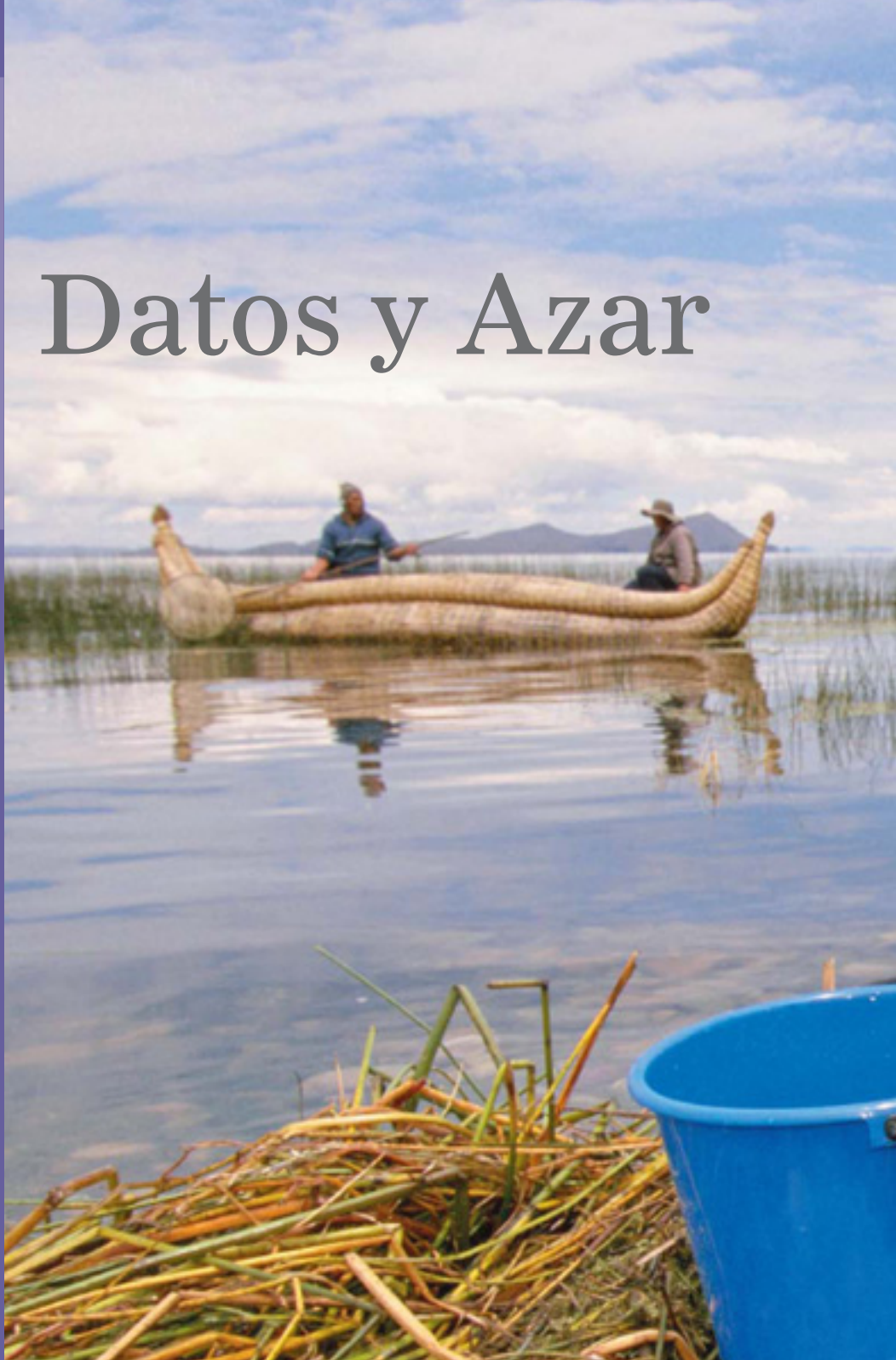
- A. 46° y 47° .
 B. 50° y 37° .
 C. 47° y 37° .
 D. 37° y 50° .
 E. 46° y 50° .



6

Unidad

Datos y Azar



EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

- Calcular medidas de dispersión para datos agrupados y no agrupados.
- Comparar dos grupos de datos.
- Utilizar técnicas de conteo para determinar la cardinalidad del espacio muestral.
- Calcular probabilidades utilizando las técnicas de conteo y la regla de Laplace.
- Calcular la probabilidad de la unión y de la intersección de eventos.



CONVERSEMOS DE:

En esta unidad, se profundizará el análisis descriptivo de datos, usando técnicas que permiten obtener y representar información más específica de un conjunto de datos que habitualmente se presentan dispersos o agrupados, más allá de calcular medidas de posición o de tendencia central.

Investigadores de diversas áreas enfrentan el problema de analizar y comprender un conjunto de datos relevantes para su estudio. Si los datos se refieren a una muestra o población, será necesario agruparlos, organizarlos y resumirlos para obtener de ellos la mayor cantidad de información posible.

En la imagen, una bióloga está pesando todas las ranas que pueda encontrar, que habiten este lago. ¿Cómo puede ordenar estos datos?, ¿qué información crees que es relevante para su estudio?, ¿qué información puede obtener al analizar los datos obtenidos?, ¿cómo puede presentar en forma gráfica la información obtenida?



¿Cuánto sabes?

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

1. Los siguientes datos corresponden al contenido de nicotina, en miligramos, de once cigarrillos:

1,09 1,74 1,58 2,1 1,64 1,79 1,37 1,75 1,92 2,03 1,47

- Calcula la media del contenido de nicotina.
- Calcula la mediana del contenido de nicotina.
- Calcula el primer y tercer cuartil.

2. La siguiente tabla resume los datos de la duración, en años, de 30 bombas de combustible:

Clase (años)	Frecuencia
[0, 1[8
[1, 2[10
[2, 3[7
[3, 4[2
[4, 5[3

- Estima la frecuencia acumulada.
- Estima la media de la duración de las bombas de combustible.
- Estima la mediana de las bombas de combustible.
- Estima el primer cuartil y el tercer cuartil.

3. Se lanzan dos dados:

- Describe el espacio muestral de este experimento.
- Describe en forma extensa cada uno de los siguientes eventos:

A: la suma de los dados es par.

B: la suma de los dados es múltiplo de 5.

C: el producto de los dados es menor o igual que 15.

4. Redondea los siguientes números decimales a la décima y explica cómo lo hiciste:

a. 45,687

c. 142,856

e. 0,6757

b. 8,7777

d. 63,354

f. 23,7323

5. Redondea los siguientes números decimales a la centésima y explica cómo lo hiciste:

a. 68,6789

c. 54,3245

e. 12,7456

b. 43,3991

d. 38,0875

f. 24,2322

6. Resuelve los siguientes ejercicios con números decimales:

a. $7,4 + 78,0$

d. $1,5 : 88,1$

b. $4,070 - 0,303$

e. $37,4 + 9,6 - 0,9 - 0,7 \cdot 1,045$

c. $6,20 \cdot 4,30$

f. $3 \cdot (7,8 - 32,16) + 36,43 : 0,18$

7. Resuelve los siguientes ejercicios con fracciones:

a. $\frac{2}{4} + \frac{1}{5} - \frac{15}{10}$

d. $\frac{35}{18} \cdot \frac{9}{7}$

b. $\frac{3}{3} + \frac{7}{5} + \frac{21}{15} + \frac{9}{60}$

e. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{5} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} - 1 + 2 \right) - \frac{1}{3} \right)$

c. $\frac{1}{6} + \frac{2}{9} - \frac{3}{18}$

f. $\frac{1}{9} : \frac{3}{2} + \frac{4}{9} \cdot 2 + \frac{4}{3} : \frac{1}{5} - \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{4}{6}$

Compara tus respuestas con las de tus compañeras y compañeros.
¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.



¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- La **media** de un conjunto de datos se calcula sumando todos los datos y luego dividiendo por el número de observaciones.
- La **frecuencia acumulada** de una clase es la suma de las frecuencias de esa clase y de todas las clases anteriores.
- La media, para datos agrupados en k clases, se calcula usando la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot M_1 + n_2 \cdot M_2 + \dots + n_k \cdot M_k}{n}$$

Donde: n_i : frecuencia de la clase i
 M_i : media de la clase i

- La fórmula de cálculo para **percentiles**, si se tienen datos agrupados, es: $P_p = L_p + \frac{p \cdot n - N_p}{n_p} \cdot C$

Donde: L_p : límite inferior de la clase donde se encuentra el p -ésimo percentil.

N_p : frecuencia acumulada de la clase que precede a la clase del p -ésimo percentil.

n_p : frecuencia de la clase del p -ésimo percentil.

C : amplitud de la clase del p -ésimo percentil.

n : número de observaciones.

La clase del p -ésimo percentil es la primera cuya frecuencia acumulada es mayor o igual a $\frac{p \cdot n}{100}$.

- El **primer cuartil**, la **mediana** y el **tercer cuartil** son casos particulares de los percentiles, con $p = 25, 50$ y 75 , respectivamente.
- El **espacio muestral** de un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles.
- Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, cualquier posible resultado de un experimento aleatorio.
- Para aproximar por redondeo un número decimal, basta con observar la cifra de la derecha de este.
 - Si esta es mayor o igual que 5, entonces se aumenta en 1.
 - Si esta es menor que 5, entonces se mantiene el decimal.

Medidas de dispersión

Aldo es dueño de un almacén y últimamente sucede que o no hay suficientes salchichas para satisfacer la demanda o sobran demasiado. Cada semana, debe botar todas las salchichas que han vencido. Aldo compra cada paquete de salchichas a \$ 640 y la vende al público a \$ 830, es decir, por cada paquete de salchichas vendido gana \$ 190.

Aldo revisó la cantidad de paquetes de salchichas que ha vendido durante las últimas siete semanas. Observa.

Semana	1	2	3	4	5	6	7
Venta (paquetes)	57	50	43	62	73	88	12

GLOSARIO

Demanda: actitud o predisposición de adquirir bienes y/o servicios para satisfacer las necesidades por parte de uno o más consumidores.

RECUERDA QUE...

- La media, \bar{x} , se calcula

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n son n observaciones.

- Si no se sabe con exactitud el resultado de un experimento, pero sí se conoce el conjunto de todos los posibles resultados, entonces es un experimento **aleatorio**.

ANALICEMOS...

- Si Aldo debe botar 20 paquetes al final de la semana, ¿cuánto dinero pierde?
- Si él nota que podría haber vendido 15 paquetes más, pero ya no le quedaban, ¿cuánto dinero pierde por esto?
- ¿Qué le conviene más, tener muchas salchichas, aunque luego le sobren, o tener pocas, para no tener que botar las salchichas al final? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuántos paquetes de salchichas debiera comprar Aldo cada semana para satisfacer la demanda?, ¿cómo lo calculaste?
- ¿Qué otras variables o elementos se deben considerar?
- ¿Podemos decir que la demanda de salchichas en el almacén de Aldo es un experimento aleatorio?, ¿por qué?

Una posibilidad es calcular la media de la venta realizada:

$$\bar{x} = \frac{57 + 50 + 43 + 62 + 73 + 88 + 12}{7} = 55,0$$

Es decir, la media de la venta semanal de salchichas es de 55 paquetes.

Ahora, si Aldo hubiera comprado todas las semanas 55 paquetes, en las semanas 1, 4, 5 y 6 habría perdido venta y habría dejado de ganar \$ 11 400. Por otra parte, en las semanas 2, 3 y 7 habría tenido excedentes, perdiendo \$ 38 400. Considerando ambas situaciones, habría perdido \$ 49 800 en total.

Según esto, ¿te parece adecuado recomendar a Aldo que compre 55 paquetes de salchichas semanalmente?, ¿cuántos paquetes debería comprar para evitar perder tanto dinero?

Este ejemplo muestra que, si bien la media, y también la mediana y la moda, son útiles para describir un conjunto de datos, estas por sí solas no son suficientes, ya que esconden información sobre la variabilidad de las observaciones. En muchos casos, considerar solo esta información puede inducir a tomar decisiones erróneas o poco eficientes.

Observa ahora que, en las últimas siete semanas, la menor cantidad de paquetes de salchichas vendidos fueron 12 y la mayor cantidad, 88. Podemos calcular el rango de la demanda de paquetes de salchichas de la siguiente manera:

$$\text{rango} = 88 - 12 = 76 \text{ paquetes}$$

Es decir, el **rango** de una variable es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de las observaciones.

Las **medidas de dispersión**, como el rango y otras medidas, indican qué tanto se dispersan o distribuyen, alrededor de su media, un conjunto de datos.

Observa los siguientes gráficos:

RECUERDA QUE...

Se llama **variable** a cualquier característica de un conjunto de individuos u objetos que interese estudiar.

Gráfico 1

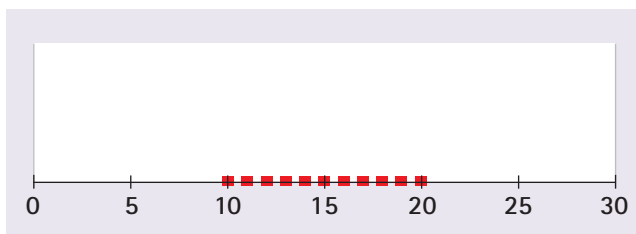
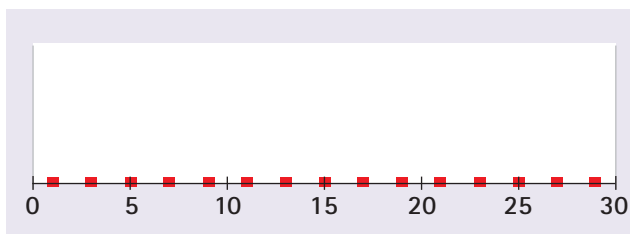


Gráfico 2



Ambos conjuntos de datos tienen la misma media: 15; sin embargo, como se observa en los gráficos, las observaciones del gráfico 2 se encuentran más cercanas a la media que las del gráfico 1.

Si x_1, x_2, \dots, x_n son n observaciones de una variable y su media es \bar{x} , entonces una medida de dispersión en torno a la media es calcular la suma de las diferencias entre cada una de las observaciones y la media. Esto es:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})$$

donde $x_i - \bar{x}$ se conoce como la **desviación** de la **i -ésima** observación de la media.

Calculando esta expresión con los datos de venta de salchichas, se obtiene:

Semanas	1	2	3	4	5	6	7
Venta (paquetes)	57	50	43	62	73	88	12
$(x_i - \bar{x})$	2	-5	-12	7	18	33	-43

Luego,

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 2 + (-5) + (-12) + 7 + 18 + 33 + -43 = 0$$

El resultado es siempre 0; compruébalo con otros conjuntos de datos.

Luego, se define la siguiente medida de dispersión, conocida como varianza.

La varianza, que se denota por S_x^2 , de un conjunto de n datos es el promedio de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones respecto de su media.

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

La expresión $(x_i - \bar{x})^2$ garantiza que siempre estaremos sumando valores positivos, y este resultado es 0 solo si todos los datos son iguales.

Ejemplo

Calculemos la varianza con los datos de venta de salchichas.

Semanas	1	2	3	4	5	6	7
Venta (paquetes)	57	50	43	62	73	88	12
$(x_i - \bar{x})$	2	-5	-12	7	18	33	-43
$(x_i - \bar{x})^2$	4	25	144	49	324	1089	1849

Luego,

$$S_x^2 = \frac{4 + 25 + 144 + 49 + 324 + 1\,089 + 1\,849}{7} = \frac{3\,488}{7} = 497,7$$

NO OLVIDES QUE...

Cuando se estudia una variable, es fundamental indicar la unidad de medición de las observaciones y, en consecuencia, todas las medidas de resumen que se utilicen deben estar acompañadas de la unidad correspondiente.

Entonces, si queremos resumir el comportamiento de la venta semanal de salchichas del almacén de Aldo, podemos decir que tiene una media de 55 paquetes y una varianza de 497,7... ¿Qué le falta a esta afirmación?

Dado que al calcular la varianza se consideran las desviaciones al cuadrado, su unidad corresponde a la de las observaciones, pero al cuadrado, es decir, en este caso, la afirmación correcta es: "La venta semanal de salchichas del almacén de Aldo tiene una media de 55 paquetes y una varianza de 497,7 paquetes cuadrados."

Pero esto dificulta la adecuada interpretación de los resultados. Por ello, se usa otra medida de dispersión, la desviación estándar, S_x , definida por

$$S_x = \sqrt{S_x^2}. \text{ Es decir, la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.}$$

La ventaja de utilizar la desviación estándar como medida de dispersión es que está expresada en las mismas unidades que las observaciones.

Para el caso de la venta de salchichas, sabemos que la varianza es de 497,7 paquetes cuadrados. Luego, la desviación estándar es de 22,3 paquetes.

EN TU CUADERNO

1. Comenta con tus compañeros y compañeras cuál es la relevancia de las medidas de dispersión.
2. ¿Qué se puede decir de un conjunto de datos si solo sabemos que su media es 67 y que tanto su rango como su varianza son 0?
3. Al lanzar un dado 6 veces, se observó que siempre se obtuvo el número 4. Sin calcular, ¿cuál es la varianza de este conjunto de observaciones?
4. ¿Qué limitación puede tener el rango como medida de dispersión?
5. Considera el siguiente conjunto de observaciones, que corresponde al tiempo de secado (en horas) de una pintura esmaltada:

3,4 2,8 4,4 2,5 3,3 4,0 4,8 5,6 5,2 2,9 3,7 3,0 3,6 2,8 4,8

- a. Calcula e interpreta, en cada caso: el rango, la varianza y la desviación estándar.
- b. Con estos datos muestra que:

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\bar{x}^2}{n}$$



EN RESUMEN

- Las **medidas de dispersión**: el rango, la varianza y la desviación estándar cuantifican la variabilidad de un conjunto de observaciones.
- Por definición, el rango, la varianza y la desviación estándar son siempre valores positivos.
- El **rango** es la diferencia entre la observación de mayor valor y la de menor valor, razón por la cual su valor se ve alterado si existe un valor extremadamente grande o pequeño.
- La unidad de medida del rango es la misma que la de la variable.
- La **varianza** de un conjunto de n observaciones se calcula:

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Lo que es equivalente a:

$$S_x^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\bar{x}^2}{n}$$

y su unidad de medida igual a la variable observada al cuadrado.

- La **desviación estándar** es la raíz cuadrada de la varianza y su unidad de medida es la misma de la variable observada.
- Si en un conjunto de datos todos tienen el mismo valor, entonces el rango, la varianza y la desviación estándar son 0.

Medidas de dispersión para datos agrupados

RECUERDA QUE...

- La **marca de clase** (M_i) corresponde al punto medio de una clase.
- La **media para datos agrupados** en una tabla de frecuencias con k clases se calcula:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot M_1 + n_2 \cdot M_2 + \dots + n_k \cdot M_k}{n}$$

Los estándares de calidad de una fábrica de baterías exigen que la duración de una batería sea, en promedio, de 30 horas, pero además estipulan que al menos el 75% de la producción debe estar entre 20 y 40 horas de duración. Con el fin de analizar si las baterías cumplen las normas exigidas, Pedro estudia el comportamiento de 40 baterías obteniendo la siguiente información:

Clase (horas de duración)	Frecuencia (n_i)	Marca de clase (M_i)
[20, 25[10	22,5
[25, 30[9	27,5
[30, 35[10	32,5
[35, 40[7	37,5
[40, 45[4	42,5

ANALICEMOS...

- ¿Cuánto duran, en promedio, las baterías observadas?, ¿satisface los estándares de la fábrica?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Cómo se puede decidir si también cumple con los estándares de calidad exigidos?
- ¿Qué otros cálculos puede realizar Pedro para validar estos criterios?
- ¿Cuál es el rango de este conjunto de datos?, ¿cuál es su varianza?

Lo primero que verifica Pedro es la media que, en este caso, es:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 22,5 + 9 \cdot 27,5 + 10 \cdot 32,5 + 7 \cdot 37,5 + 4 \cdot 42,5}{40} = 30,8$$

Entonces, en promedio, las baterías tienen una duración de 30,8 horas.

De acuerdo a este valor, la fábrica cumple con la primera condición. ¿Qué pasa con el segundo requerimiento? ¿Qué esperaríamos de la distribución de los datos en torno a la media? ¿Cómo debería ser el rango y la varianza en este caso?

Cuando los datos están agrupados, el rango se calcula como el mayor valor de la última clase menos el menor valor de la primera clase:

$$\text{rango} = 45 - 20 = 25 \text{ horas}$$

Por otra parte la varianza se calcula como:

$$S_x^2 = \frac{(n_1 M_1^2 + n_2 M_2^2 + \dots + n_k M_k^2) - n \bar{x}^2}{n}$$

Para los datos de Pedro:

$$S_x^2 = \frac{(10 \cdot 22,5^2 + 9 \cdot 27,5^2 + 10 \cdot 32,5^2 + 7 \cdot 37,5^2 + 4 \cdot 42,5^2) - 40 \cdot 30,8^2}{40}$$

$$S_x^2 = 38,86 \text{ horas}^2$$

Y entonces la desviación estándar es 6,23 horas. ¿Qué puedes concluir?

Una regla es que, en general, al menos un 75% de las observaciones se encuentran en un intervalo cuyo límite inferior es el valor de la media menos el doble de la desviación estándar y cuyo límite superior es el valor de la media más el doble de la desviación estándar. Para el ejemplo:

$$[(30,8 - 2 \cdot 6,23), (30,8 + 2 \cdot 6,23)] = [18,34, 43,26]$$

Es decir, al menos el 75% de las baterías producidas en la fábrica donde Pedro trabaja están entre 18,34 y 43,26 horas de duración.

En conclusión, aunque en términos de la duración promedio, la fábrica cumple la norma, respecto a la variabilidad no la cumple, porque es mayor de la exigida, pues el límite inferior del intervalo es 18,34 horas, menor que el 20 exigido.

EN RESUMEN

Cuando tenemos datos agrupados:

- El **rango** se calcula como la diferencia entre el mayor valor de la última clase menos el menor valor de la primera clase.

- La **varianza** se calcula:
$$S_x^2 = \frac{(n_1 M_1^2 + n_2 M_2^2 + \dots + n_k M_k^2) - n \bar{x}^2}{n}$$

donde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

- La **desviación estándar** continúa siendo la raíz de la varianza.

EN TU CUADERNO

1. En la fábrica donde trabaja Pedro se realizaron ajustes en la producción, con el fin de garantizar el cumplimiento de los estándares de calidad. Después de un tiempo, se hizo un nuevo seguimiento a 40 baterías, obteniendo la siguiente información:

Clase (horas)	n_i	Marca de Clase (M_i)
[20, 25[2	22,5
[25, 30[9	27,5
[30, 35[15	32,5
[35, 40[10	37,5
[40, 45[4	42,5

- a. Calcula la media, la varianza y la desviación estándar y escribe tus conclusiones.
- b. ¿Se cumple ahora con las exigencias de calidad de la fábrica?

Comparación de dos o más conjuntos de datos

RECUERDA QUE...

La **mediana** es aquel valor tal que bajo él se concentran al menos el 50% de las observaciones.

Para datos no agrupados, la mediana se determina ordenando las observaciones de menor a mayor.

Si hay un número **impar** de datos, la mediana es el valor que se encuentra exactamente en la mitad.

Para un número **par** de datos, la mediana corresponde al promedio de los dos valores centrales.

Ximena plantea que el tabaquismo incide sobre los patrones de sueño de las personas. Por ello, observó el tiempo, en minutos, que demoran en quedarse dormidos 12 pacientes fumadores y 12 no fumadores, obteniendo la siguiente información:

Fumadores:

69,3 53,2 60,2 56,0 48,1 43,8 22,1 52,7 23,2 47,6 34,4 13,8

No fumadores:

28,6 29,8 30,6 36,0 25,1 28,4 31,8 37,9 26,4 38,5 41,6 13,9

ANALICEMOS...

- ¿Cómo puede Ximena verificar su hipótesis con los datos obtenidos?
- Si la media de ambos grupos fuera similar, aunque la desviación estándar sea distinta, ¿cómo se interpreta en este contexto?
- En cambio, si tienen una desviación estándar similar, pero la media es distinta, ¿cómo se interpreta esto?
- ¿Qué otras medidas se podrían calcular con los datos obtenidos para justificar mejor la hipótesis de Ximena?

Observa los valores obtenidos para ambos grupos de la media, la varianza y la desviación estándar.

Para los fumadores, se tiene que:

$$\bar{x} = 43,7 \text{ minutos}$$

$$S_x^2 = 262,7 \text{ minutos}^2$$

Luego, la desviación estándar es 16,2 minutos.

Para los no fumadores, se tiene que:

$$\bar{x} = 30,7 \text{ minutos}$$

$$S_x^2 = 50,3 \text{ minutos}^2$$

Y la desviación estándar es de 7,1 minutos.

También se puede calcular la mediana y los cuartiles para ambos grupos para observar si hay diferencias significativas entre los dos grupos.

La mediana para los fumadores es 47,9, es decir, el 50% de los fumadores se demora a lo más 47,9 minutos en dormirse. Por otra parte, para los no fumadores la mediana es 30,2, es decir, el 50% de los no fumadores se demora a lo más 30,2 minutos en dormirse.

Luego, se tiene que Q_1 para los fumadores es 28,8 minutos y para los no fumadores es 27,4 minutos. Mientras que Q_3 para los fumadores es 54,8 minutos y para los no fumadores es 37,0 minutos.

Basándose en todos estos resultados, se puede concluir que efectivamente se observa una alteración en el patrón de sueño de los fumadores, pues estos, en promedio, se demoran en dormirse 13 minutos más que los no fumadores. Además, el 50% de los fumadores se demora 17,7 minutos más en dormirse que el 50% de los no fumadores. Algo similar se observa al comparar el tercer cuartil, en este caso, se observa una diferencia de 18,6 minutos. Por otra parte, en términos de variabilidad, la desviación estándar de los fumadores es mayor que la de los no fumadores. Se puede concluir, entonces, que el patrón de sueño de los no fumadores es más estable que el de los fumadores.

RECUERDA QUE...

Calcular Q_1 , para datos no agrupados, es lo mismo que calcular la mediana del 50% de los valores más bajos.
Calcular Q_3 , para datos no agrupados, es lo mismo que calcular la mediana del 50% de los valores más altos.

EN TU CUADERNO

1. Se realizó un experimento para comparar el efecto de tres regímenes alimenticios sobre el aumento de peso. Se formaron tres grupos, uno con 10 individuos, otro con 12 y el tercero con 16. El primer grupo fue sometido a la dieta A, el segundo a la dieta B y el tercero a la dieta C. Después de 15 días se observaron los aumentos de peso, en kilogramos, observando los siguientes resultados:

Dieta A:

1,0 0,0 2,1 3,1 3,3 4,3 5,2 5,5 5,0 6,8

Dieta B:

3,0 4,0 5,7 6,0 6,9 7,0 7,2 7,3 2,8 3,5 5,0 6,0

Dieta C:

3,1 0,0 2,1 3,1 3,1 4,3 5,2 5,5
5,0 6,8 1,5 1,1 2,6 3,2 3,8 4,8

- Compara las tres dietas. ¿Cuál de las tres te parece más efectiva?, ¿por qué?

EN RESUMEN

- Una de las principales aplicaciones de las medidas de tendencia central, de posición y de dispersión, es la comparación de dos o más conjuntos de datos. La media y la mediana nos permiten ver cómo se comportan en **promedio** estos grupos, mientras que la varianza y la desviación estándar nos permiten comparar cómo se comportan estos valores **en torno a su media**.
- No es necesario que los grupos a comparar tengan el mismo número de observaciones.

Homogeneidad y heterogeneidad

Silvia es entrenadora de natación y es responsable de dos equipos de seis nadadores. Los ha entrenado con metodologías distintas y quiere saber cuál de ellas es más efectiva. A continuación, se muestran los tiempos obtenidos, en segundos, por cada uno de los participantes en la prueba de 100 metros libres que organizó Silvia para evaluar sus avances.

Nadadores	1	2	3	4	5	6
Equipo A	90	150	60	70	90	80
Equipo B	90	75	105	85	95	90

ANALICEMOS...

- Para comparar estos resultados, ¿qué medidas puedes calcular? ¿Qué información es importante revisar?
- ¿Cuál equipo tiene nadadores más rápidos?, ¿y cuál tiene al nadador más rápido?, ¿es el mismo?, ¿por qué?
- ¿Cuál equipo tiene los tiempos de sus nadadores más parejos?, ¿cómo lo calculaste?
- ¿Qué puedes concluir con respecto al rendimiento de los equipos?

Tanto para el equipo *A* como para el equipo *B* la media de las observaciones es de 90 segundos. La mediana del primer equipo es 85, mientras que la del segundo es 90. Entonces, para el equipo *A* el 50% de los nadadores se demora al menos 85 segundos, y para el equipo *B*, al menos 90 segundos. El rango del equipo *A* es 90 segundos mientras que el rango del equipo *B* es 30 segundos. Por último, la desviación estándar del equipo *A* es 28,9 segundos y la desviación estándar del equipo *B* es 9,1 segundos. Ambas medidas son menores para el equipo *B*. Esto nos indica que su desempeño fue más parejo, es decir, no hay tanta diferencia en los resultados de sus integrantes como en el equipo *A*.

Al comparar dos o más conjuntos de datos, mientras menor es la desviación estándar o la varianza de un conjunto, se dice que su comportamiento es más **homogéneo** (o regular) que los otros. Del mismo modo, mientras mayor es su desviación estándar o la varianza, se dice que es más **heterogéneo** (o irregular). Por ejemplo, el equipo *A* tiene una desviación estándar de 28,9 segundos, esto se debe principalmente a que en ese equipo está el nadador más lento (con 150 segundos), pero también está el más rápido (con 60 segundos). En cambio, los tiempos del equipo *B* son más parejos. Como, en promedio, tienen igual rendimiento, se puede concluir que la metodología aplicada en el equipo *B* es más efectiva.

EN TU CUADERNO

1. Marcos Pérez es ejecutivo de una AFP (Administradora de Fondos de Pensiones) y su responsabilidad es asesorar a los afiliados sobre en qué fondo invertir. Un nuevo cliente debe decidir entre el fondo *A* y el fondo *B*. Si se sabe que, en los últimos cinco meses, la rentabilidad del fondo *A*, en porcentaje, fue la siguiente: 12, 10, 13, 9 y 11, mientras que la rentabilidad del fondo *B* fue 13, 12, 14, 10 y 6, ¿cuál de estos fondos debe Marcos recomendar a su cliente?, ¿por qué?
2. En un curso se midió la altura de todos los alumnos y alumnas. Para su análisis, la información se dividió en dos grupos, hombres y mujeres. Se observó que la desviación estándar de las mujeres fue de 10,5 cm, mientras que la de los hombres fue de 17,8 cm. ¿Cómo se interpreta esto?, ¿qué se puede decir de cada uno de los grupos?
3. Daniela está calibrando dos termómetros, diseñados para medir la temperatura ambiente. Ella sabe que la temperatura real es de 16 °C. Con cada termómetro realiza nueve mediciones y anota la diferencia de las temperaturas registradas con la real, medidas en grados Celsius:

Termómetro 1	-0,26	-0,63	0,30	-0,2	0,45	0,07	0,91	-0,47	0,37
Termómetro 2	0,79	-0,27	0,60	0,23	0,92	-1,09	0,79	1,11	-0,89

- ¿Cuál de los dos termómetros es más preciso?, ¿por qué?
4. Supón que existen dos conjuntos de datos con el mismo rango y media, pero uno tiene mayor varianza que el otro.
 - a. Representa estos datos en un gráfico.
 - b. ¿Cómo serían?, ¿qué diferencias debieran observarse?
 5. ¿Qué piensas que es mejor, que haya homogeneidad o heterogeneidad?, ¿por qué?

EN RESUMEN

La **homogeneidad** y la **heterogeneidad** son conceptos que se encuentran asociados a la variabilidad de un conjunto de datos. Mientras menor sea la varianza y, en su defecto, la desviación estándar y el rango, más homogéneo es el grupo de observaciones que estamos estudiando. Al contrario, si la varianza es mayor, entonces más heterogéneo es el grupo.

Si es mejor la heterogeneidad o la homogeneidad, esto guardará estricta relación con el caso que se esté analizando. Por ejemplo, si la media de las notas obtenidas en un examen de Matemática fue un 3,0, lo deseable es que la varianza fuera alta, pues si la varianza es baja, significa que a todo el curso le fue mal. En cambio, en el problema de calibración de termómetros se desea que la varianza sea pequeña, pues lo contrario indicaría que los termómetros están mal calibrados.

Muestreo aleatorio simple

Margarita está escribiendo su tesis para graduarse de nutricionista. Para ello, realiza un estudio del peso de los estudiantes entre los 14 y 18 años en un colegio que le fue asignado.

En particular, a Margarita le interesa conocer el peso promedio de estos estudiantes y cómo se comporta la variabilidad de su peso. En este colegio hay 800 alumnos y alumnas en este rango de edad, pero, por presupuesto, Margarita solo tiene recursos para tomar el peso de 100 estudiantes.

ANALICEMOS...

- ¿Cómo puede Margarita escoger a los 100 estudiantes para que representen fielmente a los 800 estudiantes que ella necesita incluir en el estudio?
- ¿Qué consideraciones debe tener al seleccionar este grupo?, ¿qué debe evitar?
- ¿Qué método o de qué manera puede seleccionarlos, para asegurarse que sea un grupo representativo?

GLOSARIO

Población: totalidad de las observaciones que interesa analizar.

Muestra: cualquier subconjunto de la población.

En el caso del ejemplo, la población corresponde a todos los niños y niñas entre 14 y 18 años del colegio y la muestra corresponde a los 100 estudiantes que Margarita debe escoger.

Ahora, cuando se selecciona una muestra, se debe tener cuidado de que esta refleje la composición de la población, según la característica que se desee estudiar. En el caso de Margarita, se debe evitar subconjuntos que:

- Tengan solo niños.
- Tengan solo niñas.
- Tengan solo niños o niñas de 14 años.
- Tengan solo niños o niñas de 15 años, etc.

Un método que ayuda a evitar estos casos es el **muestreo aleatorio simple**. El muestreo aleatorio simple se puede entender de la siguiente manera:

Supón que todos los elementos de la población se enumeran desde el 1 hasta el 800, esto porque, en este caso, hay 800 niños y niñas entre 14 y 18 años en el colegio.

Por otra parte, se tiene una urna con 800 fichas, también numeradas del 1 al 800. Seleccionar una muestra aleatoria, por ejemplo, de tamaño 3, equivale a extraer sin reposición 3 fichas de esta urna. De esta manera, se garantiza que todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser seleccionados.

Luego, si los números extraídos son el 3, el 99 y el 127, significa que en la muestra están los estudiantes correspondientes a estos números.

Utilizando el dato del peso de estos niños, se puede calcular el peso promedio y obtener una aproximación del peso promedio de los niños entre 14 y 18 años del colegio.

EN TU CUADERNO

1. Para el caso de Margarita, ¿de qué otra manera piensas que se puede seleccionar la muestra, de modo que se garantice que estén representados ambos sexos y todos los rangos de edad?
2. Junto con un compañero o compañera realicen el siguiente ejercicio:
 - a. Realicen una encuesta a todos sus compañeros y compañeras de curso para reunir la información de sus pesos. Con esta información, calculen el peso promedio de su curso.
 - b. En papeles independientes y del mismo tamaño, anoten cada uno de los pesos obtenidos.
 - c. Pongan los papeles en una bolsa y seleccionen 10 de ellos al azar. Calculen el promedio y compárenlo con el peso promedio del curso completo. ¿Qué pueden concluir?
 - d. Repitan lo anterior, pero escojan ahora 20 papeles, y luego 30. ¿Qué ocurre con el peso promedio a medida que sacan más papeles? Comparen sus resultados con los de otros compañeros y compañeras.
3. Define las poblaciones correspondientes a las siguientes muestras:
 - a. Se llama por teléfono a personas de 200 casas en la comuna de Antofagasta y se les pide nombrar al candidato a alcalde por el que votarían en la próxima elección municipal.
 - b. Se lanzó 100 veces una moneda y se obtuvo sello en 34 lanzamientos.
4. El número de multas emitidas por ocho oficiales, por infracciones de tránsito, durante el fin de semana es 5, 4, 7, 7, 6, 3, 8 y 6. Si estos valores corresponden al número de multas obtenidas en una muestra aleatoria de 8 oficiales de la comuna de Puente Alto, define una población correspondiente.

EN RESUMEN

Una **muestra aleatoria simple** es un subconjunto de la población, elegida por medio de algún método que garantiza que todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser seleccionados para formar parte de la muestra. Un requisito importante para el muestreo aleatorio es que la población sea finita.

A través de la muestra, se puede obtener información importante sobre el comportamiento de la población, como, por ejemplo, el valor promedio de un determinado atributo y su variabilidad.

El muestreo se utiliza, en general, cuando la población es muy grande y es costoso obtener la información de la totalidad de ella.



HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Utilizando una planilla de cálculo como Excel, además de algunas fórmulas sencillas y las funciones, puedes calcular el rango, la varianza y la desviación estándar de un conjunto de datos.

Los siguientes datos corresponden a 52 mediciones de la emisión diaria, en toneladas, de óxido de azufre de una planta industrial.

6,2	19,4	7,7	20,0	8,3	20,1	9,0	20,1	9,0	20,1	9,0	20,1	13,5
12,3	22,3	12,8	22,5	13,2	22,7	13,3	22,7	13,3	22,7	13,3	22,7	16,9
15,8	24,6	15,9	24,6	16,2	24,8	16,2	24,8	16,2	24,8	16,7	25,7	18,5
18,0	29,6	18,1	29,6	18,1	31,8	18,1	31,8	18,1	31,8	18,4	9,4	20,4

Copia los datos en la columna **A** de la planilla.

Para calcular el rango, primero se debe identificar la menor y la mayor observación.

En **B1** se escribe **Mínimo** y en **C1** se escribe **=MIN(A1:A52)** (pues hay 52 datos). Presiona **enter** y se obtiene el valor de la menor observación que, en este caso, es 6,2.

En **B2** se escribe **Máximo** y en **C2** se escribe **=MAX(A1:A52)**. Presiona **enter** y se obtiene el valor de la mayor de las observaciones que, en este caso, es 31,8.

En **B3** se escribe **Rango**, y en **C3** se escribe **=C2 – C1** (es decir, la diferencia entre la mayor y la menor observación) y se obtiene el rango que, en este caso, es 25,6.

Para calcular la varianza, en **B5** se escribe **Varianza** y en **C5** se escribe **=VARP(A1:A52)**. Luego, presiona **enter** y se obtiene el resultado que, en este caso, es aproximadamente 40,5.

La imagen muestra los pasos realizados hasta ahora.

	A	B	C	D	E	F
1	6,2	Mínimo	6,2			
2	12,3	Máximo	31,8			
3	15,8	Rango	25,6			
4	18					
5	19,4	Varianza	40,4998521			
6	22,3	Desv. Estandar				
7	24,6					
8	29,6					
9	7,7					
10	12,8					
11	15,9					
12	18,1					
13	20					
14	22,5					
15	24,6					
16	29,6					
17	8,3					
18	13,2					
19	16,2					

Para calcular la media, escribe **=PROMEDIO(A1:A52)**.

Para calcular la mediana, escribe **=MEDIANA(A1:A52)**.

Para calcular un percentil, ten cuidado de escribir el percentil a calcular dividido por 100. Por ejemplo, para el percentil 35 se escribe **=PERCENTIL(A1:A52;0,35)**.

Para calcular la desviación estándar hay dos formas posibles:

En **B6** se escribe **Desv. estándar**, y en **C6** se escribe **=DESVESTP(A1:A52)**. Luego, presionas **enter** y se obtiene el resultado que, en este caso, es aproximadamente 6,364.

Otra forma es utilizar la función **"RAÍZ"** que calcula la raíz cuadrada de un número. Realiza este cálculo en **C8** escribiendo **=RCUAD(C5)** y comprueba que el resultado sea el mismo número.

En este caso, la media es 18,7 toneladas y la mediana es 18,3 toneladas.

Luego, la planta industrial, en promedio, emite 18,7 toneladas de óxido de azufre diariamente.

El 50% de los días emitió a lo más 18,3 toneladas.

El rango es de 25,6 toneladas, la varianza es de 40,5 toneladas² y tiene una desviación estándar de 6,364 toneladas.

Ejercicio

Ahora utiliza las funciones de la planilla de cálculo para analizar el siguiente caso:

Se plantaron dos muestras de 10 plántones de roble rojo norteno en un invernadero: una que contenía plántones tratados con nitrógeno y, la otra, plántones sin tratamiento. El peso, en gramos, de los tallos se registraron después de 140 días:

Sin nitrógeno	0,35	0,53	0,28	0,37	0,47	0,43	0,36	0,42	0,38	0,43
Con nitrógeno	0,26	0,43	0,47	0,49	0,52	0,75	0,79	0,86	0,62	0,46

La finalidad del experimento consiste en determinar si el uso del nitrógeno tiene influencia sobre el crecimiento de las raíces.

- ¿Qué puedes decir al respecto?, ¿hay o no influencia?
- Utiliza todo lo aprendido hasta ahora: medidas de tendencia central y medidas de dispersión.
- Calcula algunos percentiles que te parezcan relevantes y que te permitan comparar y concluir.

MI PROGRESO

1. Un fabricante de neumáticos quiere determinar si las medidas de un neumático cumplen los requisitos de calidad. Idealmente, el diámetro interior es de 570 mm. Los datos son los siguientes:

572, 572, 573, 568, 569, 575, 565, 570

- a. Calcula la media y la mediana de la muestra.
 - b. Calcula la varianza, la desviación estándar y el rango de la muestra.
 - c. Considerando los valores obtenidos, ¿qué puedes concluir acerca de la calidad de los neumáticos?
2. En 40 automóviles se tomaron las emisiones de hidrocarburos, en partes por millón (ppm), separados por modelos de 1980 y 1990.

Modelos 1980	141	359	247	940	882	494	306	210	105	880
	200	223	188	940	241	190	300	435	241	380
Modelos 1990	140	160	20	20	223	60	360	20	95	70
	220	400	217	58	235	380	85	200	175	65

- a. Calcula para ambos grupos la media, la mediana y los cuartiles Q_1 y Q_3 .
 - b. Calcula para ambos grupos el rango, la varianza y la desviación estándar.
 - c. Considerando los valores obtenidos, ¿existe evidencia para afirmar que cambiaron las emisiones de 1980 a 1990?
3. Se probaron 200 pares de un nuevo tipo de calzado deportivo en un torneo de tenis profesional y, en promedio, duraron 4 meses. Define la población adecuada para la muestra.

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Calcular e interpretar medidas de tendencia central y de dispersión para datos no agrupados.	1 y 2	____ / 10
Calcular cuartiles para datos no agrupados.	2 a)	____ / 2
Comparar datos usando medidas de tendencia central, de posición y dispersión.	2 c)	____ / 1
Identificar la población asociada a una muestra.	3	____ / 1

Un conjunto es una colección de objetos. Por ejemplo, hablamos del conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales, el conjunto de los números reales, etc.

ANALICEMOS...

- ¿Cómo se representan estos conjuntos?
- ¿Hay números que pertenezcan a los tres conjuntos a la vez? Da tres ejemplos.
- ¿Hay algún número que pertenezca a uno de estos conjuntos, pero no a otro? Justifica.

Usualmente, los conjuntos se representan con una letra mayúscula, y se llama **elemento** a cada objeto que forma parte de un conjunto. De esta manera, si A es un conjunto, y a, b, c, d, e son todos sus elementos, es común escribir $A = \{a, b, c, d, e\}$. Y si un elemento x pertenece a un conjunto A , se escribe esta relación como $x \in A$.

El conjunto que contiene a todos los elementos a los que se hace referencia recibe el nombre de conjunto Universal y se denota por la letra U . Para el ejemplo anterior, el universo es el conjunto de la letras del abecedario.

La **cardinalidad** de un conjunto, denotado por $\#$, corresponde a la cantidad de elementos que pertenecen a él. Por ejemplo, si

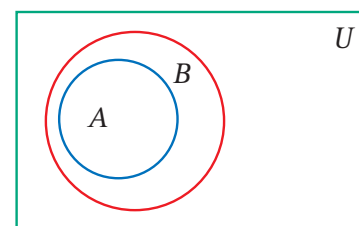
$B = \{\text{Juan, Diego, Javiera, Viviana, Ignacio}\}$, entonces $\#B = 5$.

El conjunto que tiene cardinalidad 0 (es decir, no tiene elementos) es llamado **conjunto vacío** y se denota por \emptyset .

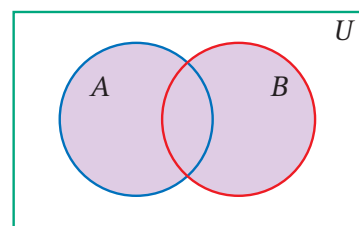
Un conjunto A es **subconjunto** de otro conjunto B , si todo elemento de A es también elemento de B . Así, para el conjunto de los y las estudiantes de un curso se puede definir, por ejemplo, el subconjunto de estudiantes que están de cumpleaños en abril, el subconjunto de estudiantes que practican deporte, etc. Se denota $A \subseteq B$.

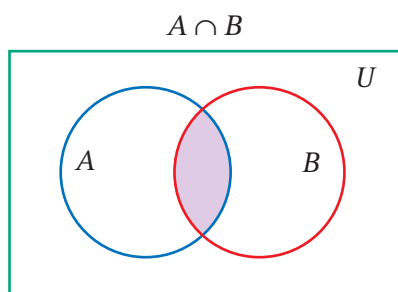
Dados dos conjuntos A y B , existe un único conjunto llamado **unión** de A y B , formado por todos los elementos de A más los de B . Se denota por $A \cup B$.

$$A \subseteq B$$

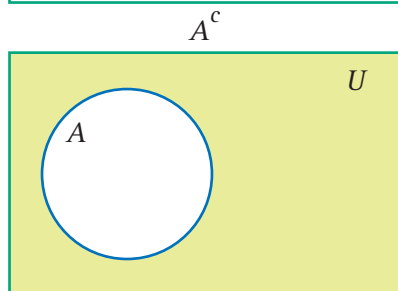


$$A \cup B$$





El conjunto $A \cap B$, llamado **intersección** de A y B , está formado por los elementos que están tanto en A como en B simultáneamente. Si dos conjuntos A y B son tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B son **conjuntos disjuntos**, es decir, no hay ningún elemento de A que esté en B , y viceversa.



El **complemento** de un conjunto A es el conjunto de los elementos que pertenecen al universo pero no pertenecen a A , que lo representaremos por A^c .

Para representar gráficamente estas situaciones, se usan los **diagramas de Venn**.

EN RESUMEN

- Un **conjunto** es una colección de objetos.
- La **cardinalidad** de un conjunto es el número de elementos del conjunto.
- Dados conjuntos A y B , existen conjuntos llamados **unión** e **intersección** de A y B , denotados por $A \cup B$ y $A \cap B$, respectivamente.
- Dado un conjunto universal U , el **complemento** de A es el conjunto de elementos de U que no pertenecen a A .

EN TU CUADERNO

1. Escribe los elementos de:

- | | |
|---|---|
| a. el conjunto de los días de la semana. | c. los números impares menores de 11. |
| b. el conjunto de las estaciones del año. | d. los números pares mayores que 10 y menores que 20. |

2. Sean $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se pide obtener los siguientes conjuntos:

- | | | | | | |
|---------------|---------------|----------|----------|-------------------|-------------------|
| a. $A \cup B$ | b. $A \cap B$ | c. A^c | d. B^c | e. $(A \cup B)^c$ | f. $A^c \cap B^c$ |
|---------------|---------------|----------|----------|-------------------|-------------------|

3. Susana dice que los siguientes conjuntos se pueden representar utilizando los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determina si eso es correcto, en cada caso. Justifica tu respuesta.

- | | | |
|---|------------------------------|--|
| a. $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ | c. $A \cap B \cap C = \{4\}$ | e. $A^c \cap B \cap C^c = \{0, 3, 5\}$ |
| b. $A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5\}$ | d. $A \cup B^c \cup C = U$ | |



Desde el lunes 3 de septiembre de 2007, en todo el país, debutaron las nuevas patentes vehiculares únicas:

"La nueva placa patente única está disponible en todas las oficinas del Registro Civil y apunta a tener una mayor cantidad de combinaciones posibles, porque tiene cuatro letras y dos dígitos, a diferencia de las anteriores, que tenían dos letras y cuatro dígitos", dijo el ministro de Justicia, Carlos Maldonado.

Para sus nuevas combinaciones no se utilizarán vocales, para evitar la formación de palabras, ni las consonantes "Ñ" y "Q", que se pueden confundir con la letra "N" y el número cero, respectivamente.

(Fuente: www.cooperativa.cl, publicado en septiembre de 2007)

ANALICEMOS...

- ¿Cuántas patentes distintas se podían construir con el sistema anterior?
- ¿Cuántas patentes se podrán construir con el nuevo diseño?, ¿en cuál de los casos hay más patentes?
- ¿Es lo mismo la patente BC1234 que la patente CB1234?, ¿por qué?

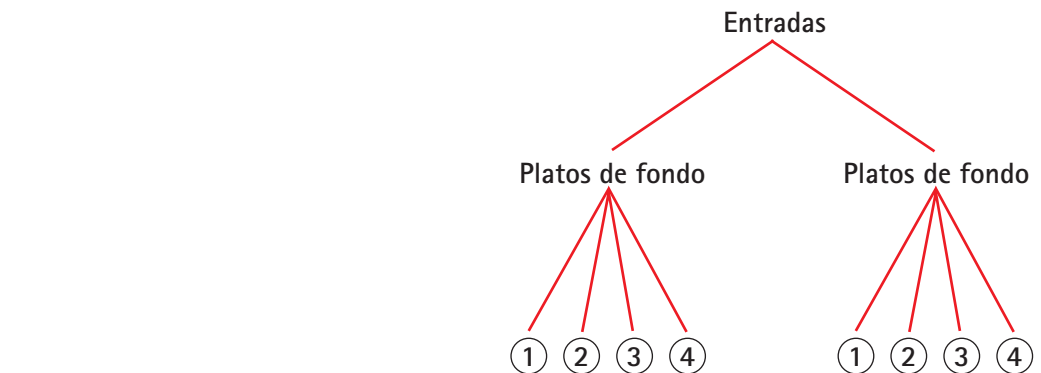
Una forma de calcularlo sería escribir una a una todas las combinaciones, por ejemplo, la primera sería BBBB00 y, luego BBBB01, BBBB02, BBBB03... y así sucesivamente. Aunque no son infinitas, pues sabemos que la última es ZZZZ99, sí se demoraría un buen rato escribir cada combinación para luego contarlas. ¿Entonces cómo calcular cuántas patentes son? Esto se puede resolver utilizando las técnicas de conteo, que nos permiten contar, y son especialmente útiles cuando la cantidad de posibilidades es muy grande.

Observa otras situaciones, que ejemplifican las técnicas de conteo:

Martín tiene mucha sed y quiere comprar algo para beber. En el almacén hay cuatro tipos de bebidas y dos tipos de jugos. ¿Cuántas opciones tiene Martín? Como puede tomar bebida o jugo, entonces tiene $4 + 2 = 6$ opciones. Este es un ejemplo de la **regla de la suma**, que dice lo siguiente: Supón que un evento tiene m posibilidades de suceder y que otro evento tiene n posibilidades. Entonces hay $m + n$ maneras de que ocurra un evento o el otro.

Ingrid almuerza en el casino de la fábrica. Todos los días hay dos variedades de entrada y cuatro de platos de fondo. ¿Cuántos menús distintos puede escoger?

En este caso, hay un evento que sucede antes que otro. En situaciones como esta, dibujar un diagrama de árbol como el siguiente puede ser muy útil:



Al contar las ramas de la segunda etapa del árbol, se cuenta cuántos posibles menús hay. Observa que, por otra parte, $8 = 2 \cdot 4$.

Este es un ejemplo de la **regla del producto**, que dice lo siguiente:

Supón que un evento tiene m posibilidades de suceder y otro evento tiene n posibilidades. Entonces hay $m \cdot n$ maneras de que ocurran ambos eventos simultáneamente.

En el caso de las patentes, primero se eligen letras y, luego, números, y como ocurren simultáneamente, se aplica la regla del producto. También podríamos utilizar el diagrama de árbol, pero con 20 letras este sería demasiado grande. Otra técnica es utilizar casilleros como se muestra a continuación:

20	20	20	20	10	10
----	----	----	----	----	----

En cada casillero se ubica la cantidad de posibilidades en cada caso. Las cuatro primeras corresponden a las letras y las dos últimas a los números. Los valores asignados a cada casillero, en este caso, se pueden repetir.

Entonces se tienen $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 10 = 16\,000\,000$ posibles patentes.



Otro ejemplo: hay ocho personas postulando a una empresa para ocupar las vacantes de cuatro puestos distintos. ¿De cuántas maneras se puede hacer la selección final?, ¿dos?, ¿cuatro? Observa.

8	7	6	5
---	---	---	---

Para el primer puesto, se puede escoger entre las ocho personas, pero para el segundo puesto se debe escoger entre siete personas, pues una de ellas ya está asignada al puesto anterior y no se puede repetir.

Luego, hay $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$ formas de seleccionar a los postulantes.

$$\text{Ahora, la expresión } 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{8!}{4!}$$

A esta expresión al denotaremos por P_4^8 y representa el número de permutaciones que se pueden hacer con cuatro elementos seleccionados de ocho elementos distintos.

En general, el número de permutaciones de k elementos que pueden ser construidas a partir de n elementos distintos se denota por $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

Si, en cambio, los cuatro puestos disponibles fueran equivalentes, ¿de cuántas maneras se pueden seleccionar?

Ya sabemos que hay $1\,680 = \frac{8!}{4!}$ formas de seleccionarlos, pero como ahora no importa el orden y existen $4!$ maneras de ordenar 4 elementos, luego

$$\text{hay } \frac{\frac{8!}{4!}}{4!} = 70 \text{ formas de seleccionar a los postulantes.}$$

$$\text{El número } \frac{\frac{8!}{4!}}{4!} \text{ se denota por } C_4^8.$$

En general, el número de combinaciones de k elementos que pueden ser construidas a partir de n elementos distintos se denota por $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ y se conoce como número combinatorio.

GLOSARIO

Se llama **permutación** a una secuencia ordenada de elementos. Si no importa el orden, solo los elementos que componen un conjunto o grupo, entonces se habla de **combinación**.

GLOSARIO

$n!$ se lee " n factorial" y corresponde al producto de todos los números naturales menores o iguales que n . Es decir, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$

EN TU CUADERNO

1. Calcula el número de patentes que se podrían formar con tres letras y tres dígitos, sin considerar vocales ni la Ñ ni la Q.
2. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco personas en una fila de ocho sillas?
3. Un cargamento de cajas de manzanas contiene 20 cajas. De estas, hay tres cajas que están malas. El supervisor realiza el control de calidad del cargamento seleccionando dos cajas.
 - a. ¿De cuántas maneras puede seleccionarlas?
 - b. ¿De cuántas maneras puede seleccionar una caja mala y una caja buena?
4. Los números de teléfono de la empresa tienen un prefijo seguido de cuatro cifras, como por ejemplo 678-XXXX. La empresa necesita instalar 10 001 teléfonos. ¿Tendrá números suficientes para asignar uno diferente a cada teléfono?
5. ¿Cuántas sumas de dinero diferentes se pueden hacer con una moneda de \$ 5, una de \$ 10, una de \$ 50 y una de \$ 100 utilizando siempre al menos una moneda?
6. Determina cuántas palabras de k letras (considera $k \leq 5$) se pueden formar con las letras a, b, c, d y e , de modo que:
 - a. no se repita ninguna letra.
 - b. la letra c aparezca solo una vez y las otras letras se puedan repetir.
 - c. la letra c aparezca al menos una vez y las otras letras se puedan repetir.
7. Para la misma cantidad de elementos, ¿hay más permutaciones que combinaciones o al revés?



EN RESUMEN

- Las técnicas de conteo permiten determinar el número de casos posibles de un determinado evento.
- Si un evento tiene m posibilidades y otro evento tiene n posibilidades, entonces:
 - hay $m + n$ maneras de que ocurra un evento o el otro (regla de la suma).
 - hay $m \cdot n$ maneras de que ocurran ambos eventos simultáneamente (regla del producto).
- Una **permutación** es una secuencia ordenada de elementos.
- En general, hay $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ maneras de ordenar k elementos que se pueden seleccionar de n elementos distintos.
- Una **combinación** es un conjunto de elementos en que solo importa cuáles son sus elementos, no su orden.
- En general hay $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ combinaciones de k elementos que pueden ser construidas a partir de n elementos distintos.

Hace algunos años, el Loto se jugaba escogiendo 6 números de un total de 36. Después, esto cambió, ahora se escogen 6 números, pero de un total de 39.

ANALICEMOS...

- ¿Qué crees tú, es más probable acertar a 6 números de 36 o a 6 de 39?
- En el juego del Loto, ¿importa el orden en que se sortean los números?
- ¿Cuál es el total de formas posibles de escoger 6 números de 36?, ¿y en el caso de escoger 6 de 39?

Se define el evento **A**: ganarse el Loto seleccionando 6 números de 36, y el evento **B**: ganarse el Loto seleccionando 6 números de 39.

Para determinar el total de resultados, en el primer caso, se deben seleccionar 6 números de un total de 36. Como el orden, en este caso, no importa, lo que se necesita calcular es el número de combinaciones de 6 elementos elegidos de un total de 36, es decir, C_6^{36} .

$$C_6^{36} = \frac{36!}{6! \cdot (36 - 6)!} = \frac{36!}{6! \cdot 30!} = 1\,947\,792$$

Es decir, hay 1 947 792 formas de elegir 6 números de 36.

En el segundo caso, se necesita calcular el número de combinaciones de 6 elementos elegidos de un total de 39, es decir, C_6^{39} .

$$C_6^{39} = \frac{39!}{6! \cdot (39 - 6)!} = \frac{39!}{6! \cdot 33!} = 3\,262\,623$$

Es decir, hay 3 262 623 maneras de elegir 6 números de 39.

Si solo se juega una vez, esto significa que estaríamos eligiendo solo una de las posibles combinaciones. Por otra parte, se asume que todos los números tienen la misma probabilidad de ser seleccionados, entonces:

$$P(A) = \frac{1}{1\,947\,792} \approx 5,13 \cdot 10^{-7}$$

$$P(B) = \frac{1}{3\,262\,623} \approx 3,06 \cdot 10^{-7}$$

Luego, es más probable ganarse el Loto eligiendo 6 números de 36 que 6 de 39.

RECUERDA QUE...

Un experimento es **aleatorio** cuando:

- Se puede repetir indefinidamente pudiéndose obtener resultados distintos en cada repetición.
- En cada prueba se obtiene un resultado que pertenece al conjunto de todos los resultados posibles del experimento.
- Antes de realizar una nueva prueba del experimento no se puede predecir el resultado que se obtendrá.

RECUERDA QUE...

El número de combinaciones de k elementos seleccionados de un total de n elementos es:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

GLOSARIO

Probabilidad: posibilidad de que un suceso ocurra o no. Se asigna un valor entre 0 y 1.

GLOSARIO

Regla de Laplace: la probabilidad de un suceso se calcula como el cociente entre los casos favorables y los casos posibles.

EN TU CUADERNO

1. Si se creara un nuevo Loto, donde se elijan 6 números de 42, ¿cuál será la probabilidad de ganar con este nuevo Loto?
2. En una baraja de naipes inglés, calcula la probabilidad de que al sacar cinco cartas, se obtenga:
 - a. cinco cartas de igual pinta.
 - b. cuatro cartas de igual valor.
 - c. tres cartas de un valor y dos de cualquier otro valor.
3. En una bolsa se colocan bolitas marcadas con todos los números de 5 cifras que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5, sin repetir ningún dígito.
 - a. ¿Cuántas bolitas hay al interior de la bolsa?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolita con un número par?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolita con un número menor que 20 000?
 - d. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolita con un número que termine en 1 ó en 5?
4. Cinco mujeres y cinco hombres compran diez asientos consecutivos de una fila del teatro. Si eligen al azar dónde sentarse, calcula la probabilidad de que:
 - a. hombres y mujeres se sienten en sillas alternadas.
 - b. todas las mujeres se sienten juntas.
5. Dos dígitos se eligen al azar del 1 al 9. Si la suma es par, calcula la probabilidad de que ambos números sean impares.
6. Cinco cartas, marcadas 1, 2, 3, 4 y 5, son sacadas aleatoriamente y colocadas en una fila. Evalúa la probabilidad de los siguientes eventos.
 - a. Que la carta 1 aparezca en la primera posición.
 - b. Que la carta 1 sea seguida inmediatamente por la carta 2.
 - c. Que haya exactamente tres cartas que coincidan con su posición en la fila.

EN RESUMEN

- De acuerdo a la regla de Laplace, la probabilidad de un evento A está dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables al evento}}{\text{número total de resultados}}$$

- La condición necesaria para aplicar esta regla es que el espacio muestral asociado al experimento sea equiprobable.
- Cuando usamos esta regla para calcular probabilidades, las técnicas de conteo resultan de mucha utilidad.

Marta, Juan y Diego están jugando a extraer una ficha de una caja que tiene ocho fichas numeradas del 1 a 4, cuatro rojas y cuatro azules. Marta apuesta a que la ficha extraída tendrá un número par, Juan apuesta a que la ficha será azul y Diego apuesta a que la ficha será azul o tendrá un número par.

ANALICEMOS...

- ¿Quién de los tres tiene mayor probabilidad de ganar su apuesta?
- ¿Cómo calcula la probabilidad de cada uno de estos eventos?
- ¿Cómo es el espacio muestral de este experimento?
- ¿Es válido utilizar la regla de Laplace en estos casos?
- ¿Qué relación hay entre las apuestas de Diego con las de Marta y Juan?

El espacio muestral de este experimento lo podemos representar de la siguiente forma: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4\}$

El espacio muestral es equiprobable, pues todas las fichas tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas. El número total de casos es ocho.

- Si A : la ficha muestra un número par, entonces $A = \{2, 4, 2, 4\}$
- Si B : la ficha es azul, entonces $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Si C : la ficha muestra un número par o es azul, entonces $C = \{2, 4, 1, 2, 3, 4\}$

Observa que el evento C es equivalente al $A \cup B$.

Por otra parte, $A \cap B$ es: $\{2, 4\}$

Observa que $\#C = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

Utilizando la regla de Laplace tenemos que:

$$P(A) = \frac{4}{8} \text{ y } P(B) = \frac{4}{8}.$$

$$\begin{aligned} P(C) = P(A \cup B) &= \frac{6}{8} = \frac{\#A + \#B - \#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} - \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Cuando dos eventos, A y D , son mutuamente excluyentes se tiene que:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D)$$

Si A es un evento, entonces todo espacio muestral, Ω , se puede escribir como:

$$\Omega = A \cup A^c$$

GLOSARIO

Espacio muestral: conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. El espacio muestral es **equiprobable** si todos los sucesos pertenecientes al espacio muestral, tienen igual probabilidad.

Sucesos o eventos: elemento de un espacio muestral de un experimento aleatorio.

RECUERDA QUE...

La **cardinalidad** ($\#$) de un conjunto es la cantidad de elementos contenidos en él.

GLOSARIO

Dado que $A \cap D = \emptyset$ se dice que A y D son eventos **mutuamente excluyentes**, pues no pueden ocurrir simultáneamente. En este caso, $P(A \cap D) = 0$.

RECUERDA QUE...

La probabilidad de un evento es siempre un número entre 0 y 1. La probabilidad del espacio muestral es 1.

RECUERDA QUE...

Se cumple que

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup (B \cup C)$$

Se tiene que para todo evento A y A^c son eventos mutuamente excluyentes, luego: $P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, entonces, $P(A) + P(A^c) = 1$ y de aquí se obtiene que $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Esta regla es de mucha utilidad, pues en muchos casos es más fácil calcular la probabilidad del complemento que la del evento en sí.

EN RESUMEN

- La probabilidad de la unión de dos eventos es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos menos la probabilidad de su intersección.
- Si los eventos son mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades.
- La probabilidad del complemento de un evento A es igual a 1 menos la probabilidad del evento.

EN TU CUADERNO

1. Ignacio está recién titulado. Después de tener entrevistas en dos compañías, él evalúa la probabilidad que tiene de lograr empleo en la compañía A como 0,8, y la de obtenerlo en la compañía B como 0,6. Si, por otro lado, considera que la probabilidad de que reciba ofertas de ambas compañías es 0,5, ¿cuál es la probabilidad de que obtendrá al menos una oferta de empleo?
2. En una clase de 100 estudiantes graduados de bachillerato, 54 estudiaron matemáticas, 69 historia y 35 cursaron matemáticas e historia. Utilizando diagramas de Venn, determina, seleccionando al azar uno de estos estudiantes, la probabilidad de que el estudiante:
 - a. haya cursado matemáticas o historia.
 - b. no haya cursado ninguna de estas materias.
 - c. haya cursado historia pero no matemáticas.
3. a. Con el apoyo de diagramas de Venn muestra que:
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
 - b. En un grupo de 500 universitarios se encuentra que 210 fuman, 258 consumen bebidas gaseosas, 216 comen entre comidas, 122 fuman y consumen bebidas gaseosas, 83 comen entre comidas y consumen bebidas gaseosas, 97 fuman y comen entre comidas y 52 tienen esos tres malos hábitos. Si se selecciona al azar a un miembro de este grupo, encuentra la probabilidad de que el estudiante:
 - i. fume pero no consuma bebidas gaseosas.
 - ii. coma entre comidas y consuma bebidas gaseosas.
 - iii. ni fume ni coma entre comidas.



Toda fábrica tiene un departamento de control de calidad, cuya función es garantizar que sus productos cumplan con las especificaciones de producción correspondientes. Es su responsabilidad minimizar la producción de piezas defectuosas y, por otra parte, garantizar que estas piezas no salgan de la fábrica.

Una empresa soporta un índice de defectos del 10%, es decir, el 10% de las unidades producidas en la fábrica no cumplen las especificaciones. Según esto, si se selecciona una pieza de la producción y se define D : la pieza es defectuosa, entonces $P(D) = 0,1$.

ANALICEMOS...

- Si luego se seleccionan dos piezas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean defectuosas?
- ¿Cómo se puede calcular la probabilidad solicitada?
- En este caso, ¿se puede utilizar la regla de Laplace?
- Sea el evento E : la primera y segunda pieza son defectuosas, ¿cómo se puede escribir este evento en función de eventos elementales?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione una pieza que no sea defectuosa?

Generalizando, si se define D_i como: la i -ésima pieza seleccionada es defectuosa, entonces $E = D_1 \cap D_2$. Luego, lo que debemos calcular es $P(E) = P(D_1 \cap D_2)$.

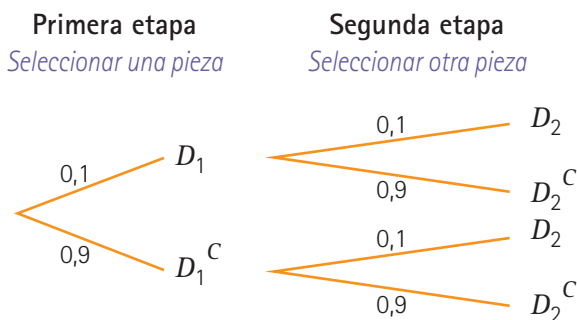
Por otra parte, el evento "la primera pieza seleccionada no es defectuosa" es equivalente al evento D_1^C .

Luego $P(D_1^C) = 1 - P(D_1) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Observa que el experimento de seleccionar una pieza y luego otra es secuencial, es decir, un evento ocurre después del otro.

RECUERDA QUE...

- Un evento elemental es aquel cuya cardinalidad es igual a 1.
- En lenguaje de conjuntos, la condición "que se cumplan ambas" equivale a hablar de intersección.
- $P(A^C) = 1 - P(A)$.



GLOSARIO

Sucesos independientes: dos sucesos son independientes, si la ocurrencia de uno de ellos no afecta de ninguna manera la ocurrencia del otro suceso.

La probabilidad de la intersección estará dada por el producto de las probabilidades de cada rama, es decir, $P(D_1 \cap D_2) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$.

Observa que, en este caso, se tiene que $P(D_1 \cap D_2) = 0,1 \cdot 0,1 = P(D_1) \cdot P(D_2)$ y entonces se dice que D_1 y D_2 son eventos independientes, es decir, que la ocurrencia de un evento no afecta la ocurrencia del otro.

Por otra parte, si dos eventos A y B son independientes, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Análogamente se tiene, por ejemplo, que la probabilidad de seleccionar la primera pieza defectuosa y la segunda no defectuosa está dada por:

$$P(D_1 \cap D_2^C) = 0,1 \cdot 0,9 = 0,09$$

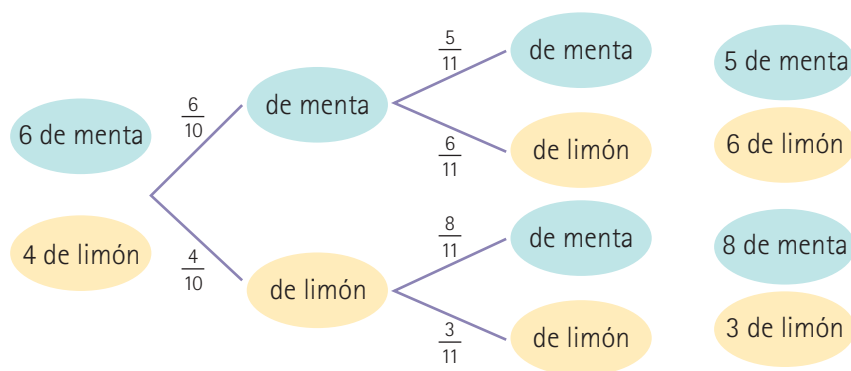
Considera ahora el siguiente ejemplo:

Una caja contiene seis caramelos de menta y cuatro de limón. Se extrae uno al azar. Si es de menta, se lo reemplaza por dos de limón, y viceversa. Luego se vuelve a extraer un caramelo. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido en la primera extracción un caramelo de menta y en la segunda extracción un caramelo de limón?

Se define como A_i : se obtiene un caramelo de menta en la i -ésima extracción. Luego A_i^C es: se obtiene un caramelo de limón en la i -ésima extracción.

Interesa calcular $P(A_1 \cap A_2^C)$.

El diagrama de árbol asociado a este experimento es el siguiente:



$$\text{Luego, la } P(A_1 \cap A_2^C) = \frac{18}{55}$$

En años anteriores, se ha visto que se puede calcular probabilidades a partir de información resumida en tablas de frecuencia. A partir de estas tablas también podemos calcular probabilidades de intersección. Observa el siguiente caso:

En un experimento para estudiar la relación de la hipertensión arterial con los hábitos de fumar, se reúnen los siguientes datos de 180 individuos.

	No fumadores	Fumadores moderados	Fumadores empedernidos
Hipertensión	21	36	30
Sin hipertensión	48	26	19

Si se selecciona un individuo al azar, encuentra la probabilidad de que la persona:

- sea no fumador.
- sea fumador moderado e hipertenso.

Sea A : la persona es no fumadora:

$$P(A) = \frac{21 + 48}{180} = \frac{69}{180} = \frac{23}{60}$$

Sea B : la persona es fumador moderado e hipertenso:

$$P(B) = \frac{36}{180} = \frac{1}{5}$$

EN RESUMEN

- Para calcular la probabilidad de la intersección de dos o más eventos se puede construir el diagrama de árbol asociado, asignando a cada rama la probabilidad correspondiente. Una vez dibujado, se deben identificar las ramas que representan el caso de interés y, multiplicando las probabilidades correspondientes, se obtiene la probabilidad deseada.
- Un evento es **independiente** de otro si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.
- Si dos o más eventos son independientes, entonces la probabilidad de la intersección de ellos es el producto de sus probabilidades.
- También se puede calcular la probabilidad de la intersección a partir de tablas de frecuencia, identificando las celdas donde se encuentra la información de interés.

EN TU CUADERNO

- Una persona va de su oficina a su casa el 75% de las veces en metro y las restantes en micro. Cuando se va en metro, llega a su casa antes de las 17:30 h el 80% de las veces. Si se va en micro, solo el 60% de las veces llega antes de las 17:30 h. ¿Cuál es la probabilidad de que se vaya en metro y llegue después de las 17:30 h?, ¿cómo lo calculaste?
- Un fabricante de una vacuna para la gripe se interesa en analizar la calidad de su suero. Tres departamentos diferentes procesan los lotes de suero y tienen tasas de rechazo de 0,1; 0,08 y 0,12, respectivamente. Las inspecciones de los tres departamentos son secuenciales e independientes.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de suero sobreviva a la primera inspección, pero sea rechazado por el segundo departamento?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un lote de suero sobreviva a las tres inspecciones?
- Una urna contiene 20 fichas rojas, 30 blancas y 50 azules. Calcula la probabilidad de obtener:
 - una ficha roja y luego una azul al extraer dos fichas con reposición.
 - una ficha roja y luego una azul al extraer dos fichas sin reposición.
 - una ficha roja, luego una azul y por último una blanca al extraer tres fichas sin reposición.
- Se encuestaron a 200 adultos y se clasificaron por sexo y nivel de educación:

Educación	Hombre	Mujer
Básica	38	45
Media	28	50
Universitaria	22	17

Se elige una persona al azar de este grupo. Calcula la probabilidad de que:

- sea hombre y tenga educación básica.
 - sea mujer y tenga educación universitaria.
 - sea mujer.
 - tenga educación media.
- En una empresa funcionan tres impresoras. La probabilidad de que cada una de ellas esté fuera de servicio es 0,2; 0,25 y 0,3, respectivamente. La secretaria de la empresa necesita imprimir un informe y se encuentra con que todas están malas. ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?



MI PROGRESO

- Samuel va a armar un computador. Tiene la opción de comprar los chips entre dos marcas, un disco duro de cuatro marcas, la memoria de tres marcas y un conjunto de accesorios en cinco tiendas locales. ¿De cuántas maneras diferentes puede Samuel comprar las partes?
- Este año, se otorgarán tres premios (al mejor rendimiento, asistencia y mejor compañero o compañera) en un curso de 25 estudiantes. Si cada estudiante puede recibir como máximo un premio, ¿cuántas selecciones posibles habrá?
- Un club de básquetbol dispone de diez jugadores de los cuales juegan cinco a la vez. Si cada jugador puede ocupar todas las posiciones, ¿cuántos equipos distintos de cinco jugadores puede formar el entrenador?
- Si se toman tres libros al azar de un librero que contiene cinco novelas, tres libros de poema y un diccionario, calcula la probabilidad de que:
 - se seleccione el diccionario.
 - se seleccionen dos novelas y un libro de poemas.
- Se escriben al azar las cinco vocales. ¿Cuál es la probabilidad de que la **e** sea la primera y la **o** sea la última?
- En una región, la proporción de personas que tienen una cierta enfermedad es 0,01. En un test de diagnóstico, la probabilidad de que a una persona sana se le diagnostique la enfermedad es 0,05 y para una persona enferma es 0,2. Si a una persona de la región se le aplica el test, ¿cuál es la probabilidad de que esté enferma y sea diagnosticada como sana?
- Un fabricante de automóviles está preocupado por el posible retiro de uno de sus modelos. Si hubiera un retiro, existe una probabilidad de 0,25 de que haya un defecto en el sistema de frenos, de 0,18 en la transmisión, de 0,17 en el sistema de combustible y de 0,4 en alguna otra área.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el defecto esté en los frenos o en el sistema de combustible si la probabilidad de defectos simultáneos en ambos sistemas es de 0,15?
 - A partir de la respuesta anterior, ¿cuál es la probabilidad de que no haya defecto en los frenos o en el sistema de combustible?

¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

CRITERIO	PREGUNTA	EJERCICIOS CORRECTOS
Aplicar las técnicas de conteo.	1, 2 y 3	___ / 3
Calcular probabilidades usando la regla de Laplace.	4 y 5	___ / 3
Calcular la suma y producto de probabilidades.	6 y 7	___ / 3

Cómo resolverlo

Problema resuelto 1

Sean las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0,7, \quad P(B) = 0,6, \quad P(C) = 0,5, \quad P(A \cap B) = 0,4, \quad P(A \cap C) = 0,3, \\ P(B \cap C) = 0,2 \quad P(A \cap B \cap C) = 0,1.$$

Calcula utilizando diagrama de Venn y las reglas de probabilidad estudiadas:

a. $P(B \cup C)$ b. $P(A \cup B \cup C)$ c. $P(A^c \cap B^c \cap C)$

Solución:

a. Utilizando la regla aditiva, se tiene que:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$\text{Remplazando, } P(B \cup C) = 0,6 + 0,5 - 0,2 = 0,9$$

b. Utilizando la regla aditiva para la intersección de tres eventos:

$$P(A \cup B \cup C) =$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Remplazando,

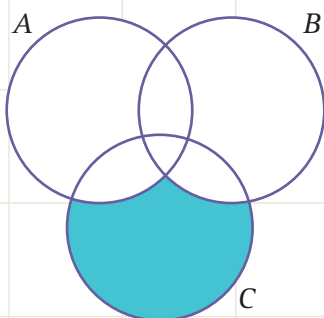
$$P(A \cup B \cup C) = 0,7 + 0,6 + 0,5 - 0,4 - 0,3 - 0,2 + 0,1 = 1$$

c. Utilizando diagrama de Venn se tiene que:

$$P(A^c \cap B^c \cap C) = P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Se debe sumar $P(A \cap B \cap C)$, pues al restar $P(A \cap C)$ y $P(B \cap C)$, se está restando dos veces lo correspondiente a $P(A \cap B \cap C)$.

$$\text{Remplazando, } P(A^c \cap B^c \cap C) = 0,5 - 0,3 - 0,2 + 0,1 = 0,1$$



EN TU CUADERNO

1. En Ciudad Gótica se publican tres diarios: A , B y C . Los estudiantes de Ciudad Gótica dan la siguiente probabilidad de leer dichos diarios:

$$P(A) = 0,15$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(C) = 0,22$$

$$P(A \cap B) = 0,02$$

$$P(A \cap C) = 0,08$$

$$P(B \cap C) = 0,1$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0,003$$

Calcula la probabilidad de que un estudiante de Ciudad Gótica:

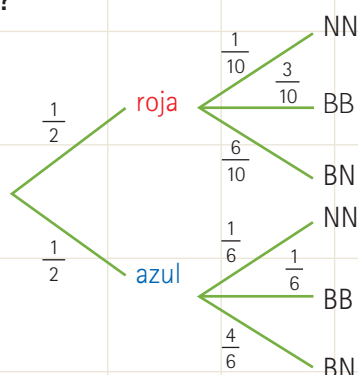
- a. no lea ningún diario.
- b. lea al menos un diario.
- c. lea solo los diarios A y C .

Problema resuelto 2

Hay dos urnas. La urna roja contiene dos fichas negras y tres blancas. La urna azul contiene dos fichas negras y dos blancas. Se selecciona una urna al azar y de ella se seleccionan dos fichas sin reposición.

¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una de las fichas extraídas sea blanca?

Solución:



Primero se dibuja el diagrama.

Se selecciona una urna al azar, cada una tiene probabilidad $\frac{1}{2}$.

Urna roja, casos totales: $C_2^5 = \frac{5!}{2!3!} = 10$

Urna azul, casos totales: $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Sea A : exactamente una de las fichas es blanca.

Se identifican los casos favorables en el árbol. Observa que hay dos casos que son excluyentes, pues uno corresponde a la urna roja y el otro a la azul. Luego, por la regla aditiva, se suman las probabilidades de ambos casos.

Entonces,
$$P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

Observando las probabilidades en el diagrama de árbol.

$$P(A) = \frac{3}{10} + \frac{2}{6} = \frac{19}{30}$$

EN TU CUADERNO

1. Se lanza una moneda con probabilidad 0,5 que el resultado sea cara. Si aparece una cara, se extraen dos fichas secuencialmente de una urna que contiene dos fichas rojas y tres verdes. Si el resultado es sello, las fichas se extraen de otra urna que contiene dos fichas rojas y dos verdes.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera ficha sea roja?
- ¿Cuál es la probabilidad de que las fichas sean de distinto color?



El IPC

El IPC (Índice de Precios al Consumidor) es un indicador desarrollado por el Instituto Nacional de Estadísticas con el fin de calcular mensualmente la evolución de la inflación. En otras palabras, el IPC representa el valor del costo de la vida, ya que es un índice que recoge la variación que han tenido cada mes los precios de los bienes y servicios consumidos por los hogares chilenos. De esta forma, si un conjunto de productos o servicios aumenta de precio, la misma cantidad de dinero no alcanzará para comprarlos. A eso se le denomina que el poder adquisitivo del dinero se pierde con la inflación, que es lo que se refleja a través del IPC.

EN TU CUADERNO

1. Averigua los valores del IPC de los últimos seis meses. ¿Qué productos o bienes tuvieron las mayores alzas en este período?, ¿por qué?
2. Investiga cómo se calcula el IPC y qué bienes son considerados para su cálculo. ¿Cuál es su unidad de medición?
3. ¿Qué consecuencias se pueden observar cuando el aumento del IPC de un mes a otro es considerable?

INVESTIGUEMOS...

Ahora trabajen en grupos de dos personas.

1. En la página de Internet del Instituto Nacional de Estadísticas (INE), www.ine.cl, pueden encontrar información estadística de distinta naturaleza: económica, agropecuaria, social y cultural, entre otras. Ingresen a la sección **Chile Estadístico**, luego **Estadísticas de Precios** e **Índice de Precios al Consumidor**.
2. Aquí encontrarán información del IPC del año 1993 en adelante, en el ítem **Series Históricas**. Solo desde 1999 se encuentra la información abierta por mes. También podrán ver que existe un índice general e índices por rubro, tales como alimentación, vestuario, entre otros.
3. Seleccionen dos años que se encuentren completos y abiertos por mes y un índice que les interese. Calculen para cada año:
 - a. la media y la mediana.
 - b. identifiquen el valor mínimo y máximo.
 - c. el rango, la varianza y la desviación estándar.

- d. Comparen los resultados obtenidos para cada año, ¿qué pueden concluir?
- e. Se asume que el IPC es un indicador relacionado a un fenómeno aleatorio. ¿Por qué se puede afirmar esto? ¿Qué factores pueden influir en la variación del IPC?
- f. Para realizar los cálculos, utilicen las funciones estadísticas que se encuentran incorporadas en Excel.



4. Ahora realicen el mismo ejercicio, pero considerando solo el 2009 y los indicadores de vivienda y alimentación. Con las medidas que ya conoces, ¿qué puedes concluir de sus comportamientos?
5. Investiguen qué puede haber ocurrido el 2009 que haya incidido en cada uno de estos indicadores y que explique por qué uno de ellos tiene mayor variabilidad que el otro.
6. Para cada una de las actividades, redacten un pequeño informe donde se destaquen las conclusiones más importantes.

EVALUEMOS NUESTRO TRABAJO

- ¿Qué aprendieron acerca del cálculo del IPC?
- ¿Las medidas de posición y dispersión que calcularon les ayudaron a entender el comportamiento del IPC?
- ¿Lograron establecer las diferencias entre el IPC de vivienda y el IPC de alimentación?
- ¿Pudieron determinar cuáles fueron los factores que influyeron en los distintos índices?
- Comparen su trabajo con el de sus compañeros y compañeras. ¿Encontraron ellos algo distinto a lo que ustedes encontraron?, ¿qué les faltó?

Síntesis de la Unidad

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.



1 Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

- La unidad de medición de la varianza es la misma que la de la variable que se está estudiando.
- El muestreo aleatorio simple es aplicado a poblaciones que no son finitas.
- Si dos conjuntos de datos tienen la misma media, entonces podemos decir que tienen el mismo comportamiento.
- Si un grupo de datos es homogéneo, entonces su varianza es alta.
- El rango es una medida de dispersión.
- La desviación estándar cuantifica qué tan dispersos están los datos en torno a su media.
- La varianza puede ser negativa.
- El rango se puede ver alterado si existe un valor extremadamente grande o pequeño.
- Si en un conjunto de datos todas las observaciones son iguales, entonces la varianza es 0.
- Para un mismo número de elementos, siempre hay más combinaciones que permutaciones.

- k. Si un evento puede ocurrir de 5 maneras y otro evento puede ocurrir de 8 maneras, entonces hay 40 maneras de que ocurra un evento o el otro.
- l. En una permutación importa el orden, mientras que en una combinación no.
- m. Si dos eventos son excluyentes, entonces $P(A \cup B) = 0$.
- n. Para todo par de eventos A y B , se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- ñ. Siempre se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

2 Aplica lo que aprendiste en la unidad para desarrollar las siguientes actividades:



- a. En un estudio acerca de la condición física de los empleados de una oficina, se tomaron mediciones del peso de 40 empleados, obteniéndose los siguientes resultados:
 Mujeres (kg): 58 48 54 51 67 58 67 63 59 64 54 60 55 59 57 75 56 62 62 65
 Hombres (kg): 58 62 62 50 64 63 59 58 63 60 54 60 60 57 58 63 58 61 90 65
 Usando medidas de tendencia central, posición y dispersión, compara cómo se comporta la variable **peso** en cada grupo. ¿Cuál de los dos grupos es más homogéneo?
- b. Un consumidor ordena, según sus preferencias, seis productos distintos.
 - i. ¿Cuántos ordenamientos posibles hay?
 - ii. Si se ordenan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dos de los productos ocupen siempre los primeros lugares?
- c. Determina la probabilidad de que en una reunión de 40 personas, al menos dos cumplan años el mismo día.
- d. En un proceso productivo de chips para computador, un 20% son defectuosos. En un test de calidad, todos los chips buenos pasan, pero también pasan un 10% de los chips malos. ¿Cuál es la probabilidad de que un chip esté bueno y pase el test?
- e. En la fabricación de baldosines de cerámica, se ha detectado que pueden presentarse dos tipos de fallas, A y B ; A con probabilidad 0,15 y B con probabilidad 0,08. Suponiendo independencia entre los dos tipos de fallas, calcula la probabilidad de que un baldosín:
 - i. no tenga ambas fallas.
 - ii. no tenga fallas.
 - iii. tenga una sola falla.
- f. La probabilidad de que un hombre viva 20 años más es $\frac{1}{4}$ y la de que su mujer viva 20 años más es $\frac{1}{3}$. Calcula la probabilidad de que:
 - i. ambos vivan 20 años más.
 - ii. el hombre viva 20 años más y su mujer no.
 - iii. ambos mueran durante los próximos 20 años.



Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

1. El rango, la varianza y la desviación estándar del siguiente conjunto de datos son, respectivamente:

6 9 10 19 19 12 2 12 3 19

- A. 6, 1, 12, 2
- B. 3, 19 y 12
- C. 17, 36,8 y 6,1
- D. 36,8, 17 y 6,1
- E. 19, 0 y 0

2. El rango, la varianza y la desviación estándar del siguiente conjunto de datos son, respectivamente:

4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

- A. 0, 4 y 2
- B. 0, 0 y 0
- C. 7, 6 y 10
- D. 11, 12 y 13
- E. 0, 1 y 2

3. ¿Cuántos cartones distintos posibles de Kino hay? (recuerda que el Kino consiste en acertar a 14 números elegidos de un total de 25).

- A. 4 457 400
- B. 3 159 987
- C. 87 178 291 200
- D. 25
- E. $7,11701 \cdot 10^{12}$

4. Se va a elegir a un presidente y a un tesorero de un club estudiantil compuesto por 50 personas. ¿Cuántas opciones diferentes de funcionarios son posibles?

- A. 25
- B. 50
- C. 2 450
- D. 1 225
- E. 2 256

5. Se escoge un número al azar entre 1 y 4, y posteriormente se lanza una moneda equilibrada tantas veces como el número escogido. La probabilidad de no observar sellos es:

- A. $\frac{15}{64}$
- B. $\frac{1}{4}$
- C. $\frac{15}{16}$
- D. $\frac{1}{2}$
- E. $\frac{31}{64}$

6. Se sacan dos cartas sucesivamente, sin remplazo, de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean mayores que 2 y menores que 8?

- A. $\frac{100}{663}$
- B. $\frac{40}{663}$
- C. $\frac{95}{663}$
- D. $\frac{25}{663}$
- E. $\frac{2}{663}$

7. Considera las siguientes afirmaciones:

- I. Si dos eventos son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- II. Si dos eventos son excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- III. Si dos eventos son excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$.

Son verdaderas:

- A. Solo I
- B. Solo II
- C. Solo III
- D. I y II
- E. I y III

8. Un sistema consta de tres componentes. Se sabe que la probabilidad de que una componente falle es 0,3, que dos fallen es 0,12 y que las tres fallen es 0,05. Entonces, la probabilidad de que ninguna falle es:
- A. 0,47 D. 0,53
B. 0,41 E. 0,23
C. 0,59
9. De las siguientes afirmaciones, son verdaderas:
- I. la probabilidad de que llueva mañana es 0,4 y la de que no llueva es 0,52.
II. al sacar una carta de una baraja, la probabilidad de seleccionar corazones es $\frac{1}{4}$.
III. las probabilidades de que una impresora cometa 0, 1, 2, 3 ó 4 o más errores al imprimir un documento son 0,19; 0,34; -0,25; 0,43 y 0,29.
- A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. I y II
E. II y III
10. La población asociada a la siguiente situación es: en cinco ocasiones distintas, una abogada demoró 21, 26, 24, 22 y 21 minutos desde su casa hasta su oficina en el centro de la ciudad.
- A. Las casas de una cierta localidad.
B. Las oficinas del centro.
C. Todos los posibles tiempos que demora esta abogada desde su casa hasta la oficina.
D. Las veces que la abogada va de su casa a la oficina.
E. Los minutos.
11. Una villa tiene un carro de bomberos y una ambulancia disponibles para emergencias. La probabilidad de que el carro de bomberos esté disponible cuando se necesite es 0,98 y la probabilidad de que la ambulancia esté disponible es 0,92. En el caso de que haya heridos de un edificio en llamas, ¿cuál es la probabilidad de que tanto la ambulancia como el carro de bomberos estén disponibles?
- A. 1,9
B. 0,06
C. 0,9
D. 0,8
E. 0
12. Si las probabilidades de que un mecánico automotriz dé servicio a 3, 4, 5, 6, 7, 8 o más vehículos en un día de trabajo dado son 0,12; 0,19; 0,28; 0,24; 0,1 y 0,07, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que dé servicio al menos a 5 vehículos?
- A. 0,28
B. 0,59
C. 0,41
D. 0,31
E. 0,69
13. Si $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,2$, entonces la $P(A \cup B)$ es:
- A. 0,6
B. 0,8
C. 0,4
D. 0,16
E. 0,84



Unidad 1 Números y raíces

Páginas 14 y 15 (¿Cuánto sabes?)

- a.** 2^8 **c.** $5^2 \cdot 61$ **e.** $11^2 \cdot 2^4$
b. $7^2 \cdot 3^2$ **d.** $101 \cdot 2^2 \cdot 5$ **f.** 3^7
- a.** F **c.** V **e.** V
b. F **d.** V **f.** F
- a.** $\frac{31}{12}$ **e.** x^{6+4a} **i.** $\frac{1}{a^2}$
b. $\frac{6562}{81}$ **f.** $\frac{36a^4x^6}{9z^2}$ **j.** n^4
c. 0 **g.** 36 **k.** w^3
d. $\frac{1}{64}$ **h.** $\frac{1}{16}$ **l.** a^{-2p-2q}
- a.** El área aumenta al cuádruple y el perímetro al doble.
b. El volumen disminuye a $\frac{1}{64}$ del volumen original.
- a.** $12\sqrt{2}$ **c.** 14 **e.** $4b^2\sqrt{3}$ **g.** $4a^3\sqrt{4}$
b. 4 **d.** $6\sqrt{2}$ **f.** $\frac{2a}{b^2}\sqrt{2}$ **h.** $\frac{a}{b^2}$

Página 17

- $-\frac{99}{100}, -\frac{1}{100}, 0, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, 1, \frac{100}{99}, \frac{7}{5}$

Página 19

- a.** racional, **b.** racional, **c.** racional, **d.** irracional,
e. irracional, **f.** irracional, **g.** racional, **h.** racional
- a.** racional, **b.** irracional
- Por ejemplo, **a.** $\sqrt{2,5}$ **b.** $\sqrt{15,5}$ **c.** $\sqrt{1,5}$ **d.** $\sqrt{23,5}$.
 En todos los casos, se puede expresar como el promedio de los números dados.
- a.** > **b.** > **c.** > **d.** < **e.** > **f.** >

Página 21

- a.** Iguales, $\frac{89}{70}$, asociatividad de la suma.
b. Iguales, $\frac{5}{36}$, asociatividad del producto.
c. Iguales, 0, conmutatividad del producto y cero absorbente.

- d.** Iguales, -35, distributividad.
e. Iguales, $\frac{19}{9}$, conmutatividad de la suma.
f. Iguales, $\frac{3}{7}$, conmutatividad de la suma y neutro aditivo.
g. Iguales, 115,5, distributividad.
h. Iguales, 0, conmutatividad de la suma e inverso aditivo.
i. Iguales, $\frac{3}{44}$, conmutatividad del producto.
j. Iguales, 1, conmutatividad del producto e inverso multiplicativo.
- Por ejemplo:
a. 1 y 2. **c.** 1 y 1,01 **e.** 0,55 y 0,6
b. $\frac{22}{39}$ y $\frac{23}{39}$ **d.** 1 y 1,02 **f.** 0,01985 y 0,0199
- a.** $\frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{6}{5}$ **d.** 0,7051; $\frac{3}{4}$; 0,7501
b. $-\frac{7}{9}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{3}$ **e.** $0.\bar{3}$; $0.\overline{34}$; 0,344; $0,3\bar{4}$
c. 1; $\frac{7}{5}; \frac{5}{3}$ **f.** $0,\overline{56}$; $0,5\bar{6}$; $0,\overline{65}$; $0,\bar{6}$
- a.** Verdadera; **b.** Falsa (por ejemplo, $-4 < 4$ pero $-\frac{4}{4}$ no es mayor que 1).

Página 23

1.	exceso	defecto	redondeo
a.	2,72	2,71	2,72
b.	3,15	3,14	3,14
c.	1,62	1,61	1,62
d.	1,74	1,73	1,73
e.	2,65	2,64	2,65
f.	3,61	3,60	3,61
g.	7,55	7,54	7,54
h.	4,38	4,37	4,38
i.	2,24	2,23	2,23

- a.** 0,00042 **d.** 0,00001576
b. 0,00000024 **e.** 0,3096
c. 0,00958 **f.** 0,00000424

3. a. 3,87 c. 3,46 e. 4,12
b. 3,16 d. 4,58 f. 5,48

Página 24 (Mi progreso)

1. a. irracional; b. irracional; c. racional; d. irracional;
e. irracional; f. racional.

2. a. Entre 0 y 1.

3. a. $\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{\sqrt{4}}{4} > \frac{\sqrt{5}}{5}$
b. $\frac{\sqrt{3}+2}{6} > \frac{\sqrt{3}+1}{6} > \frac{\sqrt{3}+1}{7}$
c. $\frac{2\sqrt{2}+1}{6} > \frac{2\sqrt{2}-1}{5} > \frac{2\sqrt{2}-2}{6}$
d. $\frac{\sqrt{5}+1}{10} > \frac{\sqrt{5}}{10} > \frac{\sqrt{5}}{11}$
4. $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{4} < \frac{2\sqrt{5}}{5}$

5.

	exceso	defecto
a.	2,74	2,73
b.	1,77	1,76
c.	-0,35	-0,36
d.	0,84	0,83
e.	-0,68	-0,69
f.	-0,32	-0,33

Página 26

1. a. 11 m b. 9 cm
c. Perímetro: $4\sqrt{A}$; mitad del perímetro: $2\sqrt{A}$
d. 38π m
2. a. Falsa. c. Falsa. e. Verdadera.
b. Falsa. d. Falsa. f. Verdadera.
3. a. 16 cm^2
b. La afirmación es correcta.
c. Área de una cara: $\sqrt[3]{V^2}$; volumen del cubo: V
d. Medida de la arista: $\sqrt[3]{24}$ m (aproximadamente 2,88 m).

Página 32

1. a. Verdadera. c. Verdadera. e. Falsa.
b. Verdadera. d. Verdadera. f. Verdadera.

- g. Falsa. i. Verdadera. k. Verdadera.
h. Verdadera. j. Falsa. l. Falsa.

Página 34

1. a. $15\sqrt[5]{7}$ c. $-2\sqrt[3]{3} + 11\sqrt[6]{18}$
b. $6\sqrt[4]{12}$ d. $6\sqrt[3]{25} - 5\sqrt{5}$
2. a. $\sqrt[5]{84}$ b. 3 c. 2 d. 2
3. Recuerda que no hay una única forma de simplificar.
a. $\sqrt[8]{162}$ c. 6 e. $\sqrt[3]{3}$
b. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ d. $\sqrt[3]{2}$ f. $\frac{5}{\sqrt[6]{2}}$
4. a. $1 + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ c. 3 e. 1
b. 0 d. $\sqrt[8]{2^{11}}$ f. $5^8 \sqrt{3^3 \cdot 25} : 2\sqrt[4]{3}$

Página 36

1. a. $\sqrt[3]{45}$ c. $\sqrt[3]{\left(\frac{7}{10}\right)^2}$
b. $-\sqrt[3]{275} = -3^5$ d. $\sqrt[5]{0,00032} = 0,2$
2. a. $-343^{\frac{1}{3}} = -7$
b. $324^{\frac{1}{4}} \approx 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \approx 4,2426...$
c. $-0,00001^{\frac{1}{5}} = -0,1$
d. $512^{\frac{1}{9}} = 2$
3. a. $\sqrt[15]{x^2}$ b. $\sqrt[9]{a}$
4. a. $\sqrt[3]{a}$ b. $\sqrt[60]{2}$ c. $\sqrt[20]{18}$ d. $\sqrt[8]{2^7}$
5. a. $x = 10$ b. $x = 2$
6. a. medida lado: $10\sqrt{2}$ m
b. $\sqrt[9]{5}$ cm

7. a. $\sqrt[10]{2^7}$ b. $x^4 \cdot \sqrt[6]{x^5}$
8. a. Área $DBEF$ es 72 cm^2
 b. Lado $ABCD$ es $\sqrt{30} \text{ cm}$ y área $DBEF$ es 60 cm^2 .
 c. En el primer caso, el área $ABCD$ es $x^2 \text{ cm}^2$ y el área $DBEF$ es $2 \cdot x^2 \text{ cm}^2$. En el segundo caso, el área $ABCD$ es $y \text{ cm}^2$ el área $DBEF$ es $2y \text{ cm}^2$.

Página 40

1. a. $x = 30$ e. $x = -\frac{1}{3}$ i. $x = \frac{(3^6)}{16}$
 b. $x = \frac{445}{4}$ f. $x = \left(\frac{4}{3}\right)^4$ j. $x = 0$
 c. $x = 2$ g. $x = \frac{16}{3}$ k. $x = 0$
 d. $x = 20$ h. $x = 0$ l. $x = -5$
3. a. Falsa. b. Falsa.
4. No existe.
5. a. Incorrecto (falla de signo bajo el radical).
 b. Incorrecto (falla signo del resultado del radical).
6. a. $x = 3$ o $x = -3$ b. $x = \frac{\sqrt{19}}{2}$ o $x = -\frac{\sqrt{19}}{2}$
7. El área se incrementa en $2 + 10\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Página 41 (Mi progreso)

1. a. Verdadera. b. Falsa. c. Falsa.
2. Recuerda que no hay una única forma de simplificar.
 a. $3\sqrt{2}$ c. 30 e. $-\sqrt[4]{3}$
 b. 18 d. 12 f. 14
3. a. $\sqrt[12]{5^{11}}$ c. $3\sqrt[8]{3}$ e. $2\sqrt[24]{17}$
 b. $\sqrt[3]{7^5}$ d. $\sqrt[3]{a^2}$ f. $\sqrt[5]{11^3}$
4. a. $x = 36$ b. $x = \frac{445}{4}$ c. $x = 17$
5. C

Página 45

4. a. $\frac{5}{2}$ c. 3 e. 4 g. 2 i. $\frac{3}{4}$
 b. 7 d. 9 f. -2 h. $\frac{4}{3}$ j. $\frac{2}{5}$

2. a. 64 b. $\frac{16}{9}$ c. 0,027 d. 15 625 000

Página 47

1. a. 6 d. 0 g. $\frac{3}{4}$ j. 2
 b. $\frac{5}{2}$ e. 1 h. 0 k. -7
 c. 2 f. 7 i. 3 l. -2
2. a. 1,585 aprox. c. 1,129 aprox.
 b. 1,086 aprox. d. 1,338 aprox.
3. a. 9 c. 14 e. -1
 b. 9 d. $\frac{3}{2}$ f. 22

Página 49

1. a. $\log_b(x-11) + \log_b(x+2)$
 b. $16\log_b x + \frac{8}{3}\log_b 100 + \frac{16}{3}\log_b(x-0,4)$
 c. $2\log_b(x+y) + 2\log_b(x^2 - xy + y^2)$
 d. $2\log_p a + 4\log_p b + 5\log_p c - 2\log_p d$
2. a. $\log_m\left(\frac{ac}{b^2 d^3}\right)$ e. $\log_b 72$
 b. $\log_b(x^4 - 1)$ f. $\log_b\left(\frac{c}{a^6}\right)$
 c. $\log_p\left(\frac{x+y+z}{(x-y-z)^4}\right)$ g. $\log_b\left(\frac{ae}{cd}\right)$
 d. $\log_m\left(\frac{(x+3)}{(x-2)^4}\right)$ h. $\log_b\left(\frac{ac}{b}\right)$
3. a. $3A + 3B + 2C$ c. $\frac{3}{2}A + \frac{3}{2}B$
 b. $A + 2B + C$ d. $-A - B - C$

Página 52

1. a. $x = 7$ b. $x = 3$ c. $x = 10\,000$ d. $x = 10$
2. a. $x = 5$ c. $x = 2$ e. $x = -\frac{1}{6}$
 b. $x = 6$ d. $x = 3,8$ f. $x = 1$

Página 53

1. a. $3,162 \cdot 10^{-3}$ aproximadamente.
 b. $1,259 \cdot 10^{-3}$ aproximadamente.

- c. $1 \cdot 10^{-3}$
 d. $3,162 \cdot 10^{-7}$ aproximadamente.
 e. $1 \cdot 10^{-10}$

2. $3,981 \cdot 10^{-3}$ aproximadamente.

Página 54

3. Desde $1,585 \cdot 10^{-4}$ a $1,585 \cdot 10^{-3}$ aproximadamente.
 4. a. $10^{26,05}$ ergios
 b. $10^{2,55}$ veces más fuerte.
 5. a. Aumenta en 3 dB. c. 150 dB d. No
 6.

Fuente	Intensidad	Decibeles
Susurro	10^{-10}	20
Tráfico callejero	10^{-5}	70
Posible daño auditivo	$10^{-3,5}$	85
Cercano a un trueno	10^0	120
Umbral del dolor	10	130
Perforación instantánea del tímpano	10^4	160
Concierto de rock	$10^{-1,9}$	101

Página 59 (Mi progreso)

1. a. 7 b. 9 c. 11 d. 5
 2. a. 3 b. 10 c. 7 d. 0
 3. a. $2\log_b p + 2\log_b q + \frac{1}{2}\log_b r - 4\log_b s$
 b. $\frac{1}{3}\log_b(p+q) + \frac{1}{3}\log_b(p-q)$
 4. a. $\log_b((x+3)(x-3)^3)$
 b. $\log_c\left(\frac{(x+2y-z)}{(x-y+4z)^3}\right)$
 5. a. $x = 3,8$ b. $x = 9$
 6. $10^{-2,2} \text{ W/m}^2$
 7. Es falsa la alternativa C pues el 1 no puede ser base de un logaritmo.

Página 60

Perímetro: $3a + a\sqrt{2}$

Página 61

1. a. En las caras cuadradas de lados $2a$, la diagonal mide $2\sqrt{2}a$, y en las caras con lados $2a$ y $3a$, la diagonal mide $\sqrt{13}a$.
 b. Sí se puede calcular, y mide $\sqrt{11}a$.

Páginas 64 y 65 (Síntesis de la Unidad)

1. a. F f. V k. F
 b. V g. F l. F
 c. V h. F m. V
 d. F i. V n. V
 e. V j. V ñ. V
 2. a. $\bullet 5\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 1$ c. 9 cm
 $\bullet \frac{7}{2}\sqrt[3]{7} + 9\sqrt{7} - 7\sqrt{3} - 3$
 b. $\bullet \log \frac{13\sqrt{3}}{10^{13}}$ d. $\bullet x = 13\frac{3}{2}$
 $\bullet x = a^{\frac{3}{2}}$
 $\bullet 0$ $\bullet x = 1, x = -1$
 $\bullet x = 6$

Páginas 66 y 67

1. B 6. C 11. D 16. D
 2. D 7. E 12. D 17. A
 3. E 8. B 13. B 18. B
 4. B 9. A 14. A 19. D
 5. C 10. A 15. C

Unidad 2 Expresiones algebraicas fraccionarias

Páginas 70 y 71 (¿Cuánto sabes?)

1. a. $\frac{13}{6}$ c. $\frac{601}{315}$ e. $\frac{121}{36}$
 b. $-\frac{73}{10}$ d. $\frac{211}{60}$
 2. a. V c. F e. F
 b. V d. V f. V
 3. a. $7x^6$ b. $4y^2$ c. $15x^7$ d. $1,5a^{-1}$
 e. $\frac{-44a - 35 + 60b^2 - 100a^2b}{20b}$

$$f. \frac{7}{5}a^2 + \frac{2}{7}a - \frac{5}{3}b^5 - \frac{9}{5}b^3 + \frac{47}{9}ab - \frac{5}{6}b$$

$$g. 3a^3b - abc + 6a^2b - 2bc - 3a^2c + c^2$$

$$h. 15xy^3 - 14x^2y^2 + 3x^3y$$

$$i. \frac{90 - 150x^2 - 6x^4 + 10x^6}{25x^3}$$

Página 73

1. a. Con 60 segundos en primera vuelta:
Primera vuelta: 6,67 m/s; segunda vuelta: 8 m/s;
tercera vuelta: 7,27 m/s; cuarta vuelta: 6,15 m/s
- b. Con 70 segundos en primera vuelta:
Primera vuelta: 5,71 m/s; segunda vuelta: 6,67 m/s;
tercera vuelta: 6,15 m/s; cuarta vuelta: 5,33 m/s
- c. Con 90 segundos en primera vuelta:
Primera vuelta: 4,44 m/s; segunda vuelta: 5 m/s;
tercera vuelta: 4,71 m/s; cuarta vuelta: 4,21 m/s
En todos los casos, la mayor velocidad es en la segunda vuelta y la menor en la cuarta vuelta. No hay diferencia en la comparación de velocidades.

2. a. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$ d. $\frac{3}{2}; \frac{7}{4}; \frac{11}{6}; \frac{15}{8}; \frac{19}{10}$
- b. $\frac{1}{5}; -\frac{1}{10}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{4}; -\frac{7}{25}$ e. $\frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{11}{28}; \frac{18}{65}; \frac{3}{14}$
- c. $0; \frac{3}{11}; \frac{8}{13}; 1; \frac{24}{17}$ f. $-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; -\frac{3}{10}; \frac{4}{17}; -\frac{5}{26}$
3. a. $\frac{n^2}{(n+1)^2}$ c. $\frac{n^2+1}{n^3+1}$
- b. $\frac{(-1)^n}{n^2+2}$ d. $\frac{n \cdot (-1)^n}{n^2+1}$

Página 75

1. a. $\frac{a}{a+b} < \frac{a}{a-b}$ c. $\frac{p+1}{q} > \frac{p}{q+1}$
- b. $\frac{p+1}{q} > \frac{p}{q+1}$ d. $\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a-b}$

$$2. a. \frac{x+a}{x} < \frac{x}{x-a} \quad c. \frac{x+a}{x} < \frac{x}{x-a}$$

$$b. \frac{x+a}{x} > \frac{x}{x-a} \quad d. \frac{x+a}{x} < \frac{x}{x-a}$$

Página 77

1. a. $x < -2$ o $x > \frac{1}{3}$ d. $x < 0$ o $x > \frac{9}{4}$
- b. $x < -3$ o $x > -\frac{1}{2}$ e. $x < 7$
- c. $x < -\frac{2}{7}$ o $x > 0$ f. $x \neq 4$
2. a. Siempre positiva. c. No e. No.
- b. No. d. Siempre positiva. f. No.
3. a. $(m < \frac{1}{3} \text{ y } n < 2)$ o bien $(m > \frac{1}{3} \text{ y } n > 2)$
- b. $(n > -1 \text{ y } m > 11)$ o bien $(n < -1 \text{ y } m < 11)$
- c. $m < \frac{1}{2}$

Página 81

1. a. $\frac{2}{x+9}$ para $x \neq 2$ y $x \neq -9$
- b. $\frac{x-5}{7}$ para $x \neq -4$
- c. $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ para $x \neq y$
- d. $\frac{x-a+1}{x+a}$ para $x \neq -a$
- e. $\frac{1}{y-x-a}$ para $(a-y)^2 \neq x^2$
- f. $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$ para $x \neq 1$
- g. $\frac{1}{x+\sqrt{2}}$ para $x \neq -\sqrt{2}$ y $x \neq \sqrt{2}$
- h. $\frac{5a-1}{a^3-2a}$ para $a \neq 0$ y $a^2 \neq 2$
- i. $\frac{-3(x+5)}{x^2+5x+25}$ para $x \neq 5$

2. a. 0,79

b. 3,4

c. -2,797, aprox.

d. 1,476, aprox.

Página 83

1. a. $\frac{3(x-5)}{(a+3)(x+a)}$

e. $\frac{7(m-4)(m-2)}{6(m-8)^2}$

b. $-\frac{x^2+5}{6}$

f. $\frac{5(m+2)}{33(m-1)}$

c. $-\frac{(b-a)^2}{b^2(b+a)}$

g. $\frac{xy+x}{xy-2y}$

d. $\frac{x^2-x+1}{x^2-x}$

h. $\frac{w^2+w}{xy^2-1}$

Página 85

1. a. $\frac{7m-252}{3}$, para $m \neq -4$ y $m \neq -28$

b. $-\frac{6x^2z^2-x^2}{y}$, para $y \neq 0$ y para $x^2y \neq 1$

c. $\frac{x^3-5x^2}{x^2+9x+20}$, para $x \neq 4$, $x \neq -4$, $x \neq 5$, $x \neq -5$ y $x \neq 0$

d. $\frac{5a^4+5}{a^8+a^4+1}$, para $a \neq 1$ y $a \neq -1$

e. $\frac{b^2c+a^2}{xb^2+ab^2}$, para $b \neq 0$ y $x^2 \neq a^2$ y $cb^2 \neq a^2$

f. $\frac{7(x^4-w)}{w(yz-5x^2)}$, para $w \neq 0$, $5x^2 \neq yz$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq \sqrt{5}$, $x \neq -\sqrt{5}$

g. $\frac{1}{(a^2c^2-2)(a^3b^3-3)}$, para $(a^6b^6-2a^3b^3-3) \neq 0$ y $(a^4c^4-4) \neq 0$

h. $(a^2z^3+7z^2-6a^2z-42)$, para $(z^2a^2-49) \neq 0$

Página 86 (Mi progreso)

1. a. $\frac{3a-1}{2b} < \frac{6a-1}{4b} < \frac{3a}{2b}$

c. $\frac{2b-1}{4b} < \frac{3b-1}{6b} < \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{b+1} < \frac{2}{2b+1} < \frac{1}{b}$

2. a. Se anula en $x = \frac{1}{3}$, se indefine en $x = 0$.

b. Se anula en $x = -1$ ó $x = 1$, se indefine en $x = -2$.

c. Se anula en $x = -5$ ó $x = 0$ ó $x = 5$, se indefine en $x = \frac{7}{6}$.

3. a. $x < -5$ ó $x > \frac{1}{2}$

c. $x < -1$ ó $x > 1$

b. $2 < x < 7$

d. $-2 < x < 0$ ó $x > 3$

4. a. $\frac{6x^2}{7x-7}$

c. $\frac{3a}{(3a-2)(a^2+1)}$

b. $\frac{9a^2+6a^2-3a-2}{2a^2-2}$

5. a. $\frac{x(x-1)(3x-2)(3x-1)}{70}$

c. $\frac{2x^4+11x^3+5x^2}{-x^4+x^3+x-1}$

b. $\frac{-b^2}{a+b}$

Página 88

1. a. $24x^3$

e. $-20(2x-1)(x^2-5)(x-2)$

b. a^2bx^4y

f. $(a^2-9)(a^2-100)$

c. $(a-1)^2(a+1)$

g. $3(3x+2y)^2$

d. $(a^3+8)(a-2)$

h. $(x+3)^2(x^2-16)$

2. a. $\frac{(z^3a-b)(zc-d)^2}{(z^2c^2-d^2)(zc-d)}$; $\frac{(a^3-z^2)(zc+d)}{(z^2c^2-d^2)(zc-d)}$

b. $\frac{z^3(ax-c)}{(ab-cx)(ax-c)}$; $\frac{(a^3-z^2)(ab-cx)}{(ab-cx)(ax-c)}$

c. $\frac{(abx-54)(x^2-1)}{(x-1)(x^3-1)}$; $\frac{(x^2+1)(x^3-1)}{(x-1)(x^3-1)}$

d. $\frac{(a^2-b)a^2b^2}{a^2b^2c^3}$; $\frac{b(a^3-z^2)}{a^2b^2c^3}$; $\frac{ac^3(cd-z)}{a^2b^2c^3}$

Página 90

1. a. Primer grupo: $\frac{3}{50}$. Segundo grupo: $\frac{9}{100}$.

En conjunto: $\frac{3}{20}$.

b. Primer grupo: $\frac{3}{40}$. Segundo grupo: $\frac{1}{10}$.

En conjunto: $\frac{7}{40}$.

c. Primer grupo: $\frac{1}{20}$. Segundo grupo: $\frac{9}{140}$.

En conjunto: $\frac{4}{35}$.

2. a. $\frac{3z+4x}{12x^2z}$ e. $\frac{y^2+xy+y+2x}{xy^2+x^2y}$

b. $\frac{4(x^2-3)}{x^4-16}$ f. $\frac{3x-2}{x^2-9}$

c. 2 g. $\frac{6x^2}{(3x-2)(3x+1)}$

d. $\frac{3x+11}{3x+3}$ h. $\frac{4x^2+1}{x^3-1}$

3. a. Si x es el tiempo que la más lenta destina a llenar el estanque, entonces ambas juntas aportan

$\left(\frac{7}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$ partes del estanque por minuto.

b. $\frac{3x}{7}$ minutos

Página 92

1. a. Trabajo a la fecha: $\frac{8}{3}$; trabajo si comienzan juntos: $\frac{56}{15}$.

b. Trabajo a la fecha: $\frac{23}{14}$; trabajo si comienzan juntos: $\frac{16}{7}$.

c. Trabajo a la fecha: $\frac{13}{4}$; trabajo si comienzan juntos: $\frac{9}{2}$.

2. a. $\frac{9yz^2+9xz-4xy}{36x^2z}$ d. $-\frac{x^3+2x^2-9x-21}{x^3+4x^2+x-6}$

b. $-\frac{2x^3+5x^2+4x-1}{(x-1)(x+1)^2}$ e. $\frac{x^3+13x+18}{2x^3+2x^2-18x-18}$

c. $-\frac{8a^2+11a-7}{2(a^2-1)(4a-1)}$ f. $-\frac{4x^2+5x+3}{(x-1)(x+1)}$

g. $-\frac{5x^3+30x^2+31x+25}{x^3-1}$

h. $-\frac{2w^4+4w^3+7w^2+6w+2}{w^4+2w^3-w^2-2w}$

Página 94

1. a. $\frac{x}{7} + \frac{1}{3x} = x + 4$ c. $x^2 - \frac{2}{x} = 3$

b. $\frac{x}{3} - \frac{1}{4x} = 2(x+3)$

2. a. $x = 3$ o $x = 7$ c. $x = -126$

b. $x = 4$ o $x = -4$

3. a. $x = \frac{83}{3}$ f. $x = mn$

b. Tiene solución vacía. g. $x = 8$

c. $x = -5$ h. $x = b - a$

d. $x = \frac{1}{5}$ i. $x = -\frac{4}{3}$

e. $x = \frac{24}{11}$ j. $x = -6$

Página 96

1. a. El número es $\frac{88}{19}$. e. Los números son 24 y 25.

b. El número es 120. f. Tenía \$ 5 000.

c. Juan tiene 6 años. g. Tenía \$ 10 000.

d. El número es 18. h. Karen tiene 75 años y Marcos tiene 25.

Página 97 (Mi progreso)

1. a. $3 \cdot 14 \cdot (a^2 - 4) \cdot (a - 7)$

b. $a \cdot b \cdot (ab^2 - 12) \cdot (1 + ab^2)$

c. $24(x^2 - 4)(x + 1)$

d. $90x^2(x + 1)(x + 2)$

2. a. $\frac{22x+1}{7x(x+1)}$ c. $\frac{4x+7}{x^2-9}$

e. $\frac{4x+9}{x(x+1)^2}$

b. $\frac{x^3+2x-2}{(x^2+2)^2}$

d. $\frac{8x}{x^2-1}$

f. $-\frac{x^2-10x+2}{x^3+1}$

3. a. $x = \frac{42}{17}$

c. $x = 3$ y $x = -3$

b. No tiene solución.

4. El número es 6.

Páginas 102 y 103 (Síntesis de la Unidad)

- | | | |
|------|------|------|
| a. F | f. F | k. F |
| b. F | g. V | l. F |
| c. V | h. F | m. F |
| d. F | i. V | n. V |
| e. F | j. V | |

2. a. $x = 9$ c. $x = 4$
b. $t_1 = 7,5$ h; $t_2 = 15$ h d. $x = \$2\ 000$
e. i. $\frac{x \cdot x \cdot x}{12x(x+1)(x-1)}$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$
ii. $\frac{2(x^2+1)(x+1)}{2 \cdot 7 \cdot x(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}$,
 $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$

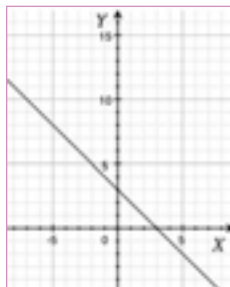
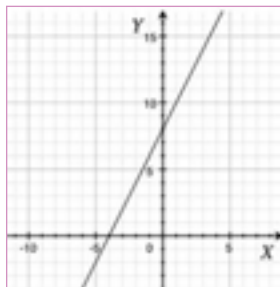
Páginas 104 y 105

- | | | | |
|------|------|-------|-------|
| 1. B | 5. E | 9. E | 13. A |
| 2. E | 6. E | 10. B | 14. C |
| 3. C | 7. D | 11. A | |
| 4. E | 8. E | 12. C | |

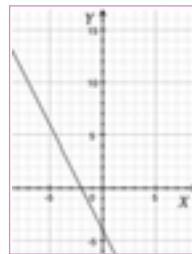
Unidad 3 Sistemas de ecuaciones

Páginas 108 y 109

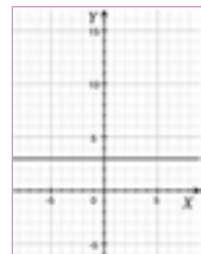
2. a. $x = \frac{43}{7}$ d. $y = \frac{c-b}{a}$
b. $x = 118,4$ e. $x = \frac{b}{55c} - \frac{9}{5}$
c. $x = 0$ f. $x = 4$
3. a. Sí b. No c. No d. No
4. a. b.



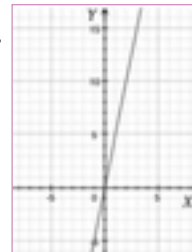
c.



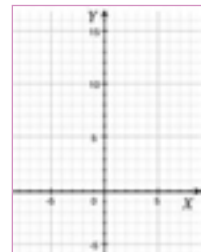
e.



d.



f.



Tienen en común: que son todas rectas.

5. a. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{5}{2}$ e. $\frac{3}{2}$ g. 0
b. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2}$ f. 2 h. -1
6. a. V b. F c. V d. F
7. a. $\frac{2k+1}{2} - 2(2k+1) = -\frac{33}{2}$, $k = 5$
b. $x + \frac{7}{2}x = 90$ $x = 20$
c. $35 + x = 2(7 + x)$; $x = 21$

Página 111

1. a. Sí. b. No. c. No. d. Sí.
2. a. $x + y = 25$ f. $x + y = 180$
b. $x + 2y = 12$ g. $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$
c. $x = y + 10$ h. $8x + 10y = 10\ 500$
d. $x + y = 5\ 000$ i. $x + y = 46$
e. $2x + 2y = 60$ j. $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$
4. a. x : un ángulo; y : el otro ángulo; $x + y = 90$; $x = 2y$
b. x : un número; y : el otro número; $x + y = 34$;
 $x - y = 8$

- c. x : cantidad para hijo mayor; y : cantidad para hijo menor; $x + y = 56\,000$; $x = \frac{y}{2}$

Página 113

1. a. No.
2. a. Para Pilar, la x representa la cantidad de monedas de \$ 100, e y representa la cantidad de monedas de \$ 500. Para Mario, x representa el dinero que suman todas las monedas de \$ 500 e y representa el dinero que suman todas las monedas de \$ 100.
- b. $x = 20$, $y = 13$

3. a. A b. C.

Página 119

1. a. Solución única: $(-5, 4)$.
b. No tiene solución.
c. Tiene infinitas soluciones.
d. Tiene infinitas soluciones.
e. Solución única: $(2, -2)$.
f. No tiene solución.

2. Tres sistemas posibles.

Página 120 (Mi progreso)

1. a. Gráfico 3, con solución $(-8, -9)$.
b. Gráfico 2, con solución $(3, -2)$.
c. Gráfico 4, con solución $(-13, -13)$.
d. Gráfico 1, con solución $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$.
2. a. Falso. c. Verdadero.
b. Verdadero. d. Verdadero.
3. a. Tiene solución, son infinitas soluciones.
b. No tiene solución.
c. Tiene solución única.

Página 122

1. a. $(-3, 2)$ d. $(\frac{5}{9}, \frac{17}{9})$ g. $(\frac{17}{2}, \frac{29}{10})$
b. $(\frac{2}{7}, -\frac{1}{14})$ e. $(-1, 3, -\frac{5}{2})$ h. $(-\frac{16}{41}, \frac{86}{41})$
c. $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ f. $(-12, 6)$

Todos son sistemas corresponden a rectas secantes, ya que tienen solución única.

2. La fracción es $\frac{2}{3}$

3. Los ángulos son 150 grados y 30 grados.

Página 124

1. a. $(1, 1)$ d. $(-\frac{1}{22}, \frac{2}{33})$ g. $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
b. $(1, 2)$ e. $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{4})$ h. $(\frac{5}{9}, -\frac{7\sqrt{3}}{27})$
c. $(25, -12)$ f. $(-\frac{291}{370}, \frac{13}{370})$

Todos corresponden a rectas secantes porque todos tienen solución única.

2. Las dimensiones del rectángulo son $\frac{100}{7}$ m y $\frac{250}{7}$ m.
3. Antonia tiene 10 años y Emilia tiene 20 años.
4. Se han usado 100 botellas de dos litros y 20 botellas de cinco litros.
5. 12 libros de \$ 8 000 y 8 libros de \$ 12 000.

Página 126

1. a. $(9, -12)$ c. $(-\frac{9}{20}, -\frac{1}{12})$ e. $(\frac{1}{12}, \frac{1}{24})$
b. $(\frac{25}{12}, \frac{7}{12})$ d. $(-\frac{3}{4}, \frac{7}{3})$ f. $(-\frac{2}{3}, \frac{6}{35})$

Todos corresponden a rectas secantes porque todos tienen solución única.

Página 128

1. a. No son equivalentes, porque tienen distintas soluciones; el primer sistema tiene solución $(\frac{149}{89}, \frac{141}{89})$, mientras que el segundo tiene solución $(\frac{113}{89}, \frac{273}{178})$.
b. No son equivalentes, porque tienen distintas soluciones; el primer sistema tiene solución $(\frac{71}{9}, -\frac{34}{9})$, mientras que el segundo tiene solución $(3, -5)$.
2. a. No tiene solución, ya que la suma de dos números no puede ser a la vez 1 y 2.

- b. Sí tiene solución: $(0, 1)$.
- c. No tiene solución, ya que al multiplicar la primera ecuación por 5 se obtiene que una misma suma es 5 y 6 a la vez.
- d. Sí tiene solución: $(0, 0)$.
- e. Sí tiene solución: $\left(5, -\frac{5}{4}\right)$.
- f. Sí tiene solución, tiene infinitas soluciones porque las dos ecuaciones representan la misma recta. Los sistemas b, d, y e corresponden a rectas secantes. Los sistemas a y c corresponden a rectas paralelas distintas, el sistema f corresponde a rectas paralelas e iguales.

Página 130

La solución del sistema es $x = 17,25$, $y = 27,5$. Pero estos valores no son consistentes con el problema porque, en este caso, la solución está restringida a números enteros.

Página 132

1. a. $\left(-\frac{1}{13}, -\frac{2}{35}\right)$ c. $\left(\frac{1}{50}, \frac{1}{10}\right)$ e. $(168, 2407)$
 b. $\left(\frac{13}{7}, \frac{7}{82}\right)$ d. $\left(-\frac{11}{30}, \frac{5}{3}\right)$ f. $(4, 25)$
2. Los números son $\frac{75}{17}$ y $\frac{75}{22}$.

Página 133 (Mi progreso)

1. a. Sí son equivalentes, ambos tienen la solución $(-20, 13)$.
 b. Sí son equivalentes, ambos tienen la solución $\left(\frac{29}{4}, -16\right)$.
2. a. $\left(\frac{37}{11}, -\frac{46}{11}\right)$ b. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ c. $\left(\frac{19}{11}, \frac{9}{11}\right)$
3. a. $\left(\frac{3}{7}, \frac{33}{7}\right)$ b. $(3, -39)$ c. $(17, 0)$
4. a. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{6}{7}\right)$ b. $(44, -52)$ c. $\left(\frac{27}{14}, -\frac{31}{4}\right)$
5. a. En este caso, el estudiante tuvo 35 respuestas correctas y 24 incorrectas.
 b. No puede ser solución al problema, ya que en un examen con alternativas, se considera correcta o incorrecta, no parcialmente correcta; luego, la solución no puede tener números decimales.

Páginas 138 y 139 (Síntesis de la Unidad)

1. a. V e. V i. V m. V p. V
 b. V f. F j. V n. F q. V
 c. V g. V k. V ñ. F
 d. F h. V l. V o. F
2. a. $x = 54$, $y = 11$
 $x - y = 34$
 b. 48 y 96
 c. 18, 27 y 36

Páginas 140 y 141

1. D 4. B 7. B 10. C 13. E
2. B 5. A 8. E 11. C
3. C 6. D 9. E 12. B

Unidad 4 Semejanza

Páginas 144 y 145 (¿Cuánto sabes?)

1. a. $\frac{3}{7}$ b. $\frac{7}{13}$ c. $\frac{3}{13}$ d. $\frac{7}{10}$
2. a. $x = 2$ b. $x = 6$ c. $y = 9$ d. $y = \frac{5}{24}$
3. a. No b. Sí (LAL) c. No d. Sí (LLA>)
4. a. $x = 129^\circ$, $y = 136^\circ$, $z = 51^\circ$
 b. $x = 80^\circ$, $y = 47^\circ$, $\alpha = 33^\circ$

Página 147

1. Sí.
4. No. Podrían ser rombo y cuadrado.
5. No. Podrían ser rectángulo y cuadrado.
6. a. Verdadero. d. Verdadero. g. Falso.
 b. Verdadero. e. Falso. h. Verdadero.
 c. Falso. f. Verdadero.

Página 149

1. $\triangle ABC \sim \triangle DAB \sim \triangle EAD \sim \triangle FED \sim \triangle GFE$. Por otra parte, sin ser semejantes con los anteriores, se cumple que $\triangle BCD \sim \triangle ABE \sim \triangle DAF \sim \triangle EDG$.

Página 150

1. No son semejantes.
2. No son semejantes.

3. Si $\triangle ABC$ es el de menor tamaño, las medidas del $\triangle A'B'C'$ son 9 cm, 30 cm y 24 cm, respectivamente.

4. a. $QR = 3,6$ cm
b. $x = 4$ cm. $PR = 6$ cm

Página 151

5. $DE = 18$ cm, $EF = 13,5$ cm, $DF = 11,25$ cm

6. Sí, son semejantes, por criterio *LLL*.

7. a. $x = 6$, $y = 2,6$.
 $x = 2$ cm, $y = 6$ cm.

Página 153

1. No se puede afirmar.
2. a. No se puede probar.
b. Son semejantes, por criterio *LAL*.
3. $\triangle ABC \sim \triangle AFE \sim \triangle DEF \sim \triangle FBD \sim \triangle EDC$.
4. b. 4,5 m

Página 155

2. a. 3 : 2 b. 8 cm y 96 cm^2 c. $\frac{9}{4}$
d. Es el cuadrado de la razón de semejanza.
3. $\frac{7}{4}$
4. 36 cm.

Página 157

1. Dormitorio 1: $5,76 \text{ m}^2$, dormitorio 2: $5,76 \text{ m}^2$, dormitorio 3: $6,16 \text{ m}^2$. Superficie total: $42,84 \text{ m}^2$.
2. 1 : 6 000
3. 30 m de largo y 20 m de ancho.
4. Están a 200 km de distancia.
5. 1 : 2 571 428, o bien 7 : 18 000 000.
6. La avioneta tiene 16 m de largo, 12 m de ancho y 4 m de alto.
7. a. 1 m, 0,5 m, 0,95 m.
b. $0,45 \text{ m} \times 0,45 \text{ m}$
c. $0,045 \text{ m}^3$
d. En cada cajón caben 16 cajas de discos compactos.

Página 158 (Mi progreso)

1. B 5. Sí, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
2. D 6. 1 : 5 000
3. 4,5 cm, 15 cm, 12 cm. 7. 90 km
4. 22 cm y 14 cm.

Página 160

1. a. $EC = 6$ b. $EC = 6$ c. $BC = 10$
2. a. No b. Sí. c. Sí.

Página 161

3. a. $\frac{SR}{TR} = \frac{SP}{QP}$, $\frac{SR}{SP} = \frac{ST}{SQ}$, $\frac{ST}{TR} = \frac{SQ}{QP}$, $\frac{SR}{RP} = \frac{ST}{TQ}$
b. RP mide 60 m y SP mide 100 m.
4. $x = 2$
5. a. Se cumple. b. Se cumple. c. No se cumple.

Página 164

1. CC' mide $\frac{25}{16}$; OC' mide 3; $A'B'$ mide $\frac{12}{5}$ y AB mide $\frac{12}{5}$.
2. a. $x = 3$ cm b. $x = 8$ cm
3. $EF = 8$ cm

Página 166

1. a. Al punto A. c. Al punto A.
b. Al punto A. d. Al punto B.
2. a. Son semejantes. c. Aumenta su valor.
b. Se acerca al punto B.

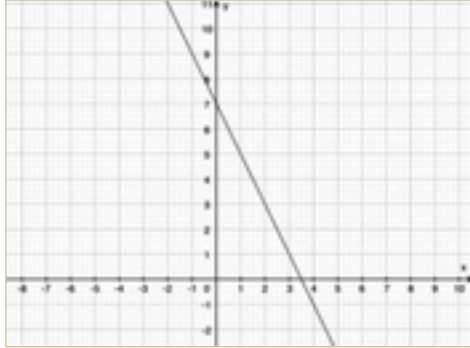
Página 168

1. $4,8^2 + 3,6^2 = 36$ y $4,8^2 + 6,4^2 = 64$
2. a. $p = \frac{576}{25}$, $q = \frac{49}{25}$, $h = \frac{168}{25}$
b. $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$, $c = 4\sqrt{3}$, $q = 3\sqrt{3}$
c. $a = 4$; $b = 3$; $q = 1,8$; $h = 2,4$
d. $a = 12$, $b = 5$, $p = \frac{144}{13}$, $h = \frac{60}{13}$

Página 170

1. $AB = 3\sqrt{13}$, $AD = 2\sqrt{13}$

2. a.



b. La menor distancia al origen es $\frac{7}{\sqrt{5}}$ y el punto es $\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

c. La distancia al eje X es $\frac{7}{5}$, la distancia al eje Y es $\frac{14}{5}$.

3. a. Lo construye sobre el río, a $\frac{450}{\sqrt{34}}$ m de la esquina que está a 150 m de la casa, y a $\frac{1250}{\sqrt{34}}$ de la otra esquina por donde pasa el río.

b. El puente estará a $\frac{750}{\sqrt{13}} \approx 128,62$ m de la casa.

6. El techo tiene 6 m de altura.

7. a. La menor distancia al origen es $\frac{12}{\sqrt{13}}$.

c. El punto de la recta más cercano al origen es $\left(\frac{36}{13}, \frac{24}{13}\right)$.

8. 480 cm^2

9. 10 cm

Página 173

1. La razón de homotecia es 2 y su centro es el punto O .

2. El segmento OA' mide 3 cm y el segmento $A'A$ mide 6 cm.

3. a. Falso

b. Verdadero

4. a. $k > 0$

b. Sí.

c. Sí.

Página 175

1. $OC = 6$, $CC' = \frac{39}{7}$, $AB = 2$, $BB' = \frac{65}{14}$, $C''B'' = \frac{33}{4}$.

3. AP mide $\frac{7(\sqrt{5}-1)}{2}$

Páginas 180 y 181 (Síntesis de la Unidad)

1. a. F d. F g. V j. F m. F

b. V e. F h. V k. F

c. V f. V i. F l. V

2. a. 40 m b. 45 cm

e. $k = \frac{\sqrt{5}}{5}$

f. - Sí son semejantes.

- AA

- $AB = 18$ m

Páginas 182 y 183

1. E 4. A 7. C 10. B

2. C 5. A 8. A 11. A

3. D 6. C 9. B 12. E

Unidad 5 Circunferencia

Páginas 186 y 187 (¿Cuánto sabes?)

3. $\alpha = 138^\circ$, $\beta = 110^\circ$

Página 189

1. a. $\frac{25\pi}{6}$ b. $\frac{4\pi}{3}$ c. $\frac{47\pi}{15}$ d. El radio mide 18 cm.

Página 192

1. a. $\alpha = 150^\circ$ c. $\alpha = 66^\circ$ e. $\alpha = 76^\circ$
b. $\alpha = 60^\circ$ d. $\alpha = 68^\circ$ f. $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 21^\circ$

Página 193

g. $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 36^\circ$ h. $\alpha = 50^\circ$ i. $\alpha = 90^\circ$

2. $\angle COH = 120^\circ$

3. El $\triangle APB$ es isósceles rectángulo.

4. $\alpha = 60^\circ$

Página 195

1. a. $\alpha = 43^\circ$ e. $\alpha = 128^\circ$

b. $\alpha = 66^\circ$, $\beta = 66^\circ$, $\gamma = 132^\circ$ f. $\beta = 54^\circ$

c. $\beta = 100^\circ$ y $\gamma = 40^\circ$ g. $\alpha = 27^\circ$

d. $\alpha = 43^\circ$ y $\beta = 86^\circ$ h. $\alpha = 120^\circ$

Página 196 (Mi progreso)

- α ángulo inscrito, β ángulo del centro
 - α ángulo del centro, β ángulo inscrito, γ ángulo semi-inscrito.
 - α ángulo del centro, β ángulo del centro, γ ángulo semi-inscrito.
- $\alpha = 25^\circ$
 - $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 120^\circ$
 - $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 100^\circ$

Página 198

- $\alpha = 39^\circ$
 - $\alpha = 47^\circ$
 - $\alpha = 61^\circ$
- $\alpha = 74^\circ$, $\beta = 106^\circ$, $\gamma = 43^\circ$
 - $\alpha = 109^\circ$, $\beta = 71^\circ$
 - $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$

Página 200

- $PC = \frac{15}{2}$
 - $PC = 9$
 - $PC = 6$
- $PD = 5$
 - $CP = 14$
 - $PB = 6$
 - $AP = 5$
- $AB = 12$
 - $OD = 13$
 - $AB = 48$
 - $PC = 2$

Página 202

- $x = \frac{19}{2}$
 - $x = 9$
- $PC = 8$
 - $BA = 13$
 - $PC = 21$
 - $PA = 6$
- $PB = 9$
 - $OC = \frac{47}{2}$
 - $PD = 3$
 - $PA = 8$

Página 204

- $x = \frac{11}{5}$
 - $x = 12$
 - $r = 6$
- $PA = 8$
 - $PA = 6$
 - $PC = 12$
 - $PB = 5$
 - $CB = 8$
- $PA = 12$
 - $CB = 30$
 - $OB = \frac{15}{2}$
 - $OB = 5$
 - $PB = 8$

Página 205 (Mi progreso)

- $x = 4$, $y = 13$
 - $x = 10$
 - $x = \frac{15}{2}$
- $\alpha = 61^\circ$, $\beta = 119^\circ$
 - $\alpha = 80^\circ$
 - $\alpha = 64^\circ$, $\beta = 32^\circ$
 - $\alpha = 98^\circ$, $\beta = 40^\circ$

Páginas 210 y 211 (Síntesis de la Unidad)

- F
 - V
 - F
- F
 - V
 - F
- F
 - V
 - F

- Isósceles.
 - 72^2
 - $x = 37^\circ$
 - $AD = 7,2 \text{ cm}$

Páginas 212 y 213

- C
 - B
 - D
- C
 - D
 - D
- E
 - D
 - B
- A
 - C
 - B

Unidad 6 Datos y azar

Páginas 216 y 217 (¿Cuánto sabes?)

- 1,68
 - 1,74
 - 1,47 y 1,79
- 30
 - 1,9 años
 - 1
 - 0 y 3
- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
 - $A = \{(1, 3), (3, 5), (1, 5), (3, 1), (5, 3), (5, 1), (1, 1), (3, 3), (5, 5), (2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 6), (6, 4), (6, 6), (2, 2), (4, 4)\}$
 - $B = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$
 - $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2)\}$
- 45,7
 - 8,8
 - 142,9
 - 63,4
 - 0,7
 - 23,7
- 68,68
 - 43,40
 - 54,32
 - 38,09
 - 12,75
 - 24,23
- 85,4
 - 3,767
 - 26,66
 - 0,017
 - 45,3685
 - 275,469
- $-\frac{4}{5}$
 - $\frac{79}{20}$
 - $\frac{2}{9}$
 - $\frac{5}{2}$
 - $-\frac{357}{160}$
 - $\frac{1943}{270}$

Página 221

- Todos los datos son 67.
- 0
- 3,1; 0,88 y 0,9379

Página 223

- $\bar{x} = 33,125$, varianza = 26,484, desviación estándar = 5,146
 - No.

Página 225

1. Dieta C, $\bar{x} = 3,45$ y desviación estándar = 1,7277.

Página 227

1. El fondo A es más homogéneo.
2. La estatura de las mujeres es más homogénea y la de los hombres, más heterogénea.
3. El termómetro 1 entrega datos más homogéneos.
4. b. Los de un conjunto serían menos homogéneos que el otro conjunto.
5. Depende de cada caso.

Página 229

3. a. Todas las personas de Antofagasta con teléfono en la casa.
b. Los 100 lanzamientos de la moneda.
4. Todos los oficiales de tránsito de Puente Alto.

Página 232

1. a. 570,5 y 571 b. 8,75; 2,958 y 10
2. a. Modelos 1980: $\bar{x} = 385,6$; mediana = 273,5;
 $Q_1 = 207,5$; $Q_3 = 449,75$.
Modelos 1990: $\bar{x} = 160,15$; mediana = 150;
 $Q_1 = 63,75$; $Q_3 = 220,75$.
b. Modelos 1980: rango = 835, varianza = 73225,872,
desviación estándar = 270,602.
Modelos 1990: rango = 380; varianza = 13580,7675;
desviación estándar = 116,53655.
c. Sí existe.
3. Todos los pares de zapatillas nuevas de ese tipo.

Página 234

1. a. {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}
b. {otoño, invierno, primavera, verano}
c. {1, 3, 5, 7, 9}
d. {12, 14, 16, 18}
2. a. {1, 2, 3, 4, 5} c. {0, 2, 4, 6} e. {0, 6}
b. {3, 5} d. {0, 1, 6} f. {0, 6}
3. a. Correcto c. Incorrecto e. Incorrecto
b. Incorrecto d. Correcto

Página 238

1. 8 000 000 patentes.
2. 6 720 maneras.
3. a. 380 maneras. b. 102 maneras.
4. No.
5. 15 sumas.
6. a. 325 palabras. c. 2101 palabras.
b. 1593 palabras.
7. Más permutaciones

Página 240

1. $\frac{1}{5\,245\,786}$
2. a. $\frac{33}{66\,640}$ b. $\frac{1}{270\,725}$ c. $\frac{57}{8\,330}$
3. a. 120 b. $\frac{2}{5}$ c. $\frac{1}{5}$ d. $\frac{2}{5}$
4. a. $\frac{1}{126}$ b. $\frac{1}{5\,040}$
5. $\frac{5}{8}$
6. a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{1}{5}$ c. $\frac{1}{12}$

Página 242

1. 0,9
2. a. 0,88 b. 0,12 c. 0,49
3. b. i. $\frac{22}{125}$ ii. $\frac{83}{500}$ iii. $\frac{171}{500}$

Página 246

1. 0,15
2. a. 0,092 b. 0,72864
3. a. $\frac{1}{10}$ b. $\frac{10}{99}$ c. $\frac{50}{1\,617}$
4. a. $\frac{19}{100}$ b. $\frac{17}{200}$ c. $\frac{14}{25}$ d. $\frac{39}{100}$
5. 0,0375

Página 247 (Mi progreso)

1. 120
2. 13 800
3. 252
4. a. $\frac{1}{9}$ b. $\frac{5}{42}$
5. $\frac{1}{20}$
6. 0,008
7. a. 0,27 b. 0,73

Páginas 252 y 253 (Síntesis de la Unidad)

1. a. F d. F g. F j. F m. F
b. F e. V h. V k. F n. F
c. F f. V i. V l. V ñ. F
2. a. El grupo de los hombres.
b. i. 720 ii. $\frac{1}{15}$
c. 89,12
d. 0,8
e. i. 0,988 ii. 0,782 iii. 0,206
f. i. $\frac{1}{12}$ ii. $\frac{1}{6}$ iii. $\frac{1}{2}$

Páginas 254 y 255

1. C 4. C 7. D 10. C 13. C
2. B 5. A 8. D 11. C
3. A 6. C 9. B 12. E

Bibliografía

- Artigue, M. *Una introducción a la didáctica de la matemática*, en *Enseñanza de la Matemática*. Selección bibliográfica, traducción para el PTFD, MCyE, 1994.
- Arenas Fernando y equipo. *Geometría Elemental*. Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago, 1993.
- Bermeosolo, J. *Metacognición y estrategias de aprendizaje e instrucción*. Documentos de apoyo a la docencia, proyecto FONDECYT 1940767, Santiago, 1994.
- Brousseau, Guy. *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Traducción realizada por Dilma Fregona (FaMAF), Universidad de Córdoba, y Facundo Ortega, Centro de Estudios Avanzados, UNC, Argentina, 1993.
- Corbalán, Fernando. *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Graó, Barcelona, 1995.
- Coxeter, H.S.M.; Greitzer, S.L. *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America, EE UU, 1967.
- Chevallard Y. *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Aique, Buenos Aires, 1991.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Horsori, Barcelona, 1997.
- De la Peña, José Antonio. *Álgebra en todas partes*. Ciencia para todos. Fondo de Cultura Económica. México, 1999.
- Douglas F. Riddle. *Geometría Analítica*. Thomson Editores, México, 1996.
- Enzensberger, Hans Magnus. *El diablo de los números*. Ediciones Siruela, España, 1998.
- E.T. Bell. *Los grandes matemáticos*. Editorial Losada S.A., Buenos Aires, 1948.
- Eves, H. *Estudio de las Geometrías. Vol I, II*. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, México, 1969.
- Figueroa, Lourdes. *Para qué sirve medir*. Cuadernos de Pedagogía, n° 302, España, 2001.
- Flavell, John. *El desarrollo cognitivo y el aprendizaje*. Visor, Madrid, 1985.
- Gardner, Martin. *Camaval matemático*. Alianza Editorial, Madrid, 1980.
- Gardner, Martin. *¡Ajá! Paradojas. Paradojas que hacen pensar*. Labor S.A., Barcelona, 1989.
- Guedj, Denis. *El imperio de las cifras y los números*. Ediciones B S.A., Barcelona, 1998.
- Guillen, Michael. *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo*. Temas de debate. España, 1995.
- Guzmán, Miguel de. *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*, Red Olímpica, Buenos Aires, 1992.
- Guzmán R., Ismenia. *Didáctica de la matemática como disciplina experimental*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, 2002.
- Iglesias, P.; Saavedra, E. eds. *Probabilidad y Estadística Elementales*. Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago, 1997.
- Jonson. R. A, eds. *Probabilidad y Estadística para Ingenieros de Miller y Freund*. Prentice Hall Hispanoamericana, Ciudad de México, 1997.
- Jouette André. *El secreto de los números*. Ediciones Robinbook, Barcelona, 2000.
- Julius, Edgard. *Matemáticas rápidas*. Norma, Bogotá, 2002.
- Linares, Salvador. *Fracciones, la relación parte-todo*. Síntesis, Madrid, 1988.
- Magnus, Hans. *El diablo de los números*, Editorial Siruela, Madrid, 1998.
- Mateos, Mar. *Metacognición y educación*, Aique, Buenos Aires, 2001.
- Miguel de Guzmán y otros. *Matemáticas Bachillerato 3*. Editorial Anaya, Madrid, 1991.
- Moise, E.; Downs, F. *Geometría Moderna*. Addison Wesley, EE UU, 1966.
- Moise, E. *Geometría Elemental desde un punto de vista Avanzado*. Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1980.
- Morris, Kline. *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, Fondo de Cultura Económica, México, 1992.
- Murray R. Spiegel. *Álgebra Superior*. Mc Graw Hill, Colombia, 1978.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza, Sevilla, 2003.

- Novak, J. *Aprendiendo a aprender*. Ediciones Martínez Roca S.A., Barcelona, 1988.
- Ontoria A. *Mapas conceptuales*. Editorial Nancea, 2a edición, España, 1993.
- Paulos, John Allen. *El hombre anumérico*. Libros para pensar la ciencia. España, 1997.
- Paulos, John Allen. *Más allá de los números*. Libros para pensar la ciencia. España, 1998.
- Perelman, Yakov. *Matemáticas recreativas*. Ediciones Martínez Roca S.A., Barcelona, 1987.
- Perero, Mariano. *Historia e historias de matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamericano, México, 1994.
- Pozo, J. L. *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata, Madrid, 1990.
- R. David Gustafson. *Álgebra Intermedia*. International Thomson Editores, México, 1997.
- Rencoret, María del Carmen. *Iniciación matemática - Un modelo de jerarquía de enseñanza*. Editorial Andrés Bello, Santiago, 2002.
- Smullyan Raymond, Satan, *Cantor y el infinito*. Editorial Gedisa, España, 1995.
- Sternberg, R., Apear-Swerling L. *Enseñar a pensar*. Aula XXI, Santillana, España, 1996.
- Stewart, Ian. *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemáticas*. Gedisa, Barcelona, 1990.
- Stewart, Ian. *De aquí al infinito*. Las matemáticas de hoy, Crítica, Barcelona, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*, Editorial Limusa, México, 1998.
- Vygotski, L. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Libergraf, S.A., Barcelona, 1995.

- Walpole, R., Myers, R., Myers, S., Keying, Y, eds. *Probabilidad & Estadística para Ingeniería y Ciencia*. Ciudad de México, Pearson Educación, 2007.
- Webster, A, Irwin, eds. *Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía*. Madrid, 1996.
- Winston H. Elphick D. y Equipo. *101 Actividades para implementar los Objetivos Fundamentales Transversales*. Lom Ediciones, 2001.

Sitios webs

- Centro Comenius.
<http://www.comenius.usach.cl>
- El Paraíso de las Matemáticas
<http://www.matematicas.net>
- Enlaces a Matemáticas básicas para niños, publicaciones y programas educativos. Debate, entretenimiento (juegos matemáticos) y bibliografía.
<http://www.arrakis.es/~mcj>
- Entretenimiento, recursos y enlaces. Software, libros, Escher, Fibonacci: el Número de Oro.
<http://platea.pntic.mec.es/~aperez4>
- Sociedad de matemática de Chile
<http://www.mat.puc.cl/~socmat>
- Recursos matemáticos Redemat
<http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html>



Santillana

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

AÑO 2011

