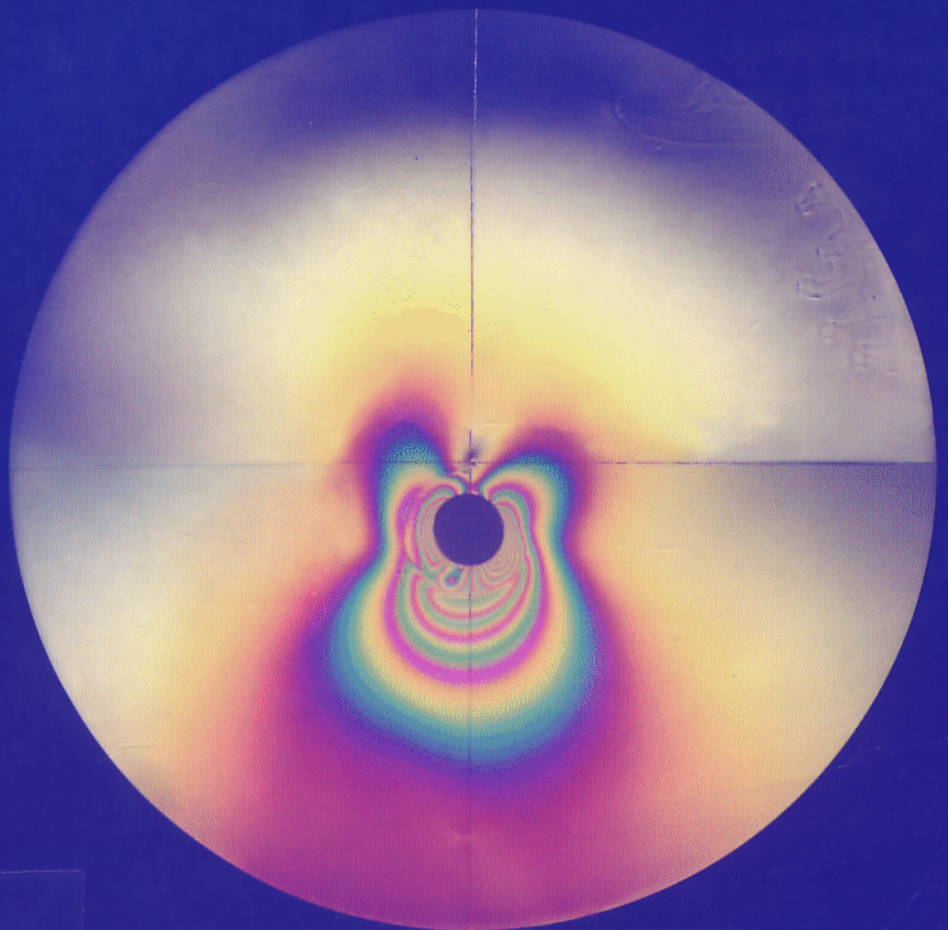


contenido

Elasticidad

Tercera edición



LUIS ORTIZ BERROCAL

Elasticidad

Tercera edición

LUIS ORTIZ BERROCAL

La excelente acogida dispensada a las dos anteriores ediciones de la obra ha impulsado la publicación de esta tercera, en la que se recogen todas las sugerencias recibidas acerca de su contenido. Por este motivo, la tercera edición se edifica sobre las anteriores, manteniendo todo lo que sigue teniendo vigencia, al tiempo que se amplían los temas necesarios.

El contenido de este texto se encuadra en un curso de Elasticidad y Resistencia de Materiales para alumnos de Escuelas Técnicas Superiores. Es aconsejable que el estudio de las bases de la teoría de la Elasticidad preceda al de la Resistencia de materiales. Este planteamiento puede conllevar un mayor grado de dificultad, que posteriormente se verá ampliamente recompensado por proporcionar al alumno, en el estudio de las características resistentes de los materiales, un perfecto conocimiento de los estados tensional y de deformación de los cuerpos elásticos, lo que le permitirá moverse en un terreno firme a la hora de conocer la forma en la que trabajan los materiales. Por otro lado, este grado de dificultad se compensa al utilizar la formulación matricial, con la que sí está familiarizado, en lugar de la tensorial, que generalmente desconoce, como se hace en otras obras especializadas sobre la materia.

El contenido de la obra se mueve en el campo de la Elasticidad lineal, sobre un modelo de sólido elástico: el prisma mecánico, al que se supone poseer las propiedades de homogeneidad, continuidad e isotropía.

Cada capítulo posee al final una colección de problemas de grado de dificultad creciente, que permiten al estudiante reforzar los contenidos teóricos adquiridos.



9 788448 120467

<http://www.mcgraw-hill.es>

ELASTICIDAD

Tercera edición

LUIS ORTIZ BERROCAL

Catedrático numerario de Elasticidad y Resistencia de Materiales
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid



MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

ELASTICIDAD. Tercera edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 1998, respecto a la tercera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.

Edificio Valrealty, 1.^a planta

Basauri, 17

28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: 84-481-2046-9

Depósito legal: M. 38.311-1998

Editora: Concepción Fernández Madrid

Diseño de cubierta: Design Master Dyma

Compuesto en Puntographic, S. L.

Impreso en COBRA, S. L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Presentación	vii
Notaciones	xv
1. Introducción al estudio de la Elasticidad	1
1.1. Objeto de la Elasticidad y de la Resistencia de materiales	1
1.2. Concepto de sólido.....	4
1.3. Definición de prisma mecánico.....	6
1.4. Equilibrio estático y equilibrio elástico.....	7
1.5. Esfuerzos que se derivan de la acción de un sistema de fuerzas sobre un prisma mecánico.....	8
1.6. Concepto de tensión.....	11
2. Estado tensional en los sólidos elásticos	13
2.1. Componentes intrínsecas del vector tensión sobre un elemento de superficie.....	13
2.2. Estudio de los vectores tensión en un punto. Matriz de tensiones.....	14
2.3. Condiciones necesarias entre las componentes de la matriz de tensiones. Ecuaciones de equilibrio.....	18
2.4. Cambio del sistema de referencia.....	19
2.5. Tensiones y direcciones principales.....	21
2.6. Elipsoide de tensiones de Lamé.....	24
2.7. Cuádricas indicatrices de tensiones.....	27
2.8. Cuádricas directrices de tensiones.....	33
2.9. Representación gráfica plana de las componentes intrínsecas del vector tensión en un estado tensional tridimensional. Círculos de Mohr.....	35
2.10. Estados cilíndrico y esférico.....	43
2.11. Tensiones octaédricas.....	46
Ejercicios.....	47
3. Análisis de las deformaciones en un medio continuo	69
3.1. Introducción.....	69
3.2. Matrices que producen giro.....	71
3.3. Alargamientos producidos por una matriz. Direcciones principales.....	72
3.4. Matrices infinitesimales.....	73

3.5.	Deformaciones en el entorno de un punto.....	73
3.6.	Matriz de giro.....	76
3.7.	Matriz de deformación. Significado de sus componentes.....	79
3.8.	Deformación de ángulos.....	83
3.9.	Vector deformación unitaria en una dirección cualquiera. Componentes intrínsecas.....	84
3.10.	Ley de dualidad entre los estados tensional y de deformación.....	87
3.11.	Elipsoide de deformaciones.....	88
3.12.	Cuádricas indicatrices de deformaciones.....	88
3.13.	Cuádricas directrices de deformaciones.....	90
3.14.	Representación gráfica plana de las componentes intrínsecas del vector deformación unitaria. Círculos de Mohr.....	91
3.15.	Deformación volumétrica.....	93
3.16.	Condiciones de compatibilidad entre las componentes de la matriz de deformación.....	94
Ejercicios.....		97
4.	Relaciones entre tensiones y deformaciones.....	119
4.1.	Relación experimental entre tensión y deformación. Diagrama tensión-deformación. Ley de Hooke.....	119
4.2.	Deformaciones transversales. Coeficiente de Poisson.....	122
4.3.	Principio de superposición.....	124
4.4.	Leyes de Hooke generalizadas.....	125
4.5.	Ecuaciones de Lamé.....	131
Ejercicios.....		132
5.	Planteamiento general del problema elástico.....	149
5.1.	Introducción.....	149
5.2.	Formulación del problema elástico en desplazamientos. Ecuaciones de Navier.....	151
5.3.	Vector de Galerkin.....	154
5.4.	Potencial de deformación.....	156
5.5.	Formulación del problema elástico en tensiones. Ecuaciones de Michell y de Beltrami.....	158
5.6.	Unicidad de la solución del problema elástico.....	161
5.7.	Principio de Saint-Venant.....	162
5.8.	Deformaciones y tensiones de origen térmico. Teorema de Duhamel.....	162
Ejercicios.....		169
6.	Elasticidad bidimensional en coordenadas cartesianas.....	193
6.1.	Estados elásticos bidimensionales.....	193
6.2.	Estado de deformación plana.....	194
6.3.	Estado tensional plano.....	195
6.4.	Direcciones y tensiones principales en un estado elástico bidimensional..	198
6.5.	Elipse de tensiones.....	202

6.6. Círculo de Mohr.....	203
6.7. Curvas representativas de un estado elástico plano.....	205
6.8. El problema elástico en un estado de deformación plana.....	212
6.9. El problema elástico en un estado tensional plano.....	214
6.10. Función de Airy.....	215
6.11. Función de Airy cuando las fuerzas de masa deriven de un potencial....	216
6.12. Solución de Filón a la resolución del problema elástico plano.....	218
6.13. Funciones de Airy polinómicas.....	219
6.14. Flexión de una viga en voladizo cargada en su extremo.....	226
6.15. Presa de gravedad de perfil triangular.....	230
Ejercicios.....	233
7. Torsión.....	273
7.1. Introducción.....	273
7.2. Torsión en barras prismáticas de sección circular o anular.....	273
7.3. Torsión de barras prismáticas de sección arbitraria. Método semi-inverso de Saint-Venant.....	279
7.4. Torsión de barras prismáticas de sección elíptica.....	288
7.5. Torsión de barras prismáticas de sección triangular equilátera.....	293
7.6. Torsión de barras prismáticas de sección rectangular.....	298
Ejercicios.....	304
8. Elasticidad en coordenadas cilíndricas.....	325
8.1. Introducción.....	325
8.2. Matriz de tensiones.....	327
8.3. Ecuaciones de equilibrio.....	329
8.4. Matriz de deformaciones.....	330
8.5. Relaciones entre tensiones y deformaciones.....	335
8.6. Estados axilsimétricos. Función de deformación de Love.....	336
8.7. La representación de Neuber-Papkovich. Problema de Boussinesq.....	339
Ejercicios.....	344
9. Elasticidad bidimensional en coordenadas polares.....	361
9.1. Estado de deformación plana.....	361
9.2. Estado tensional plano.....	363
9.3. Función de tensiones en coordenadas polares.....	364
9.4. Distribución simétrica de tensiones respecto a un eje en casos de deformación o de tensión planas, sin fuerzas de masa.....	365
9.5. Análisis elástico de una tubería cilíndrica de pared gruesa sometida a presión.	367
9.6. Disco macizo giratorio.....	371
9.7. Disco giratorio con orificio central.....	374
9.8. Chapa plana o laja indefinida con taladro circular sometida a tracción o compresión y esfuerzo cortante.....	376
9.9. Sólido semi-indefinido sometido a carga uniformemente distribuida normal al plano que lo limita. Problema de Flamant-Boussinesq.....	385

9.10. Placa semi-indefinida sometida a una fuerza tangencial o a un momento en un punto de su borde.....	391
9.11. Cuña plana cargada en la arista de su diedro.....	395
Ejercicios.....	398
10. Teoría del potencial interno.....	429
10.1. Concepto de potencial interno o energía de deformación.....	429
10.2. Relaciones entre las fuerzas exteriores y las deformaciones. Coeficientes de influencia.....	430
10.3. Expresiones del potencial interno.....	432
10.4. Principio de los trabajos virtuales.....	435
10.5. Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti.....	439
10.6. Teorema de Castigliano.....	442
10.7. Teorema de Menabrea.....	444
10.8. Aplicación de principios variacionales para la resolución de problemas en Elasticidad.....	446
10.9. Método de Rayleigh-Ritz.....	451
Ejercicios.....	453
11. Teorías acerca del comienzo de deformaciones no elásticas.....	467
11.1. Deformación plástica de los materiales. Criterios de plastificación.....	467
11.2. Ensayo a tracción de un material.....	471
11.3. Teoría de la tensión principal máxima.....	474
11.4. Teoría de la tensión tangencial máxima.....	475
11.5. Teoría de la deformación longitudinal unitaria máxima.....	478
11.6. Teoría de la energía de deformación.....	479
11.7. Teoría de la energía de distorsión de von Mises.....	482
11.8. Teoría de la tensión tangencial octaédrica.....	485
11.9. Teoría de Mohr.....	486
Ejercicios.....	489
12. Métodos experimentales en Elasticidad.....	509
12.1. Introducción.....	509
12.2. Finalidad del método extensométrico.....	509
12.3. Galgas extensométricas eléctricas.....	511
12.4. Análisis de los datos obtenidos con galgas extensométricas.....	516
12.5. Fundamentos y finalidad del método fotoelástico.....	522
12.6. Conceptos ópticos básicos del método fotoelástico. Leyes de Maxwell.....	522
12.7. Aparatos fotoelásticos. Polariscopios plano y circular.....	525
12.8. Efectos de un modelo cargado en un polariscopio plano.....	527
12.9. Efectos de un modelo cargado en un polariscopio circular.....	532
12.10. Métodos de separación de las tensiones principales.....	537
12.11. Otros métodos experimentales.....	540
Bibliografía.....	545
Índice.....	547

La excelente acogida dispensada a las dos primeras ediciones de estas lecciones de Elasticidad nos ha obligado a redactar esta tercera edición, en la que se recogen todas las sugerencias que se han recibido sobre su contenido, a la vez que se corrigen las erratas advertidas. Quiere esto decir que esta nueva edición se edifica sobre las anteriores, de las que se mantiene todo aquello que sigue teniendo vigencia, se cambia lo que se ha estimado conveniente y se amplían aquellos temas que ha sido aconsejable ampliar. Todo ello con las miras puestas en facilitar a nuestros alumnos la asimilación de la forma más fácil, y más profunda a la vez, de esta disciplina.

El contenido de esta obra está encuadrado en el de un curso de Elasticidad y Resistencia de materiales para alumnos de Escuelas Técnicas Superiores. Se presenta como un primer tomo por entender que el estudio de las bases de la teoría de la Elasticidad debe preceder al de la Resistencia de materiales. Es esta una cuestión compartida por eminentes profesores de Escuelas Técnicas españolas y de otros países, aunque también hay otros, eminentes asimismo, que defienden la tesis contraria, es decir, de presentar la Resistencia de materiales desde un punto de vista más intuitivo y tratar posteriormente los métodos más completos y, por ende, más complejos de la teoría de la Elasticidad.

No se nos oculta que nuestro planteamiento conlleva un mayor grado de dificultad inicialmente. Sin embargo, creemos que este esfuerzo al principio se ve ampliamente recompensado por cuanto proporciona al alumno, al plantearse el estudio de las características resistentes de los materiales, un perfecto conocimiento de los estados tensional y de deformación que se crean en éstos al aplicarles una determinada sollicitación, permitiéndole moverse en un terreno firme en el que conocer la forma en que trabajan los materiales.

También hay que señalar que el mayor grado de dificultad inicial al que antes nos hemos referido, si bien es manifiesta en las obras avanzadas de la materia por utilizar la formulación tensorial, que generalmente el alumno desconoce, se ve notablemente disminuida en la que aquí se presenta por utilizar en su desarrollo una formulación matricial, cuyo manejo se supone han adquirido los alumnos en los cursos de Matemáticas de los primeros años de la carrera. No debe extrañar que para llegar a los mismos resultados se pueda hacer un tratamiento a base de matrices en lugar de tensores, dado que cuando se utilizan sistemas de referencia cartesianos en espacios tridimensionales, en donde entran la mayoría de los problemas que se le pueden presentar a un ingeniero, una matriz 3×3 y un tensor de segundo orden son equivalentes.

El contenido de la obra se mueve en el campo de la Elasticidad lineal, razonando sobre un modelo teórico de sólido elástico: el prisma mecánico, que suponemos posee las propiedades de homogeneidad, continuidad e isotropía.

En los cuatro primeros capítulos se hace un análisis de los estados tensional y de deformación que una sollicitación exterior produce al actuar sobre un prisma mecánico, así como las relaciones existentes entre ambos estados.

En el Capítulo 5 se hace el planteamiento general del problema elástico y se marcan las pautas para su resolución mediante la formulación bien en corrimientos, bien en tensiones. Cuando se formula en corrimientos se llega a la ecuación fundamental de la Elasticidad, que agrupa a las ecuaciones de Navier, de la que se da una solución general mediante el vector de Galerkin o, en aquellos casos que es posible, una solución particular mediante el potencial de deformación de Lamé.

El Capítulo 6 trata del problema elástico bidimensional en coordenadas cartesianas resaltando el importante papel que desempeña el conocimiento de una función de tensiones o función de Airy, para su resolución. En el mismo capítulo se estudian con cierto detenimiento estas funciones cuando pueden representarse en forma polinómica.

Las anteriores ediciones quedaban quizás incompletas al no tratar en ellas la torsión desde el punto de vista de la teoría de la Elasticidad. Se corrige este defecto dedicando el Capítulo 7 al estudio de la teoría de la torsión. Se comienza considerando barras prismáticas de sección recta circular o anular para continuar con barras de sección arbitraria, basando la formulación del problema elástico correspondiente en el método semi-inverso de Saint-Venant.

Los numerosos problemas que se suelen dar en la práctica, en los que tanto la forma del cuerpo elástico como la distribución de la carga aplicada al mismo presentan simetría en torno a una recta, han aconsejado dedicar el Capítulo 8 a la formulación del problema elástico en coordenadas cilíndricas, así como el 9 al caso particular de estados de tensión o de deformación planas en los que se utilizan coordenadas polares.

No podía faltar en esta primera parte del curso el estudio de los teoremas energéticos que se derivan de la teoría del potencial interno, de tanto interés para las aplicaciones y que se habrán de tener presentes de forma permanente en el desarrollo de la Resistencia de materiales. Se expone también en este mismo Capítulo 10 el principio de los trabajos virtuales, tan fecundamente utilizado en Estática y Mecánica analítica. Aquí se amplía el campo de aplicabilidad, pues en aquellas disciplinas se consideraban sistemas rígidos mientras que ahora se aplica a sistemas deformables.

En el Capítulo 11 se exponen las teorías más destacadas acerca del comienzo de las deformaciones no elásticas, que van a servir de base para establecer en su momento los criterios de resistencia y que se pueden considerar como una breve introducción a la Plasticidad, ciencia de gran importancia en ingeniería, y de forma especial en la mecánica del suelo, en estructuras y en el estudio y dimensionado de órganos de máquinas.

Finalmente, el Capítulo 12 se dedica a una exposición somera de los métodos experimentales de análisis de tensiones, haciendo especial hincapié en los extensométricos y en los ópticos.

En nuestro trabajo nos ha guiado el deseo de hacer una obra didáctica y asequible de entender por un alumno medio de nuestras Escuelas Técnicas Superiores. Para ayudar a conseguir el objetivo propuesto hemos incluido al final de cada capítulo, exceptuando el primero y el último, un número razonable de ejercicios, cuya resolución se recomienda haga el lector sin tener a la vista la explicación de los mismos, que le valdrá para comprobar la bondad o el fallo del planteamiento y resultados que él por sí mismo obtenga.

Hay que señalar que se estudian en primer lugar los problemas tridimensionales para estudiar los bidimensionales o unidimensionales como casos particulares, es decir, se hace un tratamiento de lo general a lo particular. Para algunos, que defienden el planteamiento contrario, o sea, de anteponer lo particular a lo general, aconsejable en niveles educativos más bajos, les puede parecer, a la vista de lo dicho anteriormente, una inconsecuencia. Perdónese esta sana rebeldía de no admitir, como regla general —y que como tal regla

general tiene excepciones— otro planteamiento en estudios de nivel universitario. Cualquier disciplina a este nivel exige comprender y asimilar perfectamente sus esquemas teóricos que, en cuanto ciencia, crea para su desarrollo.

Esta comprensión y asimilación implica un esfuerzo de abstracción para el que el alumno universitario debe estar habituado y tiene que aceptar, pues en caso contrario, es dudosa su vocación y dudoso el acierto con que otros profesores juzgaron sus conocimientos previos y el grado de formación, no sólo de información, que debieron alcanzar.

Se ha procurado la mayor claridad expositiva. Si se ha conseguido o no lo han de juzgar los lectores, a cuyo fallo me atengo. Cualquier observación sobre posibles defectos que, sin duda alguna, tendrá la obra, será sinceramente agradecida y tenida en cuenta en futuras ediciones que se pudieran hacer, si el interés que pueda tener así lo aconsejara.

Y, finalmente, mi deseo de que esta obra sirva de ayuda en el arduo proceso de formación como ingenieros, en la parcela de la Elasticidad y Resistencia de materiales, a todos aquellos que escogieron ese camino para su futuro quehacer profesional.

Luis ORTIZ BERROCAL

Madrid, junio de 1998

a	Amplitud de una onda.
a, b	Coefficientes ópticos de tensiones.
A	Área.
c	Velocidad de la luz.
c	Línea media.
C	Constante de Bridgman.
$\text{div (o } \nabla \cdot)$	Operador divergencia.
$[D]$	Matriz de deformación.
$[D_o]$	Matriz esférica de deformación.
$[D_d]$	Matriz desviadora de deformación.
e	Espesor del modelo fotoelástico.
$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$	Invariante lineal de la matriz de deformación o dilatación cúbica unitaria.
E	Módulo de elasticidad o módulo de Young.
E	Fuerza electromotriz.
\vec{f}_v	Fuerza de masa por unidad de volumen.
\vec{f}_Ω	Fuerza por unidad de superficie.
\vec{F}	Fuerza.
F	Valor de franja.
F_ρ, F_θ, F_z	Componentes de \vec{f}_v en coordenadas cilíndricas.
$\text{grad (o } \nabla)$	Operador gradiente.
G	Módulo de elasticidad transversal.
$[H]$	Matriz de giro.
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Vectores de base unitarios en coordenadas cartesianas.
$[I]$	Matriz unidad.
I_z	Momento de inercia de la sección recta respecto del eje Gz .
\bar{K}	Factor de sensibilidad de una galga.
K	Coefficiente óptico relativo.
ℓ	Longitud.
\vec{M}	Momento resultante.
M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}	Componentes cartesianas del momento resultante de un sistema de fuerzas respecto de un punto 0.
M_T	Momento torsor.
M_F	Momento flector.
M_y, M_z	Componentes del momento flector según las direcciones principales de inercia de la sección recta del prisma mecánico.
n	Coefficiente de seguridad.

n	Índice de refracción.
N	Esfuerzo normal.
p	Pulsación.
p_x, p_y, p_z	Componentes del vector de giro.
P	Carga aplicada.
\vec{P}	Vector de Galerkin.
\vec{r}	Vector de posición.
rot (o $\nabla \times$)	Operador rotacional.
$\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p$	Vector de giro.
R	Radio.
$[R]$	Matriz del cambio de ejes.
\vec{R}	Resultante de un sistema de fuerzas.
R_x, R_y, R_z	Componentes cartesianas de la resultante de un sistema de fuerzas.
s	Longitud de arco de línea media.
t	Tiempo.
t	Temperatura.
T	Variación de temperatura.
T	Esfuerzo cortante.
T_y, T_z	Componentes del esfuerzo cortante según las direcciones principales de inercia de la sección recta del prisma mecánico.
$[T]$	Matriz de tensiones.
$[T_o]$	Matriz esférica de tensiones.
$[T_d]$	Matriz desviadora de tensiones.
\mathcal{T}	Energía de deformación o potencial interno.
\mathcal{T}^*	Energía complementaria.
\vec{u}	Vector unitario normal a un plano.
\vec{u}	Vector característico de una dirección.
\vec{u}'	Vector unitario tangente a un plano.
u, v, w	Componentes del vector desplazamiento.
v	Velocidad de propagación en un medio.
V	Volumen.
V	Función potencial.
V	Voltaje.
x, y, z	Coordenadas cartesianas.
X, Y, Z	Componentes de \vec{f}_v en coordenadas cartesianas.
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	Componentes de \vec{f}_Ω en coordenadas cartesianas.
α	Coficiente de dilatación térmica.
α, β, γ	Cosenos directores de la normal a un plano.
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$	Ángulos que forma la normal a un plano con las direcciones principales.
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Deformaciones angulares en coordenadas cartesianas.
$\gamma_{\rho\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{z\rho}$	Deformaciones angulares en coordenadas cilíndricas.
$\Gamma_{1,2}$	Deformación angular.
$\vec{\delta}$	Vector corrimiento.

δ	Densidad.
Δ	Operador laplaciana.
Δ^2	Operador bilaplaciana.
$\vec{\varepsilon}$	Vector deformación unitaria.
$\varepsilon_n, \frac{1}{2} \gamma_n$	Componentes longitudinal y transversal del vector deformación.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Deformación longitudinales unitarias en las direcciones de los ejes coordenadas cartesianos.
$\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$	Deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones de los ejes en coordenadas cilíndricas.
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Deformaciones principales.
θ	Ángulo.
$\Theta = \sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz}$	Invariante lineal de la matriz de tensiones.
λ	Coefficiente de Lamé.
λ	Longitud de onda.
μ	Coefficiente de Poisson.
ρ	Resistividad eléctrica.
ρ, θ, z	Coordenadas cilíndricas.
$\vec{\rho}_o, \vec{\theta}_o, \vec{z}_o$	Vectores de base unitarios en coordenadas cilíndricas.
$\vec{\sigma}$	Vector tensión.
σ_n, τ	Componentes normal y tangencial del vector tensión.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Componentes cartesianas del vector tensión.
$\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$	Tensiones normales en coordenadas cartesianas.
$\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$	Tensiones normales en coordenadas cilíndricas.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensiones principales.
$\vec{\sigma}_o$	Tensión octaédrica.
σ_{no}	Tensión normal octaédrica.
$\sigma'_{nx}, \sigma'_{ny}, \sigma'_{nz}$	Tensiones normales termoelásticas.
$\sigma''_{nx}, \sigma''_{ny}, \sigma''_{nz}$	Tensiones normales de constricción.
σ_e	Límite elástico o tensión de fluencia.
σ_{et}	Tensión de fluencia a tracción.
σ_{ec}	Tensión de fluencia a compresión.
σ_{adm}	Tensión admisible.
τ_u	Tensión límite.
Σ	Sección de un prisma mecánico.
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Tensiones tangenciales en coordenadas cartesianas.
$\tau_{\rho\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{z\rho}$	Tensiones tangenciales en coordenadas cilíndricas.
τ_o	Tensión tangencial octaédrica.
$\tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}$	Tensiones tangenciales termoelásticas.
$\tau''_{xy}, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}$	Tensiones tangenciales de constricción.
ϕ	Función de Airy.
ϕ	Función de Love.
ϕ	Potencial de deformación de Lamé.
Φ	Función de tensiones de Prandtl.
ω	Velocidad angular de rotación.
Ω	Área de una sección.

Introducción al estudio de la Elasticidad

1.1. Objeto de la Elasticidad y de la Resistencia de materiales

Dado que comenzamos el desarrollo de un curso de *Elasticidad y Resistencia de materiales*, es aconsejable que lo iniciemos encuadrando el conocimiento específico que corresponde a cada una de estas disciplinas en el ámbito de la Ciencia y de la Técnica.

Desde un punto de vista científico podemos considerar a ambas como partes de la Física, es decir, como ciencias explicativas del comportamiento mecánico de los sistemas deformables.

Se incluye pues en la Mecánica que, como rama de la Física, comprende el estudio general de los fenómenos del equilibrio y movimiento de los cuerpos materiales.

Para desarrollar la Mecánica es necesario postular un modelo teórico acerca de la estructura de la materia, adaptando las características del modelo al problema que se trata de estudiar. Así, el modelo de punto material, en el que se concentra la materia en un punto geométrico, es suficientemente aproximado para el estudio de los cuerpos celestes o de las moléculas de un gas, dado que las trayectorias por ellos descritas son muy grandes en comparación con sus propias dimensiones.

En los cuerpos materiales, cuyas dimensiones no permiten que sea válida esta modelización, nuestro conocimiento actual de la estructura íntima de la materia nos permitiría su consideración como sistemas de elevadísimo número de puntos materiales (partículas subatómicas, átomos, moléculas) sometidos a complejas fuerzas de interacción. Este planteamiento, que es el habitual en la Física de nuestros días, resulta extraordinariamente complicado, desbordando ampliamente las fronteras de la Mecánica racional.

El tratamiento clásico dado por la Mecánica al estudio de los cuerpos materiales no asimilables al modelo de punto material es el siguiente: en el caso de que las modificaciones de forma sean despreciables respecto al movimiento de su conjunto, se adopta el modelo de *cuerpo rígido*, esto es, una distribución continua de materia con invariabilidad de las distancias relativas, y en el caso de que las deformaciones no puedan ser ignoradas,

se adopta el modelo de *medio continuo*, que admite una distribución continua de materia con variación asimismo continua de las distancias entre sus puntos.

La *Mecánica de los medios continuos* admite una clasificación relativa al estado de agregación de la materia. En el caso de gases y líquidos tendremos la *Mecánica de los fluidos*, y en el caso de los sólidos la *Mecánica de los sólidos*. Esta clasificación debe tomarse con las reservas que impone la distinción entre fluidos y sólidos, no siempre fácil de delimitar.

Para establecer las ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento mecánico de los sólidos deformables, es necesario complementar las ecuaciones de la estática, cinemática y dinámica, con ecuaciones que relacionen las tensiones y deformaciones en el entorno del punto. Estas leyes de comportamiento se pueden postular de acuerdo con nuestros conocimientos experimentales sobre el comportamiento de los materiales, o bien se pueden hacer derivar, en un contexto más amplio, de consideraciones termodinámicas.

En el caso de pequeñas deformaciones, se comprueba que en la mayoría de los materiales, el proceso de deformación es reversible, hablándose de *comportamiento elástico*. Asimismo se verifica en casi todos los materiales elásticos la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, hablándose de *comportamiento elástico lineal*. Cuando las deformaciones son grandes, el proceso de deformación deja de ser reversible, produciéndose calor por el rozamiento interno y apareciendo deformaciones permanentes al cesar en la aplicación de las cargas. En estas condiciones hablamos de *comportamiento plástico*. En algunos materiales se aprecian incluso deformaciones dependientes del tiempo, aun cuando las cargas no lo sean. Estamos pues en la frontera entre los sólidos y los fluidos altamente viscosos.

Para el caso de comportamiento elástico, la rama de la Mecánica de los sólidos que lo estudia se denomina *Teoría de la Elasticidad*. En el caso de comportamiento plástico se denomina *Teoría de la Plasticidad*, y en los casos frontera con la Mecánica de los Fluidos se denomina *Teoría de la Viscoelasticidad*.

Así pues, podemos establecer como objeto de la Teoría de la Elasticidad el estudio de los sólidos deformables con comportamiento elástico.

La formulación matemática de todas estas teorías conduce a ecuaciones de gran complejidad, no sólo en su resolución general sino en su problema de contorno. Ello hace que la obtención de soluciones exactas quede restringida a casos muy particulares de forma geométrica y de tipo de cargas aplicadas.

En el caso de sólidos de forma arbitraria resulta imposible soslayar esta dificultad, siendo necesario recurrir a métodos de resolución aproximados, pero en el caso de sólidos unidimensionales o bidimensionales, esto es, aquellos en los que existe preponderancia de algunas dimensiones frente a las demás, es posible establecer *a priori* hipótesis simplificativas referentes a la distribución tensional y deformacional.

Este es el planteamiento de la *Resistencia de materiales*, que además coincide con la evolución histórica del conocimiento acerca de la mecánica de los sólidos.

Así pues, *podemos establecer como objeto de la Resistencia de materiales el estudio de aquellos sólidos deformables que por sus características de forma geométrica y forma de carga, admitan hipótesis simplificativas en relación a sus estados tensional y deformacional*.

Ni que decir tiene que la práctica totalidad de las hipótesis que se hacen, están sancionadas por los resultados experimentales o por las propias teorías de la Elasticidad, Plasticidad, etc.

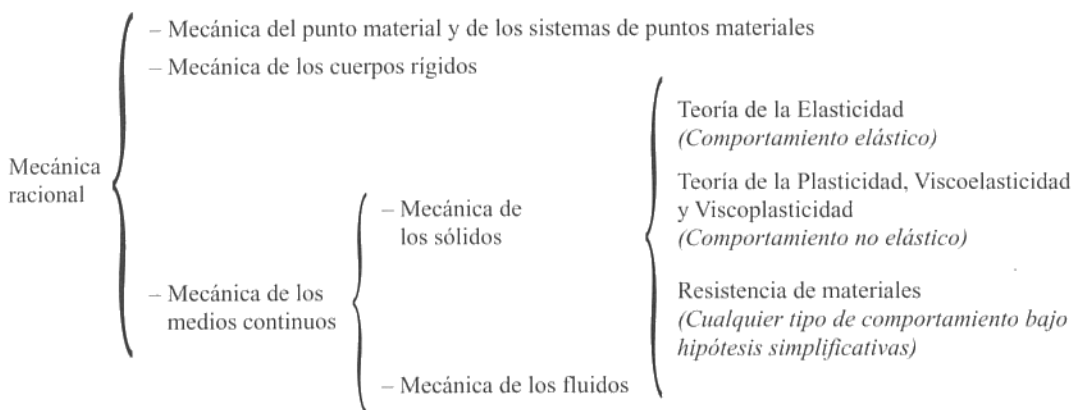
Queda pues de manifiesto el carácter complementario de las disciplinas Teoría de la Elasticidad y Resistencia de materiales. En tanto que la primera sacrifica en aras del rigor la viabilidad de la resolución exacta de los problemas del sólido elástico, la segunda afronta cualquier problemática de la mecánica de los sólidos, prescindiendo de todo aquello que no es significativo.

La Resistencia de materiales ha permitido establecer con suficiente aproximación las ecuaciones de comportamiento de los elementos constructivos básicos, tales como vigas, columnas, arcos, placas y láminas.

Podemos pues resumir todo lo dicho en el Cuadro sinóptico 1.1.

Hasta ahora hemos destacado el carácter científico de la Elasticidad y Resistencia de materiales, pero no debemos olvidar que nuestro objetivo primordial no es meramente científico, sino técnico. Si buscamos la explicación del comportamiento de los sólidos deformables, no es por una mera curiosidad científica, sino porque conociendo su comportamiento podremos diseñar elementos constructivos que nos sirvan en nuestras máquinas o en nuestras edificaciones.

Cuadro sinóptico 1.1



La Elasticidad y Resistencia de materiales constituye uno de los soportes teóricos fundamentales de las disciplinas, que por su carácter más especializado y tecnológico, tienen como objeto el diseño mecánico.

Así, la Teoría General de Estructuras, partiendo del comportamiento de los elementos unidimensionales y bidimensionales que ha establecido la Resistencia de materiales, estudia el comportamiento de los conjuntos de dichos elementos conectados entre sí. Las distintas tecnologías de las estructuras, como las del metal y del hormigón, usan en su fase de diseño a nivel de elemento o de sección los conocimientos de la Resistencia de materiales. La Geotecnia precisa en el análisis tensional de los suelos, de las Teorías de la Elasticidad, Plasticidad y Viscosidad en sólidos. El diseño de máquinas requiere el cálculo resistente de los órganos de la cadena cinemática, así como de las partes estáticas, usando la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de materiales. Finalmente, la Tecnología Mecánica, tanto en los procesos de conformado por deformación como en los de arranque de material, exige un profundo conocimiento de la Teoría de la Plasticidad.

Antepondremos el estudio de la teoría de la Elasticidad al de la Resistencia de materiales persiguiendo alcanzar un claro conocimiento de los fenómenos que se producen en el interior de un cuerpo cuando se encuentra sometido a una acción exterior, con lo que se facilitará de forma notable la comprensión de sus características resistentes.

1.2. Concepto de sólido

La Mecánica teórica considera los cuerpos indeformables, ya se encuentren en estado de movimiento o de reposo. Esta propiedad no es, en el fondo, más que una abstracción, ya que no corresponde en la realidad a material alguno. Sin embargo, es de gran utilidad por la comodidad y simplificación que introduce. Las conclusiones que se obtienen en gran número de casos son buenas aproximaciones de lo que realmente ocurre. Pero avanzando en el estudio de la Mecánica aplicada se observa experimentalmente que las fuerzas que actúan sobre determinado cuerpo, que poseerá unas características físicas y geométricas propias, no pueden ser arbitrariamente grandes, pues el cuerpo se deforma y se rompe. Esta observación nos exige revisar el concepto de sólido que hasta aquí hemos admitido.

Así pues, la idea de sólido que interviene con harta frecuencia en Física y principalmente en Mecánica, evoluciona a medida que se efectúa un estudio más profundo de los problemas que se derivan de la Estática aplicada.

Siguiendo la evolución indicada, haremos del sólido las tres siguientes consideraciones:

- Sólido rígido.
- Sólido elástico.
- Sólido verdadero.

Sólido rígido es aquel que ante cualquier esfuerzo (por grande que sea) a que está sometido, la distancia entre dos moléculas cualesquiera permanece invariable.

Así, cuando tenemos una viga AB apoyada en dos pilares (Fig. 1.1), que recibe una carga vertical P en un punto C , si suponemos que se trata de un sólido rígido nos bastaría calcular los empujes o reacciones que debe recibir de los pilares, para conocer los esfuerzos a que está sometida.

Al hacer esta suposición, no sería posible jamás la rotura de la viga en contra de lo que realmente sucede, comprobado por la experiencia, ya que al ir aumentando la carga P siempre existe un valor que provoca la rotura de la viga a pesar de que las reacciones en los pilares fuesen suficientes.

Surge, por tanto, la necesidad de estudiar en general los límites de las cargas que se pueden aplicar a un determinado cuerpo o bien el dimensionado que hay que darle para soportar cierto esfuerzo, con la condición siempre de que no exista peligro de rotura.

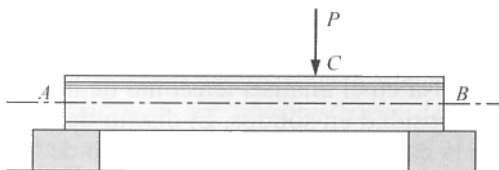


Figura 1.1.

Naturalmente, si existiesen sólidos rígidos no existirían peligros de rotura ni deformaciones de ningún tipo y tanto la teoría de la Elasticidad como la Resistencia de materiales carecerían de objeto. Si pudiera construirse una viga con material que tuviera las propiedades de sólido rígido, por pequeña que fuera su sección y por grandes que fuesen las cargas a soportar, la estabilidad del sistema estaría asegurada siempre que se cumplieran las condiciones generales de equilibrio.

$$\begin{array}{lll} R_x = 0 & ; & R_y = 0 & ; & R_z = 0 \\ M_{0x} = 0 & ; & M_{0y} = 0 & ; & M_{0z} = 0 \end{array} \quad (1.2.1)$$

siendo R_x , R_y , R_z y M_{0x} , M_{0y} , M_{0z} las componentes referidas a un sistema cartesiano trirrectangular de la resultante de las fuerzas ejercidas sobre el sistema y del momento resultante de dichas fuerzas respecto de cualquier punto O .

En todo lo anteriormente expuesto hemos anticipado el concepto de *sólido elástico* que podemos definir como aquel que ante un esfuerzo exterior se deforma y recupera su forma primitiva al cesar la causa exterior.

A los sólidos elásticos se les supone una serie de cualidades como son las de *isotropía*, *homogeneidad* y *continuidad*.

Se dice que un cuerpo es *isótropo* cuando sus propiedades físicas no dependen de la dirección en que se han medido en dicho cuerpo. Así, diremos que la isotropía que suponemos poseen los sólidos elásticos equivale a admitir la propiedad de igual elasticidad en todas las direcciones*.

El suponer el sólido elástico *homogéneo* equivale a considerar que una parte arbitraria del mismo posee idéntica composición y características que otra cualquiera.

La propiedad de *continuidad* supone que no existen huecos entre partículas ni, por consiguiente, distancias intersticiales.

Algunas de estas propiedades, por ejemplo isotropía y homogeneidad, suelen estar íntimamente unidas, pues si un cuerpo es igualmente elástico en cualquier dirección es de suponer que sea homogéneo, e inversamente, si suponemos que es homogéneo es presumible que sea isótropo.

Sin embargo, estas propiedades de isotropía, homogeneidad y continuidad no concurren en ningún material, ya sea natural o elaborado por el hombre: no es posible que se dé un grado de elasticidad exactamente igual en todas las direcciones debido a la distribución de sus átomos o moléculas en redes cristalinas ordenadamente dispuestas. Tampoco existe en la realidad la homogeneidad perfecta, así como sabemos por las teorías modernas de la materia que ésta no es continua y que existen espacios vacíos entre las moléculas y entre los mismos átomos que la componen.

No obstante, la consideración de sólido continuo es muy cómoda, pues permite admitir, cuando existe una deformación debida a la aplicación de una fuerza a unas moléculas del sólido, que el esfuerzo es absorbido en parte por las moléculas próximas y de esta forma queda repartido de forma continua y apta para el cálculo.

* Cuando debido a un proceso natural o de fabricación, los elementos componentes de un cuerpo están orientados en una determinada dirección, será preciso considerar la anisotropía de los mismos, como ocurre con las piezas de madera, metálicas laminadas en frío o materiales compuestos.

Los sentidos positivos de los ejes G_y y G_z serán tales que hagan que el sistema de referencia adoptado sea un sistema directo.

1.4. Equilibrio estático y equilibrio elástico

Para que un sólido rígido se encuentre en equilibrio es necesario y suficiente que se verifiquen las ecuaciones (1.2.1) que son las condiciones generales del equilibrio estático.

Estas seis ecuaciones no son otra cosa que la traducción analítica de dos condiciones fundamentales:

- 1.^a Que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido sea igual a cero o, lo que es lo mismo, que la resultante sea nula.
- 2.^a Que el momento resultante de todas las fuerzas respecto de cualquier punto sea igual a cero.

Téngase presente que momento resultante y momento de la resultante son conceptos distintos. *Momento resultante* de un sistema de fuerzas respecto a un punto es la suma de los momentos de los vectores que componen el sistema, respecto a dicho punto. Por el contrario, *momento de la resultante* es, como su nombre indica, el momento respecto de un determinado punto, de la resultante del sistema. Pero al ser la resultante vector libre no tiene sentido hablar de su momento, a menos que el sistema sea reducible a un único vector: su resultante; entonces, el momento de la resultante respecto de un punto es el momento de ésta, supuesta su línea de acción el eje central del sistema.

Los vectores momento resultante y momento de la resultante respecto de un mismo punto son iguales cuando se verifica esta circunstancia, como ocurre en los sistemas de vectores concurrentes, paralelos o coplanarios.

Sin embargo, en un sólido elástico estas condiciones son necesarias pero no suficientes, ya que si suponemos realizado en el sólido un corte ideal y prescindimos de una de las partes (véase la Fig. 1.6), es necesario que el sistema de fuerzas interiores, en los puntos de la sección ideal, sea equivalente al sistema de fuerzas que actúan sobre la parte eliminada. Llegamos así al concepto de *equilibrio elástico*, que exige se verifiquen en un sólido elástico no sólo las condiciones del equilibrio estático, sino también que exista equilibrio entre las fuerzas exteriores y las internas en cada una de las infinitas secciones.

Esta última condición es la característica del equilibrio elástico: es necesario que las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido sean contrarrestadas por las fuerzas interiores de cohesión molecular.

Como esto debe suceder en las infinitas secciones del sólido y siendo imposible el estudio en todas ellas, lo que se hace es estudiar solamente las secciones que deben soportar un mayor esfuerzo y, lógicamente, si éstas resisten es de suponer que las sometidas a esfuerzos menores también lo hagan, sobreentendiéndose que las diversas secciones están constituidas por material homogéneo, ya que hablamos de sólidos elásticos.

En definitiva, lo que realmente hacemos es considerar el sólido como rígido excepto en una sección y comprobar si existe en ella equilibrio. Es como si las dos partes rígidas en que queda dividido el sólido estuviesen unidas por un muelle, e investigáramos si éste puede resistir los esfuerzos a que está sometido.

1.5. Esfuerzos que se derivan de la acción de un sistema de fuerzas sobre un prisma mecánico

El sistema de fuerzas exteriores que actúan sobre un prisma mecánico, materialización del sólido elástico como hemos indicado anteriormente, comprende dos tipos de fuerzas: de volumen y de superficie.

Las primeras son debidas a campos de fuerzas, tales como el campo gravitatorio y el de fuerzas de inercia. Si llamamos \vec{f}_v a la fuerza por unidad de volumen (\vec{f}_v será en general función de la posición del punto), sobre cada elemento de volumen dV del prisma estará aplicada la fuerza $\vec{f}_v dV$, que será, en general, un infinitésimo de tercer orden.

Las fuerzas de superficie son las que están aplicadas en la superficie exterior del prisma. Si \vec{f}_Ω es la fuerza que se ejerce por unidad de superficie, sobre un elemento $d\Omega$ actuará $\vec{f}_\Omega d\Omega$. Ejemplos de este tipo de fuerzas son las sobrecargas sobre un prisma, la acción ejercida sobre la compuerta de un depósito por el fluido que contiene, el empuje de tierras sobre un muro de contención, la reacción de un cuerpo, etc. Estas fuerzas son infinitésimos de segundo orden.

En lo que sigue, mientras no se indique lo contrario, supondremos despreciables las fuerzas de volumen frente a las de superficie.

Consideremos un prisma mecánico que suponemos en equilibrio estático bajo la acción de un sistema de fuerzas \vec{F}_i ($i = 1, 2, \dots, 7$, en la Fig. 1.3), que representa la acción exterior y emplearemos el método de las secciones, ya conocido por haber sido utilizado frecuentemente en el estudio de la Estática, para analizar el equilibrio elástico en una sección mn .

El método consiste en imaginar realizado un corte en el prisma. Este corte determina una sección mn que consideraremos plana. Supondremos asimismo que mn es una sección recta, es decir, está contenida en un plano normal a la línea media del prisma.

Es evidente que realizado este seccionamiento y eliminada, por ejemplo, la parte de la derecha se rompería radicalmente el equilibrio a no ser por la existencia de una fuerza y un par, equivalentes a la acción externa que ejerce la parte eliminada (véanse las Figuras 1.4 y 1.5).

Ya se comprende, según se deduce de las condiciones generales del equilibrio estático, que esta fuerza y par son, respectivamente, la resultante \vec{R} y momento resultante \vec{M} respecto del centro de gravedad G de la sección, de las fuerzas que actúan sobre la parte que hemos eliminado.

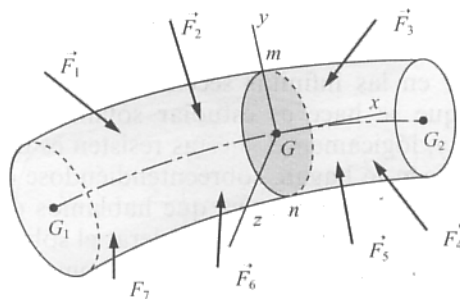


Figura 1.3.

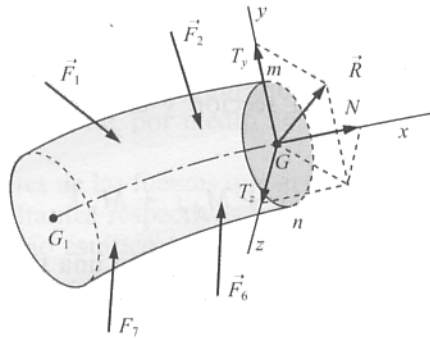


Figura 1.4.

Esta consideración no nos permite conocer la distribución de esfuerzos en los diferentes puntos de la sección, para ello es necesario establecer hipótesis suplementarias que ya se indicarán más adelante, pero sí nos permite obtener unas interesantes conclusiones acerca del tipo de esfuerzos a que está sometida la sección.

En efecto, refiriendo la resultante \vec{R} al triedro trirrectángulo $Gxyz$, cuyos vectores unitarios son \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} (Fig. 1.4), se tiene

$$\vec{R} = N \vec{i} + T_y \vec{j} + T_z \vec{k} \quad (1.5.1)$$

Sus tres componentes son: N , T_y y T_z .

Veamos el significado de cada una de estas componentes.

N , llamado *esfuerzo normal*, por serlo a la superficie de la sección considerada, tiende a empujar o separar a ambas partes del prisma dando lugar a esfuerzos de compresión o tracción, respectivamente.

T_y y T_z , por estar en el mismo plano de la sección, efectúan la misma clase de esfuerzo y, por tanto, podemos obtener su resultante \vec{T}

$$\vec{T} = T_y \vec{j} + T_z \vec{k} \quad (1.5.2)$$

que es la expresión de un esfuerzo que actúa tangencialmente a la superficie de la sección como si se tratase de deslizar la sección respecto de una muy próxima, separándola o cortándola. Es por ello que esta componente de la resultante se denomina *esfuerzo tangencial* o *cortante*. Si el prisma se rompiese por la sección recta, el vector \vec{T} nos

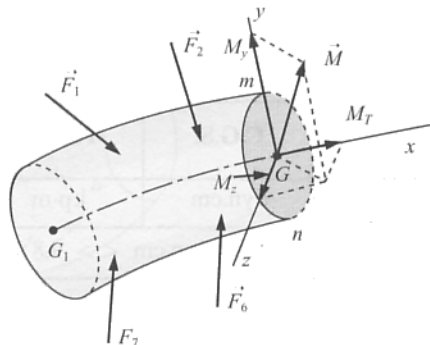


Figura 1.5.

indicaría la dirección en que saldría despedido el trozo del prisma de la derecha respecto del de la izquierda.

Análogamente, podemos proceder a descomponer el momento resultante \vec{M} en la dirección perpendicular al plano de la sección y en otra componente contenida en el plano (Fig. 1.5).

$$\vec{M} = M_T \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \quad (1.5.3)$$

Como ya sabemos, el vector momento nos expresa una tendencia al giro. Expresando \vec{M} en función de sus componentes M_T , M_y y M_z , veamos qué efecto produce cada una de ellas sobre el prisma.

M_T actúa perpendicular al plano de la sección en la dirección de la línea media, por tanto, tiende a hacer girar el sólido sobre sí mismo, creando un efecto de torsión. Se llama por ello a M_T *momento torsor*.

M_y y M_z tienden a obligar al sólido a girar lateralmente curvándolo hacia afuera en los planos xGz e yGx , respectivamente, flexionándolo, por lo que se denominan *momentos flectores*. Su resultante

$$\vec{M}_F = M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \quad (1.5.4)$$

está contenida en el plano de la sección recta; es el *momento flector*.

Un momento es el producto de una fuerza por una distancia; por tanto, su ecuación de dimensiones será:

$$[\text{momento}] = [F] [L] = [M] [L]^2 [T]^{-2} \quad (1.5.5)$$

Las ecuaciones dimensionales del segundo y tercer miembro son, respectivamente, las correspondientes a un sistema técnico en el que la fuerza es magnitud fundamental y al Sistema Internacional (SI)*, que toma como magnitudes fundamentales masa, longitud y tiempo.

En el sistema técnico la unidad de fuerza es el kilopondio o kilogramo fuerza (kp o kgf).

En el Cuadro 1.1 figuran las unidades del momento y las equivalencias entre las correspondientes a los diferentes sistemas.

Cuadro 1.1. Unidades de momento y equivalencias

Sistema Magnitud	C.G.S.	Técnico	S.I.
Momento	dyn.cm	kp·m	N.m
1 kp·m < > 981.10 ⁵ dyn.cm < > 9,8 N.m			

* En este sistema la unidad de fuerza: el newton (N), es unidad derivada.

1.6. Concepto de tensión

Supongamos un prisma mecánico en equilibrio sometido a un sistema de fuerzas y considerémoslo cortado idealmente, por medio de un plano arbitrario π , en dos partes A y B (Fig. 1.6).

Sean \vec{F} y \vec{F}' las resultantes de las fuerzas que actúan sobre cada una de éstas, así como \vec{M} y \vec{M}' los momentos resultantes respectivos con relación a un punto cualquiera O .

La condición de equilibrio estático exige que se verifique

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}' = 0 \\ \vec{M} + \vec{M}' = 0 \end{cases} \quad (1.6.1)$$

Si ahora suponemos suprimida una de las partes, por ejemplo la B , de la condición de equilibrio elástico se desprende la existencia de una distribución continua de fuerzas $d\vec{f}$, definida en los puntos de A pertenecientes a la sección Σ determinada por el plano π , que equivale a la acción de la parte B .

$$\begin{cases} \int_{\Omega} d\vec{f} = \vec{F}' \\ \int_{\Omega} \vec{r} \times d\vec{f} = \vec{M}' \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Sea P un punto cualquiera del sólido elástico, representado por el prisma mecánico. Siempre podemos considerar un entorno plano de este punto y hacer pasar por él un plano π que contenga a dicho entorno. Si $\Delta\vec{f}$ es la resultante de las fuerzas correspondientes en todos los puntos del área $\Delta\Omega$ del entorno, en virtud de la condición de equilibrio elástico, definiremos como tensión en el punto P según el plano π el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{f}}{\Delta\Omega} = \frac{d\vec{f}}{d\Omega} \quad (1.6.3)$$

La tensión así definida, que representaremos por $\vec{\sigma}$, resulta ser un vector colineal con $\Delta\vec{f}$ y su módulo significa la magnitud de la fuerza ejercida en la sección Σ por unidad de superficie.

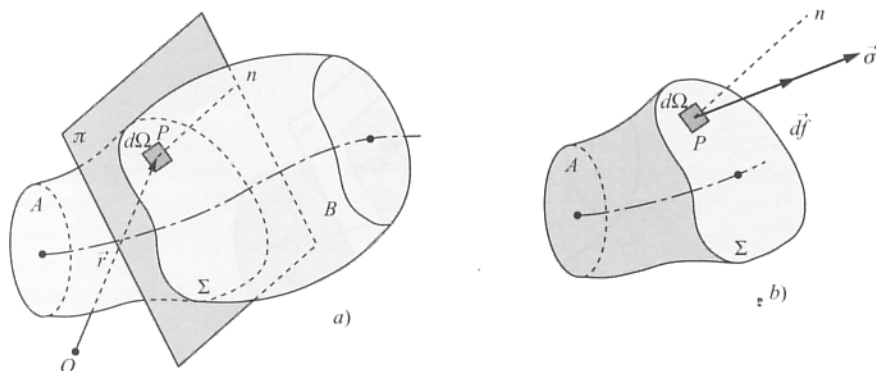


Figura 1.6.

De la misma definición se deduce su ecuación de dimensiones:

$$[\sigma] = \frac{[F]}{[\Omega]} = [F][L]^{-2} = [M][L]^{-1}[T]^{-2} \quad (1.6.4)$$

En el Cuadro 1.2 figuran las unidades de tensión en los diferentes sistemas de unidades, así como las relaciones de equivalencia entre ellas.

Cuadro 1.2. Unidades de tensión y equivalencias

Magnitud \ Sistema	C.G.S.	Técnico	S.I.
Tensión	dyn/cm ²	kp/m ²	N/m ²
1 kp/m ² < > 98,1 dyn/cm ² < > 9,8 N/m ²			

El N/m², unidad de tensión en el S.I., se denomina pascal (Pa).

Estado tensional en los sólidos elásticos

2.1. Componentes intrínsecas del vector tensión sobre un elemento de superficie

En el capítulo anterior hemos visto cómo al realizar en un prisma mecánico un corte ideal por un plano π y suponer eliminada una de las dos partes en que queda dividido, el equilibrio elástico de la parte que queda exige la existencia de una distribución continua de esfuerzos $d\vec{f}$ en todos los puntos interiores del prisma pertenecientes a la sección Σ determinada por el plano π .

Hemos definido el vector tensión $\vec{\sigma}$ como la fuerza de esta distribución continua por unidad de superficie mediante el límite (1.6.3).

Fijado el plano π , la dirección del vector tensión, colineal con $d\vec{f}$, dependerá del sistema de fuerzas exteriores. Siempre podremos considerar para cada orientación del plano π que pase por un punto P dos direcciones particulares como son la normal exte-

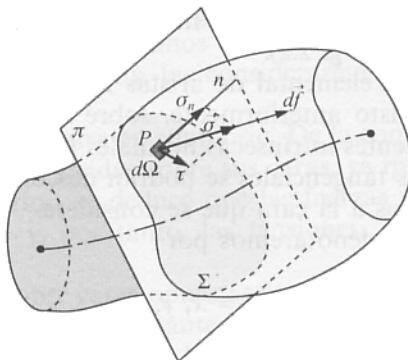


Figura 2.1.

rior n y la que se obtiene al proyectar $\vec{\sigma}$ sobre el plano π . Las componentes de $\vec{\sigma}$ según estas dos direcciones se llaman *componentes intrínsecas* del vector tensión.

La componente σ_n , según la normal al plano π , recibe el nombre de *tensión normal* y la proyección τ sobre dicho plano se denomina *tensión tangencial*.

Como estas dos direcciones son perpendiculares, entre el módulo σ del vector tensión y sus componentes intrínsecas, se verificará la relación

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 \quad (2.1.1)$$

Es conveniente hacer la observación que el vector tensión, por definición, se asocia a una superficie y no se podrán componer vectorialmente tensiones en un punto como si se tratara de fuerzas a no ser que todas ellas se refieran a la misma superficie.

2.2. Estudio de los vectores tensión en un punto. Matriz de tensiones

En el apartado anterior hemos considerado el plano π que pasa por un punto P y en dicho plano un entorno de P . Fijado el plano π , en el punto P está determinado el vector tensión y, por tanto, sus componentes normal y tangencial. Llegado a este punto se nos plantean, de forma inmediata, las siguientes cuestiones:

- 1.º Si consideramos dos planos distintos π_1, π_2 que pasan por P , los vectores tensión correspondientes, ¿serán iguales o distintos?
- 2.º Caso de ser distintos, ¿cómo se podría calcular $\vec{\sigma}$ en función de la orientación que define al plano π , así como la variación de sus componentes intrínsecas?
- 3.º La obtención de los valores máximos de esta magnitud y las orientaciones correspondientes.

La contestación afirmativa a la primera pregunta es evidente, ya que al variar π cambia la distribución continua de fuerzas así como el área de la sección. De una forma general, $d\vec{f}$ variará en módulo y dirección, por lo que también serán distintos los vectores tensión correspondientes.

En cuanto a las otras cuestiones planteadas, van a ser objeto de nuestro análisis en lo que sigue de este capítulo.

En primer lugar, consideremos un prisma mecánico y tomemos un sistema de referencia cartesiano ortogonal $Oxyz$ (Fig. 2.2).

Aislemos el paralelepípedo elemental de aristas dx, dy, dz que rodea a un punto P interior del prisma. Por lo visto anteriormente, sobre cada una de sus caras existe un vector tensión cuyas componentes intrínsecas normales tendrán las direcciones de los ejes coordenados respectivos y las tangenciales se podrán descomponer a su vez en las direcciones de los dos ejes paralelos a la cara que se considere.

Las tensiones normales las denotaremos por

$$\sigma_{ni} \quad (i = x, y, z) \quad (2.2.1)$$

en donde el índice i indica el eje al cual son paralelas y convendremos en asignarles signo positivo si son de tracción y negativo si se trata de compresión.

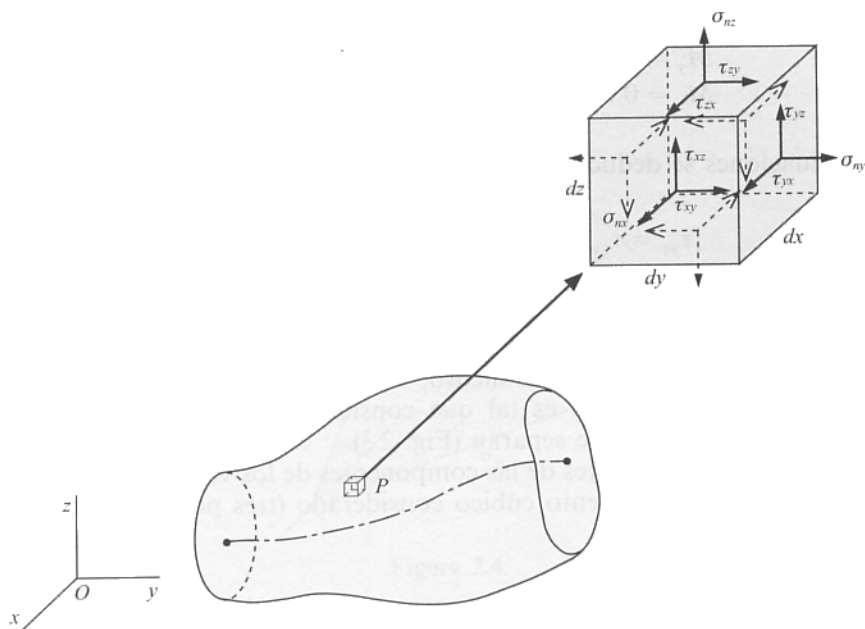


Figura 2.2.

Las tensiones tangenciales las representaremos por

$$\tau_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \quad i \neq j \quad (2.2.2)$$

indicando el primer subíndice i la dirección normal al plano en que actúa y el segundo j la dirección del eje al cual es paralela. En cuanto al signo de las tensiones tangenciales, diremos que son positivas cuando actuando en una cara vista (Fig. 2.2) tienen el sentido positivo de los ejes coordenadas.

Sobre las caras del paralelepípedo elemental, dado que sus dimensiones son muy pequeñas, admitiremos que los esfuerzos que se ejercen sobre ellas debidos a las tensiones se encuentran uniformemente repartidas, por lo que podremos suponer que la resultante de estas fuerzas que actúan en cada cara pasa por el centro de gravedad de la misma. Estas fuerzas de superficie son infinitésimos de segundo orden.

Las fuerzas de volumen, si las hay, las consideraremos despreciables por tratarse de infinitésimos de tercer orden.

Este paralelepípedo se encuentra en equilibrio. De la condición de ser nula la resultante de las fuerzas de superficie ejercidas sobre sus caras, ya que las fuerzas de volumen son infinitésimos de orden superior, se deduce que las fuerzas sobre dos caras opuestas son iguales y de signo opuesto y, por tanto, las tensiones, ya que las áreas de dos caras opuestas son iguales.

Los esfuerzos cortantes sobre caras opuestas constituyen pares de fuerzas. El equilibrio exige que sea nulo el momento resultante (téngase presente que estamos estudiando equilibrio de fuerzas, no de tensiones, por lo que habrá que multiplicar cada τ_{ij} por el área de la cara respectiva).

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 0 & ; & \quad \tau_{yz} dx dz dy - \tau_{zy} dx dy dz = 0 \\ M_y &= 0 & ; & \quad \tau_{zx} dx dy dz - \tau_{xz} dy dz dx = 0 \\ M_z &= 0 & ; & \quad \tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

De estas ecuaciones se deduce:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad ; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.2.4)$$

igualdades que expresan una importante propiedad de la tensión cortante: las componentes de las tensiones cortantes en un punto correspondientes a dos planos perpendiculares, en la dirección normal a la arista de su diedro, son iguales (*teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales*). El sentido es tal que considerando un diedro recto, ambas se dirigen hacia la arista o ambas se separan (Fig. 2.3).

Se observa que de los 18 valores de las componentes de los vectores tensión correspondientes a las seis caras del elemento cúbico considerado (tres por cada cara), solamente hay seis valores independientes.

$$\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy} \quad (2.2.5)$$

Veamos que conocidos estos seis valores queda determinado el vector tensión correspondiente a cualquier orientación.

En efecto, consideremos un tetraedro elemental como entorno de un punto P interior del prisma mecánico, según se indica en la Figura 2.4.

Sean $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, las componentes del vector tensión $\vec{\sigma}$ en la cara ABC de área $d\Omega$ y expresémoslas en función de los seis valores (2.2.5) y de las componentes α, β, γ * del vector unitario \vec{u} según la normal a dicha cara.

Las áreas de las caras del tetraedro paralelas a los planos coordenados son las proyecciones ortogonales del área $d\Omega$ del triángulo ABC , es decir, tienen de valores $\alpha d\Omega$, $\beta d\Omega$ y $\gamma d\Omega$, respectivamente.

Para que el tetraedro esté en equilibrio, la suma de componentes paralelas a cada eje debe ser nula. Recordemos que los momentos eran infinitésimos de tercer orden, así como las fuerzas de volumen, por lo que no aparecen en las ecuaciones de equilibrio.

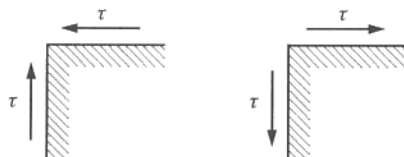


Figura 2.3.

* α, β, γ son los cosenos directores de la recta perpendicular al plano determinado por los tres puntos A, B, C .

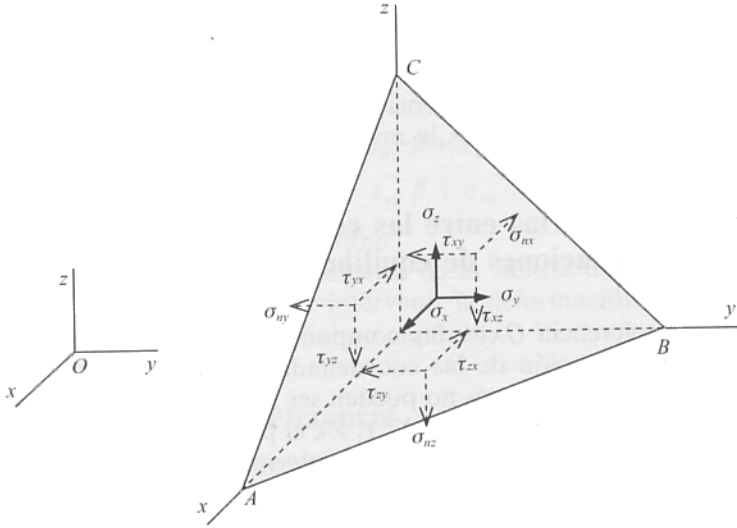


Figura 2.4.

Planteando las condiciones de equilibrio del tetraedro, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x d\Omega &= \sigma_{nx} \alpha d\Omega + \tau_{xy} \beta d\Omega + \tau_{zx} \gamma d\Omega \\
 \sigma_y d\Omega &= \tau_{xy} \alpha d\Omega + \sigma_{ny} \beta d\Omega + \tau_{yz} \gamma d\Omega \\
 \sigma_z d\Omega &= \tau_{zx} \alpha d\Omega + \tau_{yz} \beta d\Omega + \sigma_{nz} \gamma d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Se puede expresar este sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{2.2.7}$$

o bien simbólicamente

$$[\vec{\sigma}] = [T] [\vec{u}] \tag{2.2.8}$$

La matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} \end{pmatrix} \tag{2.2.9}$$

que es simétrica y depende exclusivamente de los seis valores (2.2.5) se llama *matriz de tensiones*.

Se deduce de ello que el estado tensional en el interior de un sólido elástico es conocido, si lo es en todos sus puntos la matriz de tensiones.

Fijado un triedro de referencia $Oxyz$, las componentes de la matriz de tensiones en un punto serán, en general, función de las coordenadas de dicho punto. Sin embargo, los valores que toman estas componentes no pueden ser arbitrarios, ya que siendo \vec{f}_v la fuerza por unidad de volumen de componentes (X, Y, Z) , el planteamiento del equilibrio estático en el paralelepípedo elemental de la Figura 2.5 interior al sólido nos conduce a:

$$\begin{cases} X + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ Z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{nz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Pero también se tiene que verificar el equilibrio en los puntos de la superficie del sólido elástico. Si \vec{f}_Ω es la fuerza por unidad de superficie exterior de componentes $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$, es

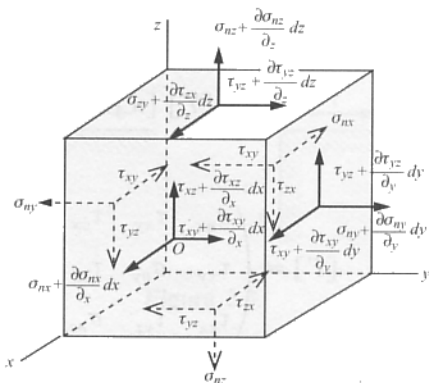


Figura 2.5.

evidente que la tensión en los puntos de dicha superficie exterior dada por (2.2.7) ha de coincidir con \vec{f}_Ω . Las ecuaciones que traducen esta condición

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_{nx} \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{zx} \gamma \\ \bar{Y} = \tau_{xy} \alpha + \sigma_{ny} \beta + \tau_{yz} \gamma \\ \bar{Z} = \tau_{zx} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_{nz} \gamma \end{cases} \quad (2.3.2)$$

son las *ecuaciones de equilibrio en el contorno*.

Para la determinación de las componentes de la matriz de tensiones, conocidas las distribuciones \vec{f}_v y \vec{f}_Ω , es necesario hacer intervenir la deformación elástica del cuerpo, de cuyo estudio nos ocuparemos en el próximo capítulo.

2.4. Cambio del sistema de referencia

Consideremos un punto P interior de un prisma mecánico y sea $[T]$ la matriz de tensiones referida a una terna de ejes trirrectangulares $Pxyz$. Sea asimismo $[T^*]$ la matriz de tensiones referida a otra terna $Px^*y^*z^*$, de ejes también trirrectangulares. Sean \vec{u}_1^* ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$), \vec{u}_2^* ($\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$), \vec{u}_3^* ($\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$), los vectores unitarios que definen las direcciones de los ejes del segundo sistema, cuyas componentes están referidas al primero, como se indica en la Figura 2.6.

Cualquier vector \vec{PA} se puede expresar respecto a uno y otro sistema mediante la expresión trinomia correspondiente

$$\vec{r} = \vec{PA} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = x^*\vec{u}_1^* + y^*\vec{u}_2^* + z^*\vec{u}_3^* \quad (2.4.1)$$

Proyectando esta expresión sobre los ejes del sistema $Pxyz$, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x^* + \alpha_2 y^* + \alpha_3 z^* \\ y = \beta_1 x^* + \beta_2 y^* + \beta_3 z^* \\ z = \gamma_1 x^* + \gamma_2 y^* + \gamma_3 z^* \end{cases} \quad (2.4.2)$$

que nos dan las coordenadas del punto A respecto del sistema $Pxyz$ en función de las correspondientes respecto del sistema $Px^*y^*z^*$.

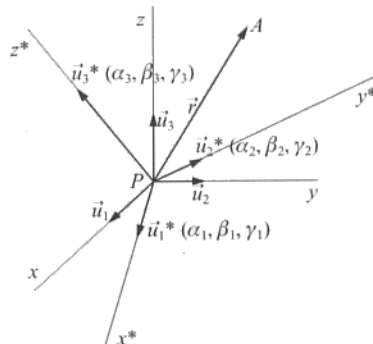


Figura 2.6.

Estas ecuaciones se pueden expresar matricialmente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

o bien, simbólicamente

$$[\vec{r}] = [R] [\vec{r}^*] \quad (2.4.4)$$

en donde $[R]$ es la matriz del cambio de ejes que, como sabemos, es una matriz ortogonal.

Veamos qué relaciones existen entre las matrices de tensiones $[T]$ y $[T^*]$ que definen el estado tensional del prisma mecánico, pero respecto de sistemas de referencia distintos.

El vector tensión correspondiente a un plano π , cuya orientación viene definida por un determinado vector unitario, se puede obtener, según sea la referencia adoptada, mediante las ecuaciones

$$[\vec{\sigma}] = [T] [\vec{u}] ; [\vec{\sigma}^*] = [T^*] [\vec{u}^*] \quad (2.4.5)$$

estando relacionadas las matrices del mismo vector tensión mediante la matriz del cambio de ejes

$$[\vec{\sigma}] = [R] [\vec{\sigma}^*] \quad (2.4.6)$$

Por otra parte, las componentes del vector unitario respecto de ambos sistemas de referencia están ligadas por la relación

$$[\vec{u}] = [R] [\vec{u}^*] \quad (2.4.7)$$

que nos permite obtener de forma inmediata la ecuación inversa, teniendo en cuenta que por ser ortogonal la matriz del cambio de ejes, su inversa es igual a su traspuesta*.

$$[\vec{u}^*] = [R]^T [\vec{u}] \quad (2.4.8)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (2.4.6), (2.4.5) y (2.4.8), podemos poner

$$[\vec{\sigma}] = [R] [\vec{\sigma}^*] = [R] [T^*] [\vec{u}^*] = [R] [T^*] [R]^T [\vec{u}] \quad (2.4.9)$$

Comparando esta última expresión con la (2.4.5) se obtiene la relación que buscábamos, es decir, la relación que existe entre las matrices de tensiones que definen el estado tensional en los puntos de un prisma mecánico, referidas a sistemas de referencia distintos.

$$[T] = [R] [T^*] [R]^T \quad \text{o bien} \quad [T^*] = [R]^T [T] [R] \quad (2.4.10)$$

* La demostración de las propiedades de las matrices ortogonales se hará en el Epígrafe 3.2.

2.5. Tensiones y direcciones principales

Aplicando la expresión (2.2.8) se obtiene, en un punto P , el vector tensión correspondiente a la orientación definida por el vector unitario \vec{u} . Cabe preguntarnos si existirá algún plano tal que su vector tensión sea perpendicular a él. Si existe, se tendrá que verificar

$$[T][\vec{u}] = \sigma [\vec{u}] \quad (2.5.1)$$

o bien, pasando al primer miembro

$$[T - \sigma I][\vec{u}] = [\vec{0}] \quad (2.5.2)$$

siendo $[I]$ la matriz unidad y σ un escalar.

Esta ecuación matricial da lugar a un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} (\sigma_{nx} - \sigma) \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{zx} \gamma = 0 \\ \tau_{xy} \alpha + (\sigma_{ny} - \sigma) \beta + \tau_{yz} \gamma = 0 \\ \tau_{zx} \alpha + \tau_{yz} \beta + (\sigma_{nz} - \sigma) \gamma = 0 \end{cases} \quad (2.5.3)$$

cuya condición de compatibilidad es:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{nx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.4)$$

determinante que desarrollado es una ecuación cúbica en σ llamada *ecuación característica o secular*. Las raíces de esta ecuación, que no son otra cosa que los valores propios de la matriz $[T]$, reciben el nombre de *tensiones principales*, y las direcciones correspondientes *direcciones principales*.

Los valores de las tensiones principales son independientes del sistema de referencia adoptado. Quiere esto decir que las raíces de la ecuación característica son invariantes. Al ser constante el coeficiente de σ^3 , también lo serán los restantes coeficientes.

Como la ecuación se puede poner en la forma

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \quad (2.5.5)$$

se deducen los siguientes invariantes:

El primero

$$I_1 = \sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz} \quad (2.5.6)$$

llamado *invariante lineal* o *tensión cúbica* indica que en un punto interior a un sólido elástico la suma de las tensiones normales según las direcciones de los ejes de cualquier triedro trirectángulo, es constante.

El segundo

$$I_2 = \sigma_{nx} \sigma_{ny} + \sigma_{ny} \sigma_{nz} + \sigma_{nz} \sigma_{nx} - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 \quad (2.5.7)$$

se denomina *invariante cuadrático*.

El tercero

$$I_3 = |T| \quad (2.5.8)$$

nos indica que el determinante de la matriz de tensiones, en cada punto del sistema elástico, es otro invariante.

Al ser de tercer grado la ecuación característica, se puede asegurar la existencia como mínimo de una raíz real σ_1 , es decir, existe por lo menos una dirección principal de la matriz $[T]$.

Supongamos realizado un cambio de coordenadas de tal forma que tomemos la dirección principal correspondiente a la raíz real σ_1 como eje Ox (Fig. 2.7). En este caso la matriz toma la forma

$$[T'] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{ny} & \tau'_{yz} \\ 0 & \tau'_{yz} & \sigma'_{nz} \end{pmatrix} \quad (2.5.9)$$

ya que al multiplicar la matriz $[T']$ por el vector unitario en la dirección de Ox , el vector tensión que resulta tiene la misma dirección (puesto que es principal) y de módulo σ_1 .

Las tres raíces de la ecuación característica:

$$|T' - \sigma I| = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{ny} - \sigma & \tau'_{yz} \\ 0 & \tau'_{yz} & \sigma'_{nz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.10)$$

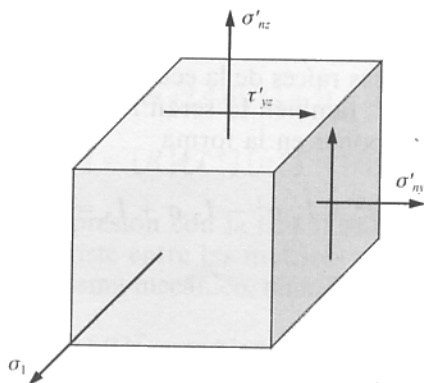


Figura 2.7.

son invariantes. Una de ellas es $\sigma = \sigma_1$, que ya conocíamos. Las otras dos son las de la ecuación de segundo grado

$$\sigma^2 - (\sigma'_{ny} + \sigma'_{nz}) \sigma + \sigma'_{ny} \sigma'_{nz} - \tau'^2_{yz} = 0 \quad (2.5.11)$$

que son reales, ya que su discriminante es siempre mayor o igual a cero.

$$(\sigma'_{ny} + \sigma'_{nz})^2 - 4 (\sigma'_{ny} \sigma'_{nz} - \tau'^2_{yz}) = (\sigma'_{ny} - \sigma'_{nz})^2 + 4 \tau'^2_{yz} \geq 0 \quad (2.5.12)$$

Queda demostrado con esto que en todo punto interior de un sólido elástico existen, si el determinante de la matriz de tensiones es distinto de cero, tres direcciones principales. En los planos perpendiculares a estas direcciones los vectores tensión correspondientes sólo tienen componente normal, careciendo, por consiguiente, de componente tangencial.

Las tensiones principales son los valores propios o autovalores de la matriz de tensiones y las direcciones principales las definidas por los autovectores de dicha matriz.

Veamos que las tres direcciones principales son ortogonales entre sí. En efecto, consideremos dos raíces σ_1 y σ_2 de la ecuación característica. Sean \vec{u}_1 y \vec{u}_2 los dos vectores que definen las dos direcciones principales correspondientes

$$\begin{aligned} [T] [\vec{u}_1] &= \sigma_1 [\vec{u}_1] \\ [T] [\vec{u}_2] &= \sigma_2 [\vec{u}_2] \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Multiplicando escalarmente por \vec{u}_2 la primera ecuación, por \vec{u}_1 la segunda y restando miembro a miembro, se tiene

$$[\vec{u}_2]^T [T] [\vec{u}_1] - [\vec{u}_1]^T [T] [\vec{u}_2] = [\vec{u}_2]^T \sigma_1 [\vec{u}_1] - [\vec{u}_1]^T \sigma_2 [\vec{u}_2] \quad (2.5.14)$$

en donde el superíndice T indica matriz traspuesta.

Por la propiedad distributiva del producto escalar de dos vectores

$$[\vec{u}_2]^T [T] [\vec{u}_1] = ([T] [\vec{u}_1])^T [\vec{u}_2] = [\vec{u}_1]^T [T]^T [\vec{u}_2] \quad (2.5.15)$$

Al ser la matriz de tensiones simétrica se verifica $[T] = [T]^T$ y, por tanto, el primer miembro de (2.5.14) es nulo.

Basándonos en la misma propiedad del producto escalar, el segundo miembro se puede expresar así

$$0 = (\sigma_1 - \sigma_2) \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \quad (2.5.16)$$

Como, en general, las dos raíces σ_1 y σ_2 serán diferentes, se deduce de esta expresión que

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \quad (2.5.17)$$

es decir, las direcciones principales forman un triedro trirrectángulo.

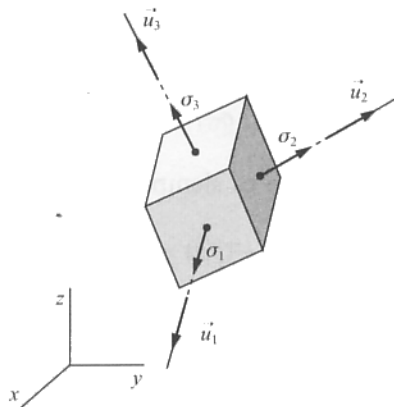


Figura 2.8.

Tomando como sistema de referencia el triedro correspondiente a las direcciones principales, la matriz de tensiones se reduce a su forma diagonal

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.5.18)$$

en la que los términos de la diagonal principal son precisamente los valores de las tensiones principales.

2.6. Elipsoide de tensiones de Lamé

Sea P un punto interior de un sólido elástico. Veamos cuál es el lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión correspondientes a todos los planos que pasan por dicho punto.

Para el cálculo de este lugar tomaremos un triedro de referencia con origen en el punto y ejes coincidentes con las direcciones principales. Llamemos x, y, z las coordenadas del extremo del vector tensión $\vec{\sigma}$ correspondiente a una dirección $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, que no son otra cosa que las componentes de $\vec{\sigma}$ (Fig. 2.9a).

Si $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son las tensiones principales, en virtud de (2.2.7) y (2.5.18) podemos poner

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (2.6.1)$$

de donde:

$$x = \sigma_1 \alpha \quad ; \quad y = \sigma_2 \beta \quad , \quad z = \sigma_3 \gamma \quad (2.6.2)$$

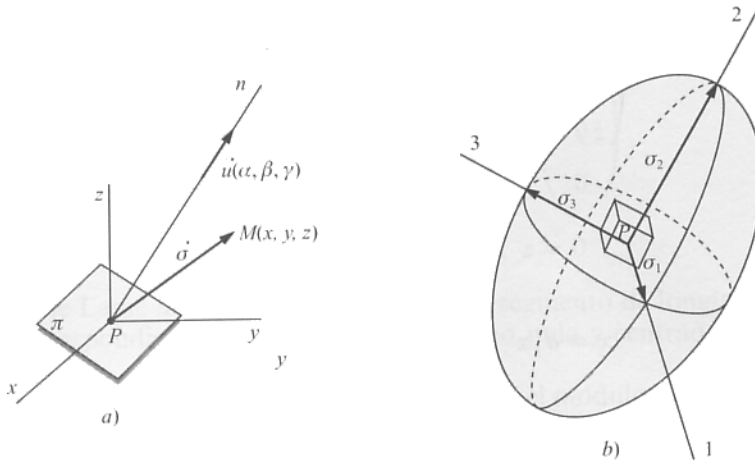


Figura 2.9.

Eliminando α, β, γ entre estas ecuaciones y la relación $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, se obtiene

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (2.6.3)$$

que indica que el lugar geométrico buscado es un elipsoide que se denomina *elipsoide de tensiones* o *elipsoide de Lamé*, cuyos ejes son coincidentes con las direcciones principales (Fig. 2.9b).

Vemos que los invariantes están relacionados con el elipsoide de Lamé. I_1 es igual a la suma de los tres semiejes, I_2 es proporcional a la suma de las áreas de las tres elipses que intercepta el elipsoide con los planos principales, e I_3 es proporcional al volumen del elipsoide.

Son de interés algunos casos particulares que se pueden presentar, según los valores relativos de las tensiones principales.

Si son dos iguales, por ejemplo $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$, el elipsoide es de revolución. En este caso está definida la dirección principal correspondiente a la tensión principal σ_3 , que coincide con el eje de revolución del elipsoide, pero las otras dos están indeterminadas: cualquier dirección situada en el plano normal al eje de revolución es dirección principal.

Si las tres son iguales, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, el elipsoide se reduce a una esfera: cualquier dirección es dirección principal. Por consiguiente, cualquier terna de ejes trirrectangulares constituye un sistema de ejes principales.

También presentan interés los casos en los que se anulan una o dos tensiones principales. Veamos cómo degenera en cada caso el elipsoide de Lamé.

Si una tensión principal es nula, por ejemplo, $\sigma_3 = 0$, las coordenadas (x, y, z) del extremo del vector $\vec{\sigma}$ correspondiente a un plano cuyo vector normal es $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, verificarán:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \alpha \\ \sigma_2 \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6.4)$$

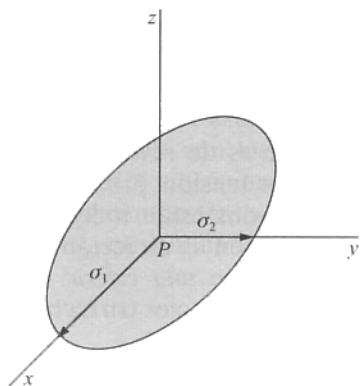
es decir:

$$x = \sigma_1 \alpha \quad ; \quad y = \sigma_2 \beta \quad ; \quad z = 0$$

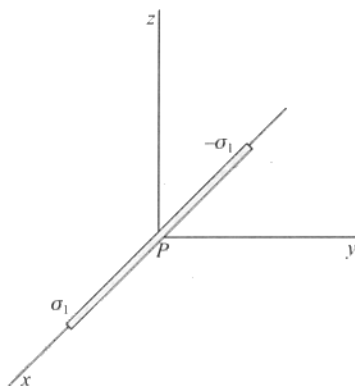
Ahora, es posible eliminar α y β entre estas ecuaciones y la que expresa que el vector \vec{u} es unitario, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, quedando:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1 - \gamma^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.6.5)$$

que representa a una elipse de longitudes de semiejes $\sigma_1 \sqrt{1 - \gamma^2}$ y $\sigma_2 \sqrt{1 - \gamma^2}$ en el plano $z = 0$. Como γ^2 varía entre 0 y 1, el elipsoide de Lamé degenera en una superficie plana situada en el plano correspondiente a la tensión principal nula y limitada por la elipse que tiene de longitudes de semiejes los valores de las dos tensiones principales no nulas. Se trata de una curva de las llamadas curvas de Peano, que son aquellas que llenan un área (Fig. 2.10a).



a)



b)

Figura 2.10.

En el caso que se anulen dos tensiones principales, por ejemplo, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, se tendrá:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6.6)$$

es decir:

$$x = \sigma_1 \alpha \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0$$

El elipsoide de Lamé degenera en este caso en un segmento de longitud $2\sigma_1$ coincidente con el eje correspondiente a la tensión principal no nula y centrado respecto del punto P (Fig. 2.10b).

Con el elipsoide de Lamé vemos cómo se distribuye el módulo del vector tensión en un punto P para los planos pertenecientes a la radiación de vértice dicho punto. Pero no nos es posible averiguar el signo que tiene, debido a ser P centro de simetría, ni siquiera el plano al que corresponde cada $\vec{\sigma}$.

2.7. Cuádricas indicatrices de tensiones

Para cada plano π que pasa por un punto P de un sólido elástico consideremos un punto M sobre la normal exterior, tal que

$$\vec{PM} = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_n|}} \cdot \vec{u} \quad (2.7.1)$$

Veamos cuál es el lugar geométrico de M al variar \vec{u} . Tomemos un triedro de referencia con origen en P y de ejes las direcciones principales.

La tensión normal para un plano π definido por u (α, β, γ) tiene por expresión:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = [\vec{\sigma}]^T [\vec{u}] = \\ &= (\sigma_1 \alpha \quad \sigma_2 \beta \quad \sigma_3 \gamma) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2 \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

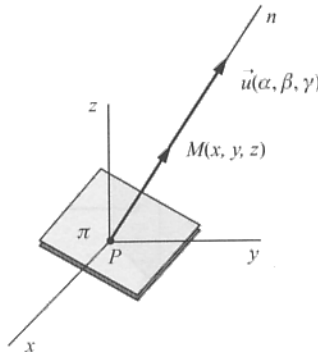


Figura 2.11.

Las coordenadas de $M(x, y, z)$ son:

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{|\sigma_n|}} ; \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{|\sigma_n|}} ; \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad (2.7.3)$$

Eliminando α, β, γ entre (2.7.2) y (2.7.3) se tiene

$$\sigma_n = \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2$$

de donde:

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \frac{\sigma_n}{|\sigma_n|} = c = \pm 1 \quad (2.7.4)$$

Esta ecuación nos indica que el lugar de M se compone de dos cuádricas coaxiales, cuyos ejes tienen precisamente las direcciones principales, que llamaremos *cuádricas indicatrices de tensiones*.

Discutamos la naturaleza de estas cuádricas según los signos de las tensiones principales, considerando en lo que sigue que las tensiones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ están ordenadas en sentido decreciente, es decir, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

1.º Las tres tensiones principales son positivas (Fig. 2.12).

Para: $c = +1$ se tiene un elipsoide real.

Para: $c = -1$ se tiene un elipsoide imaginario.

Las cuádricas indicatrices se reducen, por tanto, a un elipsoide real. Al ser siempre $c = +1$ se deduce que la tensión normal para cualquier plano π es positiva, por lo que el sólido elástico estará sometido, en P , a tracción en todas las direcciones.

2.º Dos tensiones principales son positivas y una negativa (Fig. 2.13).

Para $c = +1$ se tiene un hiperboloide de una hoja y para $c = -1$ un hiperboloide de dos hojas.

Según los planos π , cuyas normales cortan al hiperboloide de una hoja, el sólido elástico está sometido a tracción ($\sigma_n > 0$). Por el contrario, si la normal al plano corta al hiperboloide de dos hojas el sólido elástico está sometido a compresión ($\sigma_n < 0$).

Observamos en la misma figura que el cono asintótico, de ecuación

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = 0 \quad (2.7.5)$$

divide al espacio en dos zonas tales que para los planos π cuyas normales son exteriores a este cono el sólido elástico está sometido a tracción, y si son interiores, a compresión.

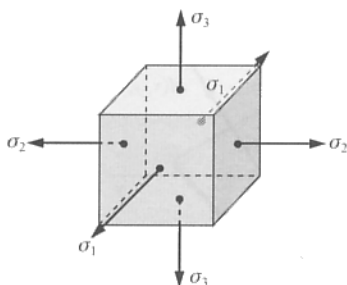


Figura 2.12.

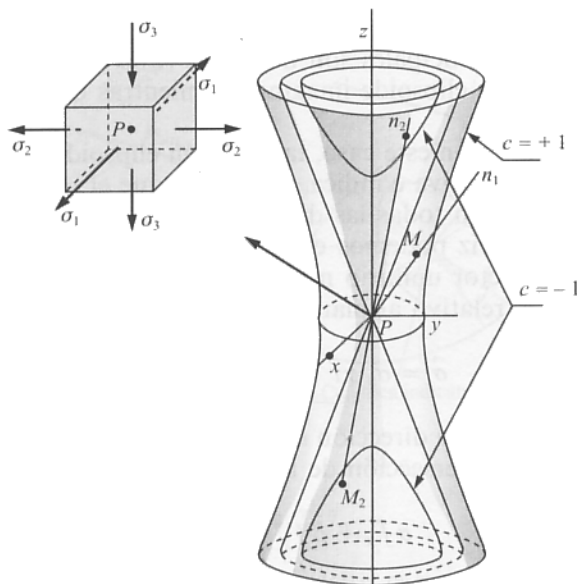


Figura 2.13.

Para los planos cuyas normales coincidan con las generatrices del cono asintótico la tensión normal es nula y, según esos planos, el sólido está sometido a cortadura pura.

3.º Una tensión principal es positiva y dos negativas (Fig. 2.14).

Para $c = +1$ se tiene un hiperboloide de dos hojas y para $c = -1$ un hiperboloide de una hoja.

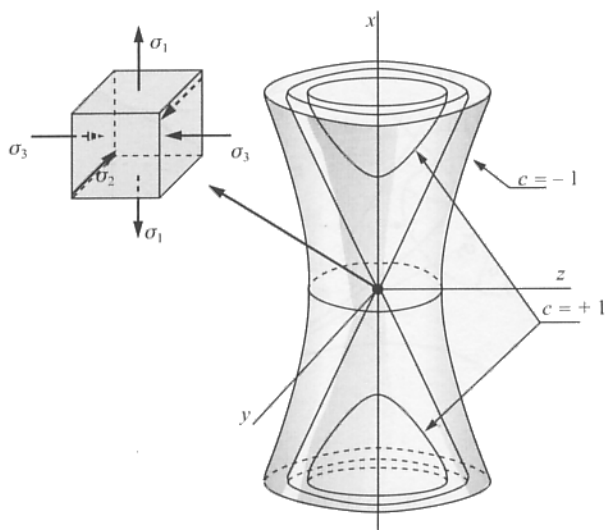


Figura 2.14.

La discusión es análoga al caso anterior.

4.º Las tres tensiones principales son negativas (Fig. 2.15).

Para $c = +1$ se tiene un elipsoide imaginario, mientras que para $c = -1$ se tiene un elipsoide real.

La cuádrlica indicatriz es, en este caso, también un elipsoide real pero se diferencia del primer caso en que σ_n es negativa e indica, por tanto, que el sólido elástico está sometido en ese punto a compresión en todas las direcciones.

Con la cuádrlica indicatriz podemos calcular el vector tensión que corresponde a un plano π definido por el vector unitario normal $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

En efecto, el vector $\vec{\sigma}$ relativo al plano π es

$$\vec{\sigma} = \sigma_1 \alpha \vec{i} + \sigma_2 \beta \vec{j} + \sigma_3 \gamma \vec{k} \quad (2.7.6)$$

El plano π' conjugado con la dirección \vec{u} respecto a la cuádrlica indicatriz es paralelo al tangente en el punto A de intersección de \vec{u} con la cuádrlica y tiene por ecuación

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0 \quad (2.7.7)$$

es decir,

$$\sigma_1 \alpha x + \sigma_2 \beta y + \sigma_3 \gamma z = 0 \quad (2.7.8)$$

Observando las expresiones (2.7.6) y (2.7.8) se deduce que $\vec{\sigma}$ es perpendicular a π' .

Basándonos en esta particularidad podemos obtener gráficamente la tensión $\vec{\sigma}$ que corresponde a un plano π , o bien el plano π que corresponde a una tensión $\vec{\sigma}$. En las Figuras 2.17 y 2.18 se resuelve este problema en los casos que se indican, según el signo de las tensiones principales*. El plano que contiene estas figuras es, en cada caso, el que pasa por P y es perpendicular a π y a π' , es decir, el plano que contiene a \vec{u} y a $\vec{\sigma}$.

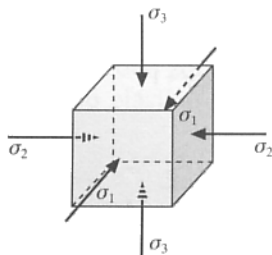


Figura 2.15.

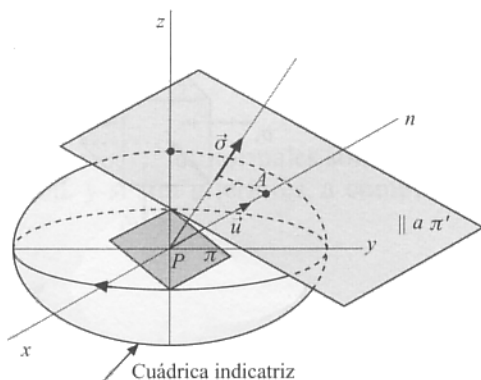


Figura 2.16.

* Dibuje el lector las figuras análogas correspondientes al caso $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 < 0$; $\sigma_3 < 0$.

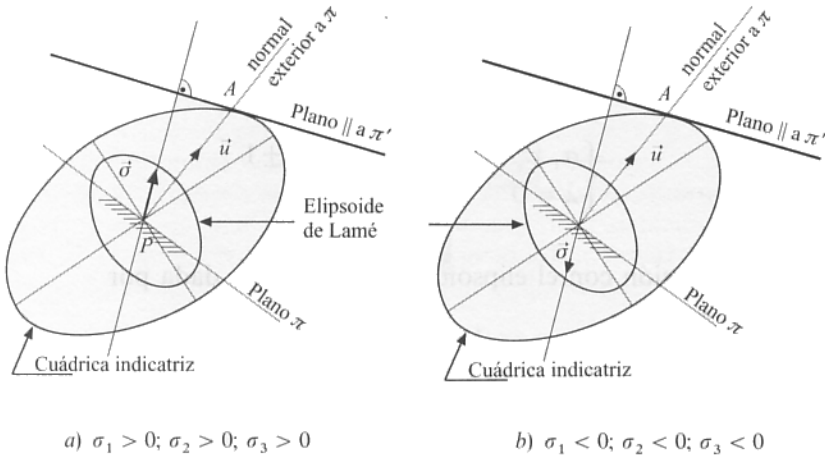


Figura 2.17.

Analíticamente, este plano λ tendrá como vector característico el producto vectorial

$$\vec{u} \times \vec{\sigma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \sigma_1 \alpha & \sigma_2 \beta & \sigma_3 \gamma \end{vmatrix} = (\sigma_3 - \sigma_2) \beta \gamma \vec{i} + (\sigma_1 - \sigma_3) \gamma \alpha \vec{j} + (\sigma_2 - \sigma_1) \alpha \beta \vec{k}$$

por lo que su ecuación será

$$\lambda \equiv (\sigma_3 - \sigma_2) \beta \gamma x + (\sigma_1 - \sigma_3) \gamma \alpha y + (\sigma_2 - \sigma_1) \alpha \beta z = 0 \quad (2.7.9)$$

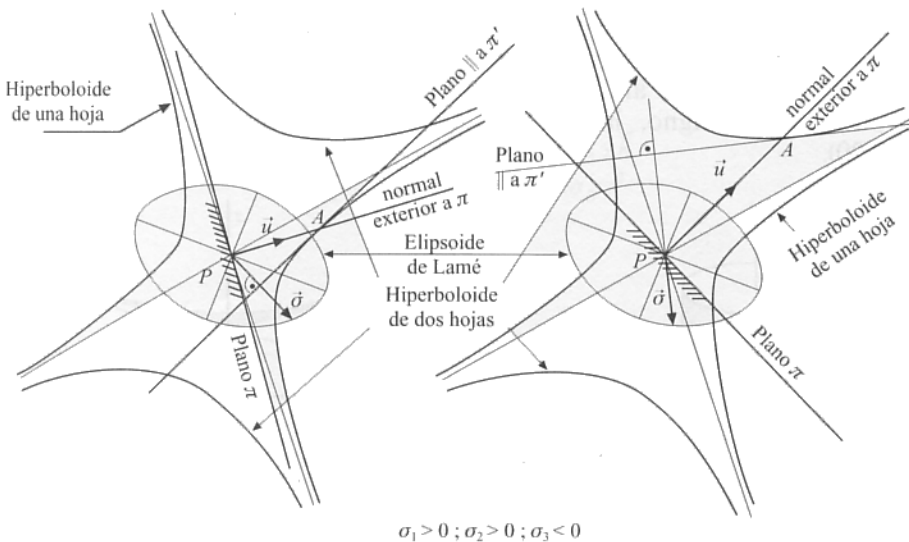


Figura 2.18.

Pues bien, las representaciones gráficas que se consideran (véanse las Figs. 2.17 y 2.18) se hacen en este plano. Su intersección con las cuádricas indicatrices vendrán dadas por el sistema

$$\begin{cases} \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \pm 1 \\ \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.7.10)$$

mientras que la intersección con el elipsoide de Lamé viene dada por

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.7.11)$$

Es evidente que el interés de la resolución gráfica descrita, para obtener el vector tensión correspondiente a un determinado plano π , no pasaría de tener un interés meramente académico si no fuera por la facilidad de obtener las cónicas definidas por los sistemas (2.7.10) y (2.7.11) mediante ordenador.

Cuando se anula alguna de las tensiones principales, las cuádricas indicatrices degeneran. Estudiemos los casos que se pueden presentar.

1.º Si se anula una tensión principal, por ejemplo σ_3 , la ecuación de las cuádricas indicatrices se reduce a la forma

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 = \pm 1 \quad (2.7.12)$$

Si las dos tensiones principales no nulas tienen el mismo signo, esta ecuación representa un cilindro elíptico (Fig. 2.19), que es real para $+1$ cuando las dos tensiones son positivas, o para -1 cuando ambas son negativas.

Si son de distinto signo, la ecuación (2.7.12) representa dos cilindros hiperbólicos (Fig. 2.20).

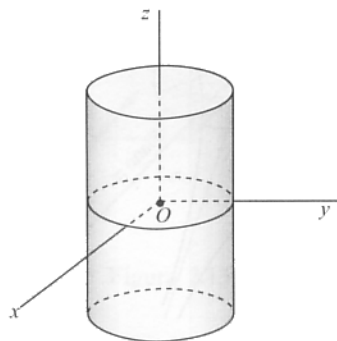


Figura 2.19.

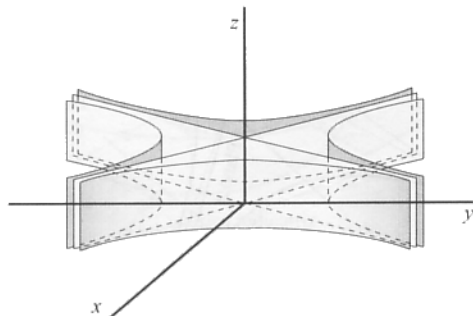


Figura 2.20.

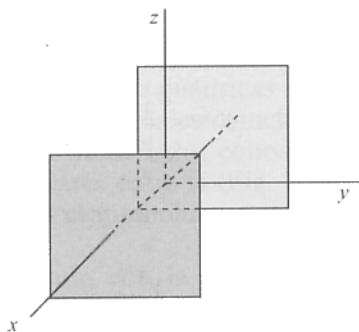


Figura 2.21.

2.º Si se anulan dos tensiones principales, la ecuación de las cuádras indicatrices se reduce a la forma

$$\sigma_1 x^2 = \pm 1 \quad (2.7.13)$$

que representa dos planos paralelos al plano yz (Fig. 2.21) de ecuaciones

$$(\sqrt{\sigma_1} x + 1)(\sqrt{\sigma_1} x - 1) = 0 \quad (2.7.14)$$

2.8. Cuádras directrices de tensiones

Veamos ahora cuál es el lugar geométrico de los puntos M (Fig. 2.22) tales que

$$\vec{PM} = \frac{\vec{\sigma}}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad (2.8.1)$$

Tomando como triedro de referencia el de ejes coincidentes con las direcciones principales, tenemos las expresiones ya conocidas

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \sigma_1 \alpha \vec{i} + \sigma_2 \beta \vec{j} + \sigma_3 \gamma \vec{k} \\ \sigma_n &= \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2 \end{aligned}$$

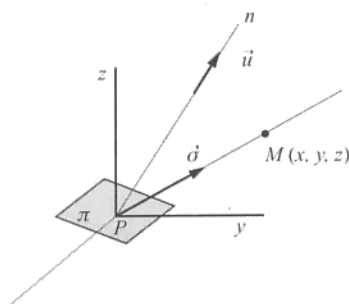


Figura 2.22.

Si (x, y, z) son las coordenadas de M

$$x = \frac{\sigma_1 \alpha}{\sqrt{|\sigma_n|}} ; \quad y = \frac{\sigma_2 \beta}{\sqrt{|\sigma_n|}} ; \quad z = \frac{\sigma_3 \gamma}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad (2.8.2)$$

Eliminando α, β, γ entre estas tres ecuaciones y la que da σ_n , se tiene

$$\sigma_n = \sigma_1 \frac{x^2}{\sigma_1^2} |\sigma_n| + \sigma_2 \frac{y^2}{\sigma_2^2} |\sigma_n| + \sigma_3 \frac{z^2}{\sigma_3^2} |\sigma_n|$$

de donde el lugar buscado tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} + \frac{z^2}{\sigma_3} = c = \pm 1 \quad (2.8.3)$$

que representa dos cuádricas coaxiales cuyas direcciones de los ejes comunes son las direcciones principales y que denominaremos *cuádricas directrices de tensiones*.

Por análogo razonamiento al seguido en la discusión de la naturaleza de las cuádricas indicatrices, podemos afirmar que las cuádricas directrices serán:

- a) Un elipsoide real y otro imaginario, si las tres tensiones principales tienen el mismo signo.
- b) Un hiperboloide de una hoja y otro de dos hojas, ambos con cono asintótico común, si dos tensiones tienen el mismo signo y la restante el opuesto.

Las conclusiones a que se llega en los casos en que las tres tensiones principales tengan el mismo signo son las mismas que las obtenidas en el estudio de las cuádricas indicatrices, puesto que en ambos casos las cuádricas directrices se reducen a un elipsoide real para $c = +1$, si son positivas las tres tensiones principales, o bien $c = -1$ cuando son negativas. En el primer caso se deduce que para todos los planos π de la radiación de vértice el punto que estamos considerando $\sigma_n > 0$, es decir, el prisma mecánico trabaja, en ese punto, a tracción en todas las direcciones. Si $c = -1$, $\sigma_n < 0$, el sólido elástico, por el contrario, trabaja a compresión.

Cuando las tensiones principales tienen distinto signo, los dos hiperboloides, uno de una hoja y el otro de dos, admiten el cono asintótico común.

$$\frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} + \frac{z^2}{\sigma_3} = 0 \quad (2.8.4)$$

Ahora, la interpretación física es la siguiente: aquellos planos a los que corresponden unos vectores tensión cuya línea de acción corte al hiperboloide que se obtiene para $c = +1$, trabajan a tracción. Si, por el contrario, la línea de acción corta al hiperboloide $c = -1$, en los planos correspondientes el sólido elástico trabaja a compresión.

Si la línea de acción de $\vec{\sigma}$ coincide con una generatriz del cono asintótico, el plano correspondiente trabaja a cortadura pura.

Como, según vimos en el estudio de las cuádricas indicatrices, los planos que trabajan a cortadura pura son aquellos cuyas normales coinciden con las generatrices de su cono asintótico, se deduce que las generatrices de los conos asintóticos de las cuádricas indicatrices y directrices son perpendiculares entre sí (Fig. 2.23).

Con las cuádricas directrices podemos obtener el plano π que corresponde a un vector $\vec{\sigma}$.

En efecto, el plano π' conjugado con la dirección de $\vec{\sigma}$ respecto de las cuádricas directrices tiene de ecuación:

$$\sigma_1 \alpha f'_x + \sigma_2 \beta f'_y + \sigma_3 \gamma f'_z = 0 \quad (2.8.5)$$

en donde f es la función (2.8.3) que representa dichas cuádricas.

Sustituyendo la expresión de las derivadas f' se tiene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad (2.8.6)$$

Este resultado indica que la tensión $\vec{\sigma}$ corresponde a un plano paralelo al plano π' tangente a la superficie directriz en el punto B en que es cortada por la línea de acción de dicha tensión $\vec{\sigma}$.

En la Figura 2.24 se indica cómo se procede en los casos de tener las tres tensiones principales el mismo o distinto signo.

2.9. Representación gráfica plana de las componentes intrínsecas del vector tensión en un estado tensional tridimensional.

Círculos de Mohr

Los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos que pasan por un punto son susceptibles de una representación gráfica plana por medio de sus componentes intrínsecas.

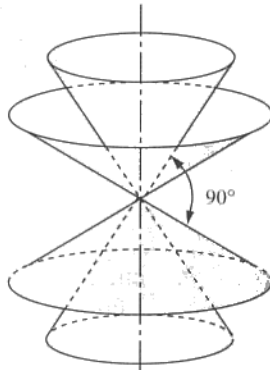


Figura 2.23.

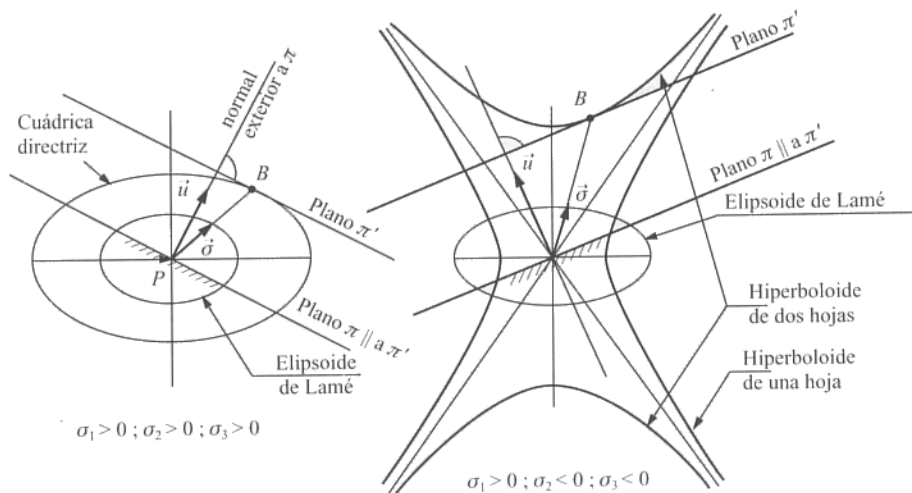


Figura 2.24.

Según hemos visto, la tensión sobre un plano definido por el vector \vec{u} (α, β, γ) referida a las direcciones principales es

$$\vec{\sigma} = \sigma_1 \alpha \vec{i} + \sigma_2 \beta \vec{j} + \sigma_3 \gamma \vec{k}$$

De aquí se deduce:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \beta^2 + \sigma_3^2 \gamma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 \\ \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2 &= \sigma_n \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

y según sabemos

Este sistema de ecuaciones nos permite estudiar la variación de las componentes normal y tangencial del vector tensión. En efecto, si hacemos $\alpha = \text{constante}$, lo que equivale a hacer variar la normal \vec{u} según generatrices de conos de revolución de eje Px podemos eliminar β^2 y γ^2 en el sistema de ecuaciones anterior, aplicando la condición de compatibilidad según el teorema de Rouché-Frobenius:

$$\begin{vmatrix} \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_1^2 \alpha^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_n - \sigma_1 \alpha^2 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 - \alpha^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9.1)$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna y dividiendo por $(\sigma_2 - \sigma_3)$ se obtiene la ecuación de una familia de circunferencias concéntricas que designaremos por (c_1) .

$$(c_1) \quad \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2 \sigma_3 + \alpha^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \quad (2.9.2)$$

Estas circunferencias tienen, por tanto, su centro común en el punto de coordenadas $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$, referidas a un sistema cartesiano rectangular en cuyo eje de abscisas se representan valores de σ_n y en el eje de ordenadas los correspondientes a τ .

Para $\alpha = 0$ se obtiene:

$$(C_1) \quad \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2 \sigma_3 = 0 \quad (2.9.3)$$

circunferencia que corta al eje σ_n en dos puntos diametralmente opuestos de abscisas σ_2 y σ_3 , respectivamente. En este caso la normal \vec{u} se mueve en el plano principal yPz .

Procediendo de una forma análoga, eliminando α^2 y γ^2 , para $\beta = \text{constante}$, se tiene:

$$(c_2) \quad \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1 \sigma_3 + \beta^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3) = 0 \quad (2.9.4)$$

familia de circunferencias concéntricas de centro $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$, que para $\beta = 0$, es decir, moviéndose \vec{u} en el plano principal xPz , se reduce a:

$$(C_2) \quad \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1 \sigma_3 = 0 \quad (2.9.5)$$

circunferencia que corta al eje σ_n en puntos de abscisas σ_1 y σ_3 .

Finalmente, haciendo $\gamma = \text{constante}$, eliminando α^2 y β^2 se llega a:

$$(c_3) \quad \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2 + \gamma^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) = 0 \quad (2.9.6)$$

ecuación asimismo de otra familia de circunferencias con centro común en el punto $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$, que para $\gamma = 0$, es decir, moviéndose \vec{u} en el plano xPy , se reduce a:

$$(C_3) \quad \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2 = 0 \quad (2.9.7)$$

Suponiendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, hipótesis que no resta generalidad a nuestro estudio, podemos representar gráficamente en el plano (σ_n, τ) las componentes normal y tangencial de la tensión para cualquier orientación (Fig. 2.25).

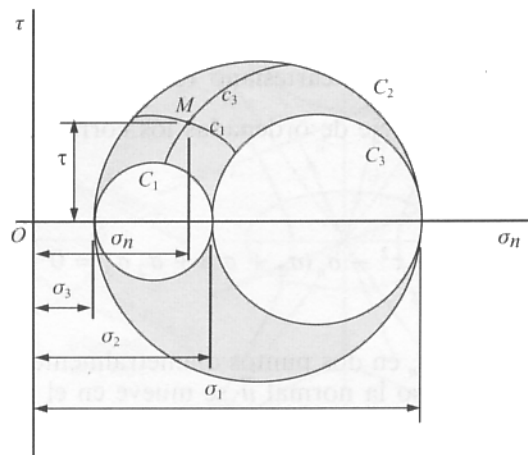


Figura 2.25.

Los tres círculos C_i ($i = 1, 2, 3$) se denominan *círculos fundamentales de Mohr*.

Veamos que en esta representación gráfica el punto M representativo de la tensión para una determinada orientación de las infinitas que se pueden considerar, pertenece al área sombreada de la Figura 2.25, es decir, que este punto es interior al círculo de Mohr mayor y exterior a los dos menores.

En efecto, la expresión (2.9.2) se puede poner en la forma

$$\left[\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \right] = -\alpha^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.9.8)$$

en donde lo contenido en el interior del corchete representa la diferencia de cuadrados de la distancia de M al centro de C_1 y de su radio, o sea, la potencia de M respecto a C_1 .

Como hemos supuesto $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$,

$$-\alpha^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2) > 0 \quad (2.9.9)$$

la potencia es positiva y M es exterior a C_1 .

Análogamente

$$-\beta^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0 \quad (2.9.10)$$

La potencia de M respecto a C_2 es negativa y, por tanto, M es interior a este círculo. De la misma forma:

$$-\gamma^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) > 0 \quad (2.9.11)$$

la potencia de M respecto a C_3 es positiva, lo que indica que M es exterior a C_3 .

Queda demostrado, pues, que el punto M tiene que pertenecer al área sombreada de la figura.

Por tanto, fijado un punto M , veamos cómo vienen representados en el diagrama de Mohr los parámetros que definen la orientación del plano π correspondiente.

Consideremos el punto H de intersección de la circunferencia c_1 que pasa por M con C_2 (Fig. 2.26). Este punto tiene la misma potencia que M respecto de C_1 , por pertenecer ambos a una circunferencia concéntrica con ella.

Según (2.9.9) la potencia de M respecto a C_1 tiene por expresión

$$P_1 = -\alpha^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.9.12)$$

Por otra parte, podemos expresar esta potencia en la forma siguiente:

$$P_1 = \overline{HN} \cdot \overline{HF} = \overline{IE} \cdot \overline{HF} = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \hat{\alpha} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos \hat{\alpha} \quad (2.9.13)$$

siendo $\hat{\alpha}$ el ángulo indicado en la Figura 2.26.

Comparando estas dos expresiones se deduce

$$\cos \hat{\alpha} = \pm \alpha \quad (2.9.14)$$

es decir, $\hat{\alpha}$ es el ángulo que forma con la dirección principal correspondiente a la tensión σ_1 la normal al plano cuya tensión viene representada por el punto M en el diagrama de Mohr.

Consideremos ahora el punto K de intersección de la circunferencia c_3 , que pasa por M , con C_2 .

Según hemos visto, la potencia de K respecto de la circunferencia C_3 es

$$P_3 = -\gamma^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) \quad (2.9.15)$$

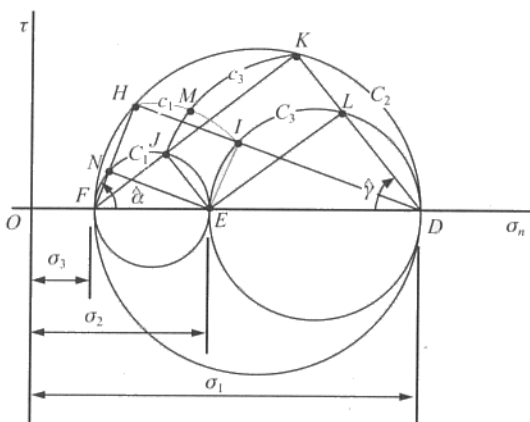


Figura 2.26.

o también

$$P_3 = \overline{KL} \cdot \overline{KD} = \overline{JE} \cdot \overline{KD} = (\sigma_2 - \sigma_3) \cos \hat{\gamma} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos \hat{\gamma} \quad (2.9.16)$$

de donde

$$\cos \hat{\gamma} = \pm \gamma \quad (2.9.17)$$

es decir, el ángulo $\hat{\gamma}$ es el ángulo que forma con la dirección principal correspondiente a la tensión σ_3 la normal al plano cuya tensión viene representada por el punto M en el diagrama de Mohr.

También podemos obtener mediante la representación plana de Mohr el ángulo $\hat{\beta}$ que la normal al plano π forma con la dirección principal correspondiente a la tensión intermedia σ_2 .

Consideremos la circunferencia c_2 que pasa por M y sean D y J los puntos de intersección con los círculos fundamentales C_1 y C_3 , respectivamente (Fig. 2.27).

La potencia de M respecto de C_2 es la misma que la del punto D y, en este caso, tiene por expresión

$$P_2 = -\beta^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.9.18)$$

Como $P_2 = -\overline{DC} \cdot \overline{DE} = -\overline{DC} \cdot \overline{BF} = -(\sigma_2 - \sigma_3) \cos \hat{\beta} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \hat{\beta}$, se deduce:

$$\cos \beta = \pm \hat{\beta} \quad (2.9.19)$$

es decir, $\hat{\beta}$ es el ángulo que la normal al plano [al que corresponde el vector tensión cuyas componentes intrínsecas son las coordenadas del punto M (σ_n, τ)] forma con la dirección correspondiente a σ_2 .

Compruebe el lector que obtenemos también el ángulo $\hat{\beta}$ uniendo el punto J con el punto A , es decir, $\lambda = \hat{\beta}$.

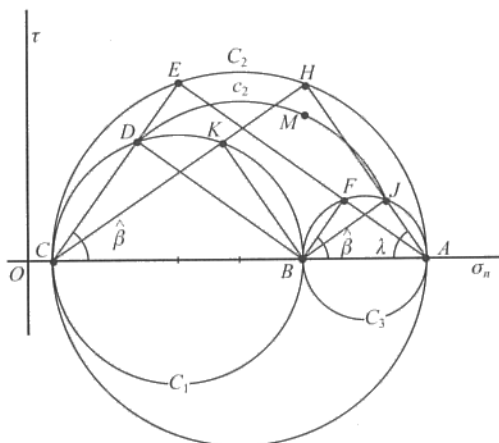


Figura 2.27.

Vemos, por consiguiente, que conocido el punto M cuyas coordenadas son las componentes intrínsecas de $\vec{\sigma}$, podemos obtener gráficamente los ángulos que la normal al plano correspondiente forma con las direcciones principales.

Pero los círculos de Mohr nos dan aún más información sobre el estado tensional de un sólido elástico en un punto del mismo. Por ejemplo, los puntos representativos del haz de planos que contienen al primer eje principal pertenecen a la circunferencia C_1 . Si θ es el ángulo que forma la normal exterior con el semieje principal Oy (Fig. 2.28), como \vec{u} $(0, \cos \theta, \sin \theta)$ y \vec{u}' $(0, \sin \theta, -\cos \theta)$, se tiene

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \cos \theta \\ \sigma_3 \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.9.20)$$

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (2.9.21)$$

$$\tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = \sigma_2 \cos \theta \sin \theta - \sigma_3 \cdot \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (2.9.22)$$

Se puede ver fácilmente que si M es el punto representativo en el círculo de Mohr, el ángulo que forma el radio O_1M con la dirección positiva del eje de abscisas es precisamente el doble del ángulo θ que define la orientación del plano correspondiente.

Para los planos paralelos a la segunda dirección principal (Fig. 2.29) en los que \vec{u} $(\cos \theta, 0, \sin \theta)$ \vec{u}' $(\sin \theta, 0, -\cos \theta)$, se tiene

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ 0 \\ \sigma_3 \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.9.23)$$

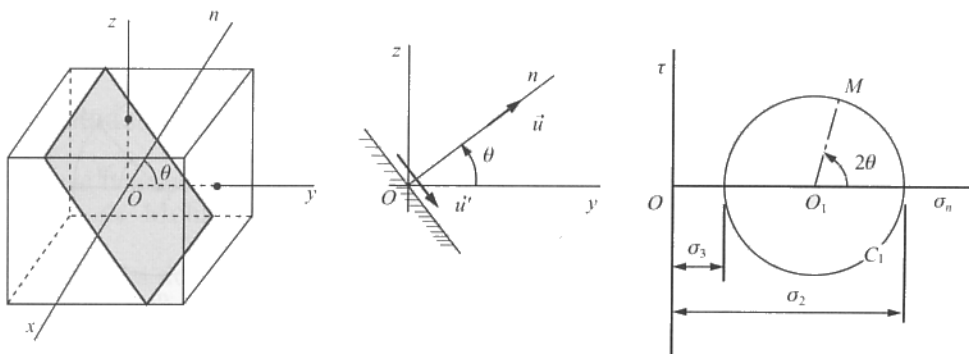


Figura 2.28.

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (2.9.24)$$

$$\tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = \sigma_1 \cos \theta \sin \theta - \sigma_2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \quad (2.9.25)$$

Análogamente, si se consideran los planos paralelos al tercer eje principal (Fig. 2.30), para los que \vec{u} ($\cos \theta$, $\sin \theta$, 0), \vec{u}' ($\sin \theta$, $-\cos \theta$, 0), se tiene:

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9.26)$$

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \quad (2.9.27)$$

$$\tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = \sigma_1 \cos \theta \sin \theta - \sigma_2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \quad (2.9.28)$$

Del mismo diagrama de Mohr se obtienen los valores de las tensiones tangenciales máximas en cada haz de planos considerado, los planos en que éstas se presentan y las tensiones normales correspondientes (Fig. 2.31).

Según se observa, la tensión tangencial máxima, en valor absoluto, es τ_2

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.9.29)$$

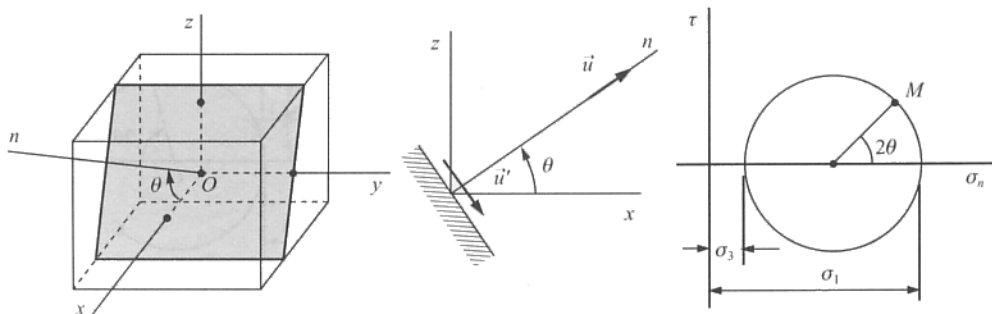


Figura 2.29.

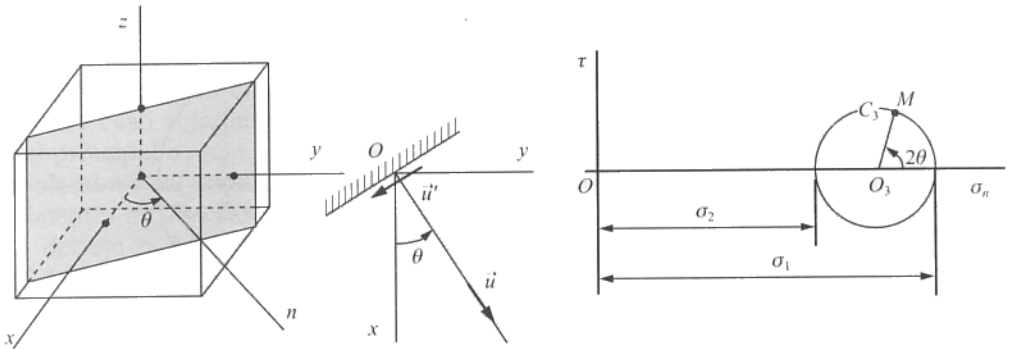


Figura 2.30.

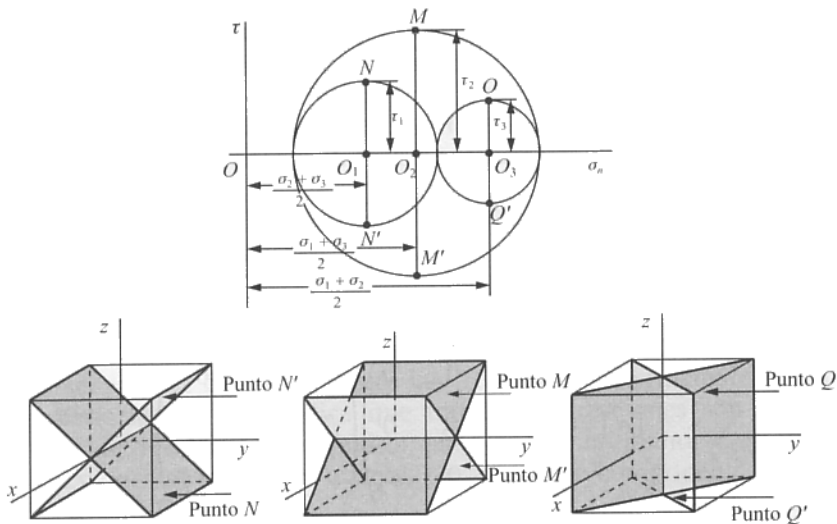


Figura 2.31.

2.10. Estados cilíndrico y esférico

Veamos qué conclusiones podemos deducir de lo expuesto en el epígrafe anterior sobre los círculos de Mohr en los casos en los que son iguales dos o las tres tensiones principales.

Si son iguales dos tensiones principales, se puede verificar: $\sigma_1 = \sigma_2$, o bien $\sigma_2 = \sigma_3$.

Si $\sigma_1 = \sigma_2$, la circunferencia C_3 se reduce a un punto y la circunferencia C_1 coincide con C_2 , es decir, el área sombreada de la Figura 2.25 se reduce a la circunferencia $C_1 \equiv C_2$ (Fig. 2.32b).

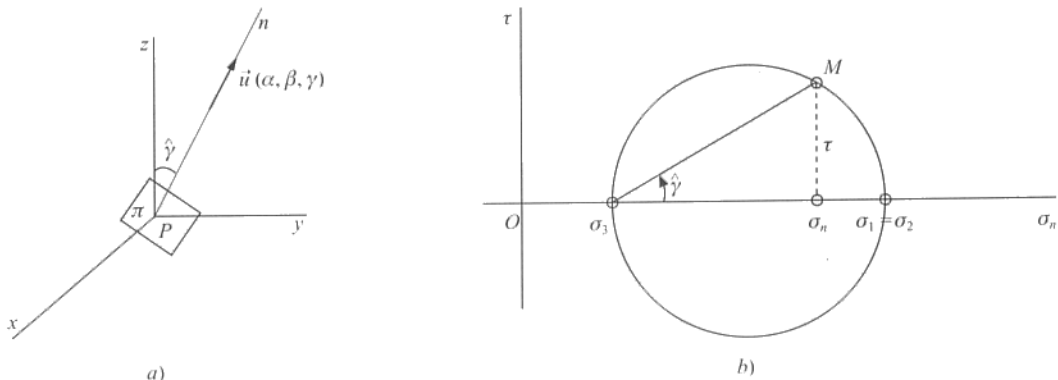


Figura 2.32.

En este caso solamente está determinada la dirección principal correspondiente a la tensión principal σ_3 (eje z). Del círculo de Mohr se deduce que las componentes intrínsecas de los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos cuyas normales forman un ángulo $\hat{\gamma}$ con el eje z , tienen los mismos valores. Gráficamente, se obtienen trazando por el punto de abscisa σ_3 una semirrecta que forma un ángulo $\hat{\gamma}$ con la dirección positiva del eje σ_n . Las coordenadas del punto M , de intersección de esta semirrecta con la circunferencia de Mohr, nos dan las componentes intrínsecas de los vectores tensión correspondientes a estos planos.

El vector tensión correspondiente a cualquier plano π está contenido en el plano que contiene al eje z y a la normal exterior a π . En efecto, tomando como eje y el perpendicular al eje z y contenido en el citado plano (Fig. 2.33), el vector tensión correspondiente al plano π sería:

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \beta \\ \sigma_3 \gamma \end{pmatrix} \quad (2.10.1)$$

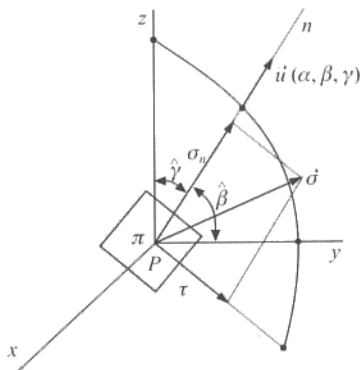


Figura 2.33.

Se observa que el vector tensión $\vec{\sigma}$ está contenido en el plano yz (Fig. 2.33), ya que se anula la componente respecto del eje x .

Si $\sigma_2 = \sigma_3$, el círculo C_1 se reduce a un punto. Ahora el área sombreada de la Figura 2.25 se reduce a la circunferencia $C_2 \equiv C_3$ (Fig. 2.34b).

En este caso solamente está determinada la dirección principal correspondiente a la tensión principal σ_1 (eje x), por lo que el parámetro determinado que define la orientación de un plano π es el ángulo $\hat{\alpha}$ que forma la normal exterior en dicho plano con el eje x . Las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente se obtendrán trazando por el punto del eje σ_n , de abscisa σ_1 , una semirrecta que forma un ángulo $\hat{\alpha}$ con dicho eje (Fig. 2.34b).

Procediendo análogamente a como lo hemos hecho en el caso anterior (cuando $\sigma_1 = \sigma_2$), se comprueba que el vector tensión correspondiente a cualquier plano π está contenido en el plano que contiene al eje x y a la normal exterior a π .

Como hemos visto, cuando dos tensiones principales son iguales los estados tensionales correspondientes presentan simetría cilíndrica en torno a la única dirección principal que está determinada. De ahí que un estado tensional de estas características se denomine *estado cilíndrico*.

Existen estados cilíndricos particulares que presentan cierto interés, como son los siguientes:

Tracción simple	:	$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;	$\sigma_1 > 0$
Compresión simple	:	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$;	$\sigma_3 < 0$
Doble tracción	:	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0$;	$\sigma_3 = 0$
Doble compresión	:	$\sigma_2 = \sigma_3 < 0$;	$\sigma_1 = 0$

Si en vez de ser iguales dos, son iguales las tres tensiones principales, el elipsoide de Lamé es una esfera, lo que nos indica que todas las direcciones son principales. Los círculos de Mohr se reducen a un punto: para cualquier plano π el vector tensión correspondiente es normal al plano y carece, por tanto, de componente tangencial. Además, su módulo es constante.

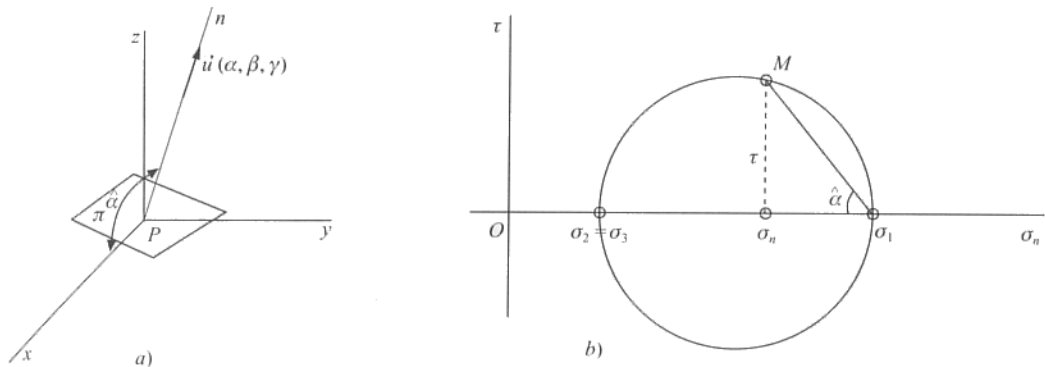


Figura 2.34.

Este estado tensional presenta simetría en torno al punto P que se considera, por lo que recibe el nombre de *estado esférico*. Si el estado en un punto es de equitracción o de equicompresión, es decir, los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos de la radiación de vértice el punto tienen dirección normal al plano y módulo constante, por analogía con el estado que existe en un cuerpo sumergido en un líquido, se le denomina también *estado hidrostático*.

Como más adelante se verá su verdadero significado, tiene interés descomponer la matriz de tensiones referida a las direcciones principales, en otras dos de la siguiente forma

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{no} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{no} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{no} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_{no} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{no} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{no} \end{pmatrix} = [T_o] + [T_d] \quad (2.10.2)$$

A la primera, $[T_o]$, que representa un estado tensional hidrostático, la denominaremos *matriz esférica de tensiones*. A la segunda, $[T_d]$, la llamaremos *matriz desviadora*.

2.11. Tensiones octaédricas

Se llaman *tensiones octaédricas* las tensiones correspondientes a los planos que forman ángulos iguales con los tres ejes principales (Fig. 2.35).

Los vectores tensión $\vec{\sigma}_0$ sobre estos planos ya se comprende, por razón de simetría, que son iguales en valor absoluto. Su norma es

$$\sigma_0^2 = + \sigma_1^2 \alpha^2 + \sigma_2^2 \beta^2 + \sigma_3^2 \gamma^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}$$

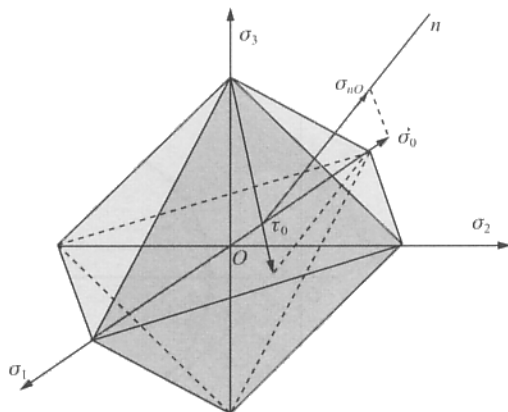


Figura 2.35.

La expresión de la tensión normal

$$\sigma_n = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2$$

aplicada a los ocho planos octaédricos

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.11.1)$$

da la *tensión normal octaédrica*

$$\sigma_{n0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.11.2)$$

La *tensión tangencial octaédrica* será

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \sqrt{\sigma_0^2 - \sigma_{n0}^2} = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

Las componentes intrínsecas de los vectores tensión correspondientes a los planos del entorno octaédrico de un punto vienen dadas por las expresiones (2.11.2) y (2.11.3). Como vemos, en todas las caras del entorno octaédrico las tensiones normales tienen el mismo valor, así como también son iguales los valores de las tensiones tangenciales.

EJERCICIOS

- 2.1. Demostrar que la proyección de un vector tensión $\vec{\sigma}$, correspondiente a un plano de normal n y vector unitario \vec{u} , sobre la normal n' de otro plano, ambos en un mismo punto P , es igual a la proyección del vector $\vec{\sigma}'$, correspondiente al plano de vector unitario \vec{u}' , sobre la normal n (teorema de Cauchy).

Sea $[T]$ la matriz de tensiones en el punto P . Los vectores tensión correspondientes a los planos de normales n y n' serán, respectivamente

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}] \quad ; \quad [\vec{\sigma}'] = [T][\vec{u}']$$

Proyectemos $\vec{\sigma}$ sobre \vec{u}' y $\vec{\sigma}'$, sobre \vec{u}

$$\begin{aligned} [\vec{\sigma}]^T [\vec{u}'] &= [\vec{u}']^T [\vec{\sigma}] = [\vec{u}']^T [T][\vec{u}] \\ [\vec{\sigma}']^T [\vec{u}] &= \{[T][\vec{u}']\}^T [\vec{u}] = [\vec{u}']^T [T][\vec{u}] \end{aligned}$$

Como $[T]$ es una matriz simétrica $[T] = [T]^T$, los segundos miembros son iguales y, por tanto,

$$\boxed{\vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = \vec{\sigma}' \cdot \vec{u}} \quad c.q.d.$$

Al mismo resultado se puede llegar considerando los vectores \vec{u} (α, β, γ) y \vec{u}' (α', β', γ'), estando sus componentes referidas a los ejes principales

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \alpha \\ \sigma_2 \beta \\ \sigma_3 \gamma \end{pmatrix}$$

$$[\vec{\sigma}'] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \alpha' \\ \sigma_2 \beta' \\ \sigma_3 \gamma' \end{pmatrix}$$

La proyección de $\vec{\sigma}$ sobre \vec{u}' es $\vec{\sigma} \cdot \vec{u}'$, mientras que la de $\vec{\sigma}'$ sobre \vec{u} es $\vec{\sigma}' \cdot \vec{u}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' &= \sigma_1 \alpha \alpha' + \sigma_2 \beta \beta' + \sigma_3 \gamma \gamma' \\ \vec{\sigma}' \cdot \vec{u} &= \sigma_1 \alpha' \alpha + \sigma_2 \beta' \beta + \sigma_3 \gamma' \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = \vec{\sigma}' \cdot \vec{u}}$$

2.2. En un punto P de un sólido elástico la matriz de tensiones referida a un triedro cartesiano $Oxyz$ es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular en el punto P el vector tensión correspondiente a un plano cuya normal exterior está definida por un vector que forma ángulos iguales de 45° con los ejes x e y , siendo positivas sus componentes.

Indicar si las tensiones principales son de tracción o de compresión.

El vector unitario \vec{u} que define la orientación del plano que se considera tiene por expresión

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$$

Como es conocida la matriz de tensiones, la tensión correspondiente a este plano es

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}]$$

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 0 \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\boxed{\vec{\sigma} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \sqrt{2} \vec{k}}$$

Las tensiones principales vienen dadas por las raíces de la ecuación característica, obtenida desarrollando el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 - \sigma & 1 & 0 \\ 1 & -1 - \sigma & 2 \\ 0 & 2 & 3 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - 4\sigma^2 - 4\sigma + 17 = 0$$

Para responder a la pregunta si las tensiones principales son de tracción o de compresión no es necesario resolver esta ecuación cúbica. Basta representar gráficamente la función $f(\sigma) = \sigma^3 - 4\sigma^2 - 4\sigma + 17$ y ver si las abscisas de sus puntos de intersección con el eje $f(\sigma) = 0$ son positivas o negativas

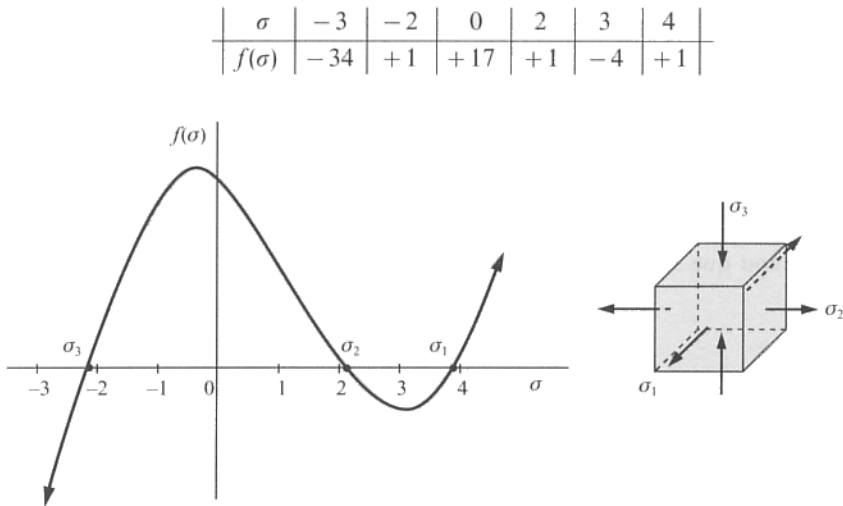


Figura E2.1.

A la vista de la gráfica se deduce:

$3 < \sigma_1 < 4$	Tracción
$2 < \sigma_2 < 3$	Tracción
$-3 < \sigma_3 < -2$	Compresión

- 2.3. Las tensiones principales en un punto P de un sólido elástico, referidas a un sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$ y expresadas en MPa son:

$$\vec{\sigma}_1 = \frac{50}{3} (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{\sigma}_2 = 20 \vec{i} - 10\vec{j} - 20\vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_3 = -\frac{20}{3} (\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

siendo $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Calcular la tensión correspondiente a un plano cuya normal exterior forma ángulos agudos iguales con los semiejes positivos del triedro $Oxyz$.

Los vectores unitarios que definen los semiejes positivos en las direcciones principales son:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{3} (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{3} (2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \frac{1}{3} (-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$$

de donde se deduce que las tres tensiones principales son de tracción

$$\sigma_1 = 50 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = 30 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_3 = 20 \text{ MPa}$$

Calculemos los cosenos α', β', γ' de los ángulos que forma el vector

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

normal al plano que se considera con los ejes principales

$$\alpha' = \vec{u}_1 \cdot \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}} (2 + 2 + 1) = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$$\beta' = \vec{u}_2 \cdot \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}} (2 - 1 - 2) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\gamma' = \vec{u}_3 \cdot \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-1 + 2 - 2) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

El vector tensión pedido, referido a los ejes principales, será

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \frac{10}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

o bien:

$$\vec{\sigma} = \frac{10}{3\sqrt{3}} (25\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3)$$

Sustituyendo las expresiones de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ en función de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, se obtiene el vector tensión referido de triedro $Oxyz$

$$\vec{\sigma} = \frac{10}{3\sqrt{3}} \left[25\frac{1}{3} (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) - 3\frac{1}{3} (2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) - 2\frac{1}{3} (-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) \right]$$

$$\vec{\sigma} = \frac{10}{9\sqrt{3}} (46\vec{i} + 49\vec{j} + 35\vec{k}) \text{ MPa}$$

cuyo módulo es

$$\sigma = \frac{10}{9\sqrt{3}} \sqrt{46^2 + 49^2 + 35^2} \text{ MPa} = 48,61 \text{ MPa}$$

- 2.4. Sobre las caras de un paralelepípedo elemental que limitan el entorno de un punto P de un sólido elástico existen las tensiones indicadas en la Figura E2.4a, expresadas en kp/mm^2 .

Se pide calcular: 1.º Los planos cuyos vectores tensión son ortogonales a ellos, así como los valores de las tensiones correspondientes. 2.º El lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos de la radiación de vértice el punto P .

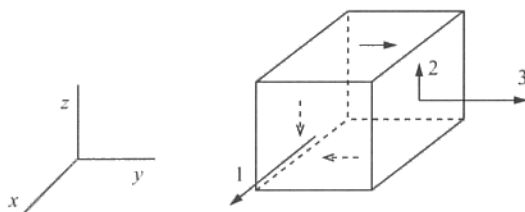


Figura E2.4a.

1.º Tomando un sistema de referencia cartesiano ortogonal de ejes paralelos a las aristas del paralelepípedo, la matriz de tensiones en el punto P es

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Los planos cuyos vectores tensión son ortogonales a ellos son los planos principales.

De la ecuación $[T] [\vec{u}] = \sigma [\vec{u}] \Rightarrow [T - \sigma I] [\vec{u}] = [\vec{0}]$ se obtiene el sistema homogéneo

$$\begin{cases} (1 - \sigma)\alpha = 0 \\ (3 - \sigma)\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\beta - \sigma\gamma = 0 \end{cases}$$

Su ecuación de compatibilidad

$$\begin{vmatrix} 1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \sigma & 2 \\ 0 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

proporciona la ecuación característica

$$\sigma^3 - 4\sigma^2 - \sigma + 4 = 0$$

ecuación cúbica cuyas raíces son las tensiones principales

$$\sigma_1 = 4 \text{ kp/mm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = 1 \text{ kp/mm}^2 \quad ; \quad \sigma_3 = -1 \text{ kp/mm}^2$$

A cada uno de estos valores corresponde un plano principal

$$\text{Para } \sigma_1 = 4 \quad \begin{cases} -3\alpha_1 = 0 \\ -\beta_1 + 2\gamma_1 = 0 \\ 2\beta_1 - 4\gamma_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1 \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\text{Para } \sigma_2 = 1 \quad \begin{cases} 2\beta_2 + 2\gamma_2 = 0 \\ 2\beta_2 - \gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2 (1, 0, 0)$$

$$\text{Para } \sigma_3 = -1 \quad \begin{cases} 2\alpha_3 = 0 \\ 4\beta_3 + 2\gamma_3 = 0 \\ 2\beta_3 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_3 \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right)$$

Por consiguiente, los planos principales son:

$$2y + z = 0$$

$$x = 0$$

$$y - 2z = 0$$

tomando el punto P como origen del sistema de referencia.

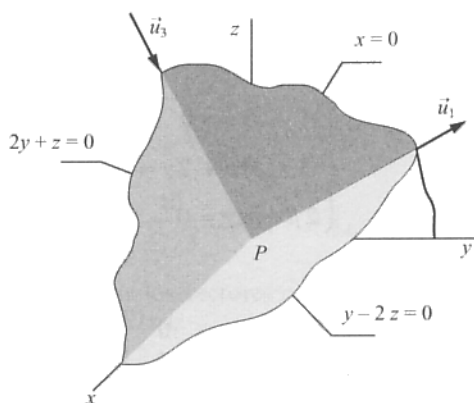


Figura E2.4b.

2.º El lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos de la radiación de vértice al punto P es el elipsoide de Lamé, cuya ecuación, referida a las direcciones principales es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$$

2.5. Se considera un punto P de un sólido elástico. Las tensiones principales en este punto son:

$$\sigma_1 = 5 \text{ kp/mm}^2 ; \quad \sigma_2 = 3 \text{ kp/mm}^2 ; \quad \sigma_3 = -2 \text{ kp/mm}^2$$

1.º Indicar a qué planos de la radiación de vértice P corresponden tensiones de tracción y a cuáles de compresión.

2.º Estudiar en los planos en los que la tensión normal se anula, el valor de la tensión tangencial, calculando sus máximos y mínimos relativos.

1.º Tomemos un sistema de referencia con origen el punto P y ejes coincidentes con las direcciones principales.

Las cuádricas indicatrices tienen por ecuaciones

$$5x^2 + 3y^2 - 2z^2 = \pm 1$$

que corresponden a dos hiperboloides de una y de dos hojas, respectivamente (Fig. E2.5a). El cono asintótico común a ambos hiperboloides tiene de ecuación

$$5x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 0$$

Este cono asintótico, de vértice el punto P , divide al espacio en dos zonas. Si la normal al plano de la radiación de vértice P está en la zona exterior al cono, es decir, si corta al hiperboloide de una hoja ($c = +1$) la tensión normal es positiva y, por consiguiente, de tracción.

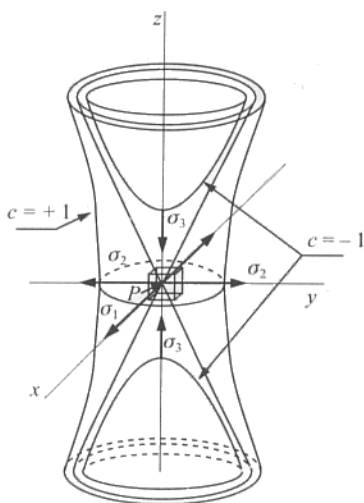


Figura E2.5a.

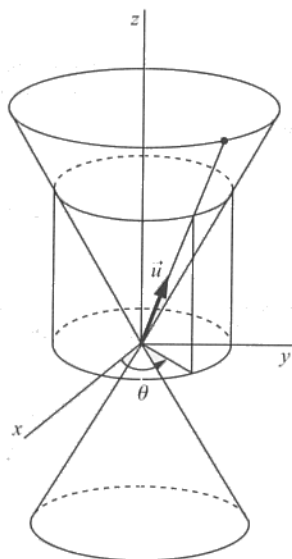


Figura E2.5b.

Si, por el contrario, la normal está situada en la zona interior, corta el hiperboloide de dos hojas ($c = -1$). La tensión normal es negativa y el sólido está sometido a *compresión* según esos planos.

2.º Los planos en los que la tensión normal se anula son aquellos cuyas normales coinciden con las generatrices del cono asintótico de las cuádricas indicatrices.

Expresemos el vector unitario \vec{u} de estos planos en función de un parámetro, por ejemplo, el ángulo θ de las coordenadas cilíndricas (Fig. E2.5b).

Un vector en la dirección de una generatriz del cono asintótico se obtiene cortando dicho cono por un plano perpendicular al eje z , por ejemplo el plano $z = 1$ y por el semiplano $y = x \operatorname{tg} \theta$.

$$\left. \begin{array}{l} 5x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 0 \\ z = 1 \\ y = x \operatorname{tg} \theta \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta}} ; \quad y = \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{5 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta}} ; \quad z = 1$$

El vector unitario, referido a los ejes principales, tendrá por expresión:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5 \operatorname{tg}^2 \theta + 7}} (\sqrt{2} \vec{i} + \sqrt{2} \operatorname{tg} \theta \vec{j} + \sqrt{5 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta} \vec{k})$$

Para los planos perpendiculares a estos vectores \vec{u} la tensión normal es nula. Esto significa que el vector tensión coincide con la tensión tangencial. Por tanto:

$$[\vec{\tau}] = \frac{1}{\sqrt{5 \operatorname{tg}^2 \theta + 7}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \operatorname{tg} \theta \\ \sqrt{5 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta} \end{pmatrix}$$

de donde los vectores tensión, para los planos cuyas normales son coincidentes con las generatrices del cono asintótico de las cuádricas indicatrices, tienen por expresión trinomica en función del ángulo θ la siguiente:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{5 \operatorname{tg}^2 \theta + 7}} (5 \sqrt{2} \vec{i} + 3 \sqrt{2} \operatorname{tg} \theta \vec{j} - 2 \sqrt{5 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta} \vec{k})$$

De los círculos de Mohr se obtienen fácilmente los límites entre los que está acotado el valor del módulo del vector función $\vec{\tau}$ (Fig. E2.5c):

$$\tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2} = \sqrt{10} \text{ kp/mm}^2$$

$$\tau_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2} = \sqrt{6} \text{ kp/mm}^2$$

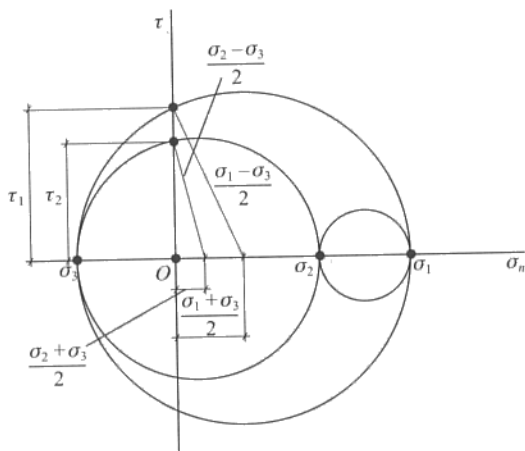


Figura E2.5c.

es decir:

$$\sqrt{6} \text{ kp/mm}^2 \leq \tau \leq \sqrt{10} \text{ kp/mm}^2$$

2.6. Las tensiones principales en un punto P de un sólido elástico toman los valores:

$$\sigma_1 = 2 \text{ kp/mm}^2 ; \quad \sigma_2 = -1 \text{ kp/mm}^2 ; \quad \sigma_3 = -1 \text{ kp/mm}^2$$

1.º Calcular la superficie engendrada por las normales a los planos en los que se anula la tensión normal.

2.º Estudiar a qué planos de los comprendidos en la radiación de vértice P corresponden tensiones normales de tracción y a cuáles de compresión.

3.º Determinar analítica y gráficamente el vector tensión correspondiente a un plano cuya normal exterior forma un $\hat{\alpha} = 75^\circ$ con la dirección principal correspondiente a σ_1 .

4.º Determinar analítica y gráficamente el plano cuyo vector tensión forma un ángulo $\alpha = 35^\circ$ con la dirección principal correspondiente a σ_1 .

1.º El estado tensional existente en el punto P considerado es un estado cilíndrico, por lo que el único eje principal que está determinado es el que corresponde a la tensión principal σ_1 , que tomaremos como eje x . Como ejes yz se tomarán dos cualesquiera que sean ortogonales entre sí y situados en el plano perpendicular al eje x por P (Fig. E2.6a).

Respecto de ese sistema de referencia, las cuádricas indicatrices de tensiones tienen por ecuaciones

$$2x^2 - y^2 - z^2 = \pm 1$$

que corresponden a dos hiperboloides de dos y de una hoja, respectivamente.

Por definición de estas cuádricas, la superficie engendrada por las normales a los planos en los que se anula la tensión normal es el cono asintótico común a ambos hiperboloides, cuya ecuación es

$$2x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

cono de revolución de vértice el punto P y eje Px .

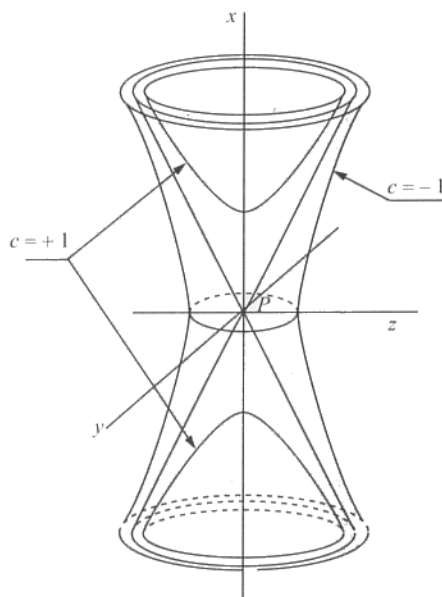


Figura E2.6a.

2.º El cono asintótico divide al espacio en dos zonas; si la normal al plano de la radiación de vértice P está en la zona interior ($c = +1$) la tensión normal correspondiente es de *tracción*. Si, por el contrario, está en la zona exterior ($c = -1$) la tensión normal es de *compresión*.

3.º Tomando la normal al plano considerado en el plano xz , el vector unitario \vec{u} , que define la orientación de dicho plano, tiene por expresión:

$$\vec{u} = \cos 75^\circ \vec{i} + \cos 15^\circ \vec{k} = 0,2588 \vec{i} + 0,9659 \vec{k}$$

Analíticamente, el vector tensión correspondiente al plano definido por \vec{u} será

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2588 \\ 0 \\ -0,9659 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5176 \\ 0 \\ 0,9659 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\vec{\sigma} = 0,5176 \vec{i} + 0,9659 \vec{k}$$

cuyo módulo es $\sigma = \sqrt{0,5176^2 + 0,9659^2} = 1,1 \text{ kp/mm}^2$.

Gráficamente se obtiene el vector $\vec{\sigma}$, que está contenido en el plano definido por el eje x y el vector unitario \vec{u} (debido a la simetría que presentan las cuádras indicatrices respecto de dicho eje), procediendo como se indica en la Figura E2.6b. Se sitúa el vector \vec{u} que forma con el eje x un ángulo $\hat{\alpha} = 75^\circ$. Por el punto A de intersección de su línea de acción con la hipérbola sección de la cuádrca indicatriz se traza la tangente a dicha hipérbola. El vector $\vec{\sigma}$

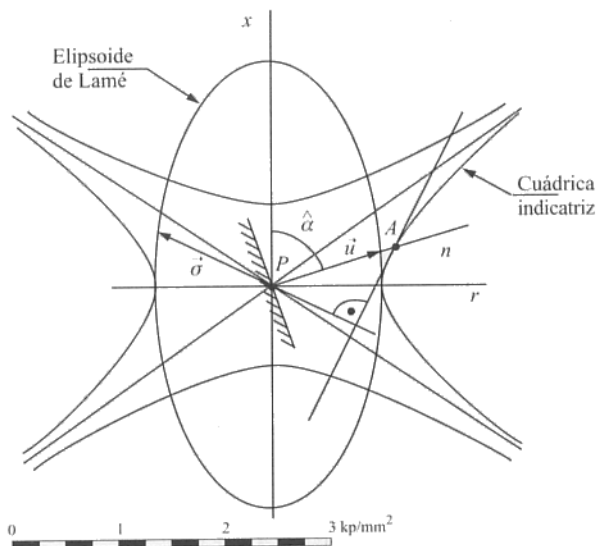


Figura E2.6b.

es perpendicular a esta recta. Su sentido será entrante en el plano que se considera, pues la tensión normal es negativa.

4.º Tomaremos como plano xz aquel en el que está contenido el vector tensión $\vec{\sigma}$. Respecto a esta referencia, el vector $\vec{\sigma}$ tendrá de componentes

$$\vec{\sigma} = \sigma (\cos 35^\circ \vec{i} + \cos 55^\circ \vec{k}) = 0,8192 \sigma \vec{i} + 0,5736 \sigma \vec{k}$$

por lo que si $\vec{u} (\alpha, \beta, \gamma)$ es el vector que define el plano cuyo vector tensión es $\vec{\sigma}$, se verificará

$$\begin{pmatrix} 0,81920\sigma \\ 0 \\ 0,5736\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} 0,8192\sigma &= 2\alpha &\Rightarrow \alpha &= 0,4096\sigma \\ 0 &= \beta &\Rightarrow \beta &= 0 \\ 0,5736\sigma &= -\gamma &\Rightarrow \gamma &= -0,5736\sigma \end{aligned}$$

Como el vector \vec{u} es unitario, el módulo σ del vector tensión se obtendrá imponiendo esta condición

$$\sigma^2 (0,4096^2 + 0,5736^2) = 1, \quad \text{es decir} \quad \sigma = 1,4187 \text{ kp/mm}^2$$

El vector \vec{u} tendrá por expresión

$$\vec{u} = 0,5811 \vec{i} - 0,8138 \vec{k}$$

que forma ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ con los ejes x y z , respectivamente, tales que:

$$\begin{aligned}\arccos \hat{\alpha} &= 0,5811 &\Rightarrow \hat{\alpha} &= 54,47^\circ \\ \arccos \hat{\gamma} &= -0,8138 &\Rightarrow \hat{\gamma} &= 144^\circ, 47^\circ\end{aligned}$$

El plano pedido se puede obtener gráficamente utilizando las cuádras directrices de tensiones, procediendo de la forma indicada en la Figura E2.6c.

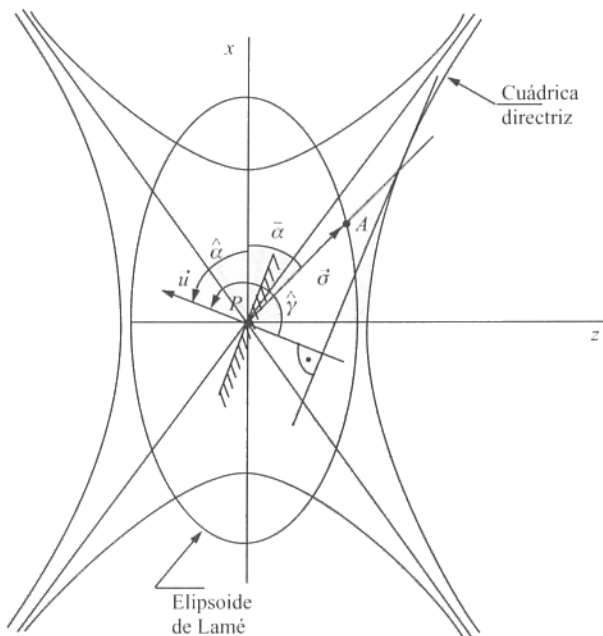


Figura E2.6c.

- 2.7. La ecuación característica deducida de la matriz de tensiones es, en un punto de un sólido elástico, la siguiente:

$$\sigma^3 - 5 \sigma^2 - 8 \sigma + 12 = 0$$

1.º Calcular los valores de las tensiones principales.

2.º Determinar analítica y gráficamente las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente al plano definido por el vector

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k}$$

referido a las direcciones principales.

1.º Los valores de las tensiones principales son las raíces de la ecuación característica

$$\sigma^3 - 5 \sigma^2 - 8 \sigma + 12 = 0$$

Esta ecuación se puede poner en la forma:

$$(\sigma - 6) (\sigma - 1) (\sigma + 2) = 0$$

de donde fácilmente se obtienen las tensiones principales

$$\sigma_1 = 6 ; \quad \sigma_2 = 1 ; \quad \sigma_3 = -2$$

2.º La matriz de tensiones, referida a las direcciones principales, es

$$[T] = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El vector tensión correspondiente al plano cuya normal exterior está dada por el vector \vec{u} ($1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2$) es

$$[\vec{\sigma}] = [T] [\vec{u}] = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

de módulo

$$\sigma = \sqrt{9 + 1/2 + 1} = \sqrt{\frac{21}{2}} = 3,24$$

y cuyas componentes intrínsecas tienen los valores

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = \frac{3}{2} = 1,5 ; \quad \tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} = \frac{\sqrt{33}}{2} = 2,87$$

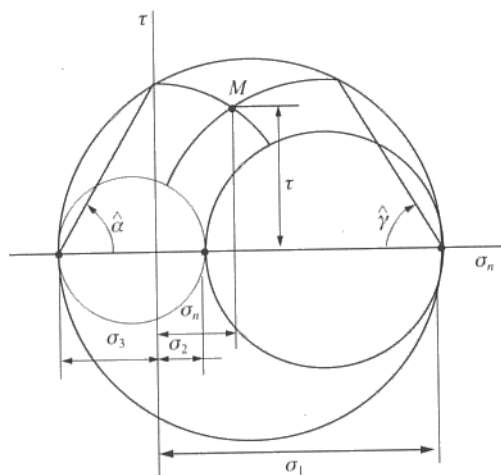


Figura E2.7.

A este mismo resultado llegamos gráficamente utilizando los círculos de Mohr procediendo como se indica en la Figura E2.7 y teniendo en cuenta que

$$\alpha = \cos \hat{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\alpha} = 60^\circ \quad ; \quad \gamma = \cos \hat{\gamma} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\gamma} = 60^\circ$$

- 2.8. Sobre las caras de un paralelepípedo elemental que envuelve a un punto P de un sólido elástico existen las tensiones indicadas en la Figura E2.8a, estando expresadas en MPa.

Se pide:

1.º Calcular las tensiones y direcciones principales.

2.º Obtener analítica y de forma gráfica mediante los círculos de Mohr, las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente a un plano cuya normal forma ángulos iguales con los semiejes cartesianos ortogonales x y z indicados en la figura.

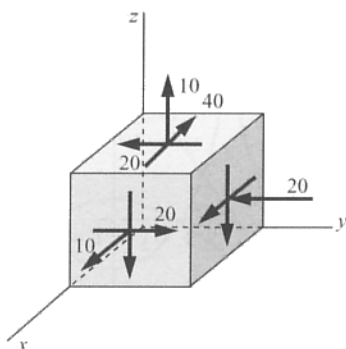


Figura E2.8a.

- 1.º Las tensiones principales son las raíces de la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} 10 - \sigma & 20 & -40 \\ 20 & -20 - \sigma & -20 \\ -40 & -20 & 10 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - 2700 \sigma - 54000 = 0$$

de donde

$$\sigma_1 = 60 \text{ MPa} ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -30 \text{ MPa}$$

Calculemos la única dirección principal que está determinada, es decir, la correspondiente a la raíz simple $\vec{\sigma}_1$. Las componentes (α, β, γ) del vector unitario \vec{u} que la define son las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} -5\alpha + 2\beta - 4\gamma &= 0 \\ 2\alpha - 8\beta - 2\gamma &= 0 \\ -4\alpha - 2\beta - 5\gamma &= 0 \end{aligned}$$

junto a la condición $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

De este sistema de ecuaciones se obtiene

$$\vec{u}_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

Por ser doble la otra raíz, cualquier par de direcciones ortogonales en el plano $2x + y - 2z = 0$ son direcciones principales.

2.º Analíticamente, el plano que se considera tiene por vector unitario

$$\vec{u} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

y le corresponde un vector tensión

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -40 \\ 20 & -20 & -20 \\ -40 & -20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10}{\sqrt{3}} \\ \frac{-20}{\sqrt{3}} \\ \frac{-50}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

cuyas componentes intrínsecas son:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = -\frac{10}{3} - \frac{20}{3} - \frac{50}{3} \text{ MPa} = -\frac{80}{3} \text{ MPa}$$

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{1000 - \frac{6400}{9}} \text{ MPa} = \frac{\sqrt{2600}}{3} \text{ MPa}$$

$$\sigma_n = -26,7 \text{ MPa} ; \quad \tau = 17 \text{ MPa}$$

Para obtener estos valores de forma gráfica, calculemos previamente el ángulo $\hat{\alpha}$ que forma el vector unitario \vec{u} del plano considerado con el eje principal que corresponde a la tensión σ_1 .

$$\cos \hat{\alpha} = \vec{u}_1 \cdot \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{\alpha} = \arccos \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{\alpha} = 78,9^\circ$$

Una vez calculado el ángulo $\hat{\alpha}$ se procede como se indica en la Figura E2.8b.

Las componentes intrínsecas pedidas son las coordenadas del punto M . Se obtienen los valores

$$\sigma_n = -27 \text{ MPa} , \quad \tau = 17 \text{ MPa}$$

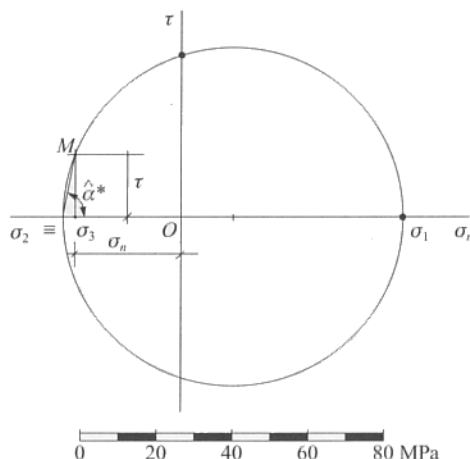


Figura E2.8b.

2.9. En un punto P de un sólido elástico se tiene un estado plano de tensiones, del que se conocen las tensiones principales

$$\sigma_1 = 300 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = 100 \text{ kp/cm}^2$$

Calcular gráficamente el valor de la tensión tangencial máxima y mínima que aparece:

- En planos en los que el vector tensión forma un ángulo de 80° con la normal.
- En planos cuya normal forma 80° con la dirección principal correspondiente a la tensión σ_1 .
- En planos en los que $|\sigma_n| = 200 \text{ kp/cm}^2$.
- En planos en los que $\sigma_n = 200 \text{ kp/cm}^2$.

Por tratarse de un estado plano de tensiones, $\sigma_3 = 0$.

a) Como el ángulo que forma el vector tensión con la normal (Fig. E2.9a) es igual al que forma la recta definida por el origen O y el punto representativo con el eje de abscisas, si trazamos por el origen una semirrecta que forme un ángulo de 80° con el eje σ_n , el vector tensión de cualquier plano que corresponda a los puntos del segmento \overline{AB} (Fig. E2.9b) forma un ángulo de 80° con su normal. Los puntos A y B son los de intersección de la citada semirrecta con los círculos de Mohr C_1 y C_2 , respectivamente. Sus ordenadas correspondientes miden los valores máximo y mínimo de la tensión tangencial

$$\tau_{1\text{mín}} = 26 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{1\text{máx}} = 65 \text{ kp/cm}^2$$

b) En este caso los puntos representativos de los planos, cuya normal forma un ángulo de 80° con la dirección principal correspondiente a la tensión σ_1 , son los puntos pertenecientes al arco \widehat{BC} de la circunferencia C_1 (Fig. E2.9b). Los valores máximo y mínimo de la tensión tangencial son:

$$\tau_{2\text{mín}} = 45 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{2\text{máx}} = 77 \text{ kp/cm}^2$$

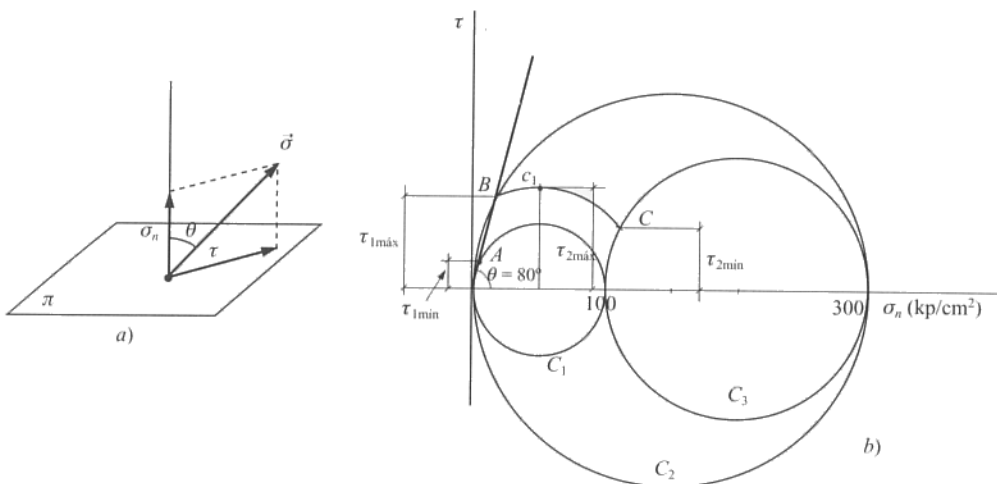


Figura E2.9a y b.

c) Los puntos correspondientes a los planos cuyo vector tensión tiene de módulo $\sigma = 200$ kp/cm² son los del arco \widehat{DE} , tales que $\overline{OD} = \overline{OE} = 200$ (Fig. E2.9c)

$$\tau_{3\text{mín}} = 100 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{3\text{máx}} = 150 \text{ kp/cm}^2$$

d) En este caso los puntos correspondientes a los planos en los que $\sigma_n = 200$ kp/cm² son los del segmento FH , siendo F y H los puntos de intersección de la recta $\sigma_n = 200$ con los círculos de Mohr C_3 y C_2 (Fig. E2.9c).

$$\tau_{4\text{mín}} = 105 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{4\text{máx}} = 145 \text{ kp/cm}^2$$

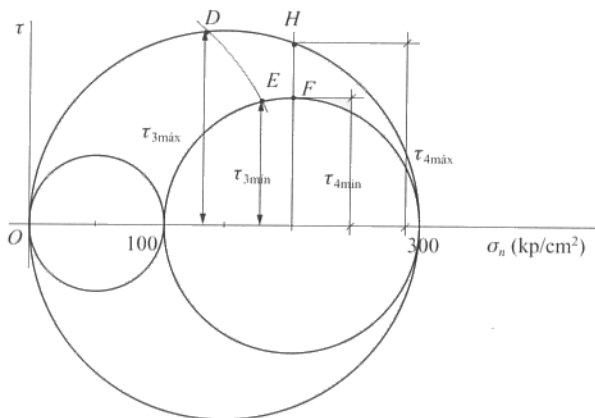


Figura E2.9c.

2.10. La matriz de tensiones en los puntos de un sólido elástico es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 4x + 3y & -6(x + y + z) & y + z \\ -6(x + y + z) & 10(y - z) & 3x \\ y + z & 3x & 5z \end{pmatrix}$$

viendo las tensiones dadas en kp/mm^2 cuando las coordenadas se expresan en metros. Se pide:

- 1.º Calcular las fuerzas de volumen en el sistema internacional, es decir, en N/m^3 .
- 2.º Hallar las matrices esférica y desviadora en el punto $P(0, 1, -1)$.

1.º Aplicando las ecuaciones de equilibrio interno

$$X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

se tiene:

$$\begin{aligned} X + 4 - 6 + 1 &= 0 &\Rightarrow X &= 1 \\ Y - 6 + 10 &= 0 &\Rightarrow Y &= -4 \\ Z + 5 &= 0 &\Rightarrow Z &= -5 \end{aligned}$$

Cuando las ordenadas se expresan en metros, estas fuerzas de volumen vienen dadas en $\text{kp/mm}^2 \cdot \text{m}$. Por tanto, los valores correspondientes en N/m^3 se obtendrán a partir de éstos multiplicando por $9,8 \times 10^6$.

$$X = 9,8 \text{ MN/m}^3 \quad ; \quad Y = -39,2 \text{ MN/m}^3 \quad ; \quad Z = -49 \text{ MN/m}^3$$

2.º En el punto $P(0, 1, -1)$ la matriz de tensiones es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{kp/mm}^2$$

De la observación de la forma de esta matriz se deduce que las direcciones principales en P coinciden con las de los ejes coordenados.

Como la tensión normal octaédrica toma el valor

$$\sigma_{no} = \frac{3 + 20 - 5}{3} = 6 \text{ kp/mm}^2$$

haremos de la matriz $[T]$ la siguiente descomposición

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, las matrices esféricas y desviadora de tensiones, son

$$[T_o] = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} ; \quad [T_d] = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

- 2.11. Una determinada sollicitación exterior aplicada a un sólido elástico de forma bitroncocónica, simétrica respecto de la base menor, de las dimensiones indicadas en la Figura E2.11a, provoca un estado tensional axilsimétrico cuya matriz de tensiones, referida al triedro de ejes locales correspondientes al sistema de coordenadas cilíndricas de eje z , en cualquiera de sus puntos es

$$[T] = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

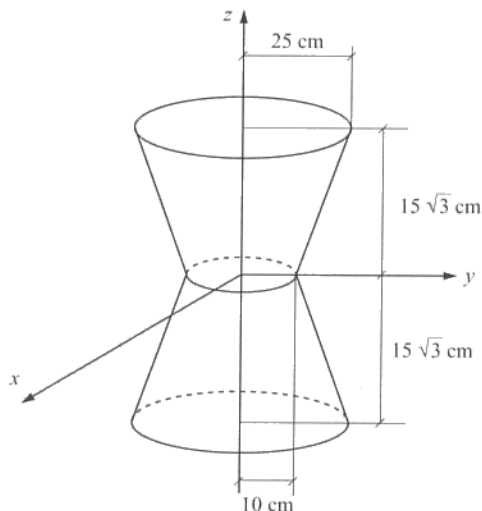


Figura E2.11a.

Dibujar la distribución de fuerzas de superficie que actúan en el contorno, dándola mediante dos croquis en los que se representen las componentes normales y tangenciales.

De la observación de la matriz de tensiones se deduce la simetría de la distribución de tensiones respecto de los planos de simetría del sólido considerado. Por otra parte, como las componentes de los vectores normales a la superficie, respecto del triedro de ejes locales correspondientes al sistema de coordenadas cilíndricas de eje z , son constantes en todos los puntos de cada tipo de superficie que limita al sólido, las componentes normal y tangencial serán constantes en cada una de ellas.

Nos bastará, pues, calcular el vector tensión correspondiente a un punto cualquiera de la superficie cónica y a otro de la base, superior o inferior, para conocer completamente la distribución de fuerzas sobre la superficie que limita al sólido.

a) En la superficie lateral (Fig. E2.11b), las componentes de los vectores unitario normal \vec{u} y tangencial \vec{u}' son:

$$\vec{u} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right); \quad \vec{u}' \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

El vector tensión correspondiente

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}] = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\sqrt{3} \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

expresado respecto del triedro definido por los vectores unitarios $\vec{\delta}_0, \vec{\theta}_0, \vec{z}_0$ ($\vec{\theta}_0$, perpendicular entrante al plano del papel), tiene de componentes intrínsecas

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = 25 \text{ MPa}; \quad \tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = 5\sqrt{3} \text{ MPa}$$

b) En la superficie de la base superior, análogamente, tenemos

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

por lo que

$$\sigma_n = 40 \text{ MPa}; \quad \tau = 0$$

Con estos resultados podemos dibujar la distribución de fuerzas de superficie pedida. En la misma Figura E2.11c se representan las componentes normales (a la derecha) y las tangenciales (a la izquierda).

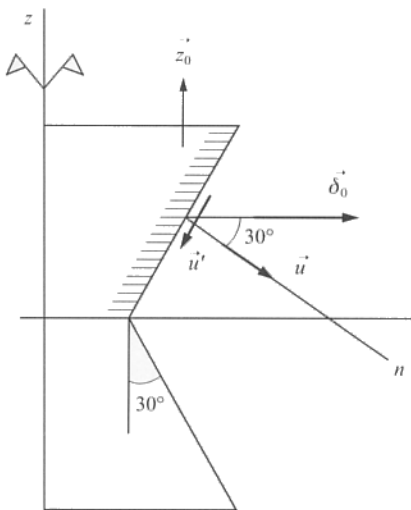


Figura E2.11b.

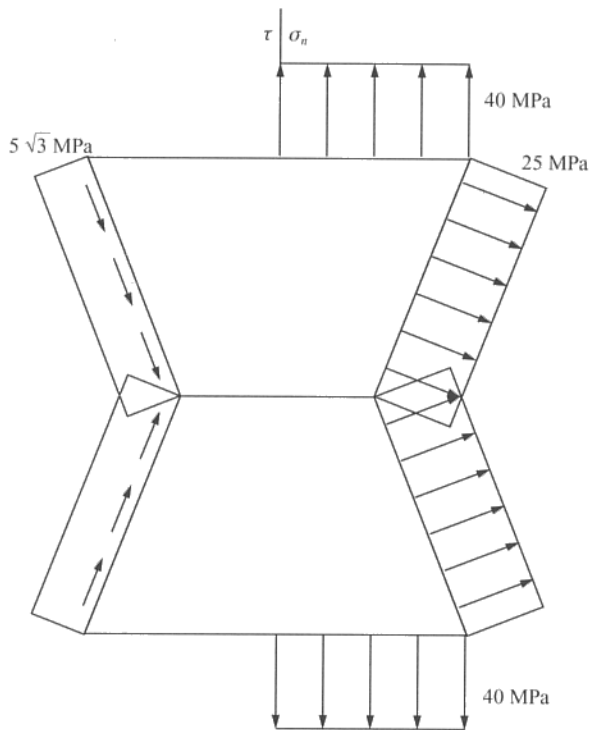


Figura E2.11c.

Análisis de las deformaciones en un medio continuo

3.1. Introducción

Cuando se estudiaba en Mecánica el movimiento, el primer problema que se presentaba era el de saber expresar el desplazamiento $d\vec{s}$ del punto del sistema que estuviéramos considerando.

Así, en la *Mecánica del punto material* este problema se resolvía expresando el vector desplazamiento de un punto M como la diferencial de su vector de posición

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (3.1.1)$$

es decir, el vector desplazamiento está perfectamente determinado si es conocido su vector de posición $\vec{r} = \vec{r}(t)$ como función del tiempo (Fig. 3.1a).

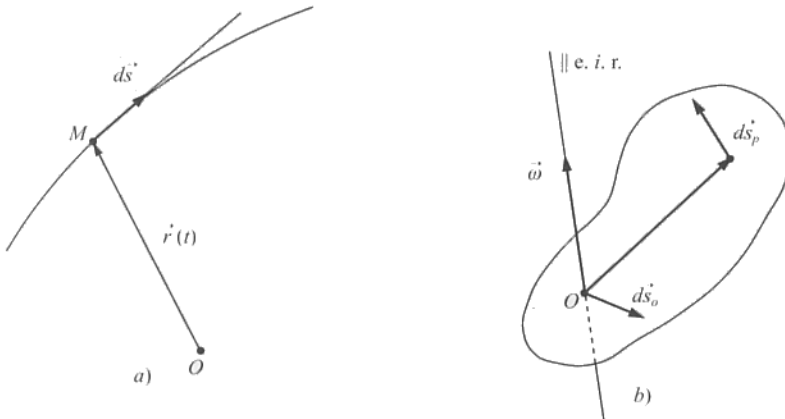


Figura 3.1.

En la *Mecánica de los sólidos rígidos* era necesario conocer el desplazamiento $d\vec{s}_o$ de un punto O , y otro vector $\vec{\omega}$ que es la rotación instantánea, pasando por O su línea de acción, que es paralela al eje instantáneo de rotación (Fig. 3.1b).

$$d\vec{r}_p = d\vec{s}_o + (\vec{\omega} \times \vec{OP}) dt \tag{3.1.2}$$

En la *Mecánica de los medios continuos* se crea un modelo matemático cuyos puntos geométricos se identifican con las partículas materiales del cuerpo.

En la *Teoría de la Elasticidad* este modelo continuo es elástico, como ya hemos indicado, y dotado de las propiedades de continuidad, homogeneidad e isotropía. Al actuar una sollicitación externa sobre un sólido elástico varían las posiciones relativas de las partículas que lo componen, efecto que recibe el nombre de *deformación*.

Nuestro objetivo en este capítulo es realizar un análisis de las deformaciones en un medio continuo elástico, pero acotando el campo y reducirlo a los casos de pequeñas deformaciones.

Evidentemente que aquí, al contrario de lo que ocurre en la *Mecánica del punto material* o en la *Mecánica de los cuerpos rígidos*, el tiempo sólo intervendría en el intervalo transitorio mientras dura el fenómeno de la deformación, pero este aspecto carece totalmente de interés.

Como en el desarrollo que haremos más adelante aparecen ciertas expresiones matriciales, conviene aclarar previamente su significado.

Por ello, sea $[M]$

$$[M] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

la matriz de una transformación que hace corresponder a un vector \vec{r} el vector \vec{r}' dado por

$$[\vec{r}'] = [M] [\vec{r}] \tag{3.1.4}$$

El vector \vec{r}' tendrá, en general, distinta dirección y distinto módulo que \vec{r} . El primer efecto se manifiesta mediante un giro y el segundo por una dilatación, que será positiva o negativa según que se haya producido alargamiento o acortamiento del módulo de \vec{r}' respecto del módulo de \vec{r} . Estudiaremos independientemente cada uno de ellos viendo la naturaleza y forma de las matrices de las transformaciones respectivas.

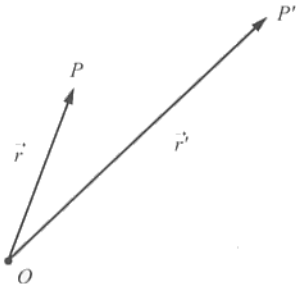


Figura 3.2.

3.2. Matrices que producen giro

Las matrices $[R]$ que conservan el módulo de los vectores \vec{r} en la transformación (3.1.4) se denominan *matrices ortogonales*.

Veamos la propiedad fundamental que caracteriza a estas matrices, deducida de la condición de ser iguales las normas de \vec{r} y \vec{r}' .

$$r^2 = r'^2 = [\vec{r}']^T [\vec{r}'] = [[R] [\vec{r}]]^T [R] [\vec{r}] = [\vec{r}]^T [R]^T [R] [\vec{r}] = [\vec{r}]^T [\vec{r}] \quad (3.2.1)$$

Al ser la transformación válida para cualquier vector \vec{r} , tiene que ser necesariamente

$$[R]^T [R] = [I] \Rightarrow [R]^T = [R]^{-1} \quad (3.2.2)$$

siendo $[I]$ la matriz unidad. Esta condición, necesaria y suficiente para la conservación del módulo de un vector arbitrario, indica que *las matrices ortogonales son aquellas que tienen por inversas a sus traspuestas*.

La matriz traspuesta $[R]^T$, o inversa, de toda matriz ortogonal es también ortogonal, ya que para ésta la condición (3.2.2) se sigue verificando, al ser la traspuesta de $[R]^T$ precisamente $[R]$

$$[R][R]^T = [I] \quad (3.2.3)$$

Veamos qué significado tienen las componentes de una matriz ortogonal $[R]$. Sean éstas a_{ij} , siendo i el índice que indica fila y j el que indica columna. De las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.2)

$$[R][R]^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[R]^T [R] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que se pueden expresar indicialmente de la forma

$$\begin{aligned} a_{ik} \cdot a_{jk} &= \delta_{ij} \\ a_{ki} \cdot a_{kj} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$$

siendo δ_{ij} la delta de Kroneker, se deduce:

1.º Los vectores que tienen de componentes los elementos de cualquier fila o cualquier columna de una matriz ortogonal son unitarios.

2.º Los vectores de dos líneas paralelas son perpendiculares entre sí.

3.3. Alargamientos producidos por una matriz. Direcciones principales

Volviendo a la transformación (3.1.4)

$$[\vec{r}'] = [M][\vec{r}]$$

cabe hacernos la pregunta si existirán vectores cuyos transformados por $[M]$ puedan cambiar de módulo pero conserven la dirección.

Si existen, se tendrá que verificar

$$[M][\vec{r}] = \lambda[\vec{r}] \quad (3.3.1)$$

o bien, pasando al primer miembro

$$[M - \lambda I][\vec{r}] = [\vec{0}] \quad (3.3.2)$$

siendo I la matriz unidad y λ un escalar.

Esta ecuación matricial da lugar a un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)r_x + a_{12}r_y + a_{13}r_z = 0 \\ a_{21}r_x + (a_{22} - \lambda)r_y + a_{23}r_z = 0 \\ a_{31}r_x + a_{32}r_y + (a_{33} - \lambda)r_z = 0 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

cuya condición de compatibilidad:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.4)$$

desarrollada es una ecuación cúbica en λ , llamada *ecuación característica o secular*. Las raíces de esta ecuación se llaman valores propios de la matriz $[M]$ y las direcciones que no varían de los vectores \vec{r} , *direcciones principales o propias*.

Si la matriz es simétrica, las tres raíces de la ecuación característica son reales y las direcciones principales son perpendiculares entre sí*.

Tomando como sistema de referencia el triedro formado por las direcciones principales, toda matriz simétrica se reduce a una matriz diagonal, en la que sus términos diagonales son precisamente las raíces de la ecuación característica:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

* Véase 2.5.

En efecto, fácilmente se comprueba que aplicada esta matriz a cada uno de los vectores unitarios en la dirección de los ejes, sus transformados tienen la misma dirección y sus módulos respectivos los valores de λ_i ($i = 1, 2, 3$).

De lo dicho se deduce que toda matriz simétrica, mediante determinado giro del triedro de referencia, se transforma en su forma diagonal.

3.4. Matrices infinitesimales

Cuando la matriz de la transformación (3.1.4) produzca una variación infinitamente pequeña recibe el nombre de *matriz infinitesimal*. La condición necesaria y suficiente para que esto se verifique es que su diferencia con la matriz unidad $[I]$ sea una matriz infinitamente pequeña.

En virtud de ello, una matriz infinitesimal será de la forma

$$[I] + \lambda [M] = \begin{pmatrix} 1 + \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & 1 + \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & 1 + \lambda a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

siendo $[M]$ una matriz cualquiera y λ un escalar infinitésimo.

Consideremos dos matrices infinitesimales $[I + \lambda M]$ y $[I + \lambda M']$.

Su producto es

$$[I + \lambda M][I + \lambda M'] = [I] + \lambda [M + M'] \quad (3.4.2)$$

habiendo despreciado los infinitésimos de segundo orden.

De estas dos matrices será una la inversa de la otra si su producto es la matriz unidad, es decir, cuando

$$\lambda [M + M'] = 0, \quad \text{de donde:} \quad [M'] = -[M]$$

Por tanto, la matriz inversa de una matriz infinitesimal $[I + \lambda M]$ es $[I - \lambda M]$, ya que

$$[I + \lambda M][I - \lambda M] = [I] \quad (3.4.3)$$

Por otra parte, la condición que tiene que verificar una matriz $[I + \lambda M]$ para que sea ortogonal, es según sabemos, que su inversa sea igual a su traspuesta

$$[I - \lambda M] = [I + \lambda M^T] \Rightarrow [M] = -[M]^T \quad (3.4.4)$$

es decir, una matriz infinitesimal $[I + \lambda M]$ es ortogonal si $[M]$ es hemisimétrica.

3.5. Deformaciones en el entorno de un punto

Consideremos un sólido elástico inicialmente indeformado. Sea P un punto del mismo y Q otro punto perteneciente al entorno de P , tal que

$$\vec{PQ} = \vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (3.5.1)$$

referido a un sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$ (Fig. 3.3).

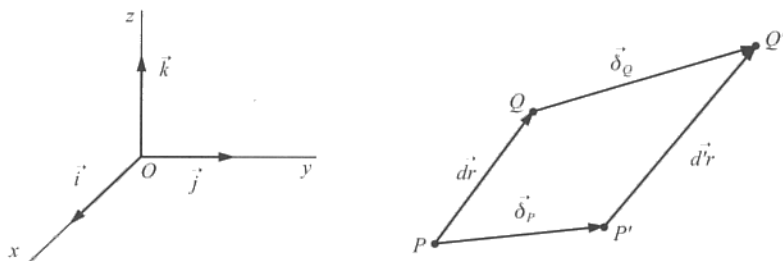


Figura 3.3.

Producida la deformación, el punto P pasará a P' y Q a Q' . Llamemos $\vec{\delta}_P = \overrightarrow{PP'}$ y $\vec{\delta}_Q = \overrightarrow{QQ'}$ los *corrimientos* o *desplazamientos* de estos dos puntos

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_P &= u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \\ \vec{\delta}_Q &= u' \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k}\end{aligned}\quad (3.5.2)$$

y teniendo en cuenta que son muy pequeños*, podemos expresar las componentes de $\vec{\delta}_Q$ en función de las de $\vec{\delta}_P$ y de sus derivadas, por medio de un desarrollo en serie de Taylor

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \right. \quad (3.5.3)$$

habiendo despreciado los infinitésimos de orden superior.

El sistema (3.5.3) admite una cómoda expresión matricial

$$[\vec{\delta}_Q] = [\vec{\delta}_P] + [M][d\vec{r}] \quad (3.5.4)$$

siendo $[M]$ la matriz

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.5.5)$$

* Se admite que las funciones u, v, w son continuas, así como sus derivadas primeras, y que todas éstas (funciones y derivadas) son infinitésimos de primer orden.

Esta matriz se puede descomponer en suma de una simétrica y otra hemisimétrica

$$[M] = \frac{[M] + [M]^T}{2} + \frac{[M] - [M]^T}{2} = [D] + [H] \quad (3.5.6)$$

siendo:

$$[D] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.5.7)$$

$$[H] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.8)$$

Las componentes de ambas matrices son infinitésimos de primer orden.

Si es conocido el vector desplazamiento $\vec{\delta}_P$ que, en general, será función de la posición, veamos cuál es la expresión del vector $\vec{d}\vec{r} = P'Q'$.

De la Figura 3.3 se desprende:

$$\vec{d}\vec{r} = \vec{d}\vec{r} + \vec{\delta}_Q - \vec{\delta}_P \quad (3.5.9)$$

y teniendo en cuenta (3.5.4), adopta la forma

$$[\vec{d}\vec{r}] = [\vec{d}\vec{r}] + [M][\vec{d}\vec{r}] = [I + H][\vec{d}\vec{r}] + [D][\vec{d}\vec{r}] \quad (3.5.10)$$

Veamos el significado de cada matriz del segundo miembro de esta expresión:

- $[I + H]$ es una matriz infinitesimal y, por ser $[H]$ una matriz hemisimétrica, representa un giro infinitesimal.
- $[D]$ es una matriz simétrica que llamaremos *matriz de deformación*. Aplicada al vector $\vec{d}\vec{r}$ le produce cambio de módulo y cambio de dirección.

Estudiemos separadamente el efecto producido por las matrices $[H]$ y $[D]$, y el papel que juega cada una de ellas en el proceso de deformación del sólido elástico.

3.6. Matriz de giro

Para mejor comprender el significado físico de la matriz $[H]$ veamos que el vector $[H][\vec{dr}]$ se puede expresar como el producto vectorial

$$[H][\vec{dr}] = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p \times \vec{dr}^* \quad (3.6.1)$$

En efecto, fácilmente se comprueba que este producto vectorial

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p \times \vec{dr} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right] \vec{i} + \right. \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \right] \vec{j} + \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] \vec{k} \right\} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

* Se define el rotacional de un campo vectorial $\vec{V} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$ como un vector que en coordenadas cartesianas tiene por expresión

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k}$$

coincide con

$$[H][\vec{dr}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (3.6.3)$$

La forma (3.6.1) nos recuerda el campo de velocidades de los puntos de un sólido rígido, en el que la rotación $\vec{\omega}$ fuera igual a $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_P$. Como el vector $[H][\vec{dr}]$ es perpendicular a $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_P$ (y, por tanto, paralelo al plano λ perpendicular a él) y también al vector de posición \vec{dr} del punto Q del entorno de P (Fig. 3.4), quiere esto decir que la multiplicación de la matriz $[H]$ por el vector \vec{dr} que define la posición de un punto del entorno de P va a producir un giro del entorno en su conjunto, como si se tratara de un sólido rígido y, por consiguiente, podemos decir que no ha producido ninguna deformación propiamente dicha, ya que no se produce variación relativa alguna entre la distancia de dos puntos cualesquiera del entorno.

El vector giro asociado a la matriz $[H]$ será:

$$\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_P = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} \quad (3.6.4)$$

siendo

$$p_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad p_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad p_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.6.5)$$

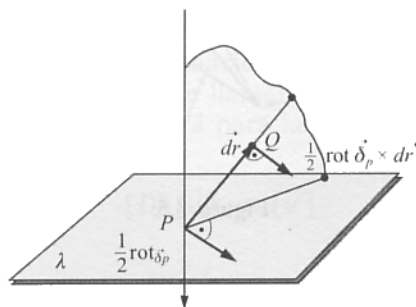


Figura 3.4.

La matriz $[H]$, en función de estas componentes del vector giro, se puede poner en la forma

$$[H] = \begin{pmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6.6)$$

La ecuación del *eje de giro* se obtendría como la de una recta que pasara por $P(x_o, y_o, z_o)$ y fuera paralela a $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p$, es decir

$$\frac{x - x_o}{p_x} = \frac{y - y_o}{p_y} = \frac{z - z_o}{p_z} \quad (3.6.7)$$

La expresión (3.5.10) toma la forma

$$\vec{d'r} = \vec{dr} + \frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p \times \vec{dr} + [D][\vec{dr}] \quad (3.6.8)$$

Según esto, de la Figura 3.5 se deduce que el vector \vec{dr} que tiene por origen un punto P de un sólido elástico y extremo otro punto Q de su entorno antes de la deformación, se convierte, después de producida ésta, en otro vector $\vec{d'r}$ que se puede obtener a partir de aquél mediante los siguientes pasos:

1.º Una traslación definida por el vector desplazamiento $\vec{\delta}_p$ del punto P , mediante la cual \vec{PQ} pasa a $\vec{P'Q_1}$.

2.º Un giro determinado por la matriz hemisimétrica $[H]$ por el que $\vec{P'Q_1}$ pasa a $\vec{P'Q_2}$, cuyo valor es $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p^*$.

3.º Una deformación definida por la matriz simétrica $[D]$ mediante la cual $\vec{P'Q_2}$ pasa finalmente a la posición $\vec{P'Q'}$.

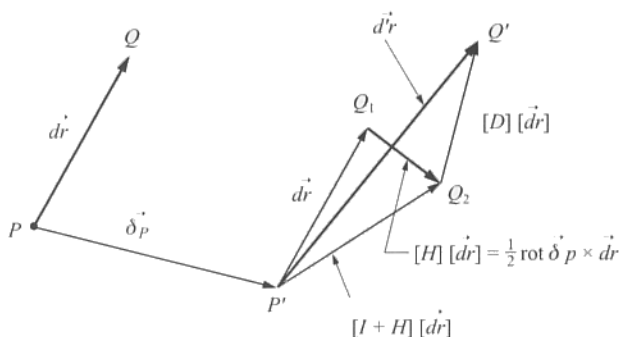


Figura 3.5.

* No debe extrañar el resultado aparentemente contradictorio de ser $[I+H][\vec{dr}]$ el vector \vec{dr} girado un cierto ángulo (conservando el módulo), y ser $[H][\vec{dr}] = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p \times \vec{dr}$ perpendicular a \vec{dr} , ya que el módulo de $[H][\vec{dr}]$ es un infinitésimo respecto de \vec{dr} (véase la Fig. 3.5).

3.7. Matriz de deformación. Significado de sus componentes

Según acabamos de ver, fijado un punto P , los dos primeros pasos —traslación y giro— son comunes para todos los puntos del entorno de P , por lo que no tienen influencia en la deformación propiamente dicha, ya que no se produce variación relativa alguna de las distancias entre las partículas del sólido elástico.

Es por ello que la deformación viene dada por la transformación $[D][\vec{dr}]$, y de ahí que la matriz $[D]$ se denomine *matriz de deformación*.

Como lo que nos interesa es averiguar la variación relativa de la distancia entre el punto P y uno cualquiera Q de su entorno, centraremos nuestro interés en el estudio de la transformación definida por $[D]$.

Si hacemos

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} ; & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (3.7.1)$$

la matriz de deformación toma la forma

$$[D] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (3.7.2)$$

Al ser la matriz $[D]$ simétrica, existen en P tres direcciones, perpendiculares entre sí, tales que el vector dado por la transformación $[D][\vec{dr}]$ no cambia de dirección sino solamente de módulo. Estas direcciones se llaman principales. Si $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ es un vector unitario en la dirección de \vec{dr} , se verificará para las direcciones principales

$$[D][\vec{u}] = \varepsilon[\vec{u}] \quad (3.7.3)$$

que se puede poner

$$[D - \varepsilon I][\vec{u}] = [\vec{0}] \quad (3.7.4)$$

Esta ecuación matricial da lugar al sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{cases} (\varepsilon_x - \varepsilon) \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \beta + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \gamma = 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \alpha + (\varepsilon_y - \varepsilon) \beta + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \gamma = 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \beta + (\varepsilon_z - \varepsilon) \gamma = 0 \end{cases} \quad (3.7.5)$$

cuya condición de compatibilidad nos proporciona la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (3.7.6)$$

De esta ecuación cúbica en ε se obtienen sus raíces $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, que se denominan *deformaciones principales*. De manera análoga a como se han obtenido en la matriz de tensiones, se deducen los siguientes invariantes:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e \quad (3.7.7)$$

llamado *invariante lineal o dilatación cúbica unitaria*

$$I_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{xz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 \quad (3.7.8)$$

es el *invariante cuadrático*.

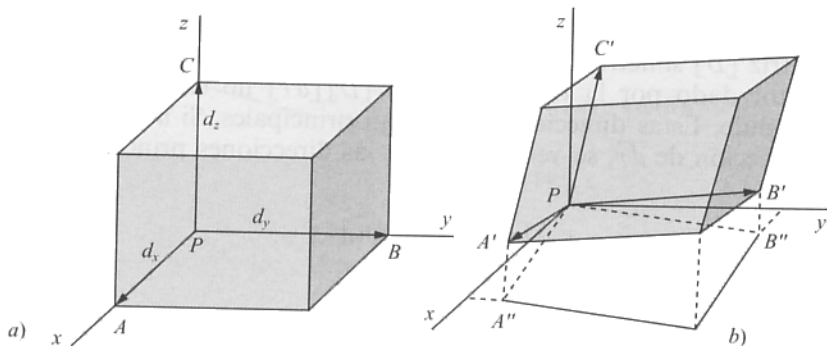


Figura 3.6.

Finalmente, tenemos el *invariante cúbico*

$$I_3 = |D| \quad (3.7.9)$$

Los términos de la matriz de deformación tienen un fácil significado. Los de la diagonal principal, por ejemplo $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ representa la diferencia de corrimientos correspondiente a dos puntos distanciados la unidad en la dirección del eje x .

$$\frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u\right)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \quad (3.7.10)$$

es decir, los términos de la diagonal principal de la matriz de deformación son las deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones de los ejes coordenados respectivos.

De los términos rectangulares fijémonos, por ejemplo, en

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.7.11)$$

De la Figura 3.7, teniendo en cuenta que las primeras derivadas del vector corrimiento son infinitésimos de primer orden, resulta

$$\left. \begin{array}{l} \text{tg } \alpha = \alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{tg } \beta = \beta = \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha + \beta \quad (3.7.12)$$

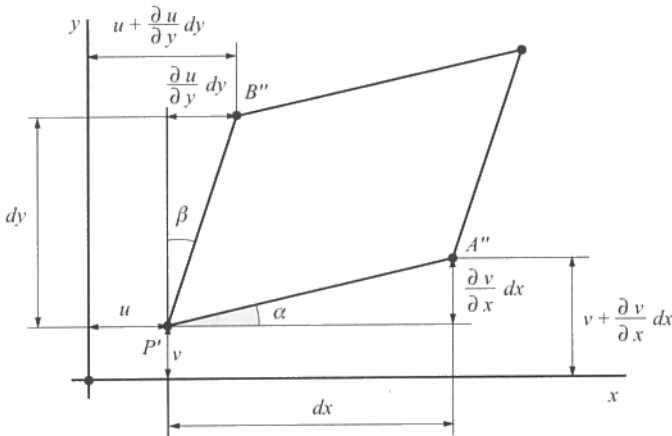


Figura 3.7.

Por consiguiente, $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ representa la variación angular experimentada por un ángulo inicialmente recto de lados paralelos a los ejes coordenados x e y . Análogo significado tendrán los otros dos términos γ_{xz} y γ_{yz} .

Se observa que si la γ es positiva, el ángulo inicialmente recto correspondiente disminuye. En cambio, si es negativa, el ángulo aumenta.

Si tomamos en P un sistema de ejes coincidentes con las direcciones principales, la matriz de deformación se reduce a su forma diagonal

$$[D] = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.7.13)$$

Visto el significado de las componentes de la matriz de deformación, de esta forma diagonal se deduce:

1.º Las raíces de la ecuación característica representan las deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones principales.

2.º Las deformaciones angulares en los planos principales son nulas.

Vemos que las deformaciones unitarias principales no son otra cosa que los autovalores o valores propios de la matriz de deformación.

Volviendo a la Figura 3.4 consideremos que \vec{dr} coincide con una de las direcciones principales. En este caso

$$[D][\vec{dr}] = \varepsilon[\vec{dr}]$$

y la expresión (3.6.8) toma la forma

$$[\vec{dr}] = (1 + \varepsilon)[\vec{dr}] + \frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p \times \vec{dr} \quad (3.7.14)$$

Observamos que si \vec{dr} es coincidente con una dirección principal, la matriz $[D]$ no varía su dirección, por lo que el giro experimentado por las tres direcciones principales es el mismo, es decir, igual al giro del entorno de P , de valor $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p$.

Comparando las Figuras 3.5 y 3.8 se observa que el giro de una dirección arbitraria no tiene el valor $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p$, si ésta no es una dirección principal, ya que para cualquier

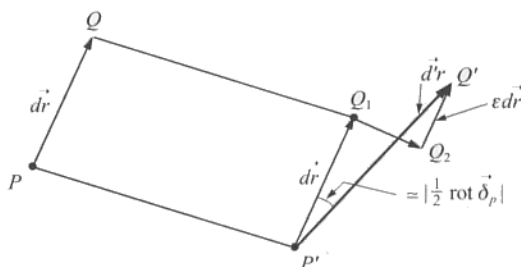


Figura 3.8.

dirección que no coincida con las direcciones principales la matriz $[D]$ modifica la dirección de \vec{dr} .

3.8. Deformación de ángulos

Consideremos con vértice en el punto P el ángulo φ_{12} formado por las direcciones definidas por los vectores \vec{dr}_1 y \vec{dr}_2 . Sean \vec{dr}'_1 y \vec{dr}'_2 los vectores que definen las direcciones transformadas en la deformación, y sea φ'_{12} el ángulo φ_{12} deformado (Fig. 3.9).

Definimos la deformación angular como

$$\Gamma_{12} = \varphi_{12} - \varphi'_{12} \quad (3.8.1)$$

Veamos cómo hacemos su cálculo.

Expresemos los cosenos de los ángulos φ_{12} y φ'_{12} .

$$\cos \varphi_{12} = \frac{\vec{dr}_1 \cdot \vec{dr}_2}{dr_1 \cdot dr_2} = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = [\vec{u}_1]^T [\vec{u}_2] \quad (3.8.2)$$

$$\cos \varphi'_{12} = \cos (\varphi_{12} - \Gamma_{12}) = \frac{[\vec{dr}'_1]^T [\vec{dr}'_2]}{dr'_1 \cdot dr'_2} \quad (3.8.3)$$

y como, según la expresión (3.5.10)

$$\begin{aligned} [\vec{dr}'_1] &= [I + H + D] [\vec{dr}_1] \\ [\vec{dr}'_2] &= [I + H + D] [\vec{dr}_2] \end{aligned}$$

podemos poner

$$\begin{aligned} \cos (\varphi_{12} - \Gamma_{12}) &= \frac{[\vec{dr}'_1]^T [I + H + D]^T [I + H + D] [\vec{dr}_2]}{dr'_1 \cdot dr'_2} = \\ &= \frac{[\vec{dr}_1]^T [I + 2D] [\vec{dr}_2]}{dr'_1 \cdot dr'_2} = \frac{[\vec{dr}_1]^T [\vec{dr}_2]}{dr'_1 \cdot dr'_2} + 2 \frac{[\vec{dr}_1]}{dr'_1} [D] \frac{[\vec{dr}_2]}{dr'_2} \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

habiendo despreciado los términos cuadrados de las matrices $[H]$ y $[D]$.

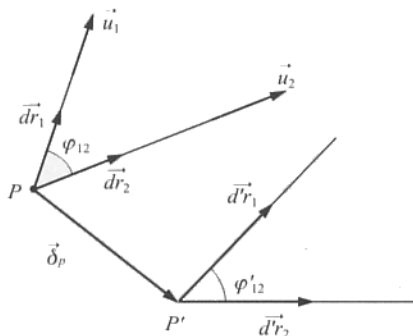


Figura 3.9.

Si multiplicamos y dividimos esta última expresión por $dr_1 \cdot dr_2$, y teniendo en cuenta que

$$\frac{d\vec{r}_1}{dr_1} = \vec{u}_1 ; \quad \frac{d\vec{r}_2}{dr_2} = \vec{u}_2 ,$$

queda

$$\cos(\varphi_{12} - \Gamma_{12}) = \frac{dr_1 \cdot dr_2}{dr_1 \cdot dr_2} ([\vec{u}_1]^T [\vec{u}_2] + 2 [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_2]) \quad (3.8.5)$$

Como por definición de deformación longitudinal unitaria

$$\varepsilon_n = \frac{d'r - dr}{dr} = \frac{d'r}{dr} - 1 \Rightarrow \frac{d'r}{dr} = 1 + \varepsilon_n$$

es decir

$$\frac{d'r_1}{dr_1} = 1 + \varepsilon_{n_1} ; \quad \frac{d'r_2}{dr_2} = 1 + \varepsilon_{n_2} \quad (3.8.6)$$

siendo ε_{n_1} y ε_{n_2} las deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones definidas por \vec{u}_1 y \vec{u}_2 , respectivamente.

De (3.8.5) y teniendo en cuenta (3.8.2), se deduce

$$(1 + \varepsilon_{n_1})(1 + \varepsilon_{n_2}) \cos(\varphi_{12} - \Gamma_{12}) = \cos \varphi_{12} + 2 [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_2]$$

Desarrollando y suponiendo que Γ_{12} es muy pequeño y que $(1 + \varepsilon_{n_1})(1 + \varepsilon_{n_2}) \simeq 1 + \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2}$, tenemos

$$(1 + \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2})(\cos \varphi_{12} + \Gamma_{12} \sin \varphi_{12}) = \cos \varphi_{12} + 2 [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_2]$$

$$(1 + \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2}) \cos \varphi_{12} + (1 + \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2}) \Gamma_{12} \sin \varphi_{12} = \cos \varphi_{12} + 2 [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_2]$$

Finalmente, como $1 + \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} \simeq 1$, queda

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_{n_2}) \cos \varphi_{12} + \Gamma_{12} \sin \varphi_{12} = 2 [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_2] \quad (3.8.7)$$

de donde, despejando, obtenemos

$$\Gamma_{12} = \frac{2 [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_2] - (\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2}) \cos \varphi_{12}}{\sin \varphi_{12}} \quad (3.8.8)$$

expresión que nos permite calcular la variación angular experimentada por el ángulo φ_{12} en la deformación.

3.9. Vector deformación unitaria en una dirección cualquiera. Componentes intrínsecas

Según hemos visto en el apartado anterior la deformación que experimenta un vector $d\vec{r}$ viene definida por $[D][d\vec{r}]$ (Fig. 3.10).

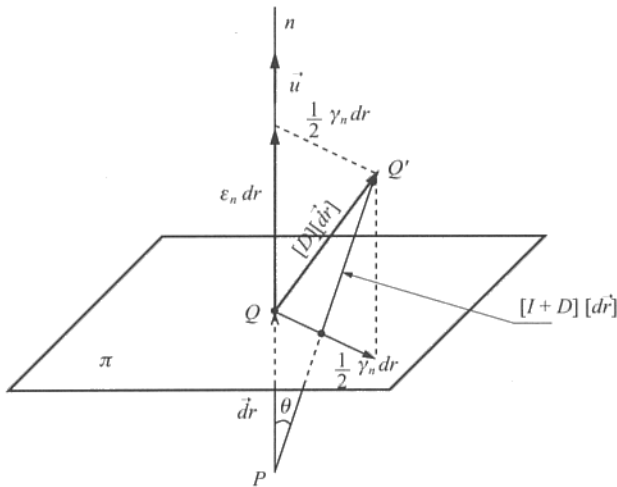


Figura 3.10.

Definimos como *vector deformación unitaria* en la dirección determinada por $\vec{\Delta r}$, en el punto P , el límite

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{[D][\vec{\Delta r}]}{\Delta r} = [D] \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{[\vec{\Delta r}]}{\Delta r} = [D] \frac{[d\vec{r}]}{dr} = [D][\vec{u}] \quad (3.9.1)$$

siendo \vec{u} el vector unitario en la dirección de \vec{dr} .

De esta definición se deduce que la deformación unitaria en la dirección determinada por el vector unitario \vec{u} es un vector colineal con $[D][\vec{dr}]$ que llamaremos *vector deformación unitaria* y simbolizaremos por $\vec{\varepsilon}$.

$$[\vec{\varepsilon}] = [D][\vec{u}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.9.2)$$

Las proyecciones del vector $\vec{\varepsilon}$ sobre la dirección definida por \vec{u} y sobre el plano π perpendicular a dicha dirección son sus *componentes intrínsecas*.

La primera, ε_n , en la dirección de \vec{u} , es la *deformación longitudinal unitaria* en esta dirección. Su expresión, en función de las componentes de la matriz de deformación, se obtiene a partir del producto escalar

$$\varepsilon_n = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{u} = [\vec{u}]^T [D][\vec{u}] \quad (3.9.3)$$

es decir, si (α, β, γ) son las componentes de \vec{u}

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= (\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + \gamma_{xy} \alpha \beta + \gamma_{yz} \beta \gamma + \gamma_{xz} \alpha \gamma \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

que se reduce a

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1 \alpha^2 + \varepsilon_2 \beta^2 + \varepsilon_3 \gamma^2 \quad (3.9.5)$$

cuando el triedro de referencia coincide con las direcciones principales de la matriz $[D]$.

La otra componente que denotamos por $\frac{1}{2} \gamma_n$ representa la *deformación transversal unitaria*. Veamos cuál es su significado físico.

Si en la expresión (3.6.8) prescindimos del giro del entorno de P definido por la matriz $[H]$, ya que, como hemos visto, no afecta a la deformación propiamente dicha, la citada expresión se reduce a:

$$[\vec{d}\vec{r}] = [\vec{d}\vec{r}] + [D][\vec{d}\vec{r}] = [I + D][\vec{d}\vec{r}] \quad (3.9.6)$$

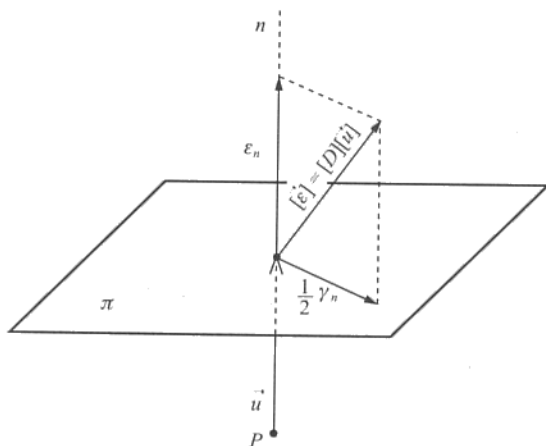


Figura 3.11.

De la Figura 3.10 se deduce

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{1}{2} \gamma_n dr}{(1 + \varepsilon_n) dr} \simeq \frac{1}{2} \gamma_n \quad (3.9.7)$$

ya que $\varepsilon_n \ll 1$. Como $\frac{1}{2} \gamma_n$ es un valor muy pequeño, podemos confundir tangente con ángulo

$$\theta = \frac{1}{2} \gamma_n \quad (3.9.8)$$

es decir, filtrada la traslación del punto P y el giro de todo su entorno, la deformación transversal unitaria no es sino la variación angular que experimenta en P la dirección definida por el vector \vec{u} , en la deformación definida por la matriz $[D]$.

Las componentes intrínsecas del vector deformación unitaria están relacionadas con su norma mediante la ecuación

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_n^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)^2 \quad (3.9.9)$$

3.10. Ley de dualidad entre los estados tensional y de deformación

En los epígrafes anteriores hemos podido observar una cierta analogía formal entre el vector tensión $\vec{\sigma}$ del estado tensional estudiado en el capítulo anterior y el vector deformación unitaria $\vec{\varepsilon}$ del estado de deformación, existentes en un sólido elástico. En efecto, podemos poner:

ESTADO TENSIONAL

* Matriz de tensiones: $[T]$

Sus autovalores son las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, y sus autovectores definen las direcciones principales.

* Vector tensión

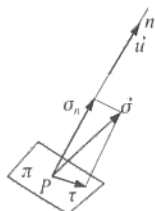


Figura 3.12a.

* Componentes intrínsecas: σ_n, τ

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2$$

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}]$$

ESTADO DE DEFORMACIÓN

* Matriz de deformación: $[D]$

Sus autovalores son las deformaciones principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, y sus autovectores definen las direcciones principales.

* Vector deformación unitaria

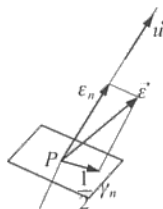


Figura 3.12b.

* Componentes intrínsecas: $\varepsilon_n, \frac{1}{2} \gamma_n$

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_n^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)^2$$

$$[\vec{\varepsilon}] = [D][\vec{u}]$$

Esto nos indica la existencia de una ley de dualidad entre los estados tensional y de deformaciones, por lo que todo lo dicho para el estado tensional lo podemos extender al estado de deformación sin más que sustituir:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}, & \text{ por } \vec{\varepsilon} \\ [T], & \text{ por } [D] \\ \sigma_n, \tau, & \text{ por } \varepsilon_n, \frac{1}{2} \gamma_n \\ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, & \text{ por } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \end{aligned}$$

Basándonos en esta ley dual expondremos en siguientes epígrafes importantes propiedades del estado de deformación, análogas a las obtenidas para el estado tensional en el capítulo anterior.

3.11. Elipsoide de deformaciones

El lugar geométrico de los extremos de los vectores $\vec{\varepsilon}$ en un punto P de un sólido elástico para las infinitas direcciones de vértice P , supuestos con orígenes coincidentes en P , es un elipsoide denominado *elipsoide de deformaciones* (Fig. 3.13).

Su ecuación, referida a un sistema de referencia cuyos ejes son coincidentes con las direcciones principales, es

$$\frac{x^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{y^2}{\varepsilon_2^2} + \frac{z^2}{\varepsilon_3^2} = 1 \quad (3.11.1)$$

Las longitudes de los semiejes de este elipsoide son precisamente los valores de las deformaciones principales.

3.12. Cuádricas indicatrices de deformaciones

Considerando sobre la semirrecta que pasa por el punto P , definida por el vector \vec{u} , un punto M tal que

$$\vec{PM} = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon_n|}} \vec{u} \quad (3.12.1)$$

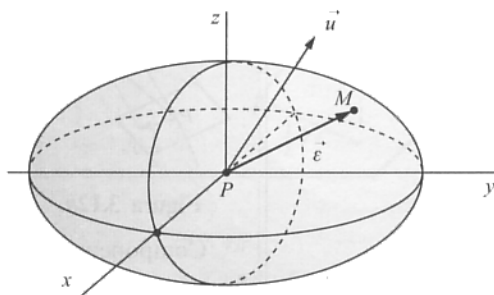


Figura 3.13.

el lugar geométrico de M al variar \vec{u} está formado por dos cuádricas cuyos ejes coinciden con las direcciones principales de la matriz de deformación y que llamaremos *cuádricas indicatrices de deformaciones*.

Sus ecuaciones, referidas a un sistema de ejes coincidentes con las direcciones principales, son

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = c = \pm 1 \quad (3.12.2)$$

La naturaleza de estas cuádricas depende del signo de las deformaciones principales. Supondremos éstas ordenadas de mayor a menor, es decir, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$. Veamos los casos que se pueden presentar:

1.º Las tres deformaciones principales son positivas: $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 > 0$; $\varepsilon_3 > 0$.

Las dos cuádricas se reducen a un elipsoide real para $c = +1$, ya que para $c = -1$ el elipsoide es imaginario. Se deduce que la deformación longitudinal unitaria es positiva en todas las direcciones.

2.º Dos deformaciones principales son positivas y otra negativa: $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 > 0$; $\varepsilon_3 < 0$.

Para $c = +1$ se tiene un hiperboloide de una hoja, y para $c = -1$ un hiperboloide de dos hojas.

Ambos hiperboloides tienen el mismo cono asintótico, de ecuación

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = 0 \quad (3.12.3)$$

Se deduce que si la dirección que se considera es exterior al cono asintótico, cortando su línea de acción al hiperboloide de una hoja ($c = +1$), la deformación longitudinal unitaria es positiva y, por tanto, se produce alargamiento.

Si, por el contrario, la dirección es interior al cono asintótico, corta al hiperboloide de dos hojas ($c = -1$), en esa dirección se produce acortamiento.

Si la dirección es coincidente con una de las generatrices del cono asintótico, entonces $\varepsilon_n = 0$, es decir, la deformación longitudinal unitaria es nula y el vector deformación unitaria solamente tiene componente transversal.

3.º Una deformación principal es positiva y las otras dos negativas: $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 < 0$; $\varepsilon_3 < 0$.

Para $c = +1$ se tiene un hiperboloide de dos hojas, y para $c = -1$ un hiperboloide de una hoja, ambos con el mismo cono asintótico.

Si la dirección es interior al cono asintótico, o sea, si corta al hiperboloide de dos hojas ($c = +1$), la deformación longitudinal unitaria es positiva y en esa dirección se produce alargamiento.

Si, por el contrario, la dirección es exterior al cono asintótico, corta al hiperboloide de una hoja ($c = -1$) y se produce acortamiento.

Si la dirección es coincidente con una generatriz del cono asintótico, igual que en el caso anterior, $\varepsilon_n = 0$ y el vector deformación unitaria solamente tiene componente transversal.

4.º Las tres deformaciones principales son negativas: $\varepsilon_1 < 0$; $\varepsilon_2 < 0$; $\varepsilon_3 < 0$.

Las dos cuádricas se reducen a un elipsoide real para $c = -1$. Esto nos indica que se produce acortamiento en todas las direcciones.

Existe una importante relación entre dirección y vector deformación unitaria correspondiente con las cuádricas indicatrices, ya que el vector deformación unitaria correspon-

diente a una determinada dirección es perpendicular al plano conjugado de dicha dirección respecto de las cuádricas indicatrices de deformación (Fig. 3.14).

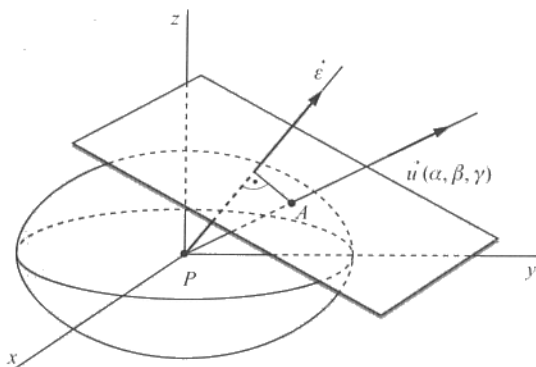


Figura 3.14.

3.13. Cuádricas directrices de deformaciones

Considerando ahora los puntos M tales que

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\vec{\varepsilon}}{\sqrt{|\varepsilon_n|}} \quad (3.13.1)$$

el lugar geométrico del punto M tiene por ecuaciones

$$\frac{x^2}{\varepsilon_1} + \frac{y^2}{\varepsilon_2} + \frac{z^2}{\varepsilon_3} = c = \pm 1 \quad (3.13.2)$$

que corresponde a dos cuádricas que llamaremos *cuádricas directrices de deformaciones*.

Por análogo razonamiento al seguido en la discusión de la naturaleza de las cuádricas indicatrices de deformaciones, podemos afirmar que las cuádricas directrices serán:

- Un elipsoide real y otro imaginario, si las tres deformaciones principales tienen el mismo signo.
- Un hiperboloide de una hoja y otro de dos hojas, ambos con cono asintótico común, si dos deformaciones principales tienen el mismo signo y la restante el opuesto.

En los casos $a)$ las conclusiones a que se llega son exactamente iguales a las obtenidas en los casos 1.º y 4.º de las cuádricas indicatrices, es decir, en el punto que se considera se produce en todas las direcciones alargamiento, en el caso 1.º, y acortamiento en el caso 4.º.

Cuando las deformaciones tienen distinto signo, los dos hiperboloides admiten el cono asintótico común

$$\frac{x^2}{\varepsilon_1} + \frac{y^2}{\varepsilon_2} + \frac{z^2}{\varepsilon_3} = 0 \quad (3.13.3)$$

Ahora, la interpretación física es la siguiente: en aquellas direcciones a las que corresponden unos vectores deformación unitaria cuyas líneas de acción cortan al hiperboloide que se obtiene para $c = +1$, se produce alargamiento.

Si, por el contrario, la línea de acción de $\vec{\epsilon}$ corta al hiperboloide que corresponde a $c = -1$, en las direcciones correspondientes se produce acortamiento.

Finalmente, si la línea de acción de $\vec{\epsilon}$ coincide con una generatriz del cono asintótico, como $\vec{\epsilon}$ carece de componente longitudinal, la dirección correspondiente es perpendicular a dicha generatriz.

Como en este último caso la dirección coincide con una generatriz del cono asintótico de las cuádras indicatrices, se deduce que las generatrices de ambos conos asintóticos son perpendiculares entre sí.

3.14. Representación gráfica plana de las componentes intrínsecas del vector deformación unitaria. Círculos de Mohr

Basándonos en la ley de dualidad existente entre los estados tensional y de deformación podemos representar gráficamente las componentes intrínsecas del vector deformación unitaria en un punto P de un sólido elástico, análogamente a como hemos representado las correspondientes al vector tensión en el capítulo anterior.

Si en un sistema de referencia cartesiano ortogonal, en el que en el eje de abscisas se representan las deformaciones longitudinales unitarias (ϵ_n) y en el eje de ordenadas las deformaciones transversales unitarias ($\frac{1}{2} \gamma_n$), los puntos cuyas coordenadas son las componentes intrínsecas de los vectores deformación unitaria correspondientes a las infinitas direcciones de la radiación de vértice el punto P , pertenecen al área sombreada de la Figura 3.15, es decir, son interiores al círculo mayor de Mohr (C_2) y exterior a los otros dos círculos menores (C_1 y C_3).

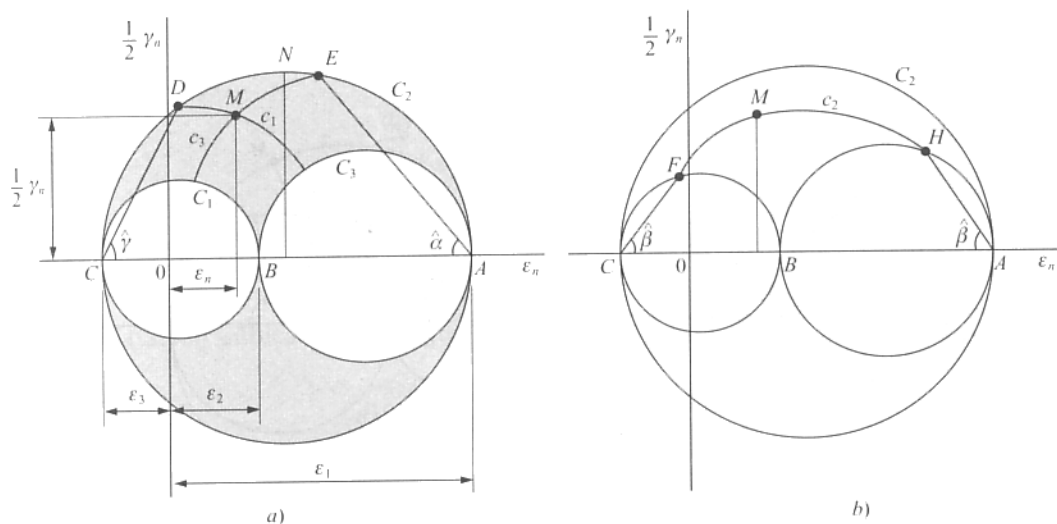


Figura 3.15.

Los círculos de Mohr de deformaciones nos permiten calcular la dirección a la que corresponde unas determinadas componentes intrínsecas del vector deformación unitaria.

En efecto, por el punto representativo $M(\varepsilon_n, \frac{1}{2}\gamma_n)$ se trazan las circunferencias c_1 y c_3 que pasan por él y son concéntricas a las C_1 y C_3 , respectivamente. Estas circunferencias cortan a C_2 en los puntos D y E (Fig. 3.15a). Uniendo A con E y C con D se obtienen los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ que forma con los ejes principales correspondientes a ε_1 y ε_3 , la dirección cuyo punto representativo es $M(\varepsilon_n, \frac{1}{2}\gamma_n)$. El ángulo $\hat{\beta}$ que forma con la dirección principal correspondiente a ε_2 se puede obtener también gráficamente como se indica en la Figura 3.15b.

De la ley de dualidad existente entre los estados de deformación y tensional se deduce también la correspondencia entre los puntos de las circunferencias C_1 , C_2 y C_3 y las direcciones correspondientes contenidas en los planos yz , xz y xy , respectivamente (Fig. 3.16).

Finalmente, de la observación de los círculos de Mohr se desprende que existen dos direcciones a las que corresponden deformaciones transversales unitarias máximas. Son los puntos N y N' de la Figura 3.17.

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_n\right)_{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \quad (3.14.1)$$

Por tanto, las direcciones que experimentan esta deformación transversal unitaria máxima son las bisectrices de los ejes principales xz .

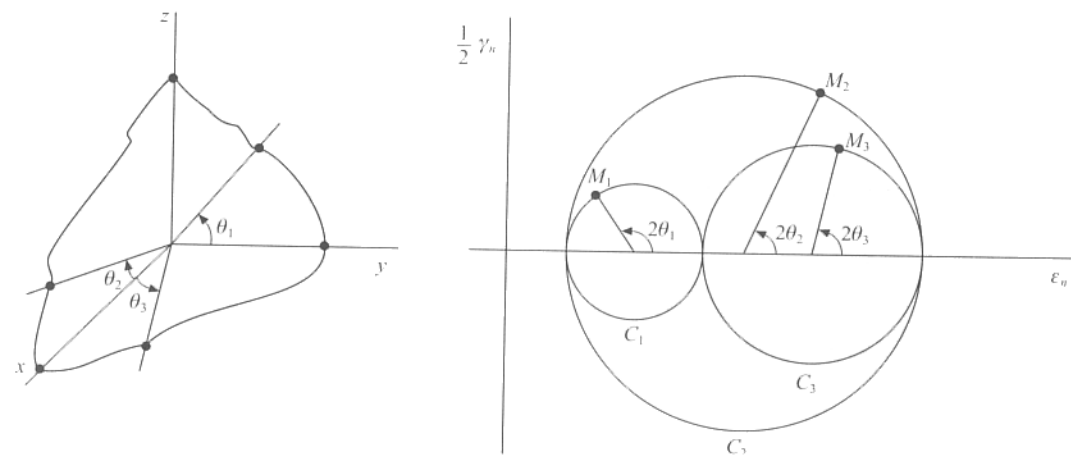


Figura 3.16.

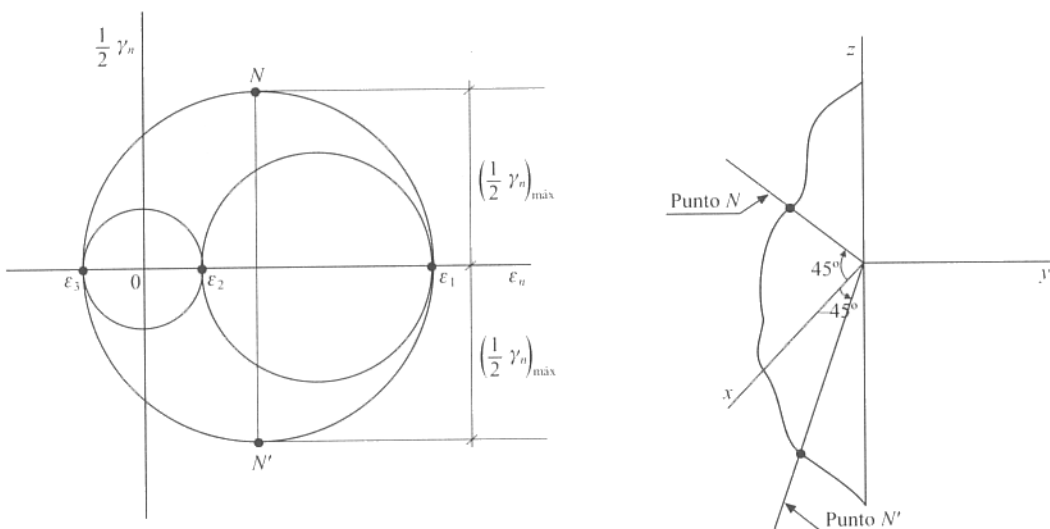


Figura 3.17.

3.15. Deformación volumétrica

Veamos ahora el significado físico del primer invariante de la matriz de deformación. Tomando el sistema de referencia de ejes coincidentes con las direcciones principales, el volumen elemental $dV = dx \, dy \, dz$ se transforma en un volumen $dV' = d'x \, d'y \, d'z$. Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ son las deformaciones principales, tenemos

$$\varepsilon_1 = \frac{d'x - dx}{dx} \Rightarrow d'x = (1 + \varepsilon_1) dx$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d'y - dy}{dy} \Rightarrow d'y = (1 + \varepsilon_2) dy$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d'z - dz}{dz} \Rightarrow d'z = (1 + \varepsilon_3) dz$$

La dilatación cúbica unitaria, que llamaremos e , es

$$e = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{d'x \, d'y \, d'z - dx \, dy \, dz}{dx \, dy \, dz} = \frac{dx \, dy \, dz [(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1]}{dx \, dy \, dz} \simeq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.15.1)$$

Vemos, pues, que el primer invariante de la matriz de deformación nos da el valor de la dilatación cúbica unitaria que se produce en el sólido elástico a causa de la deformación definida por la matriz $[D]$.

Existe una interesante descomposición de la matriz de deformación en suma de otras dos. Tomando como sistema de referencia el de ejes coincidentes con las direcciones principales, si ε_m es la media aritmética de los términos de la diagonal principal

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \quad (3.15.2)$$

podemos expresar $[D]$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} [D] &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \varepsilon_m \end{pmatrix} = \\ &= [D_0] + [D_d] \end{aligned} \quad (3.15.3)$$

La primera matriz $[D_0]$, denominada *matriz esférica*, representa a un estado de deformación en el que se produce solamente cambio de volumen. La deformación volumétrica viene dada por la dilatación cúbica unitaria

$$e = 3 \varepsilon_m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (3.15.4)$$

Por el contrario, la matriz $[D_d]$, llamada *matriz desviadora*, produce deformación volumétrica nula, según se deduce del valor del primer invariante

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 3 \varepsilon_m = 0 \quad (3.15.5)$$

Esto nos indica que en el estado de deformación que representa $[D_d]$ no se produce cambio de volumen, sino solamente cambio de forma.

3.16. Condiciones de compatibilidad entre las componentes de la matriz de deformación

Supuesto referido el sólido elástico a un sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$, si conocemos el desplazamiento $\vec{\delta}$ de todos los puntos del mismo es evidente que podemos calcular de forma inmediata la matriz de deformación $[D]$ sin más que derivar sus componentes, de acuerdo con las ecuaciones de definición. Sin embargo, no existe esta evidencia cuando se trata de la proposición recíproca, es decir, dada una matriz de deformación $[D]$ arbitraria no se puede asegurar que se puedan deducir de ella las funciones u , v y w .

Observemos que el cálculo del vector desplazamiento, cuya solución tiene que ser única en cada punto, se tiene que hacer a partir de la matriz de deformación, mediante la resolución del siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (3.16.1)$$

compuesto de seis ecuaciones con tres incógnitas. Es entonces evidente que las componentes de la matriz $[D]$ no pueden ser arbitrarias. Veamos cuáles son las condiciones que se tienen que cumplir para que el sistema sea compatible y, por tanto, integrable.

Hagamos

$$p_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad p_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad p_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.16.2)$$

Mediante las ecuaciones (3.16.1) y (3.16.2) se pueden despejar las derivadas de u , v , w respecto de x , y , z , obteniendo el sistema en derivadas parciales

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} - p_z & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} + p_y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} + p_z & \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y & \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} - p_x \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} - p_y & \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} + p_x & \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z \end{array} \right. \quad (3.16.3)$$

equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} du = \varepsilon_x dx + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} - p_z \right) dy + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} + p_y \right) dz \\ dv = \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} + p_z \right) dx + \varepsilon_y dy + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} - p_x \right) dz \\ dw = \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} - p_y \right) dx + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} + p_x \right) dy + \varepsilon_z dz \end{array} \right. \quad (3.16.4)$$

cuyas condiciones necesarias de integrabilidad se obtienen igualando las derivadas cruzadas

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p_z}{\partial x} ; & \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial p_y}{\partial y} ; & \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p_x}{\partial y} ; & \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial p_z}{\partial z} ; & \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p_y}{\partial z} ; & \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial p_x}{\partial x} ; & \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial p_x}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \end{cases} \quad (3.16.5)$$

Este sistema nos permite despejar las derivadas de p_x, p_y, p_z , respecto de las variables:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} ; & \frac{\partial p_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} ; & \frac{\partial p_x}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial p_y}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} ; & \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} ; & \frac{\partial p_y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \\ \frac{\partial p_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} ; & \frac{\partial p_z}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} ; & \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \end{cases} \quad (3.16.6)$$

equivalente a:

$$\begin{cases} dp_x = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} \right) dz \\ dp_y = \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz \\ dp_z = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) dz \end{cases} \quad (3.16.7)$$

cuyas condiciones necesarias de integrabilidad son llamadas *condiciones de integrabilidad o de compatibilidad* de la matriz de deformación, condiciones que son también suficientes.

Se comprueba que estas condiciones se reducen a las seis siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (3.16.8)$$

Obtenemos así las condiciones que tienen que verificar las componentes de la matriz de deformación para que ésta pueda representar un estado deformacional físicamente posible.

EJERCICIOS

- 3.1. El vector desplazamiento $\vec{\delta}_p$ de un punto P de un medio continuo elástico tiene de componentes, referidas a un sistema cartesiano ortogonal, las siguientes

$$u = 4 a x^2 ; \quad v = 8 a z^2 ; \quad w = -2 a y^2$$

estando expresadas las coordenadas en metros y siendo a una constante $a = 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Se pide:

- 1.º Calcular la matriz de deformación.
- 2.º Alargamientos y direcciones principales de deformación en el punto $P(1/2, 1, 1)$.

1.º A partir del corrimiento se obtiene de forma inmediata las componentes de la matriz de deformación

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 8 a x ; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 4 a (4z - y) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

$$[D] = \begin{pmatrix} 8a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a(4z - y) \\ 0 & 2a(4z - y) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.º En el punto $P(1/2, 1, 1)$ la matriz de deformación es

$$[D] = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6a \\ 0 & 6a & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\vec{u}(x, \beta, \gamma)$ define una dirección principal, se tendrá que verificar

$$[D][\vec{u}] = \varepsilon[\vec{u}]$$

es decir

$$[D - \varepsilon I][\vec{u}] = 0$$

ecuación matricial equivalente al sistema homogéneo

$$\begin{cases} (4a - \varepsilon)x = 0 \\ -\varepsilon\beta + 6a\gamma = 0 \\ 6a\beta - \varepsilon\gamma = 0 \end{cases}$$

cuya condición de compatibilidad

$$\begin{vmatrix} 4a - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 6a \\ 0 & 6a & -\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

nos proporciona la ecuación cúbica

$$\varepsilon^2(4a - \varepsilon) - 36a^2(4a - \varepsilon) = (4a - \varepsilon)(\varepsilon - 6a)(\varepsilon + 6a) = 0$$

cuyas raíces son los alargamientos unitarios principales

$$\varepsilon_1 = 6a ; \quad \varepsilon_2 = 4a ; \quad \varepsilon_3 = -6a$$

Las direcciones principales correspondientes son:

a) Para la raíz $\varepsilon_1 = 6a$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a \alpha = 0 \\ -6a\beta + 6a\gamma = 0 \\ 6a\beta - 6a\gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = \gamma \end{array}$$

$$\text{Como } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{j} + \vec{k})$$

b) Para la raíz $\varepsilon_2 = 4a$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -4a\beta + 6a\gamma = 0 \\ 6a\beta - 4a\gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = \gamma = 0 \quad \alpha = 1$$

$$\vec{u}_2 = \vec{i}$$

c) Para la raíz $\varepsilon_3 = -6a$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10a \alpha = 0 \\ 6a\beta + 6a\gamma = 0 \\ 6a\beta + 6a\gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = -\gamma \end{array}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad \gamma = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tomamos los signos de tal forma que el triedro $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ sea directo, es decir, $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$, se obtiene como tercera dirección principal

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{j} - \vec{k})$$

3.2. Las componentes cartesianas del vector desplazamiento $\vec{\delta}p$ de los puntos de un sólido elástico vienen dadas por las expresiones:

$$u = ax + 4ay \quad ; \quad v = 2az^2 - ay^2 \quad ; \quad w = ay^2 - 2ax^2 - \frac{a}{3}z^2$$

siendo a una constante. Se pide:

1.º Calcular la matriz del giro experimentado por un entorno del punto $P(2, 1, -3/2)$, así como el vector asociado a ella.

2.º Hallar la superficie transformada de una esfera de radio dr y centro el punto P .

1.º La matriz del giro según la ecuación (3.6.3), en un punto $P(x, y, z)$, es

$$[H] = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 2ax \\ -2a & 0 & 2az - ay \\ -2ax & -2az + ay & 0 \end{pmatrix}$$

Particularizada para el punto $P(2, 1, -3/2)$, se obtiene

$$[H] = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 4a \\ -2a & 0 & -4a \\ -4a & 4a & 0 \end{pmatrix}$$

El vector asociado a esta matriz es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\delta}_p &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax + 4ay & 2az^2 - ay^2 & ay^2 - 2ax^2 - \frac{a}{3}z^2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} [(2ay - 4az) \vec{i} + 4ax \vec{j} - 4a \vec{k}] \end{aligned}$$

En el punto $P(2, 1, -3/2)$, se obtiene

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\delta}_p = 2a(2 \vec{i} + 2 \vec{j} - \vec{k})$$

2.º Tomemos un sistema cartesiano con origen en el punto transformado de P , es decir, $P'(2 + 6a, 1 + \frac{7}{2}a, -\frac{3}{2} - \frac{31}{4}a)$, y ejes coincidentes con las direcciones principales de la matriz $[D]$ de deformación.

De la ecuación (3.6.8)

$$d\vec{r} = \vec{dr} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\delta}_p \times \vec{dr} + [D][d\vec{r}]$$

podemos prescindir del término $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\delta}_p \times \vec{dr}$, ya que se trata de un giro que afecta a todo el entorno de P y, por consiguiente, no produce deformación. Queda

$$d\vec{r} = \vec{dr} + [D][d\vec{r}]$$

que se puede poner en la forma

$$[d'\vec{r}] = [I + D][d\vec{r}]$$

Si $d'\vec{r} (x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha dr \\ \beta dr \\ \gamma dr \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, se obtiene

$$\frac{x^2}{[dr(1 + \varepsilon_1)]^2} + \frac{y^2}{[dr(1 + \varepsilon_2)]^2} + \frac{z^2}{[dr(1 + \varepsilon_3)]^2} = 1$$

Luego la esfera de radio dr se transforma en un elipsoide de ejes los principales de la matriz de deformación y longitudes de los semiejes $(1 + \varepsilon_1)dr$, $(1 + \varepsilon_2)dr$ y $(1 + \varepsilon_3)dr$, respectivamente.

ε_1 , ε_2 , ε_3 son las deformaciones principales, que calculamos a partir de la matriz de deformación particularizada para el punto P

$$[D] = \begin{pmatrix} a & 2a & -2ax \\ 2a & -2ay & 2az + ay \\ -2ax & 2az + ay & -\frac{2}{3}az \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a & -4a \\ 2a & -2a & -2a \\ -4a & -2a & a \end{pmatrix}$$

como raíces de su ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a - \varepsilon & 2a & -4a \\ 2a & -2a - \varepsilon & -2a \\ -4a & -2a & a - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\varepsilon^3 - 27a^2\varepsilon - 54a^3 = 0$$

de donde

$$\varepsilon_1 = 6a \quad ; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -3a$$

Por tanto, la ecuación del elipsoide, transformado de la esfera de radio dr , será:

$$\frac{x^2}{[dr(1 + 6a)]^2} + \frac{y^2}{[dr(1 - 3a)]^2} + \frac{z^2}{[dr(1 - 3a)]^2} = 1$$

que corresponde a un elipsoide de revolución de eje de simetría el eje x .

- 3.3. Sobre un bloque paralelepípedo cuyas longitudes de las aristas verifican la relación $a : b : c = 3 : 4 : 5$ actúa una sollicitación que lo deforma de tal manera que sus caras siguen siendo normales entre sí. Sabiendo que en todo punto las deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones de las aristas son $5 \cdot 10^{-2}$, $4 \cdot 10^{-2}$ y $3 \cdot 10^{-2}$, respectivamente, calcular la deformación longitudinal unitaria experimentada por la diagonal.

Si las caras siguen siendo normales entre sí, las direcciones de las aristas son direcciones principales. Tomaremos como sistema de referencia el $Oxyz$ (Fig. E3.3).

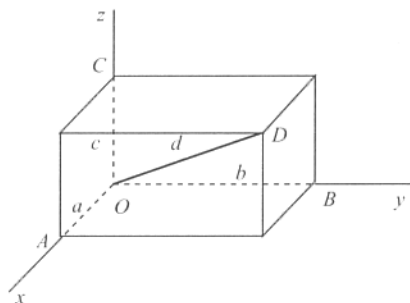


Figura E3.3.

Para una determinada dirección definida por \vec{u} (α , β , γ), la deformación longitudinal unitaria tiene por expresión:

$$\varepsilon_n = [\vec{u}]^T [D] [\vec{u}] = \varepsilon_1 \alpha^2 + \varepsilon_2 \beta^2 + \varepsilon_3 \gamma^2$$

Si \vec{u} tiene la dirección de la diagonal del paralelepípedo, como

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{3}{4} &\Rightarrow b = \frac{4}{3} a \\ \frac{a}{c} = \frac{3}{5} &\Rightarrow c = \frac{5}{3} a \end{aligned} \right\} d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{50}{9} a^2$$

se tiene

$$\alpha^2 = \frac{a^2}{d^2} = \frac{9}{50}; \quad \beta^2 = \frac{b^2}{d^2} = \frac{16}{50}; \quad \gamma^2 = \frac{c^2}{d^2} = \frac{25}{50}$$

Sustituyendo valores en la expresión de ε_n , se obtiene

$$\boxed{\varepsilon_n} = 5 \cdot 10^{-2} \frac{9}{50} + 4 \cdot 10^{-2} \frac{16}{50} - 3 \cdot 10^{-2} \frac{25}{50} = \boxed{6.8 \cdot 10^{-3}}$$

- 3.4. Una placa rectangular $OABC$ se deforma siendo su deformada la $O'A'B'C'$, según se indica en la Figura E3.4. Sabiendo que en la placa se crea un estado tensional homogéneo se pide:

- 1.º Calcular la matriz de deformación en los puntos de la placa.
- 2.º Hallar las deformaciones y direcciones principales.

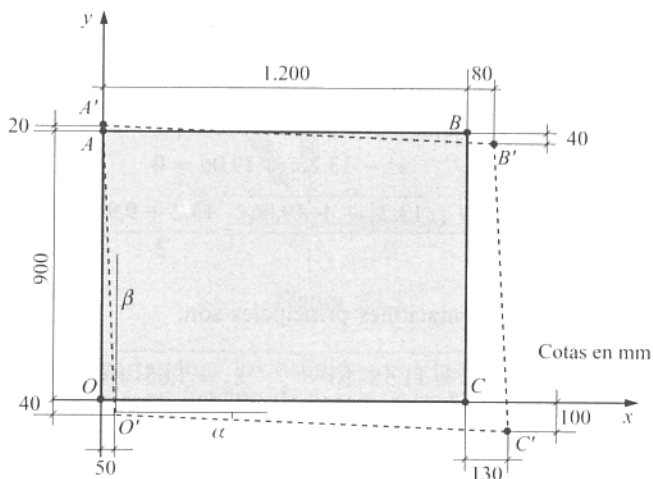


Figura E3.4.

1.º De la figura se deducen fácilmente los valores de los alargamientos longitudinales unitarios en las direcciones de los ejes

$$\varepsilon_x = \frac{1.280 - 1.200}{1.200} = \frac{8}{120} = 6,6 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{960 - 900}{900} = \frac{6}{90} = 6,6 \cdot 10^{-2}$$

El valor de γ_{xy} es la suma de las variaciones angulares de las aristas paralelas a los ejes

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{60}{1.280} = 46,875 \cdot 10^{-3} \\ \beta &= \frac{50}{960} = 52,083 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \right\} \gamma_{xy} = \alpha + \beta = -9,9 \cdot 10^{-2}$$

γ_{xy} es negativa, ya que el ángulo principal recto aumenta en la deformación.

Estos valores de las deformaciones unitarias son válidos para todos los puntos de la placa. Por tanto, la matriz de deformación en cualquier punto de ella, será

$$[D] = \begin{pmatrix} 6,6 \cdot 10^{-2} & -4,95 \cdot 10^{-2} \\ -4,95 \cdot 10^{-2} & 6,6 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

habiendo considerado la matriz de deformación sin los términos en los que interviene el eje z por tratarse de un caso de elasticidad plana.

2.º Las deformaciones principales son las raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 6,6 - \varepsilon & -4,95 \\ -4,95 & 6,6 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\varepsilon^2 - 13,2 \varepsilon + 19,06 = 0$$

$$= \frac{13,2 \pm \sqrt{13,2^2 - 4 \cdot 19,06}}{2} = \frac{13,2 \pm 9,9}{2} = \begin{cases} 11,55 \\ 1,65 \end{cases}$$

Por consiguiente, las deformaciones principales son:

$$\varepsilon_1 = 11,55 \cdot 10^{-2} ; \quad \varepsilon_2 = 1,65 \cdot 10^{-2}$$

Las direcciones principales serán:

— Para $\varepsilon_1 = 11,55 \cdot 10^{-2}$

$$\begin{cases} (6,6 - 11,55)\alpha - 4,95\beta = 0 \\ -4,95\alpha + (6,6 - 11,55)\beta = 0 \end{cases}$$

De estas ecuaciones se deduce $\alpha = -\beta$.

Como $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$$\alpha^2 + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad \beta = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

— Para $\varepsilon_2 = 1,65 \cdot 10^{-2}$

$$\begin{cases} (6,6 - 1,65)\alpha + 4,95\beta = 0 \\ 4,95\alpha + (6,6 - 1,65)\beta = 0 \end{cases}$$

$$\beta = \alpha ; \quad \alpha^2 + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Las direcciones principales, definidas por los vectores unitarios

$$\vec{u}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) ; \quad \vec{u}_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

resultan ser las bisectrices de los ejes coordenados.

3.5. En un punto de la superficie plana de un sólido elástico se colocan las tres galgas extensométricas indicadas en la Figura E3.5, siendo $\tan \theta = 3/4$. Después de cargar el sólido se miden, mediante las citadas galgas, los siguientes alargamientos unitarios

$$\varepsilon_a = 0,003 ; \quad \varepsilon_b = 0,002 ; \quad \varepsilon_c = -0,004$$

Calcular la deformación angular del ángulo recto definido por los ejes de las galgas a y b .

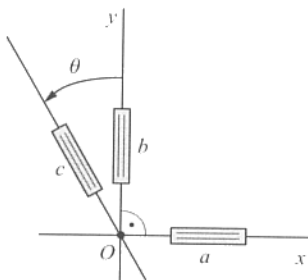


Figura E3.5.

Tomando como ejes cartesianos los definidos por las galgas a y b , podemos expresar el alargamiento longitudinal ε_c en función de $\varepsilon_a = \varepsilon_x$, $\varepsilon_b = \varepsilon_y$, que son datos, y de γ_{xy} , que es la deformación angular pedida.

$$\varepsilon_c = (\cos(90 + \theta), \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90 + \theta) \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2(90 + \theta) + \varepsilon_y \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \cos(90 + \theta) \cdot \cos \theta$$

Sustituyendo valores, se tiene

$$-0,004 = 0,003 \cdot \frac{9}{25} + 0,002 \cdot \frac{16}{25} + \gamma_{xy} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{5}$$

de donde

$\gamma_{xy} = 0,01325 \text{ rad}$

- 3.6. La matriz de deformación en un punto de un sólido elástico, referida a un sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$, es

$$[D] = \begin{pmatrix} 4a & 0 & -4a \\ 0 & 3a & 0 \\ -4a & 0 & -2a \end{pmatrix}$$

siendo a una constante. Se pide:

- 1.º Hallar las deformaciones y direcciones principales.
- 2.º Calcular la deformación longitudinal unitaria correspondiente a la dirección que forma ángulos de 45° y 60° con los ejes Ox y Oy , respectivamente.
- 3.º Determinar las direcciones que sólo experimentan deformación transversal.

1.º De la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 4a-\varepsilon & 0 & -4a \\ 0 & 3a-\varepsilon & 0 \\ -4a & 0 & -2a-\varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3a-\varepsilon)(\varepsilon^2 - 2a\varepsilon - 24a^2) = 0$$

se obtienen los valores de las deformaciones principales

$$\varepsilon_1 = 6a ; \quad \varepsilon_2 = 3a ; \quad \varepsilon_3 = -4a$$

Calculemos las direcciones principales

$$* \text{ Para } \varepsilon_1 = 6a \quad \begin{cases} -2\alpha - 4\gamma = 0 \\ -3\beta = 0 \\ -4\alpha - 8\gamma = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow 4\gamma^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} ; \quad \alpha = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{u}_1 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$* \text{ Para } \varepsilon_2 = 3a \quad \begin{cases} \alpha - 4\gamma = 0 \\ 0 \cdot \beta = 0 \\ -4\alpha - 5\gamma = 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha = \gamma = 0 ;$$

$$\vec{u}_2 (0, 1, 0)$$

$$* \text{ Para } \varepsilon_3 = -4a \quad \begin{cases} 8\alpha - 4\gamma = 0 \\ 7\beta = 0 \\ -4\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 2\alpha \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} ; \quad \gamma = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{u}_3 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Los ejes principales se han representado en la Figura E3.6a.

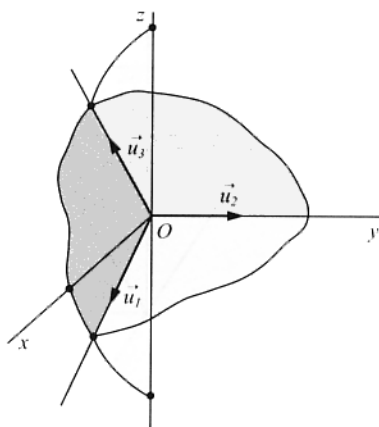


Figura E3.6a.

2.º De la condición de ser unitario el vector \vec{u} que define la dirección considerada

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \pm \frac{1}{2}$$

se deduce que existen dos direcciones distintas que cumplen las condiciones del enunciado. Por tanto, aplicaremos la fórmula que nos da la deformación longitudinal unitaria

$$\varepsilon_n = [\vec{u}]^T [D] [\vec{u}] = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + \gamma_{xy} \alpha \beta + \gamma_{yz} \beta \gamma + \gamma_{xz} \alpha \gamma$$

a los dos casos.

a) Para $\gamma = +\frac{1}{2}$

$$\boxed{\varepsilon_n} = 4a \frac{1}{2} + 3a \frac{1}{4} - 2a \frac{1}{4} - 8a \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{-0,578 a}$$

b) Para $\gamma = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\varepsilon_n} = 4a \frac{1}{2} + 3a \frac{1}{4} - 2a \frac{1}{4} + 8a \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{5,078 a}$$

3.º Referidas a las direcciones principales, las ecuaciones de las cuádricas indicatrices de deformaciones, son:

$$6a X^2 + 3a Y^2 - 4a Z^2 = \pm 1$$

Las direcciones que sólo experimentan deformación transversal son las coincidentes con las generatrices del cono asintótico (Fig. E3.6b), cuya ecuación es

$$6 X^2 + 3 Y^2 - 4 Z^2 = 0$$

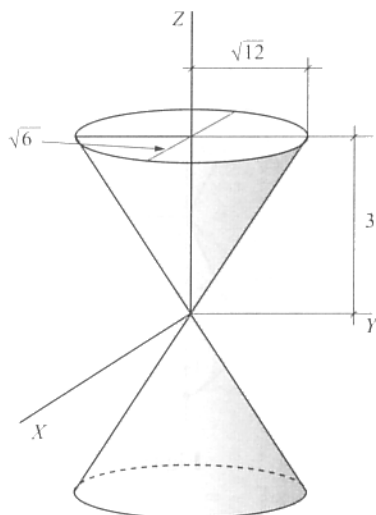


Figura E3.6b.

Es decir, si (α, β, γ) son las componentes del vector que define la dirección que sólo presenta deformación transversal, referidas a la terna de ejes principales, se habrá de verificar

$$6\alpha^2 + 3\beta^2 - 4\gamma^2 = 0$$

- 3.7. La matriz de deformación en un punto de un sólido elástico, referida a un sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$, es:

$$[D] = \begin{pmatrix} -10a & 0 & -8a \\ 0 & 2a & 0 \\ -8a & 0 & 2a \end{pmatrix} \quad \text{siendo } a = 10^{-6}$$

Determinar mediante la consideración de las cuádricas indicatrices de deformaciones, si en una dirección definida por el vector $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ se produce alargamiento o acortamiento.

Calculadas las deformaciones principales, a partir de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -10a - \varepsilon & 0 & -8a \\ 0 & 2a - \varepsilon & 0 \\ -8a & 0 & 2a - \varepsilon \end{vmatrix} = -\varepsilon^3 - 6a\varepsilon^2 + 100a^2\varepsilon - 168a^3 = 0$$

$$\varepsilon_1 = 6a ; \quad \varepsilon_2 = 2a ; \quad \varepsilon_3 = -14a$$

se obtiene la ecuación de las cuádras indicatrices referidas a las direcciones principales

$$6a X^2 + 2a Y^2 - 14a Z^2 = c = \pm 1$$

Ahora bien, como las componentes (α, β, γ) del vector \vec{u} están referidas al sistema $Oxyz$, es necesario conocer las componentes correspondientes en el sistema de ejes coincidentes con las direcciones principales.

Para ello, calculemos la matriz del cambio de ejes, determinando previamente las direcciones principales

$$* \text{ Para } \varepsilon_1 = 6a \quad \begin{cases} -16\alpha - 8\gamma = 0 \\ -4\beta = 0 \\ -8\alpha - 4\gamma = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \gamma = -2\alpha \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + 4\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{u}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$* \text{ Para } \varepsilon_2 = 2a \quad \begin{cases} -12\alpha - 8\gamma = 0 \\ 0 \cdot \beta = 0 \\ -8\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2 (0, 1, 0)$$

$$* \text{ Para } \varepsilon_3 = -14a \quad \begin{cases} 4\alpha - 8\gamma = 0 \\ 16\beta = 0 \\ -8\alpha + 16\gamma = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2}\alpha \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{u}_3 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

	x	y	z
x^*	$1/\sqrt{5}$	0	$-2/\sqrt{5}$
y^*	0	1	0
z^*	$2/\sqrt{5}$	0	$1/\sqrt{5}$

$$\begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Por tanto, las componentes $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ del vector \vec{u} referidas a las direcciones principales serán:

$$\begin{cases} \alpha^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha - \frac{2}{\sqrt{5}} \gamma \\ \beta^* = \beta \\ \gamma^* = \frac{2}{\sqrt{5}} \alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \gamma \end{cases}$$

Para determinar si en la dirección definida por el vector \vec{u} se produce alargamiento o acortamiento veremos si el extremo de \vec{u} es exterior o interior al cono asintótico de las cuádras indicatrices

$$\begin{aligned} 6 \alpha^{*2} + 2 \beta^{*2} - 14 \gamma^{*2} &= 6 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha - \frac{2}{\sqrt{5}} \gamma \right)^2 + 2 \beta^2 - 14 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \gamma \right)^2 = \\ &= -10 \alpha^2 + 2 \beta^2 + 2 \gamma^2 - 16 \alpha \gamma \end{aligned}$$

* Si $-10 \alpha^2 + 2 \beta^2 + 2 \gamma^2 - 16 \alpha \gamma > 0$

la dirección corta al hiperboloide de una hoja: se produce alargamiento.

* Si $-10 \alpha^2 + 2 \beta^2 + 2 \gamma^2 - 16 \alpha \gamma < 0$

la dirección corta al hiperboloide de dos hojas: se produce acortamiento.

* Si $-10 \alpha^2 + 2 \beta^2 + 2 \gamma^2 - 16 \alpha \gamma = 0$

la dirección coincide con una generatriz del cono asintótico, $\varepsilon_n = 0$; el vector deformación unitaria solamente tiene componente transversal.

3.8. La matriz de deformación en un punto de un sólido elástico, referida a un sistema cartesiano ortogonal, es

$$[D] = \begin{pmatrix} 3k & 0 & -k \\ 0 & k & 2k \\ -k & 2k & 2k \end{pmatrix} \quad \text{siendo } k \text{ una constante}$$

Se pide:

1.º Calcular la deformación longitudinal unitaria en la dirección del vector \vec{u}_1 (1/3, 2/3, 2/3) referido a dicho sistema.

2.º Calcular la variación experimentada en la deformación por el ángulo definido por los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 ($-2/\sqrt{5}$, $1/\sqrt{5}$, 0).

3.º Determinar el valor de la deformación angular máxima.

4.º Hallar la matriz desviadora y calcular sus valores propios.

1.º La deformación longitudinal unitaria ε_n en la dirección definida por \vec{u}_1 viene dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \vec{\varepsilon} \cdot \vec{u}_1 = [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_1] = \\ &= \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + \gamma_{xy} \alpha \beta + \gamma_{yz} \beta \gamma + \gamma_{xz} \alpha \gamma \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores que figuran en la matriz de deformación dada

$$\varepsilon_n = 3k \frac{1}{3^2} + k \frac{2^2}{3^2} + 2k \frac{2^2}{3^2} - 2k \frac{1}{3} \frac{2}{3} + 4k \frac{2^2}{3^2} = \frac{27}{9} k$$

se obtiene

$$\varepsilon_n = 3k$$

2.º Se observa que los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 son perpendiculares entre sí, por lo que la fórmula que nos da la variación del ángulo definido por los dos vectores que inicialmente forman un ángulo φ

$$\gamma_{12} = \frac{2 [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_2] - (\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2}) \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$$

se reduce a

$$\gamma_{12} = [\vec{u}_1]^T [2 D] [\vec{u}_2]$$

Sustituyendo valores

$$\gamma_{12} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \begin{pmatrix} 6k & 0 & -2k \\ 0 & 2k & 4k \\ -2k & 4k & 4k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y operando, se obtiene

$$\gamma_{12} = \frac{8}{3\sqrt{5}} k$$

3.º A partir de la matriz de deformación se obtiene la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 3k - \varepsilon & 0 & -k \\ 0 & k - \varepsilon & 2k \\ -k & 2k & 2k - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

cuyas raíces son los valores de las deformaciones principales

$$\varepsilon_1 = 4,14 k ; \quad \varepsilon_2 = 2,53 k ; \quad \varepsilon_3 = -0,67 k$$

Con estos valores podemos dibujar los círculos de Mohr (Fig. E3.8)

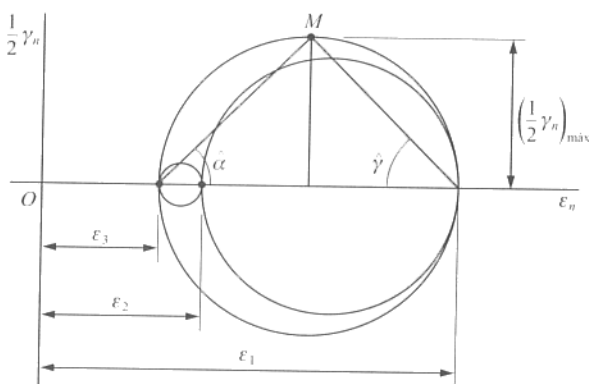


Figura E3.8.

de donde se deduce fácilmente el valor de la deformación máxima

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \frac{4,14 + 0,67}{2} k = 2,405 k$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}} = 2,405 k}$$

Se observa que esta deformación angular máxima corresponde a la dirección que define la bisectriz del ángulo XPZ ($\hat{\alpha} = 45^\circ$, $\hat{\beta} = 0$; $\hat{\gamma} = 45^\circ$), siendo P el punto que se considera y los ejes X y Z los ejes principales que corresponden a las deformaciones principales ε_1 y ε_3 , respectivamente.

4.º La matriz de deformación se puede expresar como suma de las matrices esférica y desviadora.

Como
$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{3k + k + 2k}{3} = 2k$$

$$\begin{pmatrix} 3k & 0 & -k \\ 0 & k & 2k \\ -k & 2k & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & -k & 2k \\ -k & 2k & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz es la matriz desviadora

$$\boxed{[D_d] = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & -k & 2k \\ -k & 2k & 0 \end{pmatrix}}$$

Sus valores propios son, multiplicadas por k , las raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^3 - 6\lambda + 3 = 0$$

de donde

$$\lambda_1 = 2,145 \, k ; \quad \lambda_2 = 0,523 \, k ; \quad \lambda_3 = -2,67 \, k$$

3.9. Se considera la placa de espesor constante $OABC$ indicada en la Figura E3.9a. Ante determinada sollicitación externa se deforma pasando a ocupar la posición $OA'B'C'$. Se pide, para los puntos de la placa:

- 1.º Calcular las deformaciones principales.
- 2.º Hallar la dirección contenida en el plano a la que corresponde la deformación transversal unitaria máxima e indicar el valor de ésta.

1.º Calculemos en primer lugar la matriz de deformación respecto de la referencia indicada en la misma Figura E3.9a. De las deformaciones experimentadas por la placa se deducen los valores de ε_x , ε_n (para $\theta = 45^\circ$) y se sabe que el ángulo θ no se deforma.

$$\varepsilon_x = \frac{0,001}{10} = 10^{-4}$$

$$\varepsilon_n (\theta = 45^\circ) = \frac{0,003}{15} = 2 \cdot 10^{-4} = [\vec{u}_2]^T [D] [\vec{u}_2]$$

$$\Gamma = \frac{2 [\vec{u}_1]^T [D] [\vec{u}_2] - (\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2}) \cos \theta}{\sin \theta} = 0$$

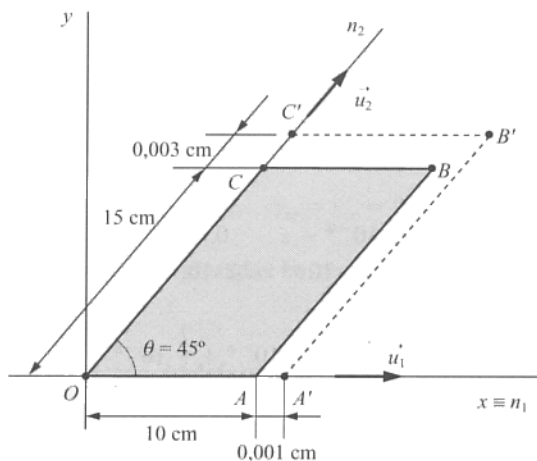


Figura E3.9a.

Sustituyendo valores en la expresión de ε_n , queda

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 10^{-4} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 10^{-4} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} 10^{-4} + \frac{1}{2} \varepsilon_y + \frac{1}{2} \gamma_{xy}
 \end{aligned} \tag{1}$$

De la expresión de la deformación angular Γ se deduce:

$$\begin{aligned}
 2(1, 0) \begin{pmatrix} 10^{-4} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= (10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 2 \left(\frac{10^{-4}}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma_{xy}}{2\sqrt{2}} \right) &= \frac{3 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma_{xy} = 10^{-4}
 \end{aligned}$$

y sustituyendo este valor en (1) se obtiene el valor de ε_y

$$2 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} 10^{-4} + \frac{1}{2} \varepsilon_y + \frac{1}{2} 10^{-4} \Rightarrow \varepsilon_y = 2 \cdot 10^{-4}$$

Luego la matriz de la deformación, será

$$[D] = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix} 10^{-4}$$

que es válida para todos los puntos de la placa.

Las deformaciones principales son los valores propios de esta matriz. De la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 10^{-4} - \varepsilon & 0,5 \cdot 10^{-4} \\ 0,5 \cdot 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-4} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\varepsilon^2 - 3 \varepsilon \cdot 10^{-4} + \frac{7}{4} 10^{-8} = 0$$

se obtiene

$\varepsilon_1 = 2,207 \cdot 10^{-4} ; \quad \varepsilon_2 = 0,793 \cdot 10^{-4}$

2.º Con estos valores se pueden construir los círculos de Mohr (Fig. E3.9b) y obtener gráficamente de forma inmediata el valor de la deformación transversal unitaria máxima correspondiente a las direcciones contenidas en el plano de la placa

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{2,207 - 0,793}{2} \cdot 10^{-4} = 0,707 \cdot 10^{-4}$$

Las dos direcciones correspondientes se obtienen también gráficamente. A partir de la matriz de deformación se sitúan los puntos diametrales D y D' representativos de las direcciones coincidentes con los ejes x e y , respectivamente.

Del círculo de Mohr se obtienen los ángulos θ_1 y θ_2 que forman con el eje x las dos direcciones en las cuales la deformación angular es máxima

$$\theta_1 = -67^\circ 30' ; \quad \theta_2 = 22^\circ 30'$$

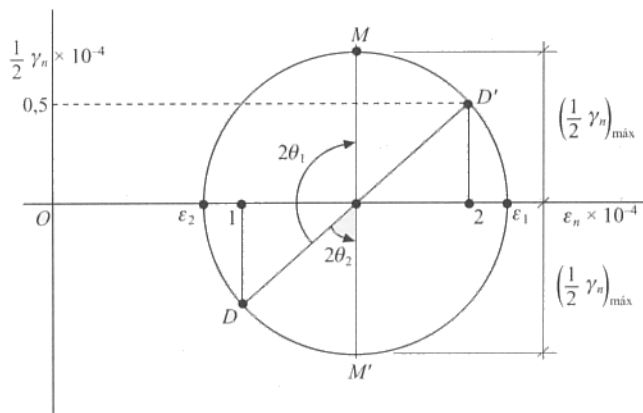


Figura E3.9b.

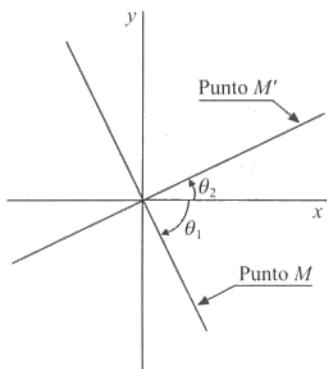


Figura E3.9c.

- 3.10. Dado el tetraedro de la Figura E3.10, cuyos vértices ocupan los puntos de coordenadas en cm O (0, 0, 0), A (100, 0, 0), B (0, 100, 0), C (0, 0, 100), se pretende someterlo a un estado de deformación definido por las siguientes componentes de la matriz de deformación:

$$\varepsilon_x = 2kx ; \quad \varepsilon_y = 2ky ; \quad \varepsilon_z = 2kz$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = k ; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde las coordenadas x, y, z vienen expresadas en centímetros y k es una constante de valor $k = 10^{-6}$.

Se pide:

- 1.º Demostrar que dicho estado de deformación es físicamente posible.
- 2.º Calcular los desplazamientos de los puntos del tetraedro en el supuesto de que la traslación y la rotación en el entorno del origen sean nulas.
- 3.º Calcular el vector de deformación unitaria en los puntos de la arista \overline{AC} y en dirección de la misma.

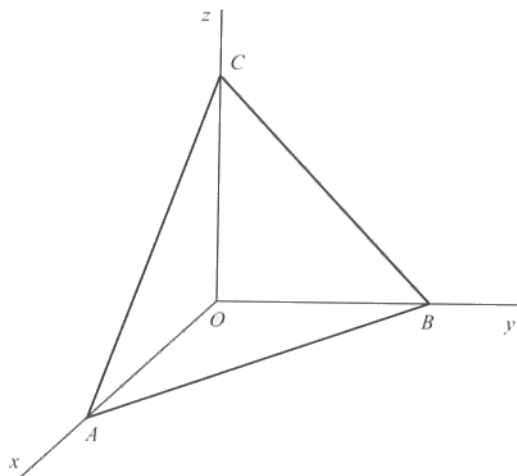


Figura E3.10a.

- 4.º Hallar la variación del ángulo formado por las aristas \overline{OB} y \overline{OC} .
- 5.º La deformación transversal máxima en el punto $P(10, 10, 10)$ utilizando la representación gráfica de Mohr.
- 6.º La deformación longitudinal unitaria en el punto P en la dirección definida por el vector $\vec{u} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$.

1.º El estado de deformación que se pretende someter al tetraedro elástico dado será físicamente posible si las componentes de la matriz de deformación verifican las seis condiciones (3.16.8) de integrabilidad o de compatibilidad.

Como dichas condiciones se verifican idénticamente, queda demostrado que *el estado de deformación dado es físicamente posible*.

2.º El sistema de ecuaciones diferenciales (3.16.7) nos permite determinar los valores de las componentes p_x, p_y, p_z del rotacional del vector desplazamiento

$$dp_x = 0 ; \quad dp_y = 0 ; \quad dp_z = 0$$

de donde

$$p_x = C_1 ; \quad p_y = C_2 ; \quad p_z = C_3$$

siendo C_1, C_2, C_3 constantes de integración, que resultan ser nulas al imponer la condición de nulidad de la rotación (igual a $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}$) de un entorno del origen. Por tanto

$$p_x = p_y = p_z = 0$$

Obtenidos los valores de p_x, p_y, p_z , el sistema (3.16.4) nos proporciona de forma inmediata la solución de desplazamientos

$$\left. \begin{aligned} du &= 2kx dx + k dy \\ dv &= k dx + 2ky dy \\ dw &= 2kz dz \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u = kx^2 + ky + u_0 \\ v = kx + ky^2 + v_0 \\ w = kz^2 + w_0 \end{cases}$$

Las constantes u_0, v_0, w_0 son nulas, ya que se anula la traslación en un entorno del origen.

Por tanto, el vector desplazamiento $\vec{\delta}$ de los diferentes puntos del tetraedro tiene de componentes:

$$\vec{\delta} \begin{cases} u = k(x^2 + y) \\ v = k(x + y^2) \\ w = kz^2 \end{cases}$$

3.º La matriz de deformación en puntos del plano xOz es

$$[D] = \begin{pmatrix} 2kx & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2kz \end{pmatrix}$$

En los puntos de la arista \overline{AC} el vector unitario en la dirección de ella tiene por expresión

$$\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k}$$

Por tanto, el vector deformación unitaria a lo largo de los puntos de la citada arista en la dirección de la misma será, en virtud de (3.9.2)

$$[\vec{\varepsilon}] = [D][\vec{u}] = \begin{pmatrix} 2kx & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2kz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2kx}{\sqrt{2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{2}} \\ \frac{2kz}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y como $x + z = 100$, en función de la coordenada x , el vector deformación unitaria pedido tendrá de componentes

$$\vec{\varepsilon} \left[-\sqrt{2} kx, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} k, \quad \sqrt{2} k(100 - x) \right]$$

4.º La variación del ángulo formado por las aristas \overline{OB} y \overline{OC} es precisamente γ_{yz} . Por tanto

$$\Delta (\overline{OB}, \overline{OC}) = \gamma_{yz} = 0$$

5.º Calculemos los valores de las deformaciones principales en el punto $P(10, 10, 10)$. La ecuación característica en este punto es el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} 20k - \varepsilon & k & 0 \\ k & 20k - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 20k - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

cuyas raíces son:

$$\varepsilon_1 = 21k; \quad \varepsilon_2 = 20k; \quad \varepsilon_3 = 19k$$

De la representación gráfica de Mohr (Fig. E3.10b) se deduce que la deformación transversal máxima o de máximo deslizamiento corresponde a los puntos M y M' .

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_n\right)_{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\gamma_n\right)_{\max} = k$$

6.º Según (3.9.4) la deformación unitaria longitudinal tiene por expresión

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + \gamma_{xy} \alpha\beta + \gamma_{xz} \alpha\gamma + \gamma_{yz} \beta\gamma$$

Sustituyendo los valores de α, β, γ y particularizando para el punto P se tiene:

$$\varepsilon_n = 20k \frac{1}{2} + 20k \frac{1}{2} + 2k \frac{1}{2} = 21k \quad \boxed{\varepsilon_n = 21k}$$

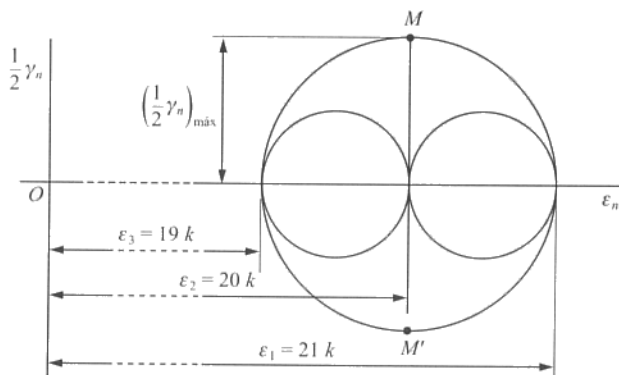


Figura E3.10b.

Relaciones entre tensiones y deformaciones

4.1. Relación experimental entre tensión y deformación. Diagrama tensión-deformación. Ley de Hooke

Hasta ahora hemos estudiado, por una parte, el estado tensional creado en el interior de un sólido elástico y, por otra, el estado de deformación del mismo. El tratamiento de ambas cuestiones ha sido totalmente independiente. Sin embargo, dado que deformación y tensión son causa y efecto, es de esperar que los vectores tensión y deformación unitaria, definidos por las expresiones (2.2.8) y (3.9.1), respectivamente, estén relacionados entre sí.

Fijada la sollicitación exterior es evidente que la deformación que se origina y, en consecuencia, la tensión creada en el sólido elástico dependen de las fuerzas de atracción molecular, es decir, de la estructura interna del material.

Se deduce, por tanto, que para obtener la relación entre tensión y deformación tendremos que proceder necesariamente por vía experimental mediante ensayos realizados en el laboratorio, en donde se comprueba, en efecto, que para dos piezas de distintos materiales, de iguales dimensiones y sometidas al mismo estado de cargas, las deformaciones son distintas.

Con objeto de ir fijando las ideas, veamos en qué consiste el ensayo de tracción, tomando, a modo de ejemplo, un material como el acero dulce, de notables aplicaciones en la práctica. Se realiza este ensayo sometiendo una pieza recta de dimensiones normalizadas, llamada probeta (Fig. 4.1), a un esfuerzo de tracción que se aumenta gradual-

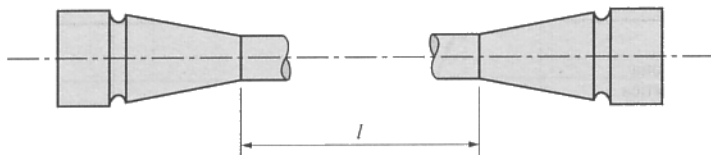


Figura 4.1.

mente hasta la rotura. En la probeta se realizan previamente dos marcas, que determinan una longitud denominada *distancia entre puntos*, sobre las que se efectúa, por medio de un extensómetro, la medida de los alargamientos.

Consideremos una probeta de sección Ω a la que aplicamos en sus extremos una fuerza F en dirección axial. Esta fuerza causa en el interior del material un estado de tensiones que supondremos uniforme para cualquier sección recta. La tensión normal σ está relacionada con la fuerza F mediante la ecuación

$$\sigma = \frac{F}{\Omega} \quad (4.1.1)$$

La probeta, debido al esfuerzo, se alarga. Llamemos ε al alargamiento unitario en el sentido longitudinal. Aumentando progresivamente el valor de F y llevando los valores de σ y ε a un gráfico cuyo eje de ordenadas mida tensiones (σ) y el de abscisas deformaciones unitarias (ε), se obtiene para el acero dulce el *diagrama tensión-deformación* indicado en la Figura 4.2.

Al ir aumentando el valor de la tensión desde 0 hasta σ_p existe proporcionalidad con las deformaciones unitarias. La gráfica es recta y el punto p correspondiente recibe el nombre de *límite de proporcionalidad*. Para el acero es $\sigma_p = 2.000 \text{ kp/cm}^2$, aproximadamente.

Sobrepasando este valor se entra en la zona de elasticidad no proporcional. La gráfica es curva, siendo nulas las deformaciones permanentes hasta el punto e llamado *límite de elasticidad*, que separa el período elástico del período elástico-plástico.

En la zona elástico-plástica, en el caso de cesar la fuerza se observarían deformaciones permanentes, lo que imposibilita que el material vuelva a recuperar las condiciones iniciales.

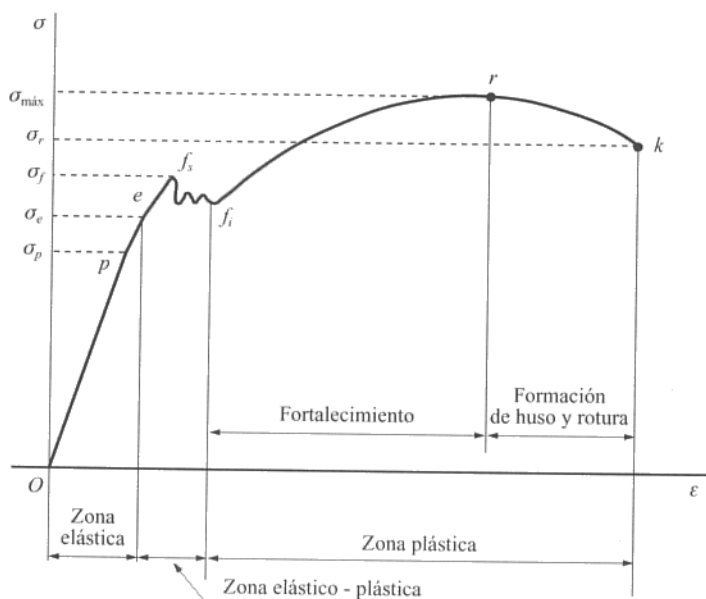


Figura 4.2.

Llegado a este punto, se pueden observar unas líneas que forman 45° con el eje de la probeta llamadas *líneas de Lüders* y que son producidas por las tensiones tangenciales cuyos valores máximos, según vimos en el Capítulo 2, corresponden a esas direcciones y originan un desplazamiento relativo de las redes cristalinas de moléculas del material.

Hasta un punto f_s que se llama *límite de fluencia* los alargamientos son pequeños, pero al llegar a él aumentan considerablemente sin necesidad de aumentar la fuerza F . Para cierto tipo de materiales la fuerza disminuye hasta un valor determinado por el punto f_i , denominado *límite inferior de fluencia* (en este caso f_s se llama *límite superior de fluencia*).

Alcanzado el límite de fluencia al seguir aumentando la fuerza sobre la probeta, la curva es creciente hasta un valor máximo cuya tensión correspondiente se llama *resistencia a la tracción o tensión de rotura*, a pesar de que ésta se produzca instantes después, cuando el material sufre un alargamiento en una parte pequeña de la probeta. Se forma una pequeña garganta o huso, reduciéndose rápidamente la sección transversal; la deformación plástica, que se reparte en un principio a lo largo de toda la probeta, se concentra en una zona originando la *estricción*, el esfuerzo disminuye y la probeta se rompe. Para el acero dulce la tensión de rotura vale de 4.000 a 5.000 kp/cm².

Realmente esto no acontece como se ha indicado. Cuando hemos hablado de que se ha alcanzado un valor determinado de la tensión, se ha calculado ésta dividiendo la fuerza F ejercida por la sección inicial que tenía la probeta, pero esta sección ha ido disminuyendo, lo que hace que el valor indicado en la gráfica sea un valor erróneo por defecto que irá aumentando con las deformaciones. Esto hace que la gráfica obtenida sea falsa, sin embargo, es la que se utiliza en la práctica dado lo laborioso que sería tener en cuenta continuamente en el valor de la tensión las variaciones de la sección.

La determinación del límite de elasticidad es, en general, bastante difícil, por lo que en la práctica se toma como este límite el punto f_s , que se llama entonces *límite aparente de elasticidad*. Sin embargo, el tomar este punto como límite de elasticidad puede traer consigo que se pueda romper el material sin necesidad de llegar a la tensión de rotura. En efecto, si hacemos desaparecer la carga F cuando la tensión σ_1 pertenece a la zona elástico-plástica, queda una deformación permanente ϵ_A (Fig. 4.3a). Si aplicamos nuevamente un esfuerzo hasta conseguir la misma tensión anterior σ_1 se observa que el alargamiento ϵ_2 es considerablemente superior al ϵ_1 , y las cosas ocurren como se indica en la

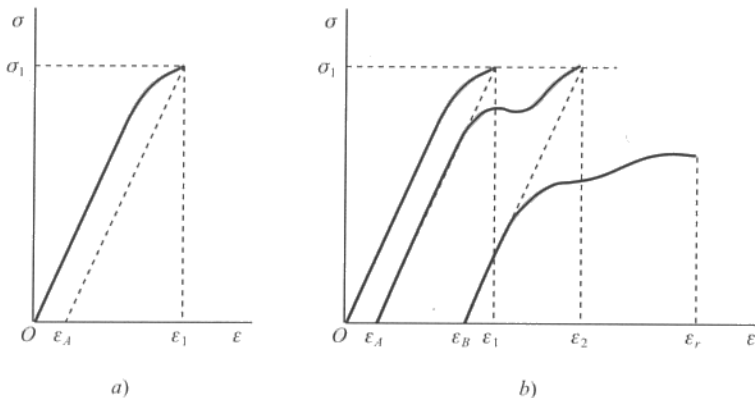


Figura 4.3.

Figura 4.3b. Si cesa la fuerza causante de la deformación se mantiene una deformación permanente ε_B que, como se ve, es notoriamente mayor que ε_A .

Al hacer el proceso reiterativo vemos que en una de las operaciones de someter a la probeta a la tensión σ_1 , se rompe sin llegar a este valor.

Se deduce que sin necesidad de aplicar una tensión que llegue a σ_r , ni aun que pertenezca a la zona plástica, se puede conseguir la rotura de un material por aplicaciones sucesivas de un esfuerzo que produzca simplemente una pequeña deformación permanente.

Es por esta causa que las tensiones admisibles deben pertenecer a la zona de elasticidad proporcional en la que no existen deformaciones permanentes. Lógicamente el valor máximo admisible debería ser la σ_e , límite de elasticidad, pero al ser difícil de determinar la frontera entre la zona plástica y la elástico-plástica, en la práctica se toma como tensión admisible el cociente entre la tensión de rotura y un número entero n que varía según el material de que se trate y llamado *coeficiente de seguridad*.

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_r}{n} \quad (4.1.2)$$

La gráfica tensión-deformación en la zona de elasticidad proporcional es lineal, por lo que su ecuación analítica será:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.1.3)$$

siendo E una constante llamada *módulo de elasticidad longitudinal* o *módulo de Young*.

Esta expresión constituye la *ley de Hooke*: en la zona elástica de los materiales, las tensiones son proporcionales a los alargamientos unitarios.

El módulo de elasticidad longitudinal E que, según se deduce de la ecuación (4.1.3) tiene las dimensiones de una tensión ($[F][L]^{-2}$), es diferente para cada material. En la Tabla 4.1 se recogen los valores de E para algunos materiales de gran utilización.

Tabla 4.1. Valores de E

Material	E (GPa)	Material	E (GPa)
Acero estructural	200	Cobre	110-120
Acero inoxidable	200	Latón	105
Fundición gris (4,5 % C)	70	Bronce	110
Fundición maleable	165	Aluminio	69-72
Hierro forjado	190	Duraluminio	70
Hierro colado	83-170	Madera	11-14
Hormigón	25-30	Granito	50

4.2. Deformaciones transversales. Coeficiente de Poisson

Al realizar el ensayo de tracción descrito anteriormente no solamente aumenta la longitud de la probeta en sentido longitudinal, sino que se observa también una disminución de las dimensiones transversales.

Consideremos el prisma rectangular de la Figura 4.4 y supongamos que ejercemos la tracción en el sentido del eje longitudinal que tomaremos como eje x .

Las deformaciones unitarias en las direcciones de los ejes y, z son:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta c}{c} \quad (4.2.1)$$

pero por tratarse de un material isótropo estos acortamientos unitarios son iguales:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} \quad (4.2.2)$$

Poisson, basándose en la teoría molecular, demostró que dentro de la zona elástica de cada material la relación entre el acortamiento lateral unitario y el alargamiento axial unitario es constante. Esta constante, que designaremos por μ , se denomina *coeficiente de Poisson* y ha sido comprobado experimentalmente.

$$\frac{|\varepsilon_y|}{\varepsilon_x} = \frac{|\varepsilon_z|}{\varepsilon_x} = \mu \quad (4.2.3)$$

Teniendo en cuenta que se trata de acortamientos, podremos expresar éstos en función de la tensión σ_{nx} , en la forma

$$\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_{nx}}{E} ; \quad \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_{nx}}{E} \quad (4.2.4)$$

El coeficiente de Poisson para materiales isótropos es aproximadamente igual a 1/4. Para el acero dulce en deformaciones elásticas se suele tomar el valor $\mu = 0,3$. Los valores correspondientes para el aluminio y cobre que se deforman elásticamente son ligeramente superiores.

La dilatación cúbica unitaria del prisma recto sometido a tracción o compresión se puede expresar en función del coeficiente de Poisson

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x - \mu\varepsilon_x - \mu\varepsilon_x = (1 - 2\mu)\varepsilon_x \quad (4.2.5)$$

que se anula para $\mu = 0,5$, es decir, la dilatación cúbica será tanto menor cuanto más se aproxime el valor de μ a 0,5, como ocurre con algunos materiales, tales como la goma y la parafina.

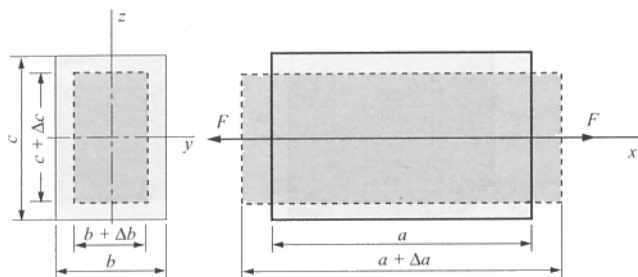


Figura 4.4.

Es evidente que todo esto es aplicable al caso de estar sometido el prisma a compresión sin más que cambiar los signos: en sentido longitudinal, la deformación (acortamiento) sería negativa, mientras que las deformaciones transversales (alargamientos) serían positivas.

Conviene advertir que una deformación en una cierta dirección no implica que exista tensión en esa misma dirección. Según se ha visto anteriormente, se han producido deformaciones transversales, sin que por ello y en esas direcciones se produzca tensión alguna.

Otra cosa sería si la superficie lateral del prisma no fuera libre o estuviera sometida a una acción exterior que causara unas tensiones σ_{ny} y σ_{nz} en el interior del prisma en las direcciones de los ejes y , z , respectivamente. Para estos casos, y suponiendo que el material trabaja en la zona elástica, admitiremos el llamado *principio de superposición*.

4.3. Principio de superposición

En la teoría lineal de la Elasticidad se admite el *principio de superposición*, que expresa que el estado de equilibrio debido a varias acciones exteriores es igual a la superposición de las soluciones que corresponden a cada uno de los estados si cada acción exterior actuara independientemente.

Supongamos un sólido elástico al que se aplican fuerzas de superficie $\vec{f}_\Omega(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ y fuerzas de masa $\vec{f}_v(X, Y, Z)$ y sea $[T]$ la matriz de tensiones correspondiente.

Supongamos ahora el mismo sólido elástico descargado al que aplicamos fuerzas de superficie $\vec{f}'_\Omega(\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}')$ y fuerzas de masa $\vec{f}'_v(X', Y', Z')$, correspondiendo al estado tensional que este sistema crea una matriz de tensiones $[T']$.

Según el citado principio de superposición, si consideramos que al sólido elástico aplicamos simultáneamente los dos sistemas de fuerzas, $\vec{f}_\Omega + \vec{f}'_\Omega$ y $\vec{f}_v + \vec{f}'_v$, la matriz de tensiones que corresponde es $[T + T']$. Es decir, las tensiones debidas a la acción simultánea de dos sistemas de fuerzas se obtienen sumando las correspondientes a las acciones aisladas de cada uno de ellos. Una consecuencia inmediata que se deduce del citado principio es que el estado final del cuerpo no depende del orden en que se aplican las fuerzas.

Es evidente que para que este principio sea válido las tensiones en el estado tensional resultante de la superposición de otros tienen que verificar las ecuaciones de equilibrio interno, las ecuaciones de equilibrio en el contorno y las ecuaciones de compatibilidad expresadas en términos de tensiones*.

Comprobemos, por ejemplo, la primera ecuación de equilibrio interno. Para cada sistema de fuerzas actuando independientemente se verificará:

$$X + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$X' = \frac{\partial \sigma'_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} = 0$$

* Las ecuaciones de *Michell*, que se verán en el Epígrafe 5.5.

Sumando miembro a miembro

$$X + X' + \frac{\partial (\sigma_{nx} + \sigma'_{nx})}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{xy} + \tau'_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{xz} + \tau'_{xz})}{\partial z} = 0 \quad (4.3.1)$$

Análogamente comprobaríamos las demás ecuaciones. Por ejemplo, la segunda ecuación de equilibrio en el contorno

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \alpha + \sigma_{ny} \beta + \tau_{yz} \gamma$$

$$\bar{Y}' = \tau'_{xy} \alpha + \sigma'_{ny} \beta + \tau'_{yz} \gamma$$

de las que se obtiene, sumando miembro a miembro

$$\bar{Y} + \bar{Y}' = (\tau_{xy} + \tau'_{xy}) \alpha + (\sigma_{ny} + \sigma'_{ny}) \beta + (\tau_{yz} + \tau'_{yz}) \gamma \quad (4.3.2)$$

Hay que advertir que la comprobación de este principio descansa en el carácter lineal de las ecuaciones de condición. No se verificará en la teoría no lineal. Incluso en la teoría lineal, no se podrá admitir el principio de superposición cuando los cambios de posición y forma del sólido al aplicar el primer sistema de fuerzas haya que tenerlos en cuenta al aplicar el segundo sistema.

4.4. Leyes de Hooke generalizadas

En un punto interior de un sólido elástico consideremos un entorno cúbico cuyas aristas tengan las direcciones principales de la matriz de tensiones. Este cubo, cuya arista consideraremos que tiene longitud unidad antes de la deformación, se convierte, después de cargada la pieza, en otro cuyas longitudes de las aristas serán $1 + \varepsilon_1$, $1 + \varepsilon_2$, $1 + \varepsilon_3$ (Figura 4.5), ya que por conservarse las caras paralelas se deduce que las direcciones principales de las matrices de tensiones y de deformación son coincidentes.

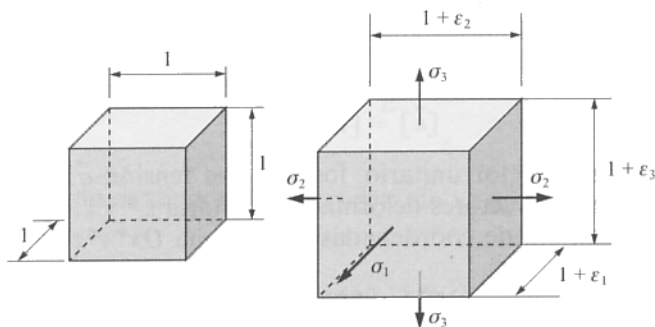


Figura 4.5.

Admitido el principio de superposición, las deformaciones principales serán

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Éstas son las llamadas *leyes de Hooke generalizadas* para el caso particular que los ejes coordenadas sean coincidentes con las direcciones principales. Relacionan entre sí las componentes de las matrices de tensión y de deformación que, en este caso, se reducen ambas a su forma diagonal.

Pero veamos cuáles serían las relaciones entre las componentes de ambas matrices cuando el sistema de ejes $Oxyz$ no coincida con la terna formada por las direcciones principales.

Para ello consideremos en un punto O interior al sólido elástico un sistema ortogonal $Ox^*y^*z^*$, cuyos ejes coincidentes con las direcciones principales y otro $Oxyz$ también ortogonal pero en una posición arbitraria.

Sean: $[T]$ la matriz de tensiones referida al sistema $Oxyz$
 $[T^*]$ la matriz de tensiones referida al sistema $Ox^*y^*z^*$
 $[D]$ la matriz de deformación referida al sistema $Oxyz$
 $[D^*]$ la matriz de deformación referida al sistema $Ox^*y^*z^*$

Si \vec{u}^* es un vector unitario referido al sistema $Ox^*y^*z^*$, el vector tensión $\vec{\sigma}^*$ correspondiente a la orientación definida por dicho vector y el vector deformación unitaria $\vec{\varepsilon}^*$ en esa dirección, en virtud de (2.2.8) y (3.9.2), tienen por expresiones

$$\begin{aligned} [\vec{\sigma}^*] &= [T^*][\vec{u}^*] \\ [\vec{\varepsilon}^*] &= [D^*][\vec{u}^*] \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Sea \vec{u} el mismo vector unitario pero referido al sistema $Oxyz$, y $\vec{\sigma}$ y $\vec{\varepsilon}$ los vectores tensión y deformación unitaria correspondientes

$$\begin{aligned} [\vec{\sigma}] &= [T][\vec{u}] \\ [\vec{\varepsilon}] &= [D][\vec{u}] \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Al ser \vec{u}^* y \vec{u} el mismo vector unitario, los vectores tensión $\vec{\sigma}^*$ y $\vec{\sigma}$ son iguales, así como también son iguales los vectores deformación unitaria $\vec{\varepsilon}^*$ y $\vec{\varepsilon}$. Quiere esto decir que si $[R]$ es la matriz del cambio de coordenadas del sistema $Ox^*y^*z^*$ al $Oxyz$, se tiene

$$\begin{aligned} [\vec{u}] &= [R][\vec{u}^*] \\ [\vec{\sigma}] &= [R][\vec{\sigma}^*] \\ [\vec{\varepsilon}] &= [R][\vec{\varepsilon}^*] \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

De la primera de estas ecuaciones matriciales se deduce

$$[\vec{u}^*] = [R]^T [\vec{u}] \quad (4.4.5)$$

ya que $[R]$ es una matriz ortogonal y su inversa es igual a su traspuesta.

Por una parte, tenemos

$$[\vec{\varepsilon}] = [D][\vec{u}] = [R][\vec{\varepsilon}^*] = [R][D^*][\vec{u}^*] = [R][D^*][R]^T [\vec{u}]$$

de donde se obtiene

$$[D] = [R][D^*][R]^T \quad (4.4.6)$$

expresión que relaciona las matrices de deformación correspondientes a los dos sistemas de referencia.

Por otra parte, ya vimos en (2.4.10) que

$$[T] = [R][T^*][R]^T \quad (4.4.7)$$

relación ésta que liga las matrices de tensiones en los dos sistemas de referencia.

La expresión (4.4.6) puesta en forma explícita es:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Identificando los términos diagonales, por ejemplo ε_x , se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= r_{11}^2 \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + r_{12}^2 \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] + r_{13}^2 \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \\ &= \frac{1}{E} \{ r_{11}^2 \sigma_1 + r_{12}^2 \sigma_2 + r_{13}^2 \sigma_3 - \mu [r_{11}^2 (\sigma_2 + \sigma_3) + r_{12}^2 (\sigma_1 + \sigma_3) + r_{13}^2 (\sigma_1 + \sigma_2)] \} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Ahora bien, de (4.4.7)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (4.4.9)$$

se deduce

$$\sigma_{nx} = r_{11}^2 \sigma_1 + r_{12}^2 \sigma_2 + r_{13}^2 \sigma_3 \quad (4.4.10)$$

Como $[R]$ es ortogonal $r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1$. Sustituyendo (4.4.10) en (4.4.8) se tiene

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \mu \sigma_{nx}] \quad (4.4.11)$$

y como por el invariante lineal de la matriz de tensiones

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz}$$

la expresión (4.4.11) queda finalmente

$$\text{y análogamente:} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu(\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{ny} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{nz})] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{nz} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny})] \end{cases} \quad (4.4.12)$$

Identificando ahora en la misma ecuación matricial (4.4.6) los términos rectangulares, por ejemplo $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{xy} &= \frac{1}{E} \{r_{11} r_{21} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + r_{12} r_{22} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] + r_{13} r_{23} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]\} = \\ &= \frac{1}{E} \{r_{11} r_{21} \sigma_1 + r_{12} r_{22} \sigma_2 + r_{13} r_{23} \sigma_3 - \mu[r_{11} r_{21} (\sigma_2 + \sigma_3) + r_{12} r_{22} (\sigma_1 + \sigma_3) + \\ &\quad + r_{13} r_{23} (\sigma_1 + \sigma_2)]\} \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Ahora bien, de (4.4.7) se deduce, identificando, el término τ_{xy}

$$\tau_{xy} = r_{11} r_{21} \sigma_1 + r_{12} r_{22} \sigma_2 + r_{13} r_{23} \sigma_3 \quad (4.4.14)$$

y teniendo en cuenta que se verifica

$$r_{11} r_{21} + r_{12} r_{22} + r_{13} r_{23} = 0$$

por ser la matriz $[R]$ ortogonal, la expresión (4.4.13) se reduce a

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1 + \mu}{E} \tau_{xy} \quad (4.4.15)$$

Haciendo

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (4.4.16)$$

Queda:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \end{cases} \quad (4.4.17)$$

ecuaciones que junto con las (4.4.12) traducen las llamadas *leyes de Hooke generalizadas*.

G recibe el nombre de *módulo de elasticidad transversal* y, según se deduce de la ecuación (4.4.16), tiene las mismas dimensiones que el módulo de elasticidad longitudinal E (ya que el coeficiente de Poisson es adimensional), es decir $[F][L]^{-2}$. De esta ecuación también se deduce que el valor de G es siempre inferior al valor de E , y de la misma forma que éste, depende exclusivamente del material. En la Tabla 4.2 se recogen los valores de G para algunos materiales de gran aplicación práctica.

Tabla 4.2. Valores de G

Material	G (GPa)	Material	G (GPa)
Acero estructural	75,2	Cobre	42,3-43,2
Acero inoxidable	75,2	Latón	39,2
Fundición gris (4,5 % C)	41	Bronce	41
Hierro forjado	73	Aluminio	26,3
Hierro colado	34-65	Granito	19,2-20,8

Las ecuaciones (4.4.17) expresan una ley análoga a la de Hooke: en el dominio elástico de los materiales, las deformaciones angulares son proporcionales a las tensiones tangenciales.

Los términos de la matriz de deformación son iguales, por tanto, a la mitad de las variaciones angulares de las proyecciones de los ejes de referencia sobre los planos coordenados correspondientes.

En las Figuras 4.6 y 4.7 quedan resumidas las relaciones que hemos obtenido anteriormente entre las componentes de las matrices de tensiones y de deformación.

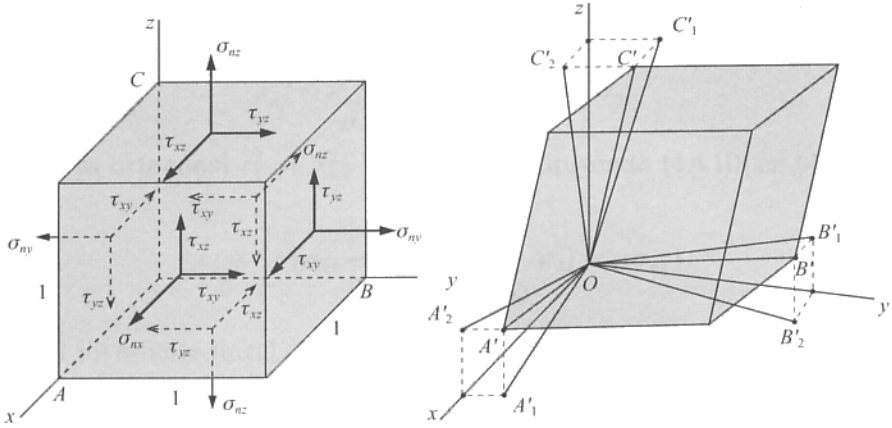


Figura 4.6.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

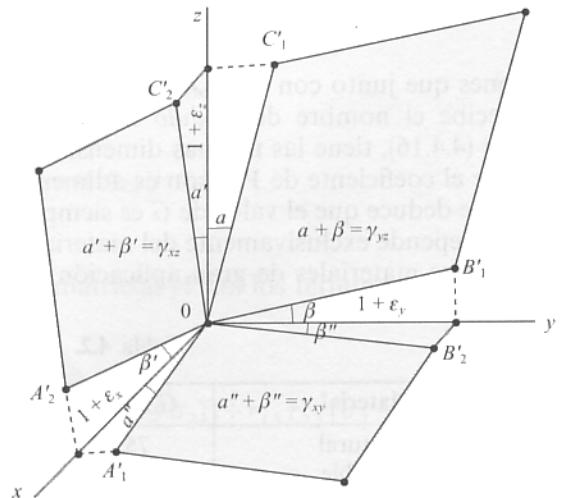


Figura 4.7.

4.5. Ecuaciones de Lamé

Las ecuaciones (4.4.12) y (4.4.17) expresan las deformaciones en función de las tensiones. Obtengamos ahora las fórmulas inversas, es decir, las expresiones de las tensiones en función de las deformaciones. Llamemos e y Θ a los invariantes lineales de las matrices de deformación y de tensiones, respectivamente

$$\begin{aligned} e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ \Theta &= \sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz} \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (4.4.12), se tiene

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E} \Theta \quad (4.5.2)$$

Las ecuaciones de Hooke generalizadas se pueden poner de la siguiente forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{nx}(1 + \mu) - \mu \Theta]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{ny}(1 + \mu) - \mu \Theta]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{nz}(1 + \mu) - \mu \Theta]$$

Despejando de estas expresiones las tensiones normales y sustituyendo Θ en función de la dilatación cúbica unitaria, según la ecuación (4.5.2), se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{nx} &= \frac{\mu}{1 + \mu} \Theta + \frac{E}{(1 + \mu)} \varepsilon_x = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} e + \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_x \\ \sigma_{ny} &= \frac{\mu}{1 + \mu} \Theta + \frac{E}{(1 + \mu)} \varepsilon_y = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} e + \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_y \\ \sigma_{nz} &= \frac{\mu}{1 + \mu} \Theta + \frac{E}{(1 + \mu)} \varepsilon_z = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} e + \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_z \end{aligned} \right. \quad (4.5.3)$$

Si hacemos

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \quad (4.5.4)$$

y como, según (4.4.16)

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

resultan, junto con las tensiones tangenciales despejadas de las ecuaciones (4.4.17), las llamadas *ecuaciones de Lamé*.

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \lambda e + 2G \varepsilon_x \\ \sigma_{ny} = \lambda e + 2G \varepsilon_y \\ \sigma_{nz} = \lambda e + 2G \varepsilon_z \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \end{cases} \quad (4.5.5)$$

De ellas se deduce que las componentes de la matriz de tensiones (tensiones normales y cortantes) se pueden expresar, dentro del campo elástico, como funciones lineales de las deformaciones: las tensiones normales, en función de las deformaciones longitudinales unitarias, y las tensiones cortantes, en función de las deformaciones transversales unitarias.

También se observa que los coeficientes de las funciones lineales se reducen solamente a dos: λ y G . Estos dos parámetros reciben el nombre de *coeficientes de Lamé*.

EJERCICIOS

4.1. Una barra de sección rectangular $a \times b = 100 \times 50$ mm y longitud $l = 2$ m sometido a una tracción $F = 50$ toneladas experimenta un alargamiento $\Delta l = 1$ mm y una contracción lateral $\Delta b = -0,007$ mm. Se pide calcular:

- 1.º El módulo de elasticidad longitudinal de la barra.
- 2.º El valor del coeficiente de Poisson.
- 3.º La variación de la dimensión del lado $a = 100$ mm de la sección recta.
- 4.º Dimensiones de la sección recta si se somete a la barra a una tracción de $F_1 = 40$ ton.

1.º Del dato del alargamiento de la barra se deduce, por la ley de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{Eab}$$

de donde:

$$E = \frac{F l}{a b \Delta l} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^2}{10 \cdot 5 \cdot 0,1} = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

2.º Asimismo, de la expresión de la contracción lateral

$$\frac{\Delta b}{b} = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{\Delta l}{l}$$

se deduce el coeficiente de Poisson μ

$$\mu = -\frac{l}{b} \frac{\Delta b}{\Delta l} = \frac{200}{5} \frac{0,007}{1} = 0,28$$

$$\mu = 0,28$$

3.º La variación del lado $a = 100 \text{ mm}$ de la sección recta será:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta a = -\mu \frac{\Delta l}{l} a = -0,28 \frac{1}{2.000} 100 = -0,014 \text{ mm}$$

$$\Delta a = -0,014 \text{ mm}$$

4.º Si se somete la barra a un esfuerzo de tracción $F_1 = 40 \text{ ton}$:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{F_1}{E a b} = -0,28 \frac{40 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 5} = -1,12 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta a = -1,12 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = -1,12 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\Delta b = -1,12 \cdot 10^{-4} \cdot 5 = -0,56 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

Las dimensiones de la sección recta, después de aplicada la fuerza de tracción $F_1 = 40$ ton, serán

$$\begin{aligned} a' &= a + \Delta a = 10 - 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \\ b' &= b + \Delta b = 5 - 0,56 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \end{aligned}$$

- 4.2. Una placa rectangular $a \times b = 50 \times 25$ cm, de espesor constante, se le somete a un sistema exterior de fuerzas presentando un estado tensional tal que las tensiones principales tienen en todos sus puntos los valores

$$\sigma_1 = 7 \text{ kp/mm}^2 ; \quad \sigma_2 = 3 \text{ kp/mm}^2 ; \quad \sigma_3 = 0$$

Las direcciones principales son respectivamente las de los lados de la placa y perpendicular a la misma.

Conocido el módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm² y el coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$, calcular:

- 1.º La variación del área de la placa.
- 2.º La deformación unitaria del espesor.

1.º Tomemos un sistema de ejes cartesianos coincidentes con los de simetría de la placa. Estos ejes determinan las direcciones principales en cualquier punto de la misma (Figura E4.2).

Los alargamientos unitarios principales son:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) = \frac{1}{2 \cdot 10^4} (7 - 0,3 \cdot 3) = 3,05 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) = \frac{1}{2 \cdot 10^4} (3 - 0,3 \cdot 7) = 0,45 \cdot 10^{-4}$$

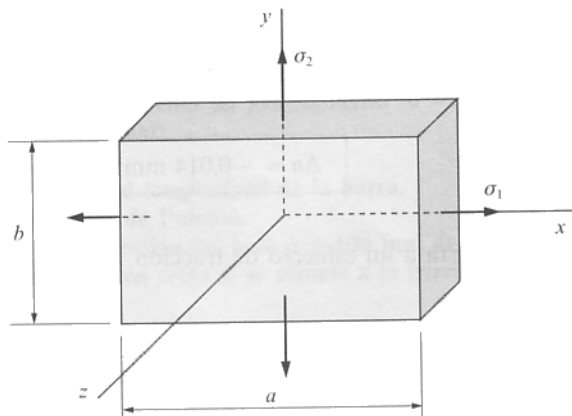


Figura E4.2.

La variación del área A de la placa será:

$$\Delta A = a(1 + \varepsilon_1) b(1 + \varepsilon_2) - ab \simeq ab(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Sustituyendo valores:

$$\Delta A = 500 \cdot 250 (3,05 + 0,45) \cdot 10^{-4} = 43,75 \text{ mm}^2$$

$$\Delta A = 43,75 \text{ mm}^2$$

2.º La deformación unitaria del espesor es el alargamiento unitario principal en la dirección del tercer eje principal

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = -\frac{1}{2 \cdot 10^4} 0,3(7 + 3) = -1,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = -1,5 \cdot 10^{-4}$$

El signo negativo indica, evidentemente, una contracción.

- 4.3. Un bloque cúbico de hormigón cuya longitud del lado es $a = 15 \text{ cm}$ se comprime en dos direcciones perpendiculares mediante el mecanismo de barras articuladas indicado en la Figura E4.3a aplicando fuerzas $F = 12 \text{ ton}$. En los extremos A' , B' , C' , D' de las barras se colocan unas placas perfectamente rígidas con objeto de que la compresión sobre las caras del hormigón sea uniforme.

Calcular la variación de volumen experimentada por el bloque.

Datos: $E = 2,8 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$; $\mu = 0,1$.

Veamos primeramente las fuerzas de compresión que actúan sobre los dos pares de caras opuestas del cubo de hormigón.

Descomponiendo, por ejemplo, la fuerza F en las direcciones de las barras AA' y AD , la fuerza de compresión que transmite la barra AA' es $F_2 = F\sqrt{2}$.

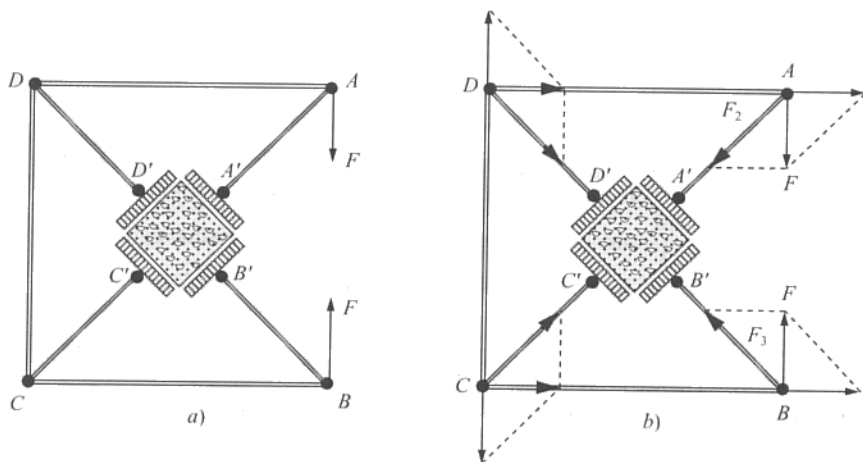


Figura E4.3.

Análogamente se obtiene el valor de la fuerza de compresión transmitida por la barra BB' : $F_3 = F\sqrt{2}$.

Estos esfuerzos se reparten de forma uniforme sobre las caras del cubo mediante las placas rígidas indicadas, creando un estado tensional tal que las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{F\sqrt{2}}{a^2}$$

Sumando las expresiones de las deformaciones longitudinales principales, dadas por las leyes de Hooke generalizadas, se obtiene la dilatación cúbica unitaria.

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1 - 2\mu) = -\frac{2F\sqrt{2}}{Ea^2} (1 - 2\mu)$$

Como $e = \frac{\Delta V}{V}$, se tiene

$$\Delta V = eV = -\frac{2F\sqrt{2}}{E} (1 - 2\mu) a$$

Sustituyendo valores:

$$\Delta V = -\frac{2 \cdot 12 \cdot 10^3 \sqrt{2}}{2,8 \cdot 10^5} (1 - 0,2) 15 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = -1,45 \text{ cm}^3$$

- 4.4. Sobre el prisma recto de la Figura E4.4a actúan las fuerzas $F_1 = 10$ ton y $F_2 = 2$ ton, uniformemente repartidas sobre las caras indicadas. Las longitudes de las aristas del prisma son $\overline{AB} = 4$ cm; $\overline{AD} = \frac{10}{3}$ cm; $\overline{AA'} = 2$ cm. Sabiendo que el prisma es de acero, de módulo de elasticidad $E = 2,1 \cdot 10^6$ kp/cm² y coeficiente de Poisson $\mu = 0,25$, calcular:

- 1.º Componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente al plano π .
- 2.º Deformaciones principales.
- 3.º Deformación transversal unitaria máxima, expresada en grados.

1.º Sobre las caras del prisma las tensiones tangenciales son nulas. De ello se deduce que las direcciones perpendiculares a las caras son direcciones principales.

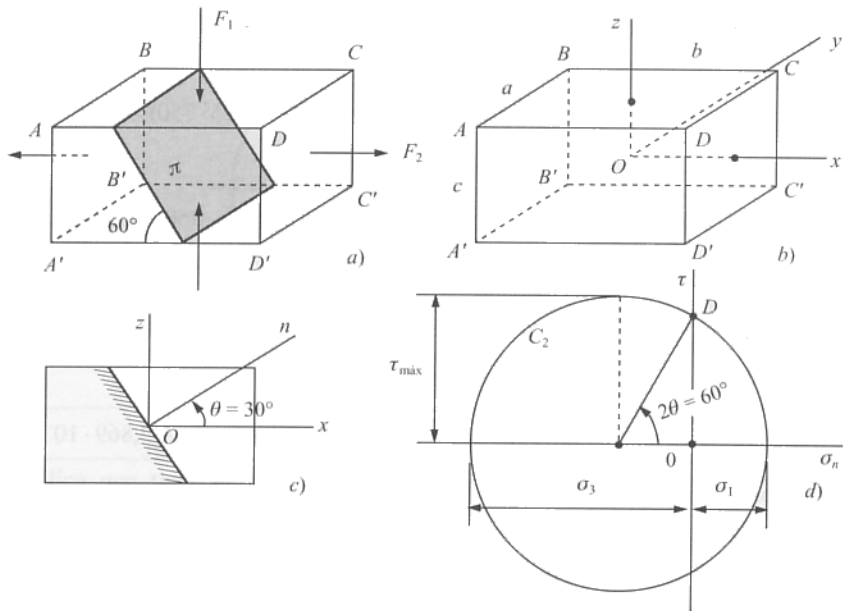


Figura E4.4.

Si $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{AA'} = c$, las tensiones principales son

$$\sigma_1 = \frac{F_2}{a \cdot c} = \frac{2.000}{4 \cdot 2} = 250 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{F_1}{a \cdot b} = -\frac{10.000}{4 \cdot \frac{10}{3}} = -750 \text{ kp/cm}^2$$

Tomemos un sistema de ejes cartesianos coincidentes con las direcciones principales (Figura E4.4b).

El punto representativo de la tensión en los puntos del plano π es el D del círculo de Mohr (Fig. E4.4d). Este punto es precisamente el de intersección de la circunferencia C_2 con el eje de ordenadas. Las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente al plano π serán:

$$\sigma_n = 0$$

$$\tau = \overline{OD} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta = 500 \frac{\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3} \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_n = 0 ; \quad \tau = 250\sqrt{3} \text{ kp/cm}^2$$

2.º Las deformaciones principales son, en virtud de las leyes de Hooke:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2,1 \cdot 10^6} (250 + 0,25 \cdot 750) = 2,083 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{-1}{2,1 \cdot 10^6} 0,25(250 - 750) = 0,595 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2,1 \cdot 10^6} (-750 - 0,25 \cdot 250) = -3,869 \cdot 10^{-4}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = 2,083 \cdot 10^{-4} ; \quad \varepsilon_2 = 0,595 \cdot 10^{-4} ; \quad \varepsilon_3 = -3,869 \cdot 10^{-4}}$$

3.º Conocido el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, el módulo de elasticidad transversal es, por definición

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2,1 \cdot 10^6}{2(1 + 0,25)} = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$$

La deformación transversal unitaria máxima se puede obtener a partir de la tensión tangencial máxima, aplicando la ley de Hooke

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{2G} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{4G} = \frac{250 + 750}{4 \cdot 8,4 \cdot 10^5} = 2,97 \cdot 10^{-4} \text{ radianes}$$

o bien a partir del círculo de Mohr de deformaciones (Fig. E4.4e)

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \frac{2,083 + 3,869}{2} \cdot 10^{-4} \text{ radianes}$$

de donde:

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}} = 2,97 \cdot 10^{-4} \text{ radianes}$$

que coincide, evidentemente, con el valor obtenido por el otro método.

La deformación $\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}}$ expresada en grados, será

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}}} = \frac{2,97 \cdot 10^{-4}}{2 \pi} 360 = \boxed{0,017^\circ}$$

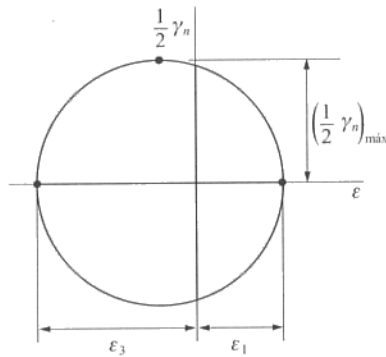


Figura E4.4e.

- 4.5. Un cubo metálico que tiene de longitud de arista $a = 20$ cm se sumerge en el mar a una profundidad $z = 400$ m.

Conociendo el módulo de elasticidad del metal $E = 2,1 \cdot 10^6$ kp/cm², el coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$ y el valor de la densidad del agua del mar $\delta = 1,06$, calcular la variación de volumen que experimenta el cubo sumergido.

Suponiendo despreciable la diferencia de presión hidrostática en los distintos puntos de las caras del cubo, debida a la diferencia de cota, la tensión creada (de compresión) es uniforme y de valor absoluto igual a la presión existente en la cota z por debajo de la superficie libre

$$p = \delta g z = 1.060 \cdot 400 \text{ kp/m}^2 = 42,4 \text{ kp/cm}^2$$

Si representamos gráficamente el estado tensional del cubo mediante el diagrama de Mohr, vemos que los círculos se reducen a un punto situado en el eje de abscisas. Resulta, por tanto, que cualquier dirección es principal.

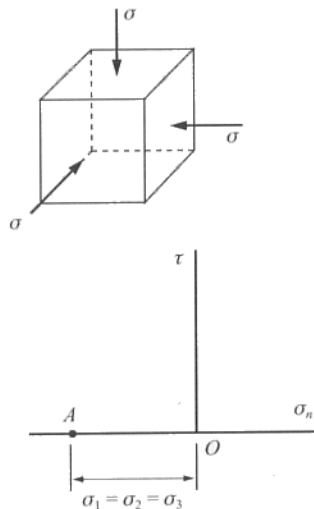


Figura E4.5.

Sea σ el valor de la tensión y ε el alargamiento unitario. Por la ley de Hooke

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma(1 - 2\mu)}{E}$$

Como $\sigma = -p$, sustituyendo valores, se tiene

$$\varepsilon = \frac{-42,4(1 - 2 \cdot 0,3)}{2,1 \cdot 10^6} = -8 \cdot 10^{-6}$$

De la expresión de la deformación cúbica unitaria

$$e = \frac{\Delta V}{V} = 3 \varepsilon$$

se obtiene

$$\Delta V = 3 \varepsilon a^3 = -3 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 20^3 = -0,192 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = -192 \text{ mm}^3$$

- 4.6. Un paralelepípedo de dimensiones $a = 3 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$, constituido por material homogéneo elástico se aloja en una cavidad de la misma forma y dimensiones, cuyas paredes son de un material lo suficientemente rígido para poderlo suponer indeformable.

Sobre la abertura de la cavidad de dimensiones $a \times b$ y a través de una placa rígida de peso y rozamiento despreciables se aplica, perpendicularmente a ella, una fuerza $F = 200 \text{ kp}$ que comprime al bloque elástico.

Si el coeficiente de Poisson es $\mu = 0,3$ y el módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2$ calcular:

- 1.º Las fuerzas laterales ejercidas por las paredes de la cavidad sobre el paralelepípedo.
- 2.º La variación de altura experimentada por el mismo.

1.º Tomaremos un sistema de referencia con origen en el centro del paralelepípedo y ejes coincidentes con los de simetría (Fig. E4.6).

Al actuar la fuerza F de compresión en sentido longitudinal del paralelepípedo, las dimensiones transversales aumentarían si no lo impidieran las paredes rígidas de la cavidad. El problema equivale a aplicar sobre las caras laterales unas fuerzas uniformemente repartidas, ejercidas por las paredes de la cavidad, que den lugar a unas tensiones normales σ_{nx} y σ_{ny} tales que sean nulos los alargamientos unitarios en direcciones normales a las caras.

Estas tensiones σ_{nx} y σ_{ny} son iguales, por razón de simetría.

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} &= -\frac{F}{a \cdot b} = -\frac{200}{9} \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu(\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] = 0$$

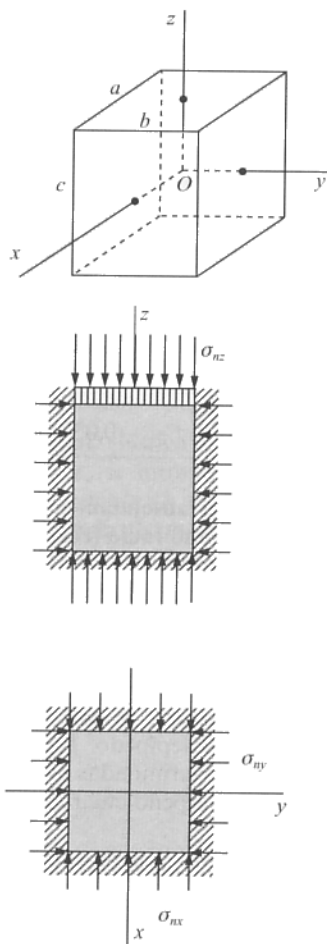


Figura E4.6.

De esta última ecuación, teniendo en cuenta la primera, se tiene

$$\sigma_{nx}(1 - \mu) = \mu \sigma_{nz} \Rightarrow \sigma_{nx} = \frac{\mu \sigma_{nz}}{1 - \mu} = -\frac{0,3 \cdot 200}{9(1 - 0,3)} = -\frac{200}{21} \text{ kp/cm}^2$$

Las fuerzas laterales ejercidas por las paredes de la cavidad sobre el paralelepípedo serán

$$F_x = F_y = \sigma_{nx} \cdot a \cdot c = -\frac{200}{21} \cdot 3 \cdot 4 = -114,28 \text{ kp}$$

$$F_x = F_y = -114,28 \text{ kp}$$

Se puede observar que las direcciones principales en cualquier punto del prisma son coincidentes con las de los ejes del sistema de referencia adoptado.

2.º El acortamiento unitario en la dirección de la fuerza aplicada F viene dado por la ley de Hooke

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_{nz} - 2\mu \sigma_{nx}) = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \left(-\frac{200}{9} + 2 \cdot 0,3 \cdot \frac{200}{21} \right) = -8,25 \cdot 10^{-4}$$

Como $\varepsilon_z = \frac{\Delta c}{c}$, la variación de altura pedida será

$$\Delta c = c \varepsilon_z = -4 \cdot 8,25 \cdot 10^{-4} = -0,0033 \text{ cm}$$

$$\Delta c = -0,033 \text{ mm}$$

- 4.7. En el interior de un cilindro de acero absolutamente rígido, de radio interior $r = 0,10 \text{ m}$, se introduce un cilindro de caucho del mismo radio (coeficiente de Poisson $\mu = 0,4$), según se indica en la Figura E4.7. Mediante una fuerza $F = 2 \text{ ton}$ que actúa sobre un pistón de peso y rozamiento despreciables colocado sobre el caucho, se comprime éste.

Calcular en kg/cm^2 la presión entre la goma y el acero.

Es este un ejercicio muy parecido al anterior. En aquél, las direcciones principales perpendiculares al eje z estaban indeterminadas y, por conveniencia, tomábamos los ejes x e y perpendiculares a las caras del paralelepípedo. En éste, la dirección del eje del cilindro es también principal, así como están indeterminadas las otras dos. Ahora tomaremos como ejes x e y dos ejes ortogonales arbitrarios, perpendiculares ambos al eje z . Los ejes de este sistema de referencia son principales.

Del mismo modo que hacíamos allí, tenemos aquí

$$\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = p \quad \sigma_{nz} = -\frac{F}{\pi r^2} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu(\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] = 0$$

siendo p la presión pedida entre la goma y el acero.

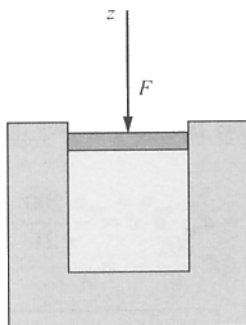


Figura E4.7.

De esta última ecuación

$$\sigma_{nx}(1 - \mu) = \mu \sigma_{nz} \Rightarrow \sigma_{nx} = p = -\frac{\mu F}{\pi r^2(1 - \mu)}$$

Sustituyendo valores

$$p = -\frac{0,4 \cdot 2.000}{3,14 \cdot 10^2 \cdot 0,6} = -4,24 \text{ kp/cm}^2$$

se obtiene:

$$p = -4,24 \text{ kp/cm}^2$$

- 4.8. Un paralelepípedo de cierto material elástico (coeficiente de Poisson μ y módulo de elasticidad E), de dimensiones $a \times b \times c$, se introduce en una cavidad de anchura b de paredes rígidas, planas y perfectamente lisas, como se indica en la Figura E4.8.

Se aplica a la cara superior, perpendicularmente a ella, una fuerza constante p por unidad de superficie.

- 1.º Calcular los valores de las tensiones principales en los puntos del paralelepípedo.
- 2.º Hallar las variaciones de longitud que experimentan las aristas.

1.º Tomando un sistema de ejes cartesianos coincidentes con los de simetría del paralelepípedo, se tiene

$$\sigma_{nx} = 0 \quad \sigma_{nz} = -p \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{ny} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{nz})] = 0$$

de donde:

$$\sigma_{ny} = \mu \sigma_{nz} = -\mu p$$

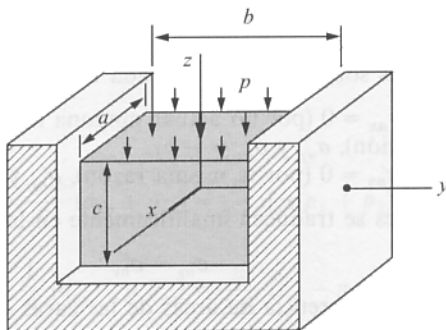


Figura E4.8.

Fácilmente se comprende que en cualquier punto del prisma las tensiones principales son constantes, así como las respectivas direcciones principales, coincidentes con las de los ejes adoptados

$$\sigma_1 = 0 ; \quad \sigma_2 = -\mu p ; \quad \sigma_3 = -p$$

2.º De las leyes de Hooke se obtienen los alargamientos unitarios

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu (\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] = \frac{\mu p}{E} (1 + \mu)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{nz} - \mu (\sigma_{nx} + \sigma_{ny})] = \frac{-p}{E} (1 - \mu^2)$$

Por tanto, las variaciones de longitud que experimentan las aristas, serán

$$\Delta a = \varepsilon_x a = \frac{\mu p a}{E} (1 + \mu)$$

$$\Delta b = \varepsilon_y b = 0$$

$$\Delta c = \varepsilon_z c = -\frac{p c}{E} (1 - \mu^2)$$

4.9. Dos paralelepípedos iguales del mismo material y de dimensiones $a \times b \times c$, se colocan a uno y otro lado de una placa lisa rígida adosados a ella por sus caras $a \times c$, de tal forma que sus ejes de simetría perpendiculares a dichas caras sean coincidentes. Ambos paralelepípedos, junto con la placa, se introducen en una ranura de anchura igual a dos veces la longitud de la arista b más el espesor de la placa. Las paredes de la ranura son planas, rígidas y perfectamente lisas.

Se aplican respectivamente a los dos bloques en sus caras superiores y perpendicularmente a ellas fuerzas uniformemente repartidas p_1 y p_2 por unidad de superficie.

Conociendo el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson μ , se pide calcular:

- 1.º Las tensiones principales en ambos bloques.
- 2.º Las variaciones de longitud de las aristas de los mismos.

1.º Tomemos un sistema de ejes cuyas direcciones sean las de las aristas del paralelepípedo (Fig. E4.9).

Las tensiones normales sobre las caras de cada uno de los paralelepípedos son:

a) En el cuerpo ①: $\sigma_{nx} = 0$ (por no actuar ninguna fuerza en la cara $b \times c$ y ser libre la deformación en esa dirección), σ_{ny} y $\sigma_{nz} = -p_1$.

b) En el cuerpo ②: $\sigma'_{nx} = 0$ (por la misma razón), σ'_{ny} y $\sigma'_{nz} = -p_2$.

Las ligaduras existentes se traducen analíticamente en las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{ny} = \sigma'_{ny}$$

suponiendo despreciable la diferencia de áreas de las caras en contacto con la placa, y

$$\varepsilon_y + \varepsilon'_y = 0$$

debido a la invariabilidad de la distancia entre las paredes de la cavidad.

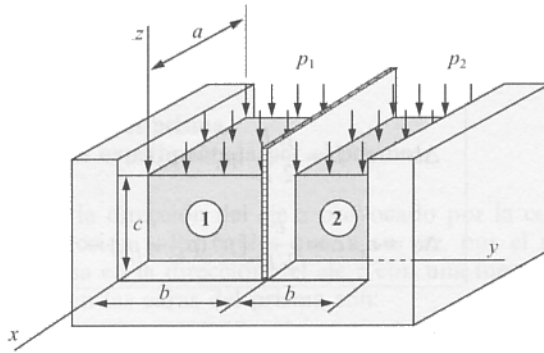


Figura E4.9.

De estas dos ecuaciones se deduce

$$\varepsilon_y + \varepsilon'_y = \frac{1}{E} (\sigma_{ny} - \mu \sigma_{nz} + \sigma'_{ny} - \mu \sigma'_{nz}) = 0$$

$$2 \sigma_{ny} + \mu(p_1 + p_2) = 0 \Rightarrow \sigma_{ny} = \sigma'_{ny} = -\frac{\mu(p_1 + p_2)}{2}$$

Como las direcciones principales en cualquier punto de los dos cuerpos son las de los ejes que hemos tomado, las tensiones principales pedidas son:

cuerpo ① $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = 0 \\ \sigma_{ny} = -\frac{\mu(p_1 + p_2)}{2} \\ \sigma_{nz} = -p_1 \end{array} \right.$	cuerpo ② $\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{nx} = 0 \\ \sigma'_{ny} = -\frac{\mu(p_1 + p_2)}{2} \\ \sigma'_{nz} = -p_2 \end{array} \right.$
--	---

2.º Los alargamientos unitarios en las direcciones de las aristas son:

a) En el cuerpo ①

$$\varepsilon_x = \frac{-\mu}{E} (\sigma_{ny} + \sigma_{nz}) = \frac{\mu}{2E} [\mu(p_1 + p_2) + 2 p_1]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_{ny} - \mu \sigma_{nz}) = \frac{\mu}{2E} (p_1 - p_2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_{nz} - \mu \sigma_{ny}) = \frac{1}{2E} [\mu^2(p_1 + p_2) - 2 p_1]$$

Luego:

$$\Delta a = \varepsilon_x \cdot a = \frac{\mu a}{2 E} [\mu(p_1 + p_2) + 2 p_1]$$

$$\Delta b = \varepsilon_y \cdot b = \frac{\mu b}{2 E} (p_1 - p_2)$$

$$\Delta c = \varepsilon_z \cdot c = \frac{c}{2 E} [\mu^2(p_1 + p_2) - 2 p_1]$$

b) Las variaciones de longitud de las aristas del cuerpo ② se obtienen directamente a partir de las expresiones obtenidas para el cuerpo ① permutando entre sí p_1 y p_2

$$\Delta' a = \varepsilon'_x \cdot a = \frac{\mu a}{2 E} [\mu(p_1 + p_2) + 2 p_2]$$

$$\Delta' b = \varepsilon'_y \cdot b = \frac{\mu b}{2 E} (p_2 - p_1)$$

$$\Delta' c = \varepsilon'_z \cdot c = \frac{c}{2 E} [\mu^2(p_1 + p_2) - 2 p_2]$$

- 4.10. Se considera un prisma cuadrangular regular cuyo material tiene de módulo de elasticidad $E = 2,8 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$ y coeficiente de Poisson $\mu = 0,1$. La longitud del lado de la sección recta es $a = 20 \text{ cm}$. En ambas bases del prisma se colocan dos placas perfectamente lisas y rígidas, de peso despreciable, unidas entre sí mediante cuatro cables de sección $\Omega_1 = 1 \text{ cm}^2$ y módulo de elasticidad $E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ de longitudes iguales a la altura del prisma $l = 1 \text{ m}$, simétricamente dispuestos, como se indica en la Figura E4.10.

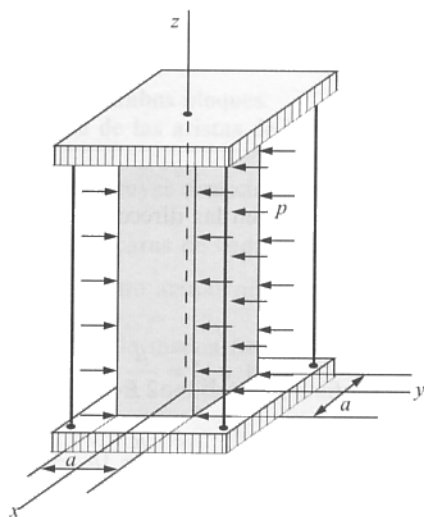


Figura E4.10.

Sobre dos caras laterales opuestas del prisma se aplica una fuerza de compresión uniforme $p = 750 \text{ kp/cm}^2$. Se pide calcular:

- 1.º Tensión σ en los cables.
- 2.º Tensiones principales en el prisma.
- 3.º Variación de volumen experimentada por el prisma.

1.º El alargamiento en la dirección del eje z provocado por la compresión p sobre las caras laterales somete a tracción a los cables que, a su vez, por el principio de acción y reacción, comprime al prisma en la dirección del eje z con una fuerza de valor $4 \sigma \Omega_1$.

Las tensiones normales en las caras del prisma son:

$$\sigma_{nx} = 0 ; \quad \sigma_{ny} = -p ; \quad \sigma_{nz} = -\frac{4 \sigma \Omega_1}{a^2}$$

Al ser las placas perfectamente rígidas son iguales los alargamientos unitarios de los cables y del prisma en la dirección del eje z .

El alargamiento unitario en los cables es:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1}$$

mientras que el correspondiente a la dirección longitudinal del prisma:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{nz} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny})] = \frac{1}{E} \left(-\frac{4 \sigma \Omega_1}{a^2} + \mu p \right)$$

Igualando ambas expresiones:

$$\varepsilon = \varepsilon_z \Rightarrow \frac{\sigma}{E_1} = \frac{1}{E} \left(-\frac{4 \sigma \Omega_1}{a^2} + \mu p \right)$$

se obtiene la expresión de la tensión en los cables

$$\sigma = -\frac{\mu p a^2 E_1}{E a^2 + 4 E_1 \Omega_1}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$\boxed{\sigma} = \frac{0,1 \cdot 750 \cdot 20^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2,8 \cdot 10^5 \cdot 20^2 + 4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} \text{ kp/cm}^2 = \boxed{500 \text{ kp/cm}^2}$$

2.º Las direcciones principales en todos los puntos del prisma coinciden con las direcciones de los ejes del sistema de referencia adoptado. Por tanto, los valores de las tensiones principales son:

$$\sigma_{nx} = 0 ; \quad \sigma_{ny} = -p ; \quad \sigma_{nz} = -\frac{4 \mu p E_1 \Omega_1}{E a^2 + 4 E_1 \Omega_1}$$

Sustituyendo valores:

$$\sigma_{nx} = 0$$

$$\sigma_{ny} = -750 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{nz} = -\frac{4 \cdot 0,1 \cdot 750 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1}{2,8 \cdot 10^5 \cdot 20^2 + 4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} \text{ kp/cm}^2 = -5 \text{ kp/cm}^2$$

Ordenando de mayor a menor, tenemos:

$$\sigma_1 = 0 ; \quad \sigma_2 = -5 \text{ kp/cm}^2 ; \quad \sigma_3 = -750 \text{ kp/cm}^2$$

3.º La deformación cúbica unitaria es:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz}}{E} (1 - 2\mu)$$

En virtud de las expresiones obtenidas anteriormente, se tiene:

$$e = -\frac{(1 - 2\mu)(pa^2 + 4\sigma\Omega_1)}{Ea^2}$$

Sustituyendo valores:

$$e = -\frac{(1 - 0,2)(750 \cdot 20^2 + 4 \cdot 500 \cdot 1)}{2,8 \cdot 10^5 \cdot 20^2} = -21,57 \cdot 10^{-4}$$

La variación de volumen experimentada por el prisma será:

$$\Delta V = e \cdot V = -21,57 \cdot 10^{-4} \cdot 20^2 \cdot 100 = -86,28 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = -86,28 \text{ cm}^3$$

Los resultados anteriores son válidos siempre que nos movamos en el campo elástico, es decir, cuando el límite elástico del material del prisma sea superior, en valor absoluto, a 750 kp/cm², así como el límite a tracción de los cables sea superior a 500 kp/cm².

Planteamiento general del problema elástico

5.1. Introducción

Según lo que hemos visto hasta aquí, si conociéramos el campo de desplazamientos o corrimientos $\vec{\delta}$ de los puntos de un sólido elástico, la determinación de la matriz de deformación $[D]$ sería inmediata, sin más que aplicar las ecuaciones de definición (3.7.1) de sus componentes. La matriz de tensiones $[T]$ se obtendría a partir de $[D]$ aplicando las ecuaciones de *Lamé* (4.5.5).

Si nos dieran la matriz de deformación en los puntos del sólido elástico, comprobada la verificación de las ecuaciones de compatibilidad, la obtención del campo de corrimientos se haría integrando en la forma descrita en el Epígrafe 3.16, y la matriz de tensiones, aplicando las ecuaciones de *Lamé*.

Si, por el contrario, fuera conocida la matriz de tensiones, la matriz de deformación se obtendría aplicando las leyes de Hooke generalizadas, y el campo de corrimientos mediante un proceso de integración.

Sin embargo, para la resolución general de un problema elástico, es decir, para la determinación de las tensiones y deformaciones, así como el campo de corrimientos que se producen en un sólido elástico, en función de la sollicitación que sobre él actúa, las magnitudes que hemos supuesto conocidas suelen ser incógnitas del problema, siendo los datos del mismo, o condiciones de contorno, el conocimiento de las fuerzas de superficie aplicadas, las fuerzas de masa, o los desplazamientos de los puntos del contorno. Según sean los datos, se pueden presentar fundamentalmente los siguientes problemas.

Primer problema. Se conocen las fuerzas exteriores \vec{f}_Ω aplicadas al sólido elástico en equilibrio, así como las fuerzas de masa por unidad de volumen. A partir de estos datos se pide calcular las matrices de tensión $[T]$ y de deformación $[D]$, así como el campo de corrimientos $\vec{\delta}$ de todos los puntos del sólido elástico.

Segundo problema. Son conocidas las fuerzas de masa por unidad de volumen, así como los desplazamientos de todos los puntos de la superficie exterior del sólido elástico en equilibrio. El problema planteado es la determinación de la matriz de tensiones $[T]$ y de deformación $[D]$, así como los desplazamientos $\vec{\delta}$ en todos los puntos interiores del sólido elástico.

Problema mixto. Como su nombre indica, es una combinación de los dos tipos de problemas anteriores. Aquí los datos de partida son el sistema de fuerzas de masa por unidad de volumen \vec{f}_v sobre el sólido elástico en equilibrio, y las condiciones de contorno conocidas son las fuerzas de superficie \vec{f}_Ω sobre una zona de la superficie exterior, así como los desplazamientos de los puntos del resto de dicha superficie exterior.

Para la resolución del problema elástico, según se ha visto en capítulos anteriores, será necesario que las componentes de la matriz de tensiones verifiquen las *ecuaciones de equilibrio interno*

$$\left\{ \begin{array}{l} X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (5.1.1)$$

Por otra parte, los componentes de la matriz de deformación, definidas en función de las componentes u, v, w del vector desplazamiento $\vec{\delta}$, como

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) ; \quad \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ; \quad \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (5.1.2)$$

tienen que cumplir las condiciones de compatibilidad

$$\left\{ \begin{array}{l}
 2 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}
 \end{array} \right. \quad (5.1.3)$$

para que el estado de deformaciones que representa sea físicamente posible.

Las tres ecuaciones de equilibrio interno, las seis de definición de la matriz de deformación, más las seis de compatibilidad, constituyen un sistema de quince ecuaciones. Por otra parte, el número de incógnitas es también de quince: seis componentes de la matriz de tensiones, seis componentes de la matriz de deformación, más tres componentes del vector desplazamiento.

Para la resolución del problema elástico, de una forma general, será necesario resolver un sistema de quince ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con quince incógnitas.

Dado el elevado número de funciones incógnitas es aconsejable elegir como incógnitas fundamentales, bien las componentes del vector desplazamiento bien las componentes de la matriz de tensiones. Veamos a continuación cómo se resolvería el problema en cada uno de estos casos.

5.2. Formulación del problema elástico en desplazamientos. Ecuaciones de Navier

Las leyes de Hooke generalizadas, como hemos visto anteriormente, expresan las deformaciones en función de las tensiones. Con las ecuaciones de Lamé se ha resuelto el problema inverso, es decir, expresar las tensiones en función de las deformaciones. Con estas relaciones, es evidente que las ecuaciones de equilibrio interno (5.1.1) que relacionan las componentes de la matriz de tensiones pueden ser expresadas en términos de deformaciones, así como las ecuaciones de compatibilidad (5.1.3) entre las componentes de la matriz de deformación se podrán expresar también en términos de tensiones.

Como a su vez las deformaciones se definen a partir de las componentes u , v , w del vector corrimiento $\vec{\delta}$, es obvio que tanto las ecuaciones de equilibrio interno y en el

contorno como las condiciones de compatibilidad podrán ser formuladas en función de los desplazamientos.

Veamos la forma que adoptan las ecuaciones de equilibrio interno expresadas en términos de desplazamientos.

Expresemos primeramente las tensiones en función de u, v, w , partiendo de las ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_{nx} = \lambda e + 2G \varepsilon_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \operatorname{div} \vec{\delta} + 2G \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

La primera ecuación (5.1.1) de equilibrio interno tomará la forma:

$$\begin{aligned} X + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= X + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{\delta} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ &+ G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = X + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{\delta} + G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &+ G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = X + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta u = 0 \end{aligned}$$

Las otras dos ecuaciones se obtendrán por permutación circular.

Quedarían como ecuaciones de equilibrio, expresadas en términos de desplazamientos, las siguientes:

$$\begin{cases} X + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta u = 0 \\ Y + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta v = 0 \\ Z + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta w = 0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Navier*.

Si multiplicamos estas ecuaciones respectivamente por los vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ y sumamos miembro a miembro, obtenemos:

$$\vec{f}_v + (\lambda + G) \nabla \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta \vec{\delta} = 0^* \quad (5.2.2)$$

* ∇ es el operador gradiente, cuya expresión en coordenadas cartesianas es $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ y Δ es el operador laplaciana $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Aplicada a la función vectorial $\vec{\delta}$ será $\Delta \vec{\delta} = \vec{i} \Delta u + \vec{j} \Delta v + \vec{k} \Delta w$.

siendo:

$$\Delta \vec{\delta} = \vec{i} \Delta u + \vec{j} \Delta v + \vec{k} \Delta w$$

Esta ecuación es llamada *ecuación fundamental de la Elasticidad*. Por venir expresada vectorialmente, su formulación es intrínseca, es decir, independiente de cualquier sistema particular de coordenadas. Es de hacer notar que en ella sólo intervienen las fuerzas de masa y los desplazamientos.

Dado que para obtener las ecuaciones de Navier hemos hecho intervenir las ecuaciones de equilibrio y por partir de las funciones u, v, w está asegurado el cumplimiento de las ecuaciones de compatibilidad, la solución del problema elástico planteado en desplazamientos se reduce a encontrar soluciones de las ecuaciones (5.2.1) que verifiquen las condiciones de contorno. Dicho de otra manera, la ecuación fundamental de la Elasticidad es la única a la que debe satisfacer el vector desplazamiento, en todos los puntos del sólido elástico.

Podemos obtener algunas consecuencias inmediatas de las ecuaciones de Navier en el caso particular que las fuerzas de masa por unidad de volumen sean constantes.

En efecto, derivando la primera ecuación (5.2.1) respecto de x , la segunda respecto de y , y la tercera respecto de z , sumando miembro a miembro estas ecuaciones se obtiene

$$(\lambda + G) \Delta e + G \Delta e = 0 \quad (5.2.3)$$

de donde

$$\Delta e = 0 \quad (5.2.4)$$

es decir, si las fuerzas de masas son constantes, la dilatación cúbica unitaria es una función armónica en todos los puntos del sólido elástico.

Por otra parte, aplicando el operador laplaciana a las mismas ecuaciones de Navier, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \Delta e + G \Delta^2 u = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \Delta e + G \Delta^2 v = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \Delta e + G \Delta^2 w = 0 \end{array} \right. \quad (5.2.5)$$

siendo Δ^2 el operador bilaplaciana.

Como la dilatación cúbica unitaria es una función armónica, como acabamos de ver, resulta:

$$\Delta^2 u = 0 ; \quad \Delta^2 v = 0 ; \quad \Delta^2 w = 0 \quad (5.2.6)$$

es decir, si las fuerzas de masa son constantes, las componentes del vector desplazamiento son funciones biarmónicas en todos los puntos del sólido elástico.

En este epígrafe hemos visto que la solución general del problema elástico, cuando éste se formula en desplazamientos, consiste en encontrar la solución de la ecuación fundamental de la Elasticidad, que verifique las ecuaciones de contorno. De entre los diversos métodos que existen para su resolución, aquí vamos a exponer dos soluciones: la primera, llamada *vector de Galerkin*, que tiene carácter general; la segunda, la del *potencial de deformación*, que no presenta el carácter de solución general de la primera, pero es de notorio interés en la resolución de determinados problemas prácticos.

5.3. Vector de Galerkin

Se denomina así a la solución general de la ecuación fundamental de la Elasticidad que fue presentada en 1932 por *P. F. Papkovitch* a partir de la solución dada por *B. Galerkin* en 1930.

Como en la ecuación fundamental (5.2.2) figuran los operadores Δ y ∇div , ambos de segundo orden, cabe ensayar una solución del tipo

$$2 G \vec{\delta} = (c \Delta - \nabla \text{div}) \vec{P} \quad (5.3.1)$$

siendo \vec{P} un campo vectorial llamado *vector de Galerkin* y c una constante que se determinará imponiendo la condición de que esta solución verifica la ecuación fundamental

$$2 G \vec{f}_v + [(\lambda + G) \nabla \text{div} + G \Delta](c \Delta - \nabla \text{div}) \vec{P} = 0 \quad (5.3.2)$$

Desarrollando, se tiene:

$$2 G \vec{f}_v + [c(\lambda + G) \nabla \text{div} \Delta - (\lambda + G) \nabla \text{div} \nabla \text{div} + c G \Delta^2 - G \Delta \nabla \text{div}] \vec{P} = 0$$

Pero como

$$\nabla \text{div} \Delta = \Delta \nabla \text{div} = \nabla \text{div} \cdot \nabla \text{div}$$

queda:

$$2 G \vec{f}_v + [c(\lambda + G) - (\lambda + G) - G] \nabla \text{div} \Delta \vec{P} + c G \Delta^2 \vec{P} = 0$$

Tomaremos el valor de la constante c , de tal forma que se anule el corchete

$$c(\lambda + G) - (\lambda + G) - G = 0$$

de donde

$$c = \frac{\lambda + 2 G}{\lambda + G} = \frac{2\mu E + 2 E(1 - 2\mu)}{2\mu E + E(1 - 2\mu)} = 2(1 - \mu) \quad (5.3.3)$$

quedando la ecuación anterior reducida a:

$$2 G \vec{f}_v + 2(1 - \mu) G \Delta^2 \vec{P} = 0$$

o bien

$$\Delta^2 \vec{P} = - \frac{\vec{f}_v}{1 - \mu} \quad (5.3.4)$$

es decir, la ecuación de Navier se cumplirá si los desplazamientos verifican

$$2 G \vec{\delta} = [2 (1 - \mu) \Delta - \nabla \operatorname{div}] \vec{P} \quad (5.3.5)$$

siendo \vec{P} el *vector de Galerkin*, que a su vez satisface la ecuación (5.3.4).

De esta ecuación (5.3.4) se deduce que si las fuerzas de masa son nulas, las componentes del *vector de Galerkin* deben ser funciones biarmónicas.

Con el conocimiento del *vector de Galerkin* queda resuelto el problema elástico. En efecto, si el sistema de coordenadas es cartesiano ortogonal, y si el *vector de Galerkin* tiene de componentes P_x, P_y, P_z , de la ecuación (5.3.5) se deduce:

$$\begin{cases} u = \frac{1 - \mu}{G} \Delta P_x - \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{P}) \\ v = \frac{1 - \mu}{G} \Delta P_y - \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{P}) \\ w = \frac{1 - \mu}{G} \Delta P_z - \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{P}) \end{cases} \quad (5.3.6)$$

A partir de estas ecuaciones se obtienen las componentes de la matriz de deformación.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 - \mu}{G} \Delta \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{1}{2G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\operatorname{div} \vec{P}) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1 - \mu}{G} \Delta \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{1}{2G} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\operatorname{div} \vec{P}) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1 - \mu}{G} \Delta \frac{\partial P_z}{\partial z} - \frac{1}{2G} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\operatorname{div} \vec{P}) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1 - \mu}{G} \Delta \left(\frac{\partial P_x}{\partial y} + \frac{\partial P_y}{\partial x} \right) - \frac{1}{G} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\operatorname{div} \vec{P}) \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1 - \mu}{G} \Delta \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{G} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\operatorname{div} \vec{P}) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1 - \mu}{G} \Delta \left(\frac{\partial P_y}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial y} \right) - \frac{1}{G} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\operatorname{div} \vec{P}) \end{cases} \quad (5.3.7)$$

Aplicando las ecuaciones de *Lamé* obtenemos, finalmente, las componentes de la matriz de tensiones en función del *vector de Galerkin*.

Como:

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \lambda e + 2 G \varepsilon_x = \frac{\mu E}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)} \left[\frac{2(1 - \mu)(1 + \mu)}{E} \Delta - \frac{1 + \mu}{E} \Delta \right] \operatorname{div} \vec{P} + \\ &+ 2(1 - \mu) \Delta \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\operatorname{div} \vec{P}) = 2(1 - \mu) \Delta \frac{\partial P_x}{\partial x} + \left(\mu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \operatorname{div} \vec{P}\end{aligned}$$

se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned}\sigma_{nx} &= 2(1 - \mu) \Delta \frac{\partial P_x}{\partial x} + \left(\mu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \operatorname{div} \vec{P} \\ \sigma_{ny} &= 2(1 - \mu) \Delta \frac{\partial P_y}{\partial y} + \left(\mu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \operatorname{div} \vec{P} \\ \sigma_{nz} &= 2(1 - \mu) \Delta \frac{\partial P_z}{\partial z} + \left(\mu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \operatorname{div} \vec{P} \\ \tau_{xy} &= (1 - \mu) \Delta \left(\frac{\partial P_x}{\partial y} + \frac{\partial P_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \operatorname{div} \vec{P} \\ \tau_{xz} &= (1 - \mu) \Delta \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \operatorname{div} \vec{P} \\ \tau_{yz} &= (1 - \mu) \Delta \left(\frac{\partial P_y}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \operatorname{div} \vec{P}\end{aligned} \right. \quad (5.3.8)$$

5.4. Potencial de deformación

Podemos obtener una solución particular de las ecuaciones de Navier cuando el vector desplazamiento derive de un potencial ϕ

$$2 G \vec{\delta} = \nabla \phi \quad (5.4.1)$$

La función ϕ tendrá que cumplir la ecuación fundamental. Por tanto, se habrá de verificar:

$$\vec{f}_r + \frac{\lambda + G}{2 G} \nabla \Delta \phi + \frac{G}{2 G} \Delta \nabla \phi = 0 \quad (5.4.2)$$

Como el gradiente de la laplaciana es igual a la laplaciana del gradiente, queda:

$$\vec{f}_v + \frac{\lambda + 2G}{2G} \nabla \Delta \phi = 0 \quad (5.4.3)$$

Consideremos el caso en el que las fuerzas de masa sean nulas. La ecuación (5.4.3) se satisface entonces para $\Delta \phi = \text{cte}$. Si esta constante es nula, el potencial de deformación es una función armónica y también se anula la dilatación cúbica unitaria, ya que

$$e = \text{div } \vec{\delta} = \frac{1}{2G} \text{div } \nabla \phi = \frac{1}{2G} \Delta \phi = 0 \quad (5.4.4)$$

Decimos entonces que existe un *potencial de deformación* ϕ .

De la ecuación (5.4.1) se deducen las expresiones de las componentes cartesianas (u , v , w) del vector corrimiento.

$$u = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (5.4.5)$$

A partir de ellas podemos calcular las correspondientes a la matriz de deformación, aplicando las ecuaciones de definición

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \quad \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}; \quad \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \end{array} \right. \quad (5.4.6)$$

Aplicando las ecuaciones de *Lamé* se obtienen las componentes de la matriz de tensiones

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{nz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \end{array} \right. \quad (5.4.7)$$

Veamos ahora qué relación existe entre el potencial de deformación y el vector de *Galerkin*. Para ello consideremos un vector de *Galerkin* tal que

$$\Delta \vec{P} = 0 \quad (5.4.8)$$

en el caso que las fuerzas de masa sean nulas para que podamos afirmar, según hemos visto anteriormente, que existe un potencial de deformación. En este caso la ecuación (5.3.5) se reduce a

$$2 G \vec{\delta} = - \nabla \operatorname{div} \vec{P} \quad (5.4.9)$$

que vemos que coincide con (5.4.1) cuando:

$$\phi = - \operatorname{div} \vec{P} \quad (5.4.10)$$

Vemos, por tanto, que el potencial de deformación, en el caso que las fuerzas de masa sean nulas y el vector de *Galerkin* sea una función vectorial armónica, es un caso particular de la solución que *Galerkin* dio a la ecuación fundamental de la Elasticidad.

5.5. Formulación del problema elástico en tensiones. Ecuaciones de Michell y de Beltrami

El problema elástico también puede ser formulado en tensiones, esto es, tomando como incógnitas fundamentales las componentes $(\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ de la matriz de tensiones. Si partimos de las tres ecuaciones de equilibrio interno es evidente que estas ecuaciones son insuficientes, pues son seis el número de incógnitas. Por otra parte, la solución de deformaciones del problema elástico tiene que verificar las condiciones de compatibilidad, que podemos expresar en términos de tensiones.

Veamos, pues, qué forma tomarían las ecuaciones de compatibilidad cuando se expresen en función de las tensiones.

En la cuarta de ellas

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}$$

reemplacemos las deformaciones en función de las tensiones, despejadas de las ecuaciones de *Lamé*

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_{nz} - \lambda e}{2 G} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_{ny} - \lambda e}{2 G}$$

siendo:

$$e = \frac{1 - 2 \mu}{E} (\sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz}) = \frac{1 - 2 \mu}{E} \Theta ; \quad \lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2 \mu)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial z^2} - \frac{\lambda(1 - 2\mu)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \right] \\ \Rightarrow \quad 2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial z^2} - \frac{\mu}{1 + \mu} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Derivemos ahora la segunda ecuación (5.1.1) de equilibrio interno respecto de y , la tercera respecto a z y sumemos miembro a miembro:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = - \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (5.5.2)$$

Sustituyendo en (5.5.1), teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -X - \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial x^2} + \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial z^2} - \frac{\mu}{1 + \mu} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \\ & \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial x^2} - \\ & - \frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial x^2} - \frac{\mu}{1 + \mu} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) = - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial x} + 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ & \Delta (\sigma_{ny} + \sigma_{nz}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{ny} + \sigma_{nz} + \sigma_{nx}) - \frac{\mu}{1 + \mu} \left(\Delta \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) = \\ & = - \operatorname{div} \vec{f}_v + 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ & \Delta (\Theta - \sigma_{nx}) - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\mu}{1 + \mu} \left(\Delta \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) = - \operatorname{div} \vec{f}_v + 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ & \Rightarrow \Delta \Theta - (1 + \mu) \Delta \sigma_{nx} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -(1 + \mu) \operatorname{div} \vec{f}_v + 2(1 + \mu) \frac{\partial X}{\partial x} \quad (5.5.3) \end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos otras dos ecuaciones permutando circularmente las variables

$$\Delta \Theta - (1 + \mu) \Delta \sigma_{ny} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -(1 + \mu) \operatorname{div} \vec{f}_v + 2(1 + \mu) \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (5.5.4)$$

$$\Delta \Theta - (1 + \mu) \Delta \sigma_{nz} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -(1 + \mu) \operatorname{div} \vec{f}_v + 2(1 + \mu) \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (5.5.5)$$

Sumando miembro a miembro estas tres ecuaciones, despejamos $\Delta\Theta$

$$\Delta\Theta = -\frac{1+\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{f}_v \quad (5.5.6)$$

y sustituyendo en (5.5.3), (5.5.4) y (5.5.5), se obtienen:

$$\Delta\sigma_{nx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \quad (5.5.7)$$

$$\Delta\sigma_{ny} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (5.5.8)$$

$$\Delta\sigma_{nz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (5.5.9)$$

Consideremos ahora las tres primeras ecuaciones (5.1.4) de compatibilidad. En la primera de ellas:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

sustituyamos las deformaciones en función de las tensiones, deducidas de las ecuaciones de Lamé

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial y \partial z} - \lambda \frac{1-2\mu}{E} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial y \partial z} - \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Derivando la segunda ecuación de equilibrio interno respecto de z , la tercera respecto de y , si sumamos miembro a miembro, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \sigma_{nz}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (5.5.11)$$

Sustituyendo en (5.5.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz}) - \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -\Delta \tau_{yz} - \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

Por permutación circular de las coordenadas obtendríamos las correspondientes a la segunda y tercera ecuaciones (5.1.4).

En definitiva, se obtienen como ecuaciones de compatibilidad expresadas en términos de tensiones las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \sigma_{nx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \Delta \sigma_{ny} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \Delta \sigma_{nz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \\ \Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \\ \Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (5.5.13)$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Michell*.

Para el caso muy frecuente que $\vec{f}_v = \text{constante}$, estas ecuaciones se reducen a:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+\mu) \Delta \sigma_{nx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 ; \quad (1+\mu) \Delta \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0 \\ (1+\mu) \Delta \sigma_{ny} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 ; \quad (1+\mu) \Delta \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = 0 \\ (1+\mu) \Delta \sigma_{nz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 ; \quad (1+\mu) \Delta \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (5.5.14)$$

que se llaman *ecuaciones de Beltrami*. De ellas se desprende que si las tensiones son funciones lineales de las coordenadas, las condiciones de compatibilidad quedan automáticamente satisfechas, ya que no figuran en ella más que derivadas de segundo orden.

5.6. Unicidad de la solución del problema elástico

Se nos plantea ahora si las ecuaciones que formulan el problema elástico, vistas en los epígrafes anteriores, pueden tener más de una solución.

La respuesta nos viene dada por el teorema de unicidad debido a *G. Kirchhoff**, que establece que una solución de las referidas ecuaciones, tal que las componentes de la matriz de tensiones verifiquen las ecuaciones de equilibrio interno y de contorno, así como que las componentes de la matriz de deformación satisfagan las ecuaciones de compatibilidad, esa es la solución del problema elástico planteado, y es única.

5.7. Principio de Saint-Venant

El grado de exactitud con que la solución del problema elástico nos da la distribución de tensiones, o de deformaciones, en todos los puntos de la pieza elástica depende, asimismo, del grado de coincidencia de la distribución real de las fuerzas de superficie con la distribución supuesta en las condiciones de contorno.

Fácilmente se comprende que en el caso de cargas puntuales, para evitar que en los puntos de localización de esas cargas la tensión tome valor infinito, será preciso suponer una distribución uniforme tal que sea estáticamente equivalente a la real, esto es, que respecto de cualquier punto, los sistemas real y supuesto tengan la misma resultante y el mismo momento resultante. El reparto de tensiones en las proximidades de los puntos de aplicación de las fuerzas es evidente que no son iguales en ambos casos.

En tales circunstancias admitiremos el *principio de Saint-Venant* que establece que a partir de una distancia suficiente de los puntos de la superficie en los que están aplicadas las fuerzas puntuales, el reparto de tensiones es el mismo que el que se tendría si las fuerzas exteriores se aplicaran de forma uniforme.

Este principio es de gran utilidad en la resolución de problemas elásticos, ya que nos permite simplificarlos. En virtud de él, es posible suponer que en determinada zona del contorno se sustituye la carga aplicada por un sistema de fuerzas estáticamente equivalente. De esta forma, las distribuciones de tensiones o de deformaciones, a una distancia grande de la zona en la que se ha hecho la sustitución, son prácticamente idénticas a las que corresponden a la solución exacta del problema elástico considerando las cargas reales, es decir, sin sustituirlas por el sistema estáticamente equivalente.

5.8. Deformaciones y tensiones de origen térmico. Teorema de Duhamel

Se estudia en Física general que cualquier cuerpo al calentarlo se dilata y que este fenómeno es reversible, es decir, cuando se enfría y vuelve a la temperatura primitiva, recupera las dimensiones que tenía inicialmente.

Fácilmente se comprende que en un cuerpo en cuyo interior exista un gradiente de temperaturas, las dilataciones de las superficies que se encuentren en un instante determinado a mayor temperatura serán superiores a las de temperaturas más bajas, y esta dilatación relativa de unas superficies respecto de otras, serán causa de un estado de

* Para la demostración es necesario expresar la energía de deformación elástica, concepto que se verá más adelante en el Capítulo 10, como forma cuadrática definida positiva respecto de las componentes de la matriz de deformación. Se puede ver en *Teoría de la Elasticidad*, de S. Timoshenko y J. N. Goodier.

tensiones que en algunos casos (como ocurre en las turbinas de vapor y motores Diesel) puede ser de extraordinaria importancia su conocimiento. Consideraremos, en primer lugar, el caso en que el gradiente de temperaturas es nulo, es decir, cuando en todo el material la temperatura es uniforme.

Experimentalmente se ha obtenido que la variación de la longitud con la temperatura es una función lineal, por lo que los alargamientos serán directamente proporcionales a los incrementos T de temperatura

$$l_2 = l_1 (1 + \alpha T)$$

o bien

$$\Delta l = \alpha l T \quad (5.8.1)$$

La constante de proporcionalidad α es una característica física del material, se llama *coeficiente de dilatación lineal*. Los valores que toma este coeficiente para los materiales más usuales se reflejan en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Valores del coeficiente de dilatación

Material	$\alpha \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	Material	$\alpha \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Acero	11,7	Hormigón	11,2
Fundición	12,1	Caucho	162
Aluminio	23,4	Granito	7
Latón	20	Vidrio (98% Si)	80
Bronce	18	Ladrillo	9

De la ecuación (5.8.1) se obtiene el alargamiento unitario de la barra debido al aumento de temperatura T

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha T \quad (5.8.2)$$

Es evidente que si la barra sometida a un cambio de temperatura es libre, no aparecerá tensión alguna, ya que no existe ninguna fuerza sobre la misma. En cambio, si la barra como frecuentemente ocurre está impedida a alargarse, el fenómeno es equivalente a una compresión cuyo acortamiento sea igual al alargamiento térmico. Por la ley de Hooke, en la barra se creará una tensión normal dada por la ecuación

$$\sigma = -E\varepsilon = -E\alpha T \quad (5.8.3)$$

En la construcción y en el diseño de miembros de un mecanismo es necesario tener en cuenta las deformaciones térmicas, sobre todo cuando se emplean distintos materiales. Algunas veces, los valores del coeficiente de dilatación térmica son casi iguales, entonces se favorece su uso conjunto, como ocurre con el hormigón y el acero (véase Tabla 5.1) cuando se utilizan ambos en el hormigón armado.

Pero estudiemos con mayor profundidad este tema, dada su importancia, a la vista de lo expuesto en epígrafes anteriores.

Supondremos sólidos homogéneos e isótropos, por lo que podemos admitir que es constante el coeficiente de dilatación térmica α . Si tenemos un cuerpo inicialmente a temperatura uniforme, siendo nulas tanto las fuerzas exteriores como las de masa e introducimos un estado térmico dado por la función escalar

$$T = T(x, y, z) \quad (5.8.4)$$

si no existiera ninguna causa que impidiera libremente la dilatación en todos sus puntos, la matriz de tensiones sería idénticamente nula y la matriz de deformación se reduciría a su forma diagonal, siendo los términos de la diagonal principal iguales y de valor αT

$$[T] = [0] ; \quad [D] = \begin{pmatrix} \alpha T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha T \end{pmatrix}$$

Es evidente que este estado imaginario de dilatación verificaría tanto las ecuaciones (5.1.1) de equilibrio interno como las de equilibrio en el contorno. Sin embargo, para que verificara las ecuaciones (5.1.3) de compatibilidad tendría que suceder:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5.8.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

es decir:

$$T = Ax + By + Cz + D \quad (5.8.6)$$

la función variación de temperatura tendría que ser lineal para que pudieran existir deformaciones debidas a las variaciones térmicas, sin que fueran acompañadas de tensiones.

Para otro estado térmico, distinto del lineal, la condición de compatibilidad no se cumpliría. Esto nos dice que aun en el caso de que el cuerpo no estuviera impedido de dilatarse libremente, si le sometemos a un estado térmico no lineal aparecen unas tensiones de origen térmico con sus deformaciones elásticas correspondientes, que tendrán que verificar las ecuaciones de equilibrio interno, las de equilibrio en el contorno y las condiciones de compatibilidad.

Por tanto, si σ'_{nx} , σ'_{ny} , σ'_{nz} , τ'_{xy} , τ'_{xz} , τ'_{yz} , son las tensiones de origen térmico, llamadas *tensiones termoelásticas*, las deformaciones en cada punto se obtendrán como suma de éstas y las debidas a la dilatación térmica.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma'_{nx} - \mu(\sigma'_{ny} + \sigma'_{nz})] + \alpha T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma'_{ny} - \mu(\sigma'_{nx} + \sigma'_{nz})] + \alpha T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma'_{nz} - \mu(\sigma'_{nx} + \sigma'_{ny})] + \alpha T \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau'_{xy}}{G} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau'_{xz}}{G} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau'_{yz}}{G} \end{array} \right. \quad (5.8.7)$$

En estas ecuaciones se observa que las deformaciones angulares son debidas exclusivamente a las tensiones tangenciales termoelásticas, como tenía que ser, ya que la deformación de origen térmico, al ser el cuerpo isótropo, no produce variaciones angulares.

El sistema de ecuaciones (5.8.7) permite despejar las tensiones en función de las deformaciones obteniendo las correspondientes ecuaciones de *Lamé*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{nx} = \lambda e + 2 G \varepsilon_x - \frac{\alpha E T}{1 - 2 \mu} \\ \sigma'_{ny} = \lambda e + 2 G \varepsilon_y - \frac{\alpha E T}{1 - 2 \mu} \\ \sigma'_{nz} = \lambda e + 2 G \varepsilon_z - \frac{\alpha E T}{1 - 2 \mu} \\ \tau'_{xy} = G \gamma_{xy} ; \quad \tau'_{xz} = G \gamma_{xz} ; \quad \tau'_{yz} = G \gamma_{yz} \end{array} \right. \quad (5.8.8)$$

siendo:

$$e = \frac{\Theta}{E} (1 - 2 \mu) + 3 \alpha T \Rightarrow \Theta = \frac{eE - 3 \alpha E T}{1 - 2 \mu}$$

y

$$\Theta = \sigma'_{nx} + \sigma'_{ny} + \sigma'_{nz}$$

Estas tensiones para ser solución del problema elástico tienen que verificar las ecuaciones de equilibrio interno y las de equilibrio en el contorno.

Expresemos la primera de ellas

$$\frac{\partial \sigma'_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} = 0$$

en términos de desplazamientos:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha E}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

Ordenando y obteniendo de forma análoga las dos restantes ecuaciones de equilibrio interno, éstas son:

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta u - \frac{\alpha E}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta v - \frac{\alpha E}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta w - \frac{\alpha E}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5.8.9)$$

En cuanto a las condiciones de contorno, sustituyendo las tensiones (5.8.8), se obtienen:

$$\begin{cases} (\lambda e + 2G \varepsilon_x) \alpha + \tau'_{xy} \beta + \tau'_{xz} \gamma = \frac{\alpha E T}{1-2\mu} \alpha \\ \tau'_{xy} \alpha + (\lambda e + 2G \varepsilon_y) \beta + \tau'_{yz} \gamma = \frac{\alpha E T}{1-2\mu} \beta \\ \tau'_{xz} \alpha + \tau'_{yz} \gamma + (\lambda e + 2G \varepsilon_z) \gamma = \frac{\alpha E T}{1-2\mu} \gamma \end{cases} \quad (5.8.10)$$

Comparando las ecuaciones de equilibrio con las ecuaciones (5.2.1) de Navier y las condiciones de contorno con las que corresponden al caso normal, se observa que el sistema elástico en el que existe el estado térmico definido por la variación T de temperatura es equivalente a un estado no térmico en el que las fuerzas de superficie $\vec{f}_\Omega(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ y las de masa $\vec{f}_v(X, Y, Z)$ tuvieran los valores:

$$X = -\frac{\alpha E}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\alpha E}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (5.8.11)$$

$$\bar{X} = \frac{\alpha E T}{1-2\mu} \alpha; \quad \bar{Y} = \frac{\alpha E T}{1-2\mu} \beta; \quad \bar{Z} = \frac{\alpha E T}{1-2\mu} \gamma \quad (5.8.12)$$

es decir, si $\psi = \frac{\alpha E T}{1-2\mu}$:

$$\vec{f}_v = -\nabla \psi; \quad \vec{f}_\Omega = \psi \vec{u} \quad (5.8.13)$$

siendo \vec{u} el vector unitario en la dirección y sentido de la normal exterior al cuerpo elástico en los puntos de su contorno.

Hemos obtenido así el llamado *teorema de Duhamel*: los desplazamientos debidos a variaciones térmicas y a tensiones termoelásticas son los mismos que se producirían en el sólido elástico actuando simultáneamente los sistemas de fuerzas de masa y de superficie dados por (5.8.13), sin que exista variación alguna de temperatura.

Ahora bien, supongamos que tenemos un sólido elástico al que aplicamos la sollicitación definida en las ecuaciones (5.8.13). Le correspondería la solución de tensiones siguientes:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \lambda e + 2 G \varepsilon_x \\ \sigma_{ny} = \lambda e + 2 G \varepsilon_y \\ \sigma_{nz} = \lambda e + 2 G \varepsilon_z \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} ; \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} ; \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \end{cases}$$

Comparando estas ecuaciones con las (5.8.8) resulta que las tensiones termoelástica serían:

$$\begin{cases} \sigma'_{nx} = \sigma_{nx} - \psi \\ \sigma'_{ny} = \sigma_{ny} - \psi \\ \sigma'_{nz} = \sigma_{nz} - \psi \\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} \\ \tau'_{xz} = \tau_{xz} \\ \tau'_{yz} = \tau_{yz} \end{cases} \quad (5.8.15)$$

es decir, si a un cuerpo elástico se le somete a una variación térmica definida por la función $T = T(x, y, z)$ y consideramos el sistema equivalente dado por el teorema de *Duhamel*, las tensiones termoelásticas se obtienen a partir de la solución de tensiones del

sistema equivalente restando el valor $\psi = \frac{\alpha E T}{1 - 2 \mu}$ a las componentes normales correspondientes, mientras que las tensiones tangenciales son las mismas.

Supongamos ahora que aplicamos al cuerpo elástico una sollicitación que neutralice al sistema equivalente, es decir, unas fuerzas de masa

$$\vec{f}_v = \nabla \psi, \text{ siendo } \psi = \frac{\alpha E T}{1 - 2 \mu}$$

y unas fuerzas de superficie

$$\vec{f}_\Omega = -\psi \vec{u}$$

produciéndose simultáneamente las variaciones térmicas sobre las iniciales. Ahora el campo de corrimientos es nulo, es decir, no se producen deformaciones. Sin embargo, sí existen tensiones que llamaremos de *constricción*.

Podemos calcular las tensiones de constricción σ''_{nx} , σ''_{ny} , σ''_{nz} , τ''_{xy} , τ''_{xz} , τ''_{yz} , imponiendo la condición de que las deformaciones debidas a la acción simultánea del sistema de fuerzas aplicado y de las variaciones térmicas, son nulas.

$$\begin{cases} \frac{1}{E} [\sigma''_{nx} - \mu(\sigma''_{ny} + \sigma''_{nz})] + \alpha T = 0 \\ \frac{1}{E} [\sigma''_{ny} - \mu(\sigma''_{nx} + \sigma''_{nz})] + \alpha T = 0 \\ \frac{1}{E} [\sigma''_{nz} - \mu(\sigma''_{nx} + \sigma''_{ny})] + \alpha T = 0 \\ \frac{\tau''_{xy}}{G} = 0 ; \quad \frac{\tau''_{xz}}{G} = 0 ; \quad \frac{\tau''_{yz}}{G} = 0 \end{cases} \quad (5.8.16)$$

Restando miembro a miembro las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma''_{nx} - \sigma''_{ny} - \mu(\sigma''_{ny} + \sigma''_{nz} - \sigma''_{nx} - \sigma''_{nz}) &= 0 \\ (\sigma''_{nx} - \sigma''_{ny})(1 + \mu) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma''_{nx} = \sigma''_{ny} \end{aligned}$$

Procediendo de igual forma con la segunda y tercera ecuaciones, llegaríamos a $\sigma''_{ny} = \sigma''_{nz}$, es decir:

$$\begin{cases} \sigma''_{nx} = \sigma''_{ny} = \sigma''_{nz} = -\frac{\alpha E T}{1 - 2\mu} = -\psi \\ \tau''_{xy} = \tau''_{xz} = \tau''_{yz} = 0 \end{cases} \quad (5.8.17)$$

Las ecuaciones (5.8.15) se pueden poner en la forma:

$$\begin{cases} \sigma'_{nx} = \sigma_{nx} + \sigma''_{nx} \\ \sigma'_{ny} = \sigma_{ny} + \sigma''_{ny} \\ \sigma'_{nz} = \sigma_{nz} + \sigma''_{nz} \\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} \\ \tau'_{xz} = \tau_{xz} \\ \tau'_{yz} = \tau_{yz} \end{cases} \quad (5.8.18)$$

que nos permiten hacer otra consideración del problema: las tensiones termoelásticas las obtenemos como superposición del estado tensional producido por la aplicación del sistema equivalente \vec{f}_v y \vec{f}_Ω , definido por las ecuaciones (5.8.15), y del estado tensional inicial que originarían las tensiones de constricción.

EJERCICIOS

- 5.1. Sobre el sólido de forma pentaédrica indicado en la Figura E5.1 se ha provocado un estado tensional mediante la aplicación de fuerzas de volumen ($X = 0$, $Y = 6 \text{ kp/cm}^3$, $Z = 17 \text{ kp/cm}^3$) y fuerzas de superficie. La solución de tensiones es del tipo:

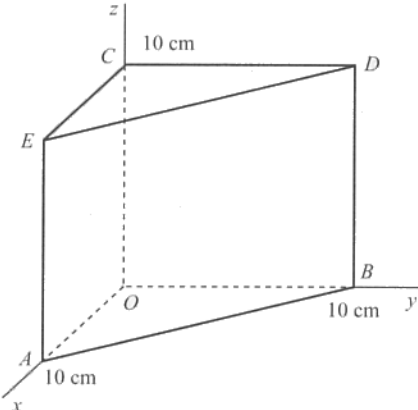
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = ay + bz \\ \sigma_{ny} = 3ay + bz \\ \sigma_{nz} = ay + 3bz \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 2ay - 2bz \end{array} \right.$$


Figura E5.1.

estando expresadas las tensiones en kp/cm^2 cuando x, y, z se miden en cm.

Se pide:

- 1.º Valores de los coeficientes a, b .
- 2.º Tensiones y direcciones principales en el punto P de coordenadas $(3, 3, 4) \text{ cm}$.
- 3.º Expresiones de las fuerzas de superficie $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ en las caras del sólido.
- 4.º Matriz de deformación.

Datos: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$, $\mu = 0,25$.

- 1.º La solución de tensiones tiene que verificar las ecuaciones de equilibrio interno.

$$\left\{ \begin{array}{l} X + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \Rightarrow 6 + 3a - 2b = 0 \\ Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{nz}}{\partial z} = 0 \Rightarrow 17 + 2a + 3b = 0 \end{array} \right.$$

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyas soluciones son:

$$a = -4 \text{ kp/cm}^3 ; \quad b = -3 \text{ kp/cm}^3$$

2.º En el punto $P(3, 3, 4)$, la matriz de tensiones es:

$$[T] = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales son, en este punto:

$$\sigma_1 = -24 \text{ kp/cm}^2 ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -48 \text{ kp/cm}^2$$

y las direcciones principales son coincidentes con las de los ejes coordenados.

3.º A partir de la matriz de tensiones

$$[T] = \begin{pmatrix} -4y-3z & 0 & 0 \\ 0 & -12y-3z & -8y+6z \\ 0 & -8y+6z & -4y-9z \end{pmatrix}$$

se obtienen las fuerzas de superficie sobre las caras del cuerpo elástico considerado, que vendrán expresadas en kp/cm^2 cuando las coordenadas se expresan en centímetros.

* Cara OBDC

$$\vec{u}(-1, 0, 0) ; \quad x = 0$$

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}] = \begin{bmatrix} +4y+3z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = +4y + 3z ; \quad \bar{Y} = 0 ; \quad \bar{Z} = 0$$

* Cara OAEC

$$\vec{u}(0, -1, 0) ; \quad y = 0$$

$$\bar{X} = 0 ; \quad \bar{Y} = 3z ; \quad \bar{Z} = -6z$$

* Cara OAB

$$\vec{u}(0, 0, -1) ; \quad z = 0$$

$$\bar{X} = 0 ; \quad \bar{Y} = 8y ; \quad \bar{Z} = 4y$$

* Cara ECD

$$\vec{u}(0, 0, 1) ; \quad z = 10$$

$$\bar{X} = 0 ; \quad \bar{Y} = -8y + 60 ; \quad \bar{Z} = -4y - 90$$

* Cara ABDE $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \quad x + y = 10$

$$\bar{X} = \frac{-4y - 3z}{\sqrt{2}}; \quad \bar{Y} = \frac{-12y - 3z}{\sqrt{2}}, \quad \bar{Z} = \frac{-8y + 6z}{\sqrt{2}}$$

4.º Por las leyes de Hooke generalizadas

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{1}{2 \cdot 10^6} [-4y - 3z - \frac{1}{4}(-16y - 12z)] = 0 \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = \frac{1}{2 \cdot 10^6} [-12y - 3z - \frac{1}{4}(-8y - 12z)] = -5 \cdot 10^{-6}y \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{1}{2 \cdot 10^6} [-4y - 9z - \frac{1}{4}(-16y - 6z)] = -\frac{15}{4} \cdot 10^{-6}z \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{-8y + 6z}{8 \cdot 10^5} \end{cases}$$

ya que

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 1,25} = 8 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$$

Por tanto, la matriz de deformación pedida en el sólido considerado es

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 \cdot 10^{-6}y & \frac{-8y + 6z}{8 \cdot 10^5} \\ 0 & \frac{-8y + 6z}{8 \cdot 10^5} & -\frac{15}{4} 10^{-6}z \end{pmatrix}$$

- 5.2. En los puntos de un cubo cuya longitud de arista es $a = 10 \text{ cm}$, de módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ y coeficiente de Poisson $\mu = 0,25$, el estado de deformación, referido a un sistema cartesiano con origen en uno de sus vértices y semiejes positivos determinados por las aristas concurrentes en él, está definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 8ax; & \varepsilon_y &= \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xz} = 0; & \gamma_{yz} &= 4a(4z - y) \end{aligned}$$

siendo a una constante, $a = 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$. Se pide:

- 1.º Comprobar que el estado de deformación así definido es físicamente posible.

2.º Sistema de fuerzas que tienen que actuar sobre el cuerpo para originar ese estado de deformación, dando la distribución de tensiones en sus caras, así como las fuerzas de volumen.

3.º Calcular las componentes u , v , w del vector corrimiento $\vec{\delta}_p$ sabiendo que son nulos el corrimiento y el giro en el origen.

1.º El estado de deformación dado verifica todas las ecuaciones (3.16.8) que expresan las condiciones de integrabilidad o compatibilidad entre las componentes de la matriz de deformación.

Luego el citado estado de deformación es *físicamente posible*.

2.º Aplicando las ecuaciones de Lamé, obtenemos las tensiones normales y tangenciales en las caras de un paralelepípedo elemental que limite el entorno de un punto $P(x, y, z)$ del cubo

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \lambda e + 2 G \varepsilon_x ; & \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \sigma_{ny} = \lambda e + 2 G \varepsilon_y ; & \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \sigma_{nz} = \lambda e + 2 G \varepsilon_z ; & \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \end{cases}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones los coeficientes λ y G de Lamé

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = \frac{0,25 \cdot 2 \cdot 10^6}{(1 + 0,25)(1 - 0,5)} = 8 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2 \cdot 10^6}{2(1 + 0,25)} = 8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

y la deformación cúbica unitaria

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 8 a x$$

se obtienen:

$$\sigma_{nx} = 8 \cdot 10^5 \cdot 8 a x + 2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 8 a x = 19,2 x$$

$$\sigma_{ny} = \sigma_{nz} = 8 \cdot 10^5 \cdot 8 a x = 6,4 x$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 8 \cdot 10^5 \cdot 4 a (4z - y) = 3,2(4z - y)$$

tensiones que vendrán dadas en kp/cm^2 si las coordenadas se expresan en cm.

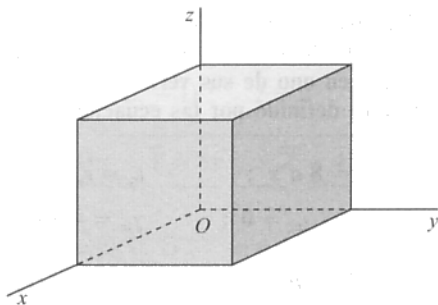


Figura E5.2.

El sistema de fuerzas que tienen que actuar en las caras del cubo considerado se resume en el siguiente cuadro.

Ecuación del plano de la cara	Tensión normal kp/cm^2	Tensión tangencial	
$x = 0$	$\sigma_{nx} = 0$	$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$	
$x = 10$	$\sigma_{nx} = 192$		
$y = 0$	$\sigma_{ny} = 6,4 x$	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{yz} = 12,8 z$
$y = 10$			$\tau_{yz} = 12,8 z - 32$
$z = 0$	$\sigma_{nz} = 6,4 x$	$\tau_{xz} = 0$	$\tau_{yz} = -3,2 y$
$z = 10$			$\tau_{yz} = 128 - 3,2 y$

Fácilmente se comprende que al no ser equivalente a cero el sistema de fuerzas que actúan sobre el cubo, tienen que existir fuerzas de volumen.

Si $\vec{f}_v(X, Y, Z)$ es la fuerza por unidad de volumen, las componentes X, Y, Z han de verificar las ecuaciones (5.1.1) de equilibrio interno.

$$X + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -19,2 \text{ kp/cm}^3$$

$$Y + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = -12,8 \text{ kp/cm}^3$$

$$Z + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = 3,2 \text{ kp/cm}^3$$

$$X = -19,2 \text{ kp/cm}^3 ; \quad Y = -12,8 \text{ kp/cm}^3 ; \quad Z = 3,2 \text{ kp/cm}^3$$

3.º Para el cálculo del vector corrimiento, obtengamos los valores de las componentes (p_x, p_y, p_z) del vector $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}_p$, dados por el sistema (3.16.7)

$$\begin{cases} dp_x = -2 a dy - 8 a dz \\ dp_y = 0 \\ dp_z = 0 \end{cases}$$

Integrando:

$$\begin{cases} p_x = -2 ay - 8 az + C_1 \\ p_y = C_2 \\ p_z = C_3 \end{cases}$$

siendo C_1, C_2, C_3 constantes de integración que determinaremos con la condición de ser nulo el giro en el origen

$$(p_x)_0 = (p_y)_0 = (p_z)_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

Entrando con los valores de $p_i (i = x, y, z)$ obtenidos en el sistema (3.16.3) se tiene

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x} = 8ax ; & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; & \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \frac{\partial v}{\partial z} = 2a(4z - y) + 2ay + 8az \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ; & \frac{\partial w}{\partial y} = 2a(4z - y) - 2ay - 8az ; & \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

sistema equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} du = 8ax \, dx \\ dv = [2a(4z - y) + 2ay + 8az] \, dz = 16az \, dz \\ dw = [2a(4z - y) - 2ay - 8az] \, dy = -4ay \, dy \end{array} \right.$$

cuya integración nos da:

$$\begin{aligned} u &= 4ax^2 + u_0 \\ v &= 8az^2 + v_0 \\ w &= -2ay^2 + w_0 \end{aligned}$$

siendo u_0, v_0, w_0 , constantes de integración que se determinan con la condición de ser nulo el desplazamiento del origen

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

Por tanto, las componentes del vector corrimiento son:

$$\vec{\delta}_p \left\{ \begin{array}{l} u = 4ax^2 \\ v = 8az^2 \\ w = -2ay^2 \end{array} \right.$$

- 5.3. Para los puntos de un sólido elástico cilíndrico, de generatrices paralelas al eje z , las componentes del vector desplazamiento $\vec{\delta}$ vienen dadas por las ecuaciones:

$$\vec{\delta} \left\{ \begin{array}{l} u = a(x^2 - 5y^2) \\ v = 2axy \\ w = -0 \end{array} \right.$$

siendo a una constante.

Sabiendo que las fuerzas de masa por unidad de volumen son despreciables, se pide:

- 1.º Calcular las matrices de deformación y de giro en un punto P .
- 2.º Calcular las deformaciones principales.
- 3.º Dado el módulo de elasticidad transversal G , ¿qué valor toma el módulo de Young E para que haya equilibrio en todo punto?
- 4.º Si el sólido elástico es un cilindro de revolución de radio R , eje z y limitado por los planos $z = 0$ y $z = h$, calcular las fuerzas de superficie que tienen que actuar sobre las caras del mismo para provocar el campo de desplazamientos dado.

1.º A partir de las derivadas del vector desplazamiento

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -10ay ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2ay ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2ax ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

se obtienen de forma inmediata las matrices de deformación y de giro pedidas

$$[D] = \begin{pmatrix} 2ax & -4ay & 0 \\ -4ay & 2ax & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad [H] = \begin{pmatrix} 0 & -6ay & 0 \\ 6ay & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.º De la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2ax - \varepsilon & -4ay & 0 \\ -4ay & 2ax - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$-\varepsilon [\varepsilon^2 - 4ax\varepsilon + 4a^2x^2 - 16a^2y^2] = 0$$

se obtienen los valores de las deformaciones principales:

$$\boxed{\varepsilon = 0} ; \quad \boxed{\varepsilon} = \frac{4ax \pm \sqrt{16a^2x^2 - 16a^2x^2 + 64a^2y^2}}{2} = \begin{cases} \boxed{2ax + 4ay} \\ \boxed{2ax - 4ay} \end{cases}$$

3.º De la ecuación fundamental de la elasticidad

$$(\lambda + G) \nabla \operatorname{div} \vec{\delta} + G \Delta \vec{\delta} = 0$$

como:

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2ax + 2ax = 4ax$$

$$\nabla(4ax) = \frac{\partial(4ax)}{\partial x} \vec{i} = 4a \vec{i}$$

$$\Delta \vec{\delta} = -8a \vec{i}$$

Se deduce:

$$(\lambda + G)4a - G8a = 0 \Rightarrow \lambda = G$$

es decir:

$$\frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \Rightarrow 2\mu = 1 - 2\mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{4}$$

Por tanto, el valor que toma el módulo de Young E para que haya equilibrio en todo punto será:

$$E = 2(1 + \mu)G = 2,5G$$

4.º Las componentes de la matriz de tensiones las podemos calcular aplicando las ecuaciones de Lamé. Teniendo en cuenta que $\lambda = G$, se tiene:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \lambda e + 2G \varepsilon_x = \lambda 4ax + 4aGx = 8aGx \\ \sigma_{ny} = \lambda e + 2G \varepsilon_y = \lambda 4ax + 4aGx = 8aGx \\ \sigma_{nz} = \lambda e + 2G \varepsilon_z = \lambda 4ax = 4aGx \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -8aGy \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

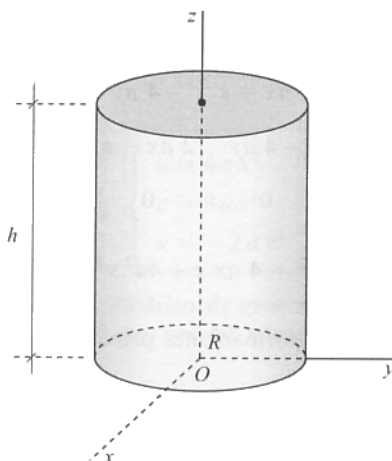


Figura E5.3.

Las fuerzas de superficie que tienen que actuar sobre las caras del sólido para provocar el campo de desplazamientos dado las obtenemos aplicando las ecuaciones de equilibrio en el contorno

$$\begin{aligned} \text{— Superficie lateral: } x^2 + y^2 - R^2 = 0 ; \quad \vec{u} \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0 \right) \\ \left\{ \begin{aligned} \bar{X} = \sigma_{nx} \alpha + \tau_{xy} \beta &= \frac{8 aG}{R} x^2 - \frac{8 aG}{R} y^2 = \frac{8 aG}{R} (x^2 - y^2) \\ \bar{Y} = \tau_{xy} \alpha + \sigma_{ny} \beta &= -\frac{8 aG}{R} xy + \frac{8 aG}{R} xy = 0 \\ \bar{Z} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

o sea

$$\boxed{\vec{f}_{\Omega} \left[\frac{8 aG}{R} (x^2 - y^2), 0, 0 \right]}$$

$$\text{— Cara superior: } z = h ; \quad \vec{u} (0, 0, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= 0 \\ \bar{Y} &= 0 \\ \bar{Z} &= \sigma_{nz} = 4 aGx \end{aligned} \right\} \boxed{\vec{f}_{\Omega} (0, 0, 4 aGx)}$$

$$\text{— Cara inferior } z = 0 ; \quad \vec{u} (0, 0, -1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= 0 \\ \bar{Y} &= 0 \\ \bar{Z} &= -\sigma_{nz} = -4 aGx \end{aligned} \right\} \boxed{\vec{f}_{\Omega} (0, 0, -4 aGx)}$$

5.4. Determinar las tensiones que corresponden al vector de Galerkin:

$$\vec{P} = 2x^4 \vec{i} + y^4 \vec{j} + (-8x^3z - 4y^3z) \vec{k}$$

Calcular, asimismo, las fuerzas de masa que deberían existir para que las tensiones calculadas y la solución de corrimientos que de este vector de Galerkin se derivan puedan ser solución de un problema elástico.

Conocido el vector de Galerkin, la solución de tensiones viene dada por las ecuaciones (5.3.8).

Como la divergencia del vector de Galerkin es nula

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 8x^3 + 4y^3 - 8x^3 - 4y^3 = 0$$

dichas ecuaciones se reducen a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = 2(1 - \mu) \Delta \frac{\partial P}{\partial x} = 96(1 - \mu)x \\ \sigma_{ny} = 2(1 - \mu) \Delta \frac{\partial P}{\partial y} = 48(1 - \mu)y \\ \sigma_{nz} = 2(1 - \mu) \Delta \frac{\partial P}{\partial z} = -48(1 - \mu)(2x + y) \\ \tau_{xy} = (1 - \mu) \Delta \left(\frac{\partial P_x}{\partial y} + \frac{\partial P_y}{\partial x} \right) = 0 \\ \tau_{xz} = (1 - \mu) \Delta \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) = -48(1 - \mu)z \\ \tau_{yz} = (1 - \mu) \Delta \left(\frac{\partial P_y}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial y} \right) = -24(1 - \mu)z \end{array} \right.$$

Por tanto, la matriz de tensiones es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 96(1 - \mu)x & 0 & -48(1 - \mu)z \\ 0 & 48(1 - \mu)y & -24(1 - \mu)z \\ -48(1 - \mu)z & -24(1 - \mu)z & -48(1 - \mu)(2x + y) \end{pmatrix}$$

Entre las fuerzas de masa y el vector de *Galerkin* existe la relación (5.3.4):

$$\nabla^4 \vec{P} = -\frac{\vec{f}_v}{1 - \mu}$$

es decir:

$$\vec{f}_v = -(1 - \mu) \nabla^4 \vec{P}$$

Calculando las bilaplacianas de las componentes del vector de *Galerkin*

$$\nabla^4 P_x = \nabla^4 (2x^4) = 48$$

$$\nabla^4 P_y = \nabla^4 (y^4) = 24$$

$$\nabla^4 P_z = \nabla^4 (-8x^3z - 4y^3z) = 0$$

se obtiene:

$$\vec{f}_v = [-48(1 - \mu), -24(1 - \mu), 0]$$

5.5. Calcular los corrimientos y las tensiones que se derivan del siguiente potencial de deformación

$$\phi = A (x^2 - y^2) + 2 Bxy$$

siendo A y B constantes.

Calculemos las derivadas primeras y segundas de la función ϕ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2 Ax + 2 By \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 A$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2 Ay + 2 Bx \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2 A$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Se comprueba que el potencial de deformación dado es una función armónica

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Los corrimientos son, en virtud de las ecuaciones (5.4.5)

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{G} (Ax + By) \\ v &= \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{G} (-Ay + Bx) \\ w &= \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Para calcular las tensiones aplicamos las ecuaciones (5.4.7):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 A \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2 A \quad ; \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 2 B \quad ; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0 \end{aligned}$$

5.6. Resolver el problema elástico que se presenta en una barra cilíndrica recta, limitada por dos secciones normales a sus generatrices, sometida a tracción o compresión monoaxial, mediante la determinación de un potencial. Se considerarán despreciables las fuerzas de masa.

Consideremos el prisma recto de sección arbitraria indicado en la Figura E5.6. Supondremos que las únicas fuerzas aplicadas al sólido elástico están uniformemente distribuidas sobre las secciones extremas, siendo F su resultante sobre cada una de ellas. Las fuerzas de superficie sobre ambas caras serán $\sigma = \frac{F}{\Omega}$, siendo Ω el área de la sección recta.

Tomaremos el sistema de referencia indicado en la misma Figura E5.6, con origen O en el centro de gravedad del prisma. Al someterlo a tracción, el alargamiento longitudinal unitario es constante, en virtud de la ley de Hooke. Por otra parte, la deformación transversal unitaria también es constante, pues ya vimos que está relacionado con el alargamiento longitudinal unitario mediante el coeficiente de Poisson. Esto nos lleva a poder expresar las componentes del vector corrimiento mediante las ecuaciones:

$$u = ax ; \quad v = by ; \quad w = bz$$

siendo a y b constantes que determinaremos imponiendo las condiciones de contorno.

Observando las ecuaciones de los corrimientos se deduce que existe un potencial

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{2} b(y^2 + z^2)$$

del que derivan.

Calculemos las constantes a y b aplicando las ecuaciones de equilibrio en el contorno, primero en las bases y después en los puntos de la superficie lateral.

— En las bases: $\vec{u}(1, 0, 0)$; $\sigma_{nx} = \sigma$; $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$

$$\bar{X} = \sigma ; \quad \bar{Y} = 0 ; \quad \bar{Z} = 0$$

Ahora bien, por la ecuación de Lamé

$$\sigma = \lambda e + 2 G \varepsilon_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 G \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(a + 2b) + 2 Ga \quad (1)$$

— En la superficie lateral: $\vec{u}(0, \beta, \gamma)$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda e + 2 G \varepsilon_y) \beta &= 0 \\ (\lambda e + 2 G \varepsilon_z) \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda(a + 2b) + 2 G b = 0 \quad (2)$$

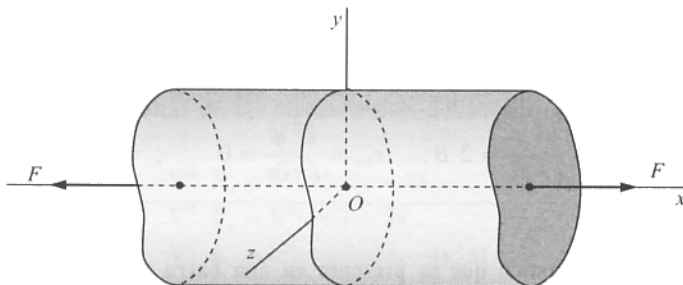


Figura E5.6.

De las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{cases} \lambda(a + 2b) + 2Ga = 0 \\ \lambda(a + 2b) + 2Gb = 0 \end{cases}$$

se deducen los valores de a y de b .

$$a = \frac{(\lambda + G)\sigma}{G(3\lambda + 2G)} \quad ; \quad b = -\frac{\lambda\sigma}{2G(3\lambda + 2G)}$$

Por tanto, las componentes del vector desplazamiento son las del gradiente de la función potencial ϕ

$$\vec{\delta} \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{(\lambda + G)\sigma}{G(3\lambda + 2G)} x \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\lambda\sigma}{2G(3\lambda + 2G)} y \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\lambda\sigma}{2G(3\lambda + 2G)} z \end{cases}$$

Las componentes de la matriz de deformación en todos los puntos del sólido elástico serán:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{(\lambda + G)\sigma}{G(3\lambda + 2G)} = \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\lambda\sigma}{2G(3\lambda + 2G)} = -\mu \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\lambda\sigma}{2G(3\lambda + 2G)} = -\mu \frac{\sigma}{E} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

y la solución de tensiones:

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \lambda(a + 2b) + 2Ga = \sigma \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{nz} = \lambda(a + 2b) + 2Gb = 0 \\ \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned}$$

Las matrices de tensiones y de deformaciones serán, por tanto:

$$[D] = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu \frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \frac{\sigma}{E} \end{pmatrix} ; [T] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 5.7. Una viga de ferrocarril se ha proyectado para que los raíles, de longitud $l = 28$ m no estén sometidos a tensión alguna a una temperatura $T = 23,6$ °C.

Calcular la tensión en los raíles cuando la temperatura baja a -2 °C en los siguientes casos:

- Cuando los extremos de los raíles están fijos.
- Cuando existe una tolerancia de acortamiento de $t = 6,72$ mm en cada raíl.

Se tomará $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm² y $\alpha = 11,72 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹.

- Si los extremos de cada raíl no fueran fijos, al disminuir la temperatura ΔT °C se produciría un acortamiento Δl dado por

$$\Delta l = l \alpha \Delta T$$

Al estar los extremos fijos equivale a una tensión de tracción σ que provoque un alargamiento igual a Δl .

El alargamiento unitario sería:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma = E \cdot \alpha \Delta T$$

Sustituyendo valores:

$$\sigma = 2 \cdot 10^6 \cdot 11,72 \cdot 10^{-6} (23,6 + 2) = 600 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma = 600 \text{ kp/cm}^2$$

- Si existe una tolerancia de $t = 6,72$ mm, la tensión σ provoca en este caso un alargamiento Δl que tiene el valor

$$\Delta l = l \alpha \Delta T - t = 28 \cdot 10^3 \cdot 11,72 \cdot 10^{-6} \cdot 25,6 - 6,72 = 1,68 \text{ mm}$$

Por la ley de Hooke

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = 2 \cdot 10^6 \frac{1,68}{28 \cdot 10^3} = 120 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma = 120 \text{ kp/cm}^2$$

- 5.8. Un paralelepípedo de cierto material elástico (coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$ y módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm²) que a cierta temperatura tiene de dimensiones $a = 10$ cm, $b = 20$ cm, $c = 30$ cm, se introduce en una cavidad de anchura b de paredes rígidas, planas y perfectamente lisas, de tal forma que dos caras opuestas del paralelepípedo estén en contacto con las paredes de la cavidad.

Una vez en esta posición se eleva la temperatura del prisma en $\Delta T = 30$ °C.

- 1.º Calcular los valores de las tensiones principales en los puntos del paralelepípedo.
- 2.º Hallar los alargamientos unitarios principales.

Se tomará $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm², $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ °C⁻¹.

1.º Tomemos un sistema de ejes cuyas direcciones sean las de las aristas del paralelepípedo (Fig. E5.8).

Por la especial disposición del paralelepípedo, las tensiones normales σ_{nx} y σ_{nz} son nulas.

Por otra parte, en virtud de la invariabilidad de la distancia entre las paredes de la cavidad, es nulo el alargamiento en la dirección del eje y .

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{ny} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{nz})] + \alpha \Delta T = \frac{\sigma_{ny}}{E} + \alpha \Delta T = 0$$

De aquí se obtiene:

$$\sigma_{ny} = -E \alpha \Delta T = -2 \cdot 10^6 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = -750 \text{ kp/cm}^2$$

El cuerpo está sometido a una compresión uniforme. La única tensión principal no nula es

$$\sigma_{ny} = -750 \text{ kp/cm}^2$$

2.º La dirección del eje y es una dirección principal. Las otras dos direcciones, en nuestro caso, quedan indeterminadas. Cualquier par de direcciones ortogonales entre sí y perpendicu-

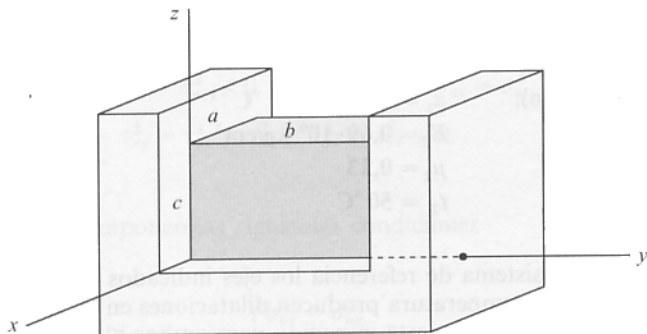


Figura E5.8.

lares al eje y son principales. Lo que significa que las direcciones de los ejes del sistema de referencia adoptado son principales.

$$\varepsilon_x = \frac{-\mu \sigma_{ny}}{E} + \alpha \Delta T = (\mu + 1) \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_{ny}}{E} + \alpha \Delta T = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\mu \sigma_{ny}}{E} + \alpha \Delta T = (\mu + 1) \alpha \Delta T$$

Sustituyendo valores, se obtienen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= 48,75 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_3 &= 0 \end{aligned}$$

- 5.9. Dos paralelepípedos, A y B , de distinto material, y de las mismas dimensiones $a \times b \times c$, se colocan a uno y otro lado de una placa rígida y lisa adosados a ella por sus caras $a \times c$, de tal forma que en sus ejes de simetría perpendiculares a dichas caras sean coincidentes. Ambos paralelepípedos, junto con la placa, se introducen en una ranura de anchura igual a dos veces la longitud de la arista b más el espesor de la placa. Las paredes de la ranura son planas, rígidas y perfectamente lisas.

Los paralelepípedos A y B se calientan, experimentando incrementos de temperatura t_1 y t_2 , respectivamente.

Conociendo los módulos de elasticidad, E_1 y E_2 , los coeficientes de dilatación lineal α_1 y α_2 , y los coeficientes de Poisson μ_1 y μ_2 de los bloques A y B , respectivamente, se pide:

- 1.º Las tensiones principales en ambos bloques.
- 2.º Las variaciones de longitud de las aristas de los mismos.
- 3.º Calcular la variación de volumen de los dos bloques si ambos tienen las dimensiones $20 \times 30 \times 20$ cm y cada uno de ellos las siguientes características.

Cuerpo A (acero):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,117 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ E_1 &= 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \\ \mu_1 &= 0,25 \\ t_1 &= 60 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Cuerpo B (aluminio):

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0,234 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ E_2 &= 0,69 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \\ \mu_2 &= 0,23 \\ t_2 &= 50 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

- 1.º Tomemos como sistema de referencia los ejes indicados en la Figura E5.9.

Los incrementos de temperatura producen dilataciones en todas las direcciones. El alargamiento en la dirección del eje y está impedido para ambos bloques, lo cual crea tensiones σ_{ny} en los mismos.

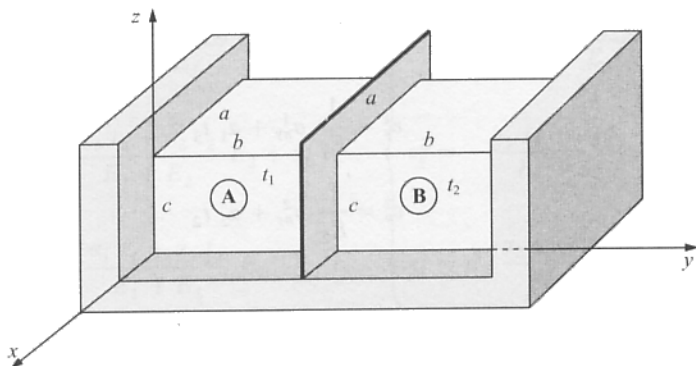


Figura E5.9.

Las ecuaciones a aplicar para resolver el problema son las correspondientes a las leyes de Hooke generalizadas, teniendo en cuenta las dilataciones térmicas

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu(\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] + \alpha T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{ny} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{nz})] + \alpha T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{nz} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny})] + \alpha T \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{array} \right.$$

ecuaciones que aplicaremos a cada uno de los cuerpos.

Distinguiremos con el superíndice 1 las componentes de las matrices de tensiones y de deformación del cuerpo A, y con el superíndice 2 las correspondientes al cuerpo B.

Como la deformación sólo está impedida en la dirección del eje y, tendremos

$$\begin{aligned} \sigma_{ny}^1 \neq 0 ; \quad \sigma_{ny}^2 \neq 0 ; \quad \sigma_{nx}^1 = \sigma_{nx}^2 = \sigma_{nz}^1 = \sigma_{nz}^2 = 0 \\ \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = \tau_{xz}^1 = \tau_{xz}^2 = \tau_{yz}^1 = \tau_{yz}^2 = 0 \end{aligned}$$

Además, las ligaduras imponen las siguientes condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ny}^1 = \sigma_{ny}^2 \\ \varepsilon_y^1 + \varepsilon_y^2 = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

De las ecuaciones de Hooke, se deduce:

$$\varepsilon_y^1 = \frac{1}{E_1} \sigma_{ny}^1 + \alpha_1 t_1$$

$$\varepsilon_y^2 = \frac{1}{E_2} \sigma_{ny}^2 + \alpha_2 t_2$$

Teniendo en cuenta (1), se tiene:

$$\frac{1}{E_1} \sigma_{ny}^1 + \alpha_1 t_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_{ny}^2 + \alpha_2 t_2 = 0$$

de donde:

$$\sigma_{ny}^1 = \sigma_{ny}^2 = - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_1 E_2$$

El signo $-$ indica que se produce compresión en ambos bloques.
Las tensiones principales pedidas serán, pues

Cuerpo A	Cuerpo B
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$
$\sigma_3 = - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_1 E_2$	$\sigma_3 = - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_1 E_2$

2.º Las variaciones de longitud de las aristas de los dos bloques vienen dadas por:

$$\text{Cuerpo A} \begin{cases} \Delta a = a \cdot \varepsilon_x^1 \\ \Delta b = b \cdot \varepsilon_y^1 ; \\ \Delta c = c \cdot \varepsilon_z^1 \end{cases} \quad \text{Cuerpo B} \begin{cases} \Delta a = a \cdot \varepsilon_x^2 \\ \Delta b = b \cdot \varepsilon_y^2 \\ \Delta c = c \cdot \varepsilon_z^2 \end{cases}$$

Ahora bien, las deformaciones longitudinales que aparecen en estas expresiones se pueden obtener por las leyes de Hooke.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^1 = \mu_1 \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_2 + \alpha_1 t_1 \\ \varepsilon_y^1 = -\frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_2 + \alpha_1 t_1 \\ \varepsilon_z^1 = \mu_1 \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_2 + \alpha_1 t_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^2 = \mu_2 \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_1 + \alpha_2 t_2 \\ \varepsilon_y^2 = -\frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_1 + \alpha_2 t_2 \\ \varepsilon_z^2 = \mu_2 \frac{\alpha_2 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} E_1 + \alpha_2 t_2 \end{array} \right.$$

Si hacemos

$$\frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{E_1 + E_2} = K$$

3.º Las variaciones de longitud de las aristas serán:

Cuerpo A	Cuerpo B
$\Delta a = a(\mu_1 K E_2 + \alpha_1 t_1)$	$\Delta a = a(\mu_2 K E_1 + \alpha_2 t_2)$
$\Delta b = b(-K E_2 + \alpha_1 t_1)$	$\Delta b = b(-K E_1 + \alpha_2 t_2)$
$\Delta c = c(\mu_1 K E_2 + \alpha_1 t_1)$	$\Delta c = c(\mu_2 K E_1 + \alpha_2 t_2)$

La dilatación cúbica unitaria de los dos cuerpos es:

$$e_1 = \varepsilon_x^1 + \varepsilon_y^1 + \varepsilon_z^1 = 2 \mu_1 K E_2 - K E_2 + 3 \alpha_1 t_1$$

$$e_2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 = 2 \mu_2 K E_1 - K E_1 + 3 \alpha_2 t_2$$

Sustituyendo valores:

$$K = \frac{0,117 \cdot 60 + 0,234 \cdot 50}{(2 + 0,69) \cdot 10^6} 10^{-4} = 6,96 \cdot 10^{-10}$$

$$e_1 = 6,96 \cdot 10^{-10} \cdot 0,69 \cdot 10^6 (2 \cdot 0,25 - 1) + 3 \cdot 0,117 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 18,66 \cdot 10^{-4}$$

$$e_2 = 6,96 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 10^6 (2 \cdot 0,23 - 1) + 3 \cdot 0,234 \cdot 10^{-4} \cdot 50 = 27,58 \cdot 10^{-4}$$

Por tanto, las variaciones de volumen de los dos cuerpos serán:

$$\Delta V_A = e_1 V = 18,66 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 30 \cdot 20 = 22,39 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V_B = e_2 V = 27,58 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 30 \cdot 20 = 33,09 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V_A = 22,39 \text{ cm}^3 \quad ; \quad \Delta V_B = 33,09 \text{ cm}^3$$

5.10. Un prisma de sección rectangular $a \times b$ y longitud l tiene sus extremos fijos en dirección longitudinal, tal como se indica en la Figura E5.10a.

Al someterse el prisma a un incremento de temperatura T , por igual en todos sus puntos, se desea saber:

- 1.º Fuerzas de superficie y de volumen equivalentes al efecto térmico.
- 2.º Función de Airy y solución de tensiones.
- 3.º Solución de desplazamientos. Se considerarán como condiciones de sustentación adicionales a las indicadas el que el origen 0 no tiene ningún desplazamiento ni su entorno giros.

Son datos las características del material: E , μ , α .

- 1.º El problema elástico equivalente al termoelástico comprende las siguientes fuerzas:

$$\begin{cases} \vec{f}_v = -\frac{E\alpha}{1-2\mu} \nabla T \\ \vec{f}_\Omega = \frac{E\alpha}{1-2\mu} T \vec{u} \end{cases}$$

siendo $\vec{u} (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, 0)$ el vector unitario normal al contorno libre. Al ser el salto térmico T constante, $\nabla T = 0$, no existirán fuerzas de volumen. En cuanto a las fuerzas de superficie, que sólo se aplican en el contorno lateral del prisma, tienen como valor

$$\vec{f}_\Omega = \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \vec{u}$$

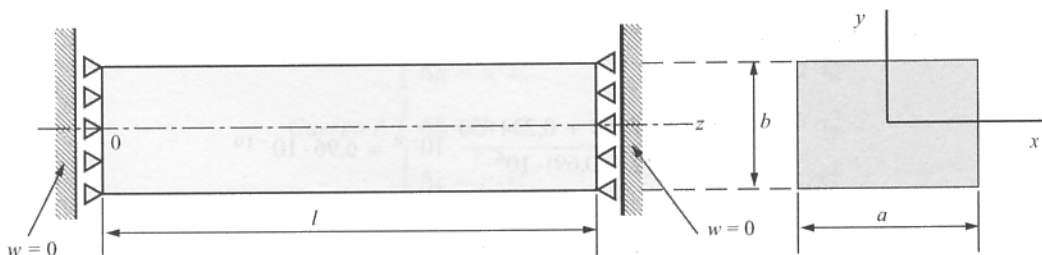


Figura E5.10a.

Por tanto, las fuerzas de superficie y de volumen equivalente al efecto térmico indicado, son

$$\begin{aligned} \vec{f}_v &= 0 \\ \vec{f}_\Omega &\begin{cases} \bar{X} = \frac{E \alpha T}{1 - 2\mu} \cdot \bar{\alpha} \\ \bar{Y} = \frac{E \alpha T}{1 - 2\mu} \cdot \bar{\beta} \end{cases} \end{aligned}$$

cuya representación se indica en la Figura E5.10b.

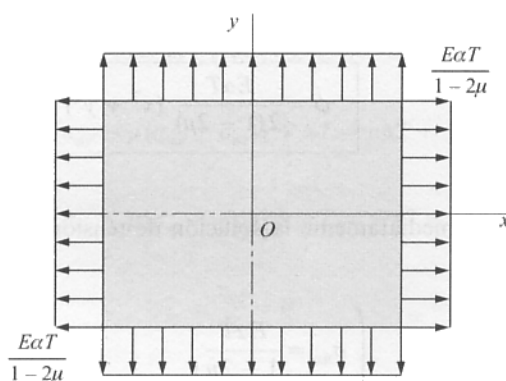


Figura E5.10b.

2.º El problema es de deformación plana, y al ser nula la fuerza de volumen admite la función de Airy, que en este caso bastará con que sea de 2.º grado.

$$\phi(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2C \\ \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2A \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -B \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$x = \frac{a}{2} ; \quad \sigma_{nx} = 2C \equiv \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{E\alpha T}{2(1-2\mu)}$$

$$y = \frac{b}{2} ; \quad \sigma_{ny} = 2A \equiv \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{E\alpha T}{2(1-2\mu)}$$

$$x = \frac{a}{b} ; \quad \frac{b}{2} ; \quad \tau_{xy} = -B \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Se obtiene la función de Airy

$$\phi = \frac{E\alpha T}{2(1-2\mu)} (x^2 + y^2)$$

de la que se obtiene inmediatamente la solución de tensiones

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \\ \sigma_{ny} = \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \\ \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_{nz} = \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = \frac{2\mu E\alpha T}{1-2\mu} \end{array} \right.$$

y, por supuesto, al ser un problema plano, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

A la solución de tensiones del problema elástico equivalente, hay que restarle en las tensiones normales el término

$$\frac{E\alpha}{1-2\mu} T$$

para obtener la solución de tensiones del problema termoelástico original.

Así pues, se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \frac{E\alpha T}{1-2\mu} - \frac{E\alpha T}{1-2\mu} = 0 \\ \sigma_{ny} &= \frac{E\alpha T}{1-2\mu} - \frac{E\alpha T}{1-2\mu} = 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \\ \sigma_{nz} &= \frac{2\mu E\alpha T}{1-2\mu} - \frac{E\alpha T}{1-2\mu} = -E\alpha T\end{aligned}$$

3.º Las componentes de la matriz de deformación son

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu(\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] + \alpha T = \mu\alpha T + \alpha T = (1 + \mu)\alpha T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{ny} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{nz})] + \alpha T = \mu\alpha T + \alpha T = (1 + \mu)\alpha T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{nz} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny})] + \alpha T = -\alpha T + \alpha T = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0 \end{cases}$$

Integrando directamente, se tiene:

$$\begin{aligned}u &= \int \varepsilon_x dx = (1 + \mu)\alpha T x \\ v &= \int \varepsilon_y dy = (1 + \mu)\alpha T y \\ w &= \int \varepsilon_z dz = 0\end{aligned}$$

el anular las constantes de integración es correcto, como podemos comprobar

$$x = y = z = 0$$

$$\begin{cases} \vec{\delta} = \vec{0} \\ \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{\delta} = \frac{(1 + \mu)\alpha T}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \end{cases}$$

Así pues, la solución de desplazamientos, es:

$$\begin{aligned} u &= (1 + \mu) \alpha T x \\ v &= (1 + \mu) \alpha T y \\ w &= 0 \end{aligned}$$

5.11. Dado el estado tensional definido por las tensiones

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = ax^2 ; & \sigma_{ny} = ay^2 ; & \sigma_{nz} = az^2 \\ \tau_{xy} = bxy ; & \tau_{xz} = bxz ; & \tau_{yz} = byz \end{cases}$$

y las fuerzas de masa $X = cx$, $Y = cy$, $Z = cz$, determinan las relaciones que deben existir entre las constantes a , b y c para que el estado de tensiones supuesto sea una posible solución de un problema elástico.

De la condición de que las tensiones dadas tienen que verificar las ecuaciones de equilibrio interno, se deduce:

$$\left. \begin{aligned} cx + 2ax + bx + bx &= 0 \\ cy + by + 2ay + by &= 0 \\ cx + bz + bz + 2az &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c + 2a + 2b = 0 \quad (1)$$

Por otra parte, las tensiones propuestas tienen que verificar las ecuaciones de Michell.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_{nx} &= \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{1 + \mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \Delta \sigma_{ny} &+ \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{1 + \mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \Delta \sigma_{nz} &+ \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\frac{\mu}{1 + \mu} \operatorname{div} \vec{f}_v - 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + \frac{2a}{1 + \mu} = -\frac{3\mu c}{1 + \mu} - 2c \quad (2)$$

Las otras tres ecuaciones de Michell se verifican idénticamente.

Las relaciones pedidas serán, por consiguiente, las formadas por las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{cases} c + 2(a + b) = 0 \\ 2a(2 + \mu) = -c(5\mu + 2) \end{cases}$$

Elasticidad bidimensional en coordenadas cartesianas

6.1. Estados elásticos bidimensionales

Hay numerosos casos en la práctica en los que el sistema de fuerzas exteriores y la sujeción a que esté sometido un prisma mecánico hacen que tanto la matriz de tensiones como la matriz de deformación no varíen en los puntos de la pieza pertenecientes a una recta perpendicular a una orientación fija. Esto quiere decir que existe, en estos casos, un plano que llamaremos *plano director* tal que los estados tensional y de deformación en los planos del prisma, paralelos a él, son idénticos.

De ahí que sea posible estudiar los estados tensional y de deformación en un plano, que tomaremos como plano director, por lo que reciben el nombre de *estados elásticos bidimensionales*, sin perjuicio que a estos estados les sea aplicable la teoría general que hemos visto en los Capítulos 2 y 3 para estados elásticos tridimensionales.

Entre los estados elásticos bidimensionales distinguiremos el *estado de deformación plana*, que veremos a continuación, y el *estado tensional plano*, que trataremos más adelante en este mismo capítulo.

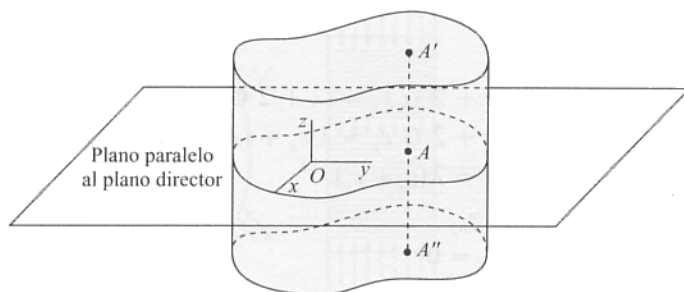


Figura 6.1.

6.2. Estado de deformación plana

Supongamos un prisma mecánico tal que existe plano director y tomemos un sistema de referencia cartesiano $Oxyz$ cuyo plano xOy sea paralelo al citado plano director.

Definiremos como *estado de deformación plana* el de un prisma mecánico en el que las componentes u y v del vector desplazamiento sean independientes de la coordenada z y sea nula la tercera componente w .

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases} \quad (6.2.1)$$

De esta definición, teniendo en cuenta las relaciones (5.1.2) que expresan los términos de la matriz de deformación en función de las componentes del vector desplazamiento, se deduce

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (6.2.2)$$

por lo que la matriz de deformación será

$$[D] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.3)$$

De la observación de esta matriz de deformación se deduce que la normal al plano director es, en todo punto del sólido elástico sometido a un estado de deformación plana, dirección principal. Las otras dos están contenidas en el plano director.

Las ecuaciones de Lamé nos permiten expresar las tensiones en función de las deformaciones

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \lambda e + 2 G \varepsilon_x = (\lambda + 2 G) \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y \\ \sigma_{ny} = \lambda e + 2 G \varepsilon_y = \lambda \varepsilon_x + (\lambda + 2 G) \varepsilon_y \\ \sigma_{nz} = \lambda e = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases} \quad (6.2.4)$$

por lo que la matriz de tensiones tomará la forma

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} & 0 \\ 0 & 0 & \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) \end{pmatrix} \quad (6.2.5)$$

Un ejemplo de estado de deformación plana lo tenemos en un prisma mecánico cilíndrico cuyas bases estén ligadas a dos planos rígidos y que esté sometido a un sistema de cargas normales a las generatrices, siendo la carga constante en magnitud, dirección y sentido a lo largo de cada una de ellas (Fig. 6.2).

Si las componentes u y v del corrimiento fueran independientes de z , pero w no fuera nula, sino que se verificara $\varepsilon_z = \text{constante}$, los estados de deformación y tensional del prisma mecánico se podrán obtener como superposición de los correspondientes a un estado de deformación plana ($w = 0$) y una tracción o compresión uniformes en la dirección del eje Oz ($\varepsilon_z = \text{constante}$).

6.3. Estado tensional plano

Supongamos un prisma mecánico tal que exista plano director y tomemos un sistema de referencia $Oxyz$ cuyo plano xOy sea paralelo al citado plano director.

Definiremos como *estado tensional plano* el de un prisma mecánico tal que la matriz de tensiones no depende más que de x e y , y tal que

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{nz} = 0 \quad (6.3.1)$$

De estas condiciones se deduce:

$$G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 ; \quad G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 ; \quad \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 G \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.3.2)$$

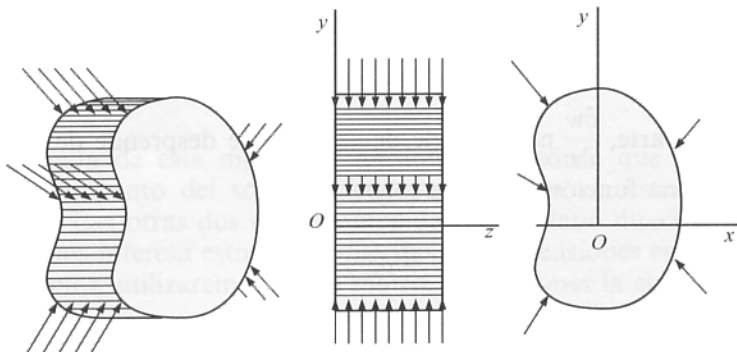


Figura 6.2.

Despejando de esta última ecuación $\frac{\partial w}{\partial z}$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2G + \lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6.3.3)$$

y sustituyendo en las ecuaciones de Lamé, expresadas las tensiones en función de las componentes del vector desplazamiento

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \left(\lambda - \frac{\lambda}{2G + \lambda} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{ny} = \left(\lambda - \frac{\lambda}{2G + \lambda} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{nz} = 0 \end{cases} \quad (6.3.4)$$

Como la matriz de tensiones no depende más que de x e y , se deduce que u y v son función de estas dos variables exclusivamente, es decir:

$$u = u(x, y) \quad ; \quad v = v(x, y) \quad (6.3.5)$$

Si esto es así, de (6.3,2) se infiere que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Como, por otra parte, $\frac{\partial w}{\partial z}$ no depende de z , según se desprende de (6.3.3), necesariamente w ha de ser una función lineal de z

$$w = az + b \quad (6.3.6)$$

siendo a y b constantes.

Un ejemplo de estado tensional plano es el producido en el prisma mecánico indicado en la Figura 6.3.

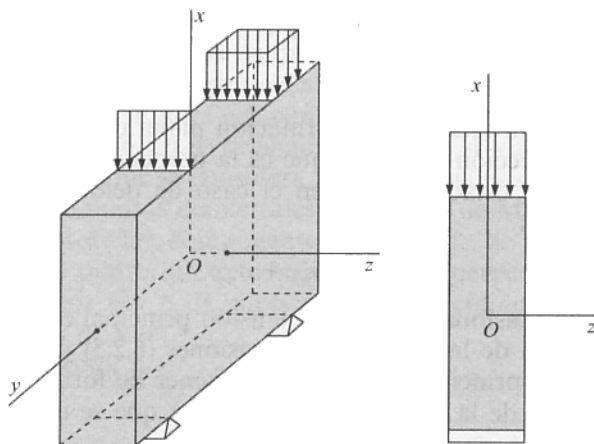


Figura 6.3.

De acuerdo con lo dicho, en un estado tensional plano la matriz de deformación será de la forma:

$$[D] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (6.3.7)$$

y la de tensiones:

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3.8)$$

De la observación de esta matriz de tensiones se deduce que la normal al plano director es, en todo punto del sólido elástico sometido a un estado tensional plano, dirección principal. Las otras dos están contenidas en el plano director.

Ahora bien, si nos interesa estudiar la distribución de tensiones en planos perpendiculares al plano director, utilizaremos como matriz de tensiones la siguiente

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} \end{pmatrix} \quad (6.3.9)$$

6.4. Direcciones y tensiones principales en un estado elástico bidimensional

Hemos visto que tanto en un estado de deformación plana como en un estado tensional plano está definida una dirección principal que es la perpendicular al plano director. La diferencia entre uno y otro estado es que en el caso de deformación plana la tensión principal correspondiente es

$$\sigma_{nz} = \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) \quad (6.4.1)$$

mientras que en el estado tensional plano esta tensión principal es nula, como fácilmente se deduce de la observación de las matrices de tensiones (6.2.5) y (6.3.8).

Las otras dos tensiones principales se pueden obtener de forma analítica o gráfica.

Analíticamente, a partir de la ecuación característica que se obtiene desarrollando el determinante

$$\begin{vmatrix} \sigma_{nx} - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (6.4.2)$$

$$\sigma^2 - (\sigma_{nx} + \sigma_{ny})\sigma + \sigma_{nx}\sigma_{ny} - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (6.4.3)$$

que tiene de raíces las tensiones principales

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases} \quad (6.4.4)$$

sin que en estas expresiones los subíndices indiquen ninguna ordenación entre las tensiones principales del correspondiente estado tridimensional. Sí indican una ordenación ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) entre las tensiones principales contenidas en el plano director.

Los vectores unitarios $\vec{u}(\alpha, \beta)$ que definen las direcciones principales correspondientes, contenidas en un plano paralelo al plano director, se obtendrán sustituyendo los valores de las tensiones principales en las ecuaciones

$$\begin{cases} (\sigma_{nx} - \sigma)\alpha + \tau_{xy}\beta = 0 \\ \tau_{xy}\alpha + (\sigma_{ny} - \sigma)\beta = 0 \end{cases} \quad (6.4.5)$$

Para la resolución gráfica de determinados problemas que se nos pueden presentar en Elasticidad plana mediante el círculo de Mohr, adoptaremos el siguiente convenio de signos, ya adelantado en el Capítulo 2.

La tensión normal σ_n es positiva si es de tracción.

La tensión tangencial τ será positiva si el momento, respecto del punto P interior al prisma elemental, es negativo, es decir, tiene el sentido del semieje z negativo (entrante en el plano del papel).

En cuanto al ángulo θ lo tomaremos positivo, contado a partir de la dirección positiva del eje Ox en sentido contrario a las agujas de un reloj.

Si se utiliza el método gráfico para calcular las tensiones y direcciones principales se procede como se indica en la Figura 6.4: conocida la matriz de tensiones respecto de unos ejes x, y , no principales (Fig. 6.4a), se dibujan los puntos M y M' (Fig. 6.4b) correspondientes a las caras del elemento que se considera, cuyas normales son, respectivamente, los ejes x y y positivos. Estos son puntos diametrales del círculo de Mohr. Las coordenadas de los puntos de este círculo son las componentes intrínsecas de los vectores tensión de los planos que pasan por el punto que se considera y son perpendiculares al plano director. Las abscisas de los puntos A y B de intersección del círculo de Mohr con el eje σ_n miden las tensiones principales σ_1 y σ_2 .

Se comprueba, en efecto, que

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{OC} + \overline{CA} = \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_1 \\ \overline{OB} &= \overline{OC} - \overline{CB} = \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_2\end{aligned}\quad (6.4.6)$$

Del círculo de Mohr se obtiene también el ángulo θ_1 que forma la dirección principal correspondiente a σ_1 con el eje x .

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} \quad (6.4.7)$$

Otra forma de calcular las tensiones principales sería la de expresar la componente intrínseca σ_n del vector tensión correspondiente a un plano perpendicular al plano director, como función del ángulo θ que la normal a este plano forma con la dirección positiva del eje x , y anular la derivada de σ_n respecto de θ , ya que las direcciones principales van a ser aquellas a las que corresponden máximos o mínimos relativos de la tensión normal.

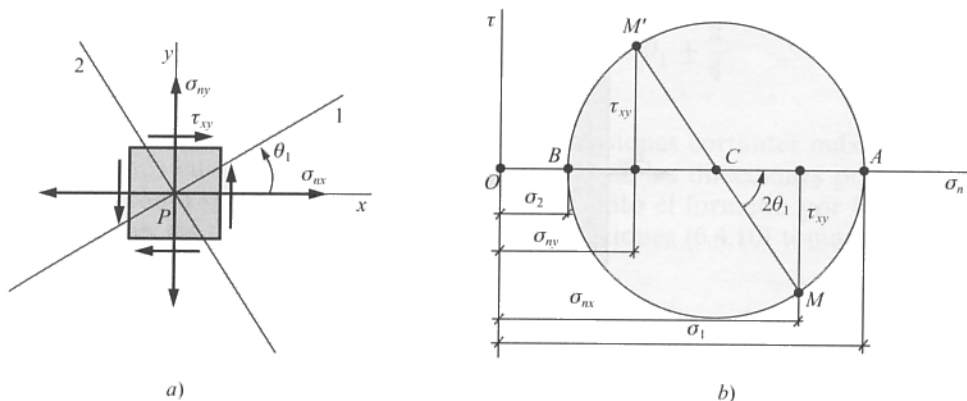


Figura 6.4.

Para calcular las componentes intrínsecas del vector tensión $\vec{\sigma}$ en un punto P , correspondiente a un plano perpendicular al plano xOy cuya normal forma un ángulo θ con la dirección positiva del eje Ox , consideraremos el entorno prismático de P indicado en la Figura 6.5.

Tendremos en cuenta el convenio de signos establecido anteriormente.

El vector tensión sobre el plano definido por el vector unitario \vec{u} ($\cos \theta$, $\sin \theta$) será

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}] = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{ny} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_{ny} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (6.4.8)$$

Las componentes intrínsecas σ_n y τ se obtendrán fácilmente multiplicando escalarmente el vector $\vec{\sigma}$ por los vectores unitarios \vec{u} y \vec{u}' respectivamente, siendo

$$\vec{u}'(\sin \theta, -\cos \theta) \quad (6.4.9)$$

el vector unitario en la dirección de τ positiva, según el convenio adoptado

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = \sigma_{nx} \cos^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{ny} \sin^2 \theta \\ \tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = \sigma_{nx} \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \sin^2 \theta - \tau_{xy} \cos^2 \theta - \sigma_{ny} \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

o lo que es lo mismo, en función del ángulo duplo

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}{2} + \frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau = \frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases} \quad (6.4.10)$$

Se obtienen así las expresiones de las componentes normal y tangencial del vector tensión como funciones de θ . Calculemos los valores de θ para los que cada una de estas

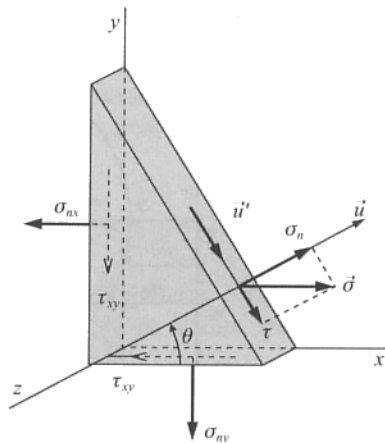


Figura 6.5.

funciones presentan máximo o mínimo relativo. Anulando la derivada respecto a θ , de la primera ecuación

$$\frac{d\sigma_n}{d\theta} = -2 \frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2} \operatorname{sen} 2\theta + 2 \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

se obtiene

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} \quad (6.4.11)$$

y, análogamente, de la segunda

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\theta} &= 2 \frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2} \cos 2\theta + 2 \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = 0 \\ \operatorname{tg} 2\theta &= -\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2 \tau_{xy}} \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

La ecuación (6.4.11) nos indica que hay dos valores de θ , θ_1 y $\theta_1 + \frac{\pi}{2}$, perpendiculares entre sí, que la satisfacen. Las direcciones dadas por estos ángulos son las *direcciones principales* y las tensiones correspondientes *tensiones principales*. De la misma ecuación se deduce que sobre los planos perpendiculares a las direcciones principales el vector tensión carece de componente tangencial, por lo que el vector tensión correspondiente a cada uno de estos planos es normal a su plano.

Análogamente, la ecuación (6.4.12) nos indica que existen asimismo dos valores de θ , θ_2 y $\theta_2 + \frac{\pi}{2}$, perpendiculares entre sí, para los que la tensión cortante es máxima.

Comparando las ecuaciones (6.4.11) y (6.4.12) vemos que se verifica

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = -\cotg 2\theta_2 \quad (6.4.13)$$

y, por tanto:

$$2\theta_2 = 2\theta_1 \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \pm \frac{\pi}{4}$$

que expresa que en un estado tensional plano las tensiones cortantes máximas se presentan en los planos cuyas normales son las bisectrices de las direcciones principales.

Tomando como sistema de referencia en cada punto el formado por los ejes que son coincidentes con las direcciones principales, las ecuaciones (6.4.10) toman la forma

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\theta \end{cases} \quad (6.4.14)$$

siendo θ el ángulo que la normal al plano al que corresponden estas componentes intrínsecas forma con la dirección principal correspondiente a σ_1 .

6.5. Elipse de tensiones

En el Epígrafe 2.6 hemos estudiado el lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos de la radiación de vértice un punto P de un sólido elástico. Obtuvimos que cuando las tres tensiones principales son no nulas, el lugar geométrico es un elipsoide llamado *elipsoide de tensiones* o *elipsoide de Lamé*. También vimos que en el caso de ser nula una de las tensiones principales, el elipsoide degenera en la superficie limitada por una elipse de longitudes de semiejes los valores de las tensiones principales no nulas, en el plano definido por las dos direcciones principales correspondientes.

Es evidente que lo dicho entonces es aplicable a los estados elásticos bidimensionales. Por ello podemos afirmar, en el caso que las tensiones correspondientes a las direcciones principales contenidas en el plano director son no nulas, que el lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión correspondientes a los infinitos planos de la radiación de vértice el punto P es un elipsoide si se trata de un estado de deformación plana, y una superficie limitada por una elipse, en el plano director, si se trata de un estado tensional plano.

Pero en los estados elásticos bidimensionales nos interesa de forma especial considerar el haz de planos que pasan por un punto P y son perpendiculares al plano director. El vector tensión $\vec{\sigma}$ correspondiente a uno de estos planos, definido por el vector unitario \vec{u} , es

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.5.1)$$

habiendo tomado como ejes x e y los contenidos en el plano director correspondientes a las tensiones σ_1 y σ_2 , tanto si se trata de un estado de deformación plana como si se trata de un estado tensional plano.

De (6.5.1) se deduce que los vectores tensión correspondientes a los planos perpendiculares al plano director en un estado elástico bidimensional están siempre contenidos en dicho plano director.

Veamos ahora cuál es el lugar geométrico del extremo $M(x, y)$ del vector tensión para el haz de planos que pasan por un punto P y son perpendiculares al plano director. De la ecuación (6.5.1) se deduce también

$$\begin{cases} x = \sigma_1 \cos \theta \\ y = \sigma_2 \sin \theta \end{cases} \quad (6.5.2)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (6.5.2) y sumando miembro a miembro se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad (6.5.3)$$

ecuación de una elipse llamada *elipse de tensiones*.

Fácilmente se entiende que esta elipse no es sino la intersección con el plano director del elipsoide de Lamé en caso de un estado de deformación plana; o el contorno de la superficie contenida en el plano director en que degenera el elipsoide de tensiones, si se trata de un estado tensional plano.

De las mismas ecuaciones (6.5.2) se desprende un método gráfico para calcular el vector tensión mediante la utilización de la elipse de tensiones.

En la Figura 6.6 se indica con suficiente claridad el método a que nos referimos para los tres casos posibles que se pueden presentar según los signos de las tensiones principales σ_1 y σ_2 , contenidas en el plano director.

6.6. Círculo de Mohr

El cálculo de las componentes intrínsecas del vector tensión sobre un plano cualquiera se puede hacer mediante la representación gráfica de Mohr, según hemos visto en el Capítulo 2. La diferencia entre los círculos de Mohr correspondientes a un estado de deformación plana o de tensión plana se refleja en la Figura 6.7: en el caso de estado de deformación plana, la tercera tensión principal es σ_{nz} , generalmente no nula (Fig. 6.7a), mientras que el estado tensional plano la tercera tensión principal es nula (Fig. 6.7b).

Sabemos que existen en cada punto de un sólido elástico dos planos en los cuales la tensión tangencial es máxima, los correspondientes a los puntos M y M' indicados en la Figura 6.7. La posición de estos dos planos respecto al plano director depende de los valores y signos de las tensiones principales. De la misma Figura 6.7 se deduce que estos planos, además de ser perpendiculares entre sí, si tomamos un sistema de ejes en el que los ejes x e y son coincidentes con las direcciones principales correspondientes a las tensiones principales σ_1 y σ_2 , contenidas en el plano director, presentan las siguientes particularidades:

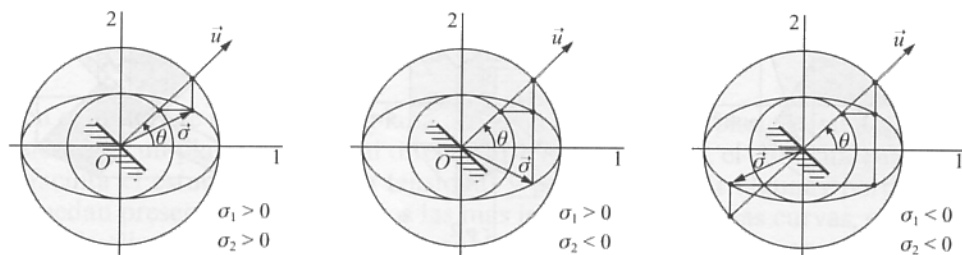


Figura 6.6.

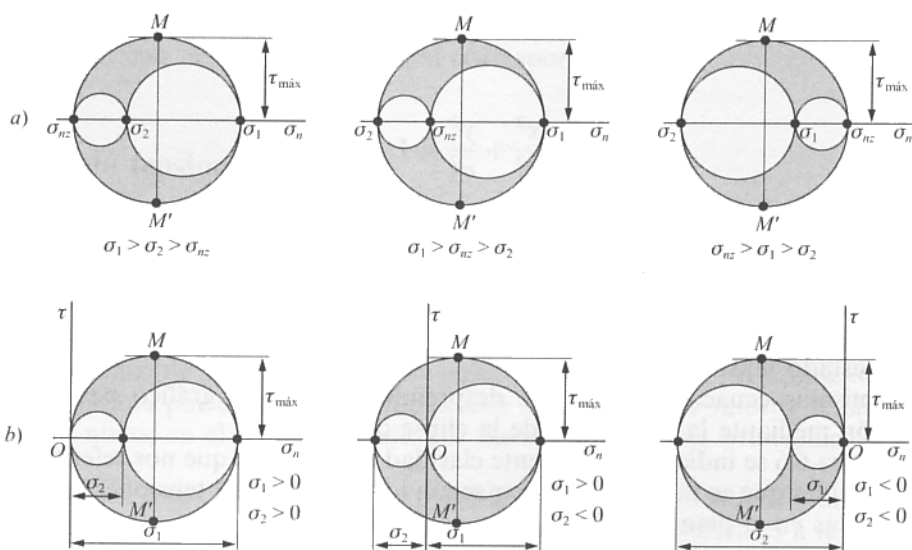


Figura 6.7.

- Si es un estado de deformación plana en el que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_{nz}$, o es un estado tensional plano en el que las tensiones σ_1 y σ_2 son positivas, los dos planos contienen al eje y y formando $\pm 45^\circ$ con el plano director.
- Si es un estado de deformación plana en el que $\sigma_1 > \sigma_{nz} > \sigma_2$, o es un estado tensional plano en el que las tensiones σ_1 y σ_2 son de distinto signo, los dos planos son perpendiculares al plano director y las intersecciones con él son las bisectrices de los ejes x e y .
- Si es un estado de deformación plana en el que $\sigma_{nz} > \sigma_1 > \sigma_2$, o es un estado tensional plano en el que las tensiones σ_1 y σ_2 son negativas, los dos planos contienen al eje x y forman $\pm 45^\circ$ con el plano director.

En la Figura 6.8 se han dibujado los planos que presentan máxima tensión tangencial en estos tres casos posibles, en los que en cada uno de ellos se han indicado los ejes principales 1, 2 y 3, que corresponderían a las tensiones principales ordenadas de mayor a menor en el estado tridimensional correspondiente.

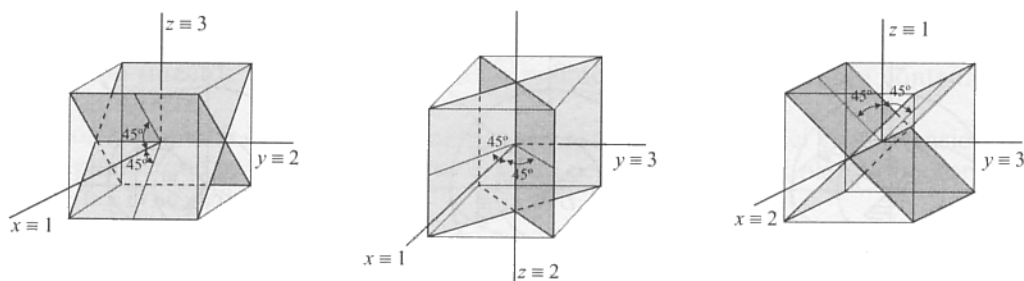


Figura 6.8.

Ahora bien, si nos interesa solamente estudiar las componentes intrínsecas de los vectores tensión correspondientes a planos perpendiculares al plano xOy , basta considerar el círculo del diámetro definido por los dos puntos de abscisas los valores de las tensiones principales σ_1 y σ_2 . Entre los puntos de esta circunferencia y las componentes intrínsecas de los vectores tensión que corresponden a dicho haz de planos existe correspondencia biunívoca.

Para un plano definido por el vector unitario \vec{u} cuyo sentido positivo forma un ángulo θ con el sentido positivo de la dirección principal 1, el punto D , cuyas coordenadas son las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente a ese plano, es la intersección del círculo de Mohr con la semirrecta trazada por el centro de dicho círculo que forma un ángulo 2θ con la dirección positiva del eje de abscisas, contado en sentido antihorario.

En efecto, las coordenadas del punto D obtenido así, según se indica en la Figura 6.9 son:

$$\begin{cases} \overline{OE} = \overline{OC} + \overline{CE} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \overline{ED} = \overline{CD} \cdot \sin 2\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (6.6.1)$$

que coinciden con los valores de σ_n y τ dados por (6.4.14).

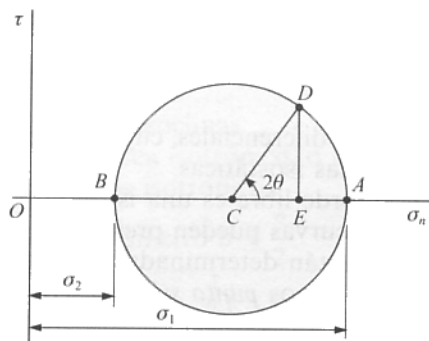
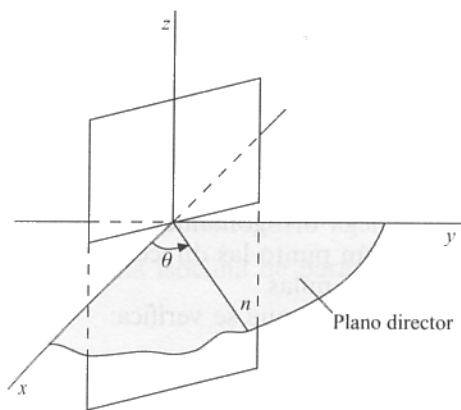


Figura 6.9.

6.7. Curvas representativas de un estado elástico plano

Tanto en el estado de deformación plana como en el de tensión plana es suficiente estudiar las tensiones en un plano paralelo al director. En muchos casos, el conocimiento de ciertas curvas facilita el estudio del estado tensional y permite deducir algunas particularidades que se puedan presentar. Estudiaremos las más importantes de estas curvas, que aunque la definición de ellas se puede extender a problemas tridimensionales consideraremos en lo que sigue casos de elasticidad plana.

Isostáticas

Definimos las *líneas isostáticas* como las curvas envolventes de las tensiones principales. Habrá dos familias de estas curvas que corresponden a las dos tensiones principales. Quiere esto decir que por cada punto pasan dos isostáticas, una de cada familia, que son ortogonales entre sí.

Las ecuaciones analíticas de las isostáticas se pueden obtener a partir de la ecuación (6.4.7)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta} \quad (6.7.1)$$

y como θ es el ángulo que forma la dirección principal correspondiente a la tensión mayor con la dirección positiva del eje x se verifica: $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$. La ecuación (6.7.1) toma la forma

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{\tau_{xy}} \left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0 \quad (6.7.2)$$

ecuación de segundo grado en $\frac{dy}{dx}$, cuyas raíces son:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1} \quad (6.7.3)$$

ecuaciones diferenciales, cuyas integrales son las dos familias de las curvas representativas de las líneas isostáticas.

Un borde libre es una isostática y la otra familia le llega ortogonalmente.

Estas curvas pueden presentar singularidades si en algún punto las direcciones principales no están determinadas o las tensiones principales son nulas.

Llamaremos *punto singular*, *circular* o *isotrópico* a aquel en que se verifica:

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{ny} \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

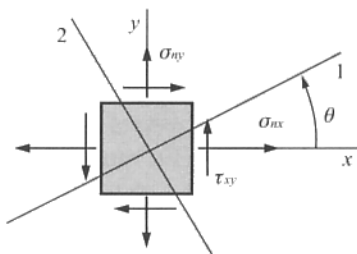


Figura 6.10.

ya que la elipse de tensiones se reduce a una circunferencia y cualquier par de direcciones ortogonales son principales.

Si un punto singular verifica además

$$\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = \tau_{xy} = 0 \quad (6.7.5)$$

diremos que se trata de un *punto neutro*.

Alrededor de un punto isotrópico las isostáticas son de dos tipos:

a) Tipo interseectivo (Fig. 6.11).

Cada isostática rodea el punto isotrópico y corta a todas las de la otra familia.

b) Tipo asintótico (Fig. 6.12).

Las isostáticas van por fuera del punto y hay diversos grupos de curvas que se cortan entre ellas.

Isoclinas

Se definen las *líneas isoclinas* como los lugares geométricos de los puntos en los cuales las tensiones principales son paralelas, o dicho de otro forma: las *líneas isoclinas* son las que unen los puntos de igual inclinación de las tensiones principales.

La ecuación de las isoclinas se obtendrá, sin más, igualando a una constante k la expresión (6.4.7) que nos da la tangente del duplo del ángulo que la tensión σ_1 forma con el eje de las x .

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} = k \quad (6.7.6)$$

Varias propiedades de las líneas isoclinas se desprenden de la propia definición.

- 1.^a Si existe un punto isotrópico, por él pasan todas las isoclinas.
- 2.^a Sólo puede pasar una isoclina por un punto que no sea isotrópico, o lo que es lo mismo, las isoclinas no se cortan más que en puntos isotrópicos.
- 3.^a Una isoclina de parámetro θ es idéntica a la de parámetro $\theta \pm \frac{\pi}{2}$.

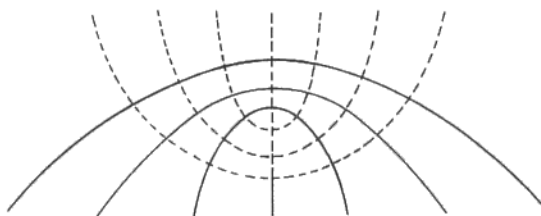


Figura 6.11.

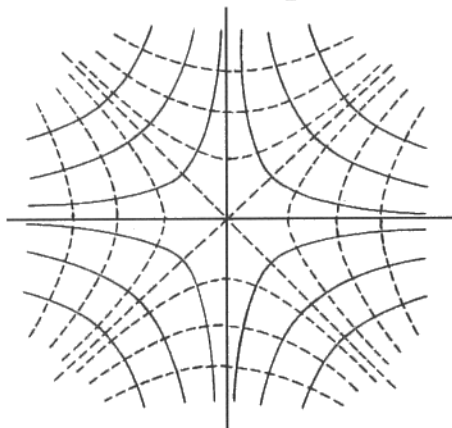


Figura 6.12.

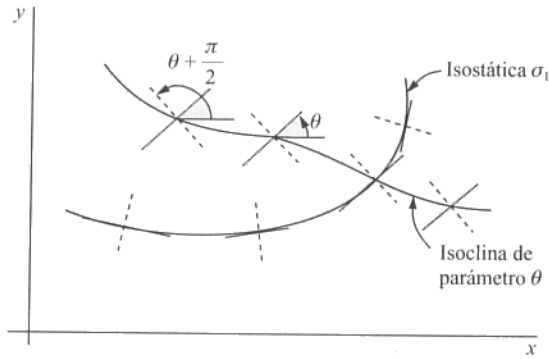


Figura 6.13.

- 4.^a Si el cuerpo tiene eje de simetría y está simétricamente cargado, dicho eje es una isoclina.
- 5.^a Cuando una isoclina corta a un borde libre de esfuerzos cortantes, su parámetro viene dado por el ángulo de inclinación de la recta tangente al borde de dicho punto de intersección (Fig. 6.14).

Las líneas isoclina son de gran importancia, pues como veremos más adelante se pueden obtener por medios ópticos y a partir de ellas es posible construir gráficamente las isostáticas, que son las que presentan mayor interés.

En efecto, supongamos que tenemos dibujadas varias isoclina, lo suficientemente próximas para que entre cada dos de ellas podamos sustituir la familia de isostáticas por una serie de arcos de circunferencia.

Fijado un punto I_1 en la isoclina γ_1 (Fig. 6.15a) buscaremos el I_2 sobre γ_2 , tal que el punto A de intersección de las tangentes a la isostática en I_1 e I_2 verifique $\overline{AI_1} = \overline{AI_2}$.

Para ello trazaremos por I_1 una recta que forme con el eje x un ángulo $\alpha = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ (Figura 6.15b), siendo θ_1 y θ_2 los ángulos que la dirección principal forma con dicho eje en los puntos I_1 e I_2 , respectivamente.

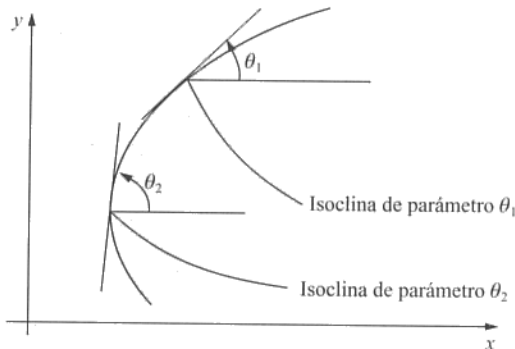


Figura 6.14.

ecuación de segundo grado, cuyas raíces son las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}\right)^2 + 1} \quad (6.7.9)$$

cuyas ecuaciones integrales representan las dos familias de líneas de máxima tensión cortante.

Isocromáticas

Son las curvas que unen puntos de igual diferencia de tensiones principales

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k \quad (6.7.10)$$

Dado que $\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, las isocromáticas son curvas en cuyos puntos la tensión tangencial máxima es constante.

Se obtienen en el banco fotoelástico como franjas de igual color y de ahí su nombre.

En un borde libre, como una de las tensiones principales es nula, el valor k de la isocromática da directamente el valor de la otra tensión principal.

Isopacas

Son curvas en cuyos puntos es constante la suma de las tensiones principales

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \text{constante} \quad (6.7.11)$$

La palabra *isopaca* significa «igual espesor». Su nombre proviene de que en estados tensionales planos la deformación unitaria en dirección perpendicular al plano director es

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (6.7.12)$$

y los puntos en los que el espesor es constante son aquellos en los que es constante la suma de las tensiones principales.

Isobaras

Llamaremos *líneas isobaras* los lugares geométricos de los puntos en los cuales las tensiones principales correspondientes a cada una de las familias de isostáticas tienen el mismo valor

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = k_1 \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = k_2 \end{aligned} \quad (6.7.13)$$

Hay, pues, dos familias de isobaras, correspondientes cada una de ellas a cada una de las dos familias de isostáticas.

Las *isobaras* se pueden construir a partir de las isopacas e isocromáticas. En efecto, sean las isopacas

$$\sigma_1 + \sigma_2 = m - 1, m, m + 1, m + 2$$

las isocromáticas

$$\sigma_1 - \sigma_2 = n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$$

Supongamos un punto *A* donde la segunda isopaca corta a la cuarta isocromática (Fig. 6.16).

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 + \sigma_2 = m \\ \sigma_1 - \sigma_2 = n + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{m + n + 1}{2} ; \sigma_2 = \frac{m - n - 1}{2} \quad (6.7.14)$$

Consideremos ahora el punto *B* intersección de la tercera isopaca con la tercera isocromática.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 + \sigma_2 = m + 1 \\ \sigma_1 - \sigma_2 = n \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{m + n + 1}{2} ; \sigma_2 = \frac{m - n + 1}{2} \quad (6.7.15)$$

En general, σ_1 tendrá el mismo valor en los puntos de corte de la isopaca de valor $m - s$ con la isocromática de valor $m + s$. Y ésta será la ley para construir las isobaras de la familia σ_1 . Análogamente se haría para la familia correspondiente a σ_2 .

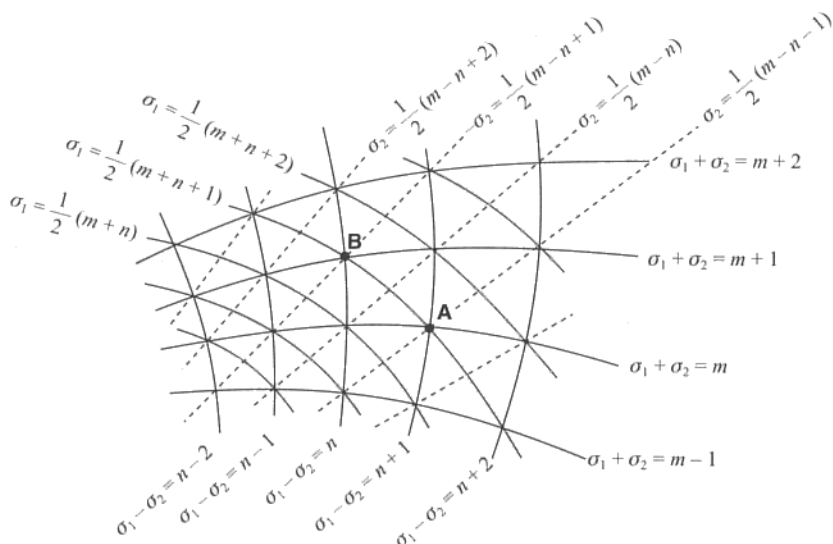


Figura 6.16.

Isoténicas

Son los lugares geométricos de los puntos de igual deformación principal. Evidentemente, existen dos familias de isoténicas correspondientes a

$$\varepsilon_1 = k_1 \quad ; \quad \varepsilon_2 = k_2$$

6.8. El problema elástico en un estado de deformación plana

Dado un cuerpo elástico y definida la sollicitación exterior, el problema que se plantea la teoría de la Elasticidad es la determinación del estado del cuerpo después de la deformación. Una forma de resolver el problema es conocer los corrimientos en todos los puntos, pues hemos visto que a partir de ellos quedan determinadas las componentes de la matriz de deformación [ecuaciones (5.1.2)], y a partir de éstas se obtienen las correspondientes a la matriz de tensiones mediante las ecuaciones de Lamé.

Ya se comprende que en cada punto, fijado el sistema de referencia, la matriz de tensiones es única y también la de deformación. Admitiremos esta unicidad que se ha demostrado matemáticamente por Kirchhoff para los casos que existan relaciones lineales entre tensiones y deformaciones.

De una forma general, como hemos visto anteriormente en el caso de un estado elástico tridimensional, las tensiones y deformaciones, solución del problema elástico tienen que verificar en todo punto del sólido elástico:

- Las tres ecuaciones (5.1.1) de equilibrio interno.
- Las seis ecuaciones (5.1.3) de compatibilidad.
- Las ecuaciones de equilibrio en el contorno, en los puntos del mismo.

Consideremos ahora el caso de un cuerpo elástico sometido a una sollicitación exterior tal que provoque un estado de deformación plana. Las ecuaciones de equilibrio interno se reducen a

$$\begin{cases} X + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ny}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.8.1)$$

ya que la tercera queda $Z = 0$, es decir, si existen fuerzas de volumen éstas han de estar contenidas en planos paralelos al plano director.

Las deformaciones en función de las tensiones son

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu(\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] = \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_{nx} - \mu\sigma_{ny}] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_{ny} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{nz})] = \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_{ny} - \mu\sigma_{nx}] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (6.8.2)$$

De las condiciones de compatibilidad queda solamente

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \quad (6.8.3)$$

ya que las otras cinco se verifican idénticamente.

Busquemos una ecuación cuya solución verifique las ecuaciones (6.8.1) de equilibrio interno y la (6.8.3) de compatibilidad. Para ello, derivemos la primera ecuación (6.8.1) respecto de x , la segunda respecto de y y sumemos miembro a miembro.

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (6.8.4)$$

Sustituyendo en (6.8.3) las derivadas de las deformaciones, obtenidas derivando las (6.8.2), se tiene

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = (1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial y^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y^2} \right) \quad (6.8.5)$$

e igualando a (6.8.4), se obtiene finalmente

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = \frac{-1}{1 - \mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (6.8.6)$$

expresión en la cual el primer paréntesis es, en coordenadas cartesianas, el operador laplaciano y el último la divergencia del campo vectorial \vec{f}_v de las fuerzas de masa por unidad de volumen, por lo que esta ecuación se podrá expresar simbólicamente de la siguiente forma

$$\Delta(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = \frac{-1}{1 - \mu} \operatorname{div} \vec{f}_v \quad (6.8.7)$$

En el caso particular que las fuerzas de volumen sean nulas o constantes, $\operatorname{div} \vec{f}_v = 0$, la anterior ecuación se reduce a

$$\Delta(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = 0 \quad (6.8.8)$$

en la que se observa que no interviene el coeficiente de Poisson.

La solución obtenida de esta ecuación diferencial verifica las ecuaciones de equilibrio interno y las de compatibilidad. Por tanto, para que sea solución del problema elástico solamente tendrá que verificar las condiciones de contorno.

6.9. El problema elástico en un estado tensional plano

En este caso las ecuaciones de equilibrio interno (5.1.1) se reducen a

$$\begin{cases} X + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ny}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.9.1)$$

Las deformaciones en función de las tensiones, teniendo en cuenta que $\sigma_{nz} = 0$, son

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_{nx} - \mu \sigma_{ny}) ; & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_{ny} - \mu \sigma_{nx}) ; & \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} ; & \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (6.9.2)$$

De las condiciones de compatibilidad (5.1.3) quedan

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.9.3)$$

Pongamos la primera de estas ecuaciones en función de las tensiones. Para ello, derivemos la primera ecuación (6.9.1) respecto de x , la segunda respecto de y , y sumemos miembro a miembro

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (6.9.4)$$

Por otra parte, sustituyendo en la primera ecuación (6.9.3) las derivadas de las deformaciones, obtenidas derivando las (6.9.2), se tiene

$$2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial y^2} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y^2} \right) \quad (6.9.5)$$

e igualando la $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ de esta ecuación con la (6.8.4), se obtiene finalmente

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = -(1 + \mu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (6.9.6)$$

que se puede poner simbólicamente de la siguiente forma

$$\Delta(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = -(1 + \mu) \operatorname{div} \vec{f}_v \quad (6.9.7)$$

Si las fuerzas de volumen son nulas o constantes, queda

$$\Delta(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = 0 \quad (6.9.8)$$

La solución al problema elástico obtenida de esta ecuación diferencial tiene que verificar las condiciones de equilibrio en el contorno.

Observamos que si las fuerzas de volumen son nulas o constantes, tanto en el estado de deformación plana [ecuación (6.8.8)] como en el tensional plano [ecuación (6.9.8)], llegamos a obtener la misma ecuación, en la que no interviene el coeficiente de Poisson. Esto nos dice que la solución es independiente del material, propiedad en la que se fundamentan los métodos fotoelásticos y de ensayos sobre modelos.

Sin embargo, hay que hacer una importante observación. Tanto en el caso de deformación plana como en el de tensión plana hemos hecho intervenir las mismas condiciones de integrabilidad. Pero en el estado tensional plano se tienen que verificar además las condiciones (6.9.3) no utilizadas

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6.9.9)$$

que, en general, no se cumplirán, ya que

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) \quad (6.9.10)$$

y σ_{nx} y σ_{ny} habrían de ser funciones lineales de x e y .

Por tanto, si la solución en el caso de deformación plana era exacta, en el caso de tensión plana no lo es. No obstante, si se trata de una placa delgada, la solución que se obtenga de esta forma la admitiremos como válida por ser muy aproximada.

6.10. Función de Airy

Cuando las fuerzas de masa son constantes en un prisma, con estado de deformación o tensión plana, el problema elástico puede verse simplificado notablemente mediante la utilización de una cierta función ϕ llamada *función de tensiones* o *función de Airy*.

En efecto, si derivamos las ecuaciones (6.8.1) o (6.9.1) de equilibrio interno, suponiendo las fuerzas de masa constantes, se tiene

$$\frac{\partial^2 \sigma_{nx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{ny}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.10.1)$$

Igualando estas expresiones a la derivada cuarta $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}$ de una función ϕ , se deduce que podemos obtener los valores de las tensiones de la forma siguiente:

$$\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} ; \quad \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx \quad (6.10.2)$$

que verifican las ecuaciones de equilibrio interno.

Tanto la ecuación (6.8.8) en el caso de deformación plana como la (6.9.8) en el caso de tensión plana es verificada, siempre que ϕ cumpla la condición

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (6.10.3)$$

es decir, que la función de Airy tiene que ser, para que se cumplan las condiciones de compatibilidad y las ecuaciones de equilibrio interno una función biarmónica.

El problema elástico, en los casos de elasticidad bidimensional con fuerzas de masa constantes queda reducido, pues, a encontrar una función biarmónica cuya solución de tensiones que de ella se derive verifique las condiciones de contorno.

Si las leyes de variación de las tensiones en el contorno son polinomios de grado n cabe esperar que la función de Airy sea un polinomio en x, y , de grado $n + 2$.

Una vez determinado el grado del polinomio de Airy, en los casos que sea posible, se supone la función ϕ un polinomio de ese grado, hasta los términos de segundo grado inclusive, con coeficientes A, B, C, \dots , que se determinarán mediante la identificación de las tensiones obtenidas a partir de ϕ [ecuaciones (6.10.2)], con las leyes deducidas de la sollicitación exterior, y cumpliendo los coeficientes las relaciones precisas para asegurar la condición de biarmonicidad de la función de tensiones.

6.11. Función de Airy cuando las fuerzas de masa deriven de un potencial

Consideremos ahora el caso en el que las fuerzas de masa no sean constantes, pero sí deriven de un potencial V , es decir:

$$\vec{f}_v = -\nabla V \quad \begin{cases} X = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \quad (6.11.1)$$

En este caso, las ecuaciones de equilibrio interno se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{nx} - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{ny} - V) = 0 \end{cases} \quad (6.11.2)$$

Si $\phi = \phi(x, y)$ es función de Airy, la solución de tensiones

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_{ny} = V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (6.11.3)$$

satisfacen idénticamente las ecuaciones de equilibrio interno (6.11.2).

Para imponer la condición de compatibilidad distinguiremos entre estado de deformación plana y estado tensional plano.

a) *Estado de deformación plana*

Según hemos visto anteriormente, se tiene que verificar la ecuación (6.8.7)

$$\Delta \left(2V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{1 - \mu} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (6.11.4)$$

o lo que es lo mismo, simplificando

$$\Delta^2 \phi + \frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} \Delta V = 0 \quad (6.11.5)$$

Esta ecuación permitirá obtener la función ϕ de Airy que resuelve el problema elástico en un estado de deformación plana. La solución que de ella se derive solamente tiene que verificar las condiciones de contorno.

b) *Estado tensional plano*

Si se trata de un estado tensional plano, la ecuación que se tiene que verificar para que la función ϕ cumpla las condiciones de compatibilidad es la (6.9.7)

$$\Delta \left(2V + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = (1 + \mu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (6.11.6)$$

o sea:

$$\Delta^2 \phi + (1 - \mu) \Delta V = 0 \quad (6.11.7)$$

si bien en este caso hay que señalar el carácter de solución aproximada en la resolución del problema elástico.

6.12. Solución de Filón a la resolución del problema elástico plano

En el estudio de una viga cuya longitud es muy superior a la altura, *Filón* propuso una solución de polinomios trigonométricos al problema elástico que se presentaba en esa viga.

En la solución de Filón se consideran despreciables las fuerzas de masa y se propone una solución de tensiones que se pueda expresar como producto de otras dos: una que depende exclusivamente de x y otra función solamente de y .

$$\Phi(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y) \quad (6.12.1)$$

La función de tensiones Φ tiene que ser biarmónica, es decir, tiene que verificar

$$\begin{aligned} \Delta^2 \Phi &= \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \\ &= \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \psi + 2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \varphi \frac{d^4 \psi}{dy^4} = 0 \end{aligned} \quad (6.12.2)$$

Si tomamos la función φ de la forma

$$\varphi = A \cos \lambda x + B \sen \lambda x \quad (6.12.3)$$

como sus derivadas segunda y cuarta son

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= -A \lambda^2 \cos \lambda x - B \lambda^2 \sen \lambda x = -\lambda^2 \varphi \\ \frac{d^4 \varphi}{dx^4} &= A \lambda^4 \cos \lambda x + B \lambda^4 \sen \lambda x = \lambda^4 \varphi \end{aligned}$$

si sustituimos en (6.12.2), tenemos:

$$\lambda^4 \varphi \psi - 2 \lambda^2 \varphi \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \varphi \frac{d^4 \psi}{dy^4} = 0 \quad (6.12.4)$$

o bien

$$\frac{d^4 \psi}{dy^4} - 2 \lambda^2 \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \lambda^4 \psi = 0 \quad (6.12.5)$$

ecuación diferencial de cuarto orden y coeficientes constantes, cuya solución será de la forma $\psi = e^{sy}$.

Por tanto, su ecuación característica es

$$\lambda^4 - 2 \lambda^2 s^2 + s^4 = 0$$

de donde:

$$(\lambda^2 - s^2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm \lambda \quad (\text{raíces dobles})$$

La solución integral de la ecuación diferencial (6.12.5) es

$$\psi = C \operatorname{ch} \lambda y + D \operatorname{sh} \lambda y + Ey \operatorname{ch} \lambda y + Fy \operatorname{sh} \lambda y$$

por lo que la función de tensiones Φ será:

$$\Phi = (A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x)(C \operatorname{ch} \lambda y + D \operatorname{sh} \lambda y + Ey \operatorname{ch} \lambda y + Fy \operatorname{sh} \lambda y) \quad (6.12.6)$$

Con esta solución se verifica para cualesquiera valores de las constantes, y se podrá tomar como solución más general la suma algebraica de ellas

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{m=1}^{m=h} (A_m \cos \lambda x + B_m \operatorname{sen} \lambda x) (C_m \operatorname{ch} \lambda y + \\ + D_m \operatorname{sh} \lambda y + E_m y \operatorname{ch} \lambda y + F_m y \operatorname{sh} \lambda y) \end{aligned} \quad (6.12.7)$$

ecuación en la que se tienen cuantas constantes arbitrarias se deseen para ajustarse a las condiciones de contorno.

6.13. Funciones de Airy polinómicas

Hemos visto anteriormente que en un estado de elasticidad bidimensional en el que las fuerzas de volumen sean constantes o nulas el problema del cálculo de la matriz de tensiones se reduce a la determinación de una función ϕ , llamada *función de tensiones* o *función de Airy*, que sea biarmónica

$$\Delta^2 \phi = 0 \quad (6.13.1)$$

o bien, en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (6.13.2)$$

A partir de ella, las componentes de la matriz de tensiones son:

$$\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx \quad (6.13.3)$$

Generalmente, en este proceso se obtienen las anteriores expresiones en función de ciertos parámetros que aparecen en la función ϕ y que habrá que determinar imponiendo las condiciones de equilibrio en el contorno

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_{nx} \alpha + \tau_{xy} \beta \\ \bar{Y} = \tau_{xy} \alpha + \sigma_{ny} \beta \end{cases} \quad (6.13.4)$$

Frecuentemente interesa seguir este camino, es decir, especificar en primer lugar la forma analítica de la función ϕ y determinar después sus parámetros, de forma que satisfagan la condición de biarmonicidad y las de contorno.

Una vez obtenidas las componentes de la matriz de tensiones se deducirán las correspondientes de la matriz de deformación mediante las leyes de Hooke generalizadas, y a partir de éstas se pueden determinar, salvo una traslación y un giro alrededor del eje z , las componentes del vector desplazamiento de cualquier punto integrando las ecuaciones diferenciales correspondientes, análogamente a como se hizo cuando en el Capítulo 3 obteníamos las condiciones de compatibilidad de las componentes de la matriz de deformación.

Sin embargo, ahora procederemos de diferente modo. Supondremos soluciones polinómicas de la función de Airy y ajustaremos convenientemente los coeficientes para ver el significado que tal función de tensión comportará en el estado elástico provocado en una placa rectangular, viendo qué condiciones de contorno crearían ese estado tensional cuya función de tensiones es ϕ .

Para funciones polinómicas de grado inferior al cuarto, la condición de biarmonicidad está asegurada, y como para la función de primer grado la solución de tensiones (6.13.3) es idénticamente nula, consideraremos en primer lugar una función polinómica de segundo grado.

Polinomio de segundo grado

Si la función de Airy viene representada por un polinomio homogéneo de segundo grado

$$\phi(x, y) = \frac{a}{2} x^2 + bxy + \frac{c}{2} y^2 \quad (6.13.5)$$

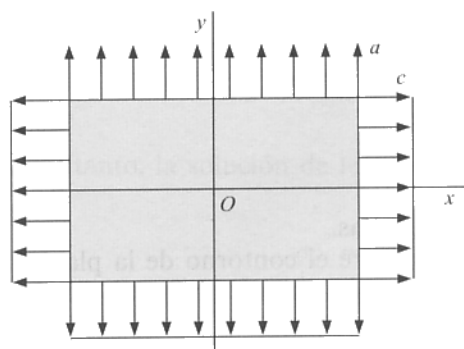
la solución de tensiones dada por (6.13.3), en el caso de que las fuerzas de volumen sean nulas será

$$\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c ; \quad \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = a ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -b \quad (6.13.6)$$

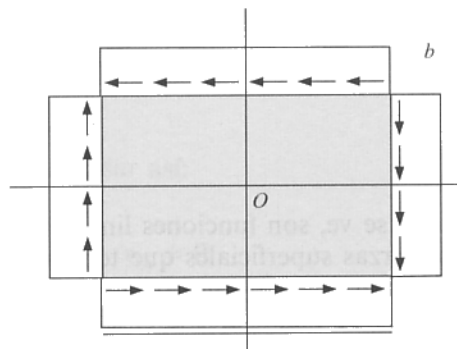
Se obtiene, como vemos, una combinación de tensiones uniformes de tracción o compresión (según el signo de los coeficientes a y c) en dos direcciones perpendiculares entre sí y una tensión tangencial uniforme. Es lo que se llama *estado de tensión homogéneo*.

Se observa que en este caso si los ejes son paralelos a los lados de la placa, el resultado obtenido es independiente de la posición del origen de coordenadas.

Las fuerzas superficiales en el contorno se obtienen de (6.13.4). Se dibujan en la Figura 6.17 para el caso de los tres coeficientes positivos.



Fuerzas superficiales normales



Fuerzas superficiales tangenciales

Figura 6.17.

Vemos que la función de Airy polinómica de segundo grado resuelve el problema elástico de la placa en los siguientes casos:

- 1.º Cuando la placa está sometida a una tracción uniforme en la dirección del eje y , todos los coeficientes son nulos, excepto a .
- 2.º Cuando la placa está sometida a una fuerza tangencial uniforme en todo su contorno, todos los coeficientes son nulos, excepto b .
- 3.º Cuando la placa está sometida a una tracción uniforme en la dirección del eje x , todos los coeficientes son nulos, excepto c .
- 4.º Cuando la placa está sometida a una tracción uniforme en la dirección del eje x y a una fuerza tangencial uniforme en todo su contorno, el coeficiente a es nulo.
- 5.º Cuando la placa está sometida a doble tracción en las direcciones de los ejes x e y , el coeficiente b es nulo.
- 6.º Cuando la placa está sometida a una tracción en la dirección del eje y y a una fuerza tangencial uniforme en todo su contorno, el coeficiente c es nulo.

Hemos supuesto todos los coeficientes positivos. Si a o c fueran negativos, las tracciones correspondientes serían compresiones. Si es negativo b , cambiaría el sentido de la fuerza tangencial en su contorno.

Polinomio de tercer grado

Si la función de Airy es un polinomio homogéneo de tercer grado

$$\phi(x, y) = \frac{a}{6} x^3 + \frac{b}{2} x^2 y + \frac{c}{2} x y^2 + \frac{d}{6} y^3 \quad (6.13.7)$$

se cumple también la condición de biarmonicidad para valores arbitrarios de los coeficientes.

Las tensiones, según (6.13.3), vendrán dadas por

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = cx + dy \\ \sigma_{ny} = ax + by \\ \tau_{xy} = -bx - cy \end{cases} \quad (6.13.8)$$

que, como se ve, son funciones lineales de las coordenadas.

Las fuerzas superficiales que tendrían que actuar sobre el contorno de la placa para que la función de Airy ϕ nos resolviera el problema elástico en ella se obtendrían de forma análoga a como hemos hecho en el caso anterior, en el que la función ϕ era un polinomio de segundo grado.

De forma análoga también podemos estudiar los casos que corresponden cuando son nulos uno, dos o tres coeficientes. Pero entre todos ellos merece especial atención el caso en el que todos los coeficientes son nulos, excepto d , es decir, cuando la función de Airy es de la forma

$$\phi = \frac{d}{6} y^3 \quad (6.13.9)$$

En este caso, la solución de tensiones es

$$\sigma_{nx} = dy ; \quad \sigma_{ny} = 0 ; \quad \tau_{xy} = 0 \quad (6.13.10)$$

La aplicación de las ecuaciones (6.13.4) nos proporciona las fuerzas superficiales en el contorno, que representamos en la Figura 6.18.

De la solución de tensiones se deduce que la distribución de tensiones en cualquier sección recta perpendicular al eje x es la misma, anulándose en todos sus puntos la tensión tangencial. La tensión normal es directamente proporcional a la distancia a la fibra que no está sometida a tensión alguna. De ahí que a esta fibra se le llame *fibra neutra*, y dado que en toda sección recta el sistema de fuerzas engendrado por las tensiones normales se reduce a un momento flector constante, diremos que la placa trabaja a *flexión pura*.

Si es conocido el momento M por unidad de espesor de la placa podemos expresar el coeficiente d en función de éste.

En efecto, en cualquier sección paralela al eje y

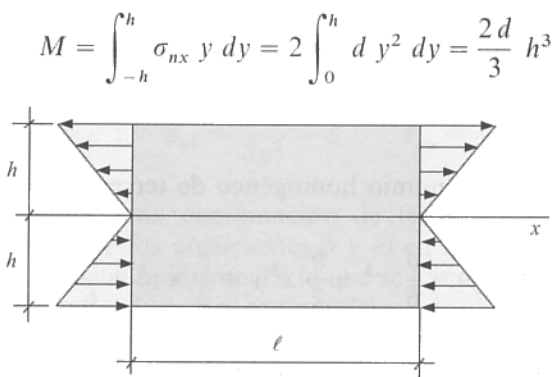


Figura 6.18.

de donde

$$d = \frac{3}{2} \frac{M}{h^3} \quad (6.13.11)$$

Por tanto, la solución de tensiones se podrá expresar así:

$$\sigma_{nx} = \frac{3}{2} \frac{M}{h^3} y ; \quad \sigma_{ny} = 0 ; \quad \tau_{xy} = 0 \quad (6.13.12)$$

Un aspecto interesante se desprende de la consideración de las dos condiciones de contorno distintas indicadas en la Figura 6.19.

En a) se indica la distribución lineal de esfuerzos normales en dos caras opuestas del contorno de la placa correspondiente al caso de flexión pura que hemos estudiado anteriormente. En b) si la tensión σ de tracción o compresión sobre las mismas caras es tal

que $\sigma = \frac{M}{h^2}$, los sistemas de fuerzas aplicados en ambos casos son estáticamente equivalentes y, en virtud del principio de *Saint-Venant*, en una zona suficientemente alejada de los extremos la distribución de tensiones es la misma en los dos casos.

Si todos los coeficientes son nulos, excepto a

$$\phi = \frac{a}{6} x^3 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{nx} = 0 \\ \sigma_{ny} = ax \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (6.13.13)$$

es un caso análogo al anterior. La diferencia estriba en que ahora los esfuerzos normales actúan sobre los lados de la placa paralelos al eje x y el eje neutro, lugar de los puntos de tensión normal nula, es el eje y (Fig. 6.20).

Polinomio de cuarto grado

Si la función de Airy es un polinomio homogéneo de cuarto grado

$$\phi = \frac{a}{12} x^4 + \frac{b}{6} x^3 y + \frac{c}{2} x^2 y^2 + \frac{d}{6} x y^3 + \frac{e}{12} y^4 \quad (6.13.14)$$

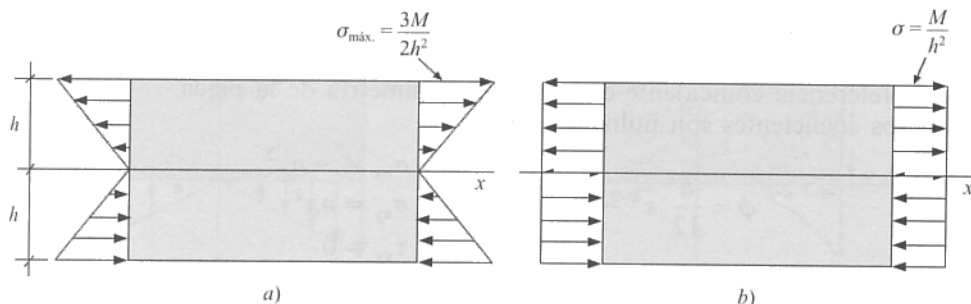


Figura 6.19.

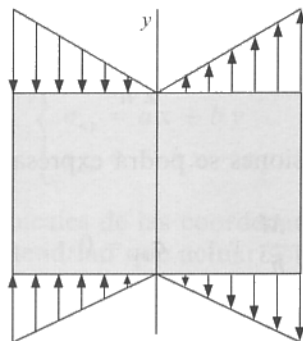


Figura 6.20.

los coeficientes ya no pueden ser arbitrarios, pues al tener que cumplir la condición de biarmonicidad se habrá de verificar

$$\Delta^2 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 2a + 4c + 2e = 0$$

es decir:

$$a + 2c + e = 0 \quad \Rightarrow \quad e = -2c - a \quad (6.13.15)$$

con lo que la función ϕ tomaría la forma

$$\phi = \frac{a}{12} x^4 + \frac{b}{6} x^3 y + \frac{c}{2} x^2 y^2 + \frac{d}{6} xy^3 - \frac{2c+a}{12} y^4 \quad (6.13.16)$$

en la que ahora los coeficientes a, b, c, d sí pueden ser arbitrarios.

La solución de tensiones es:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = c x^2 + d xy - (2c + a) y^2 \\ \sigma_{ny} = a x^2 + b xy + c y^2 \\ \tau_{xy} = -\frac{b}{2} x^2 - 2c xy - \frac{d}{2} y^2 \end{cases} \quad (6.13.17)$$

Según los valores de los coeficientes tenemos diferentes condiciones de carga sobre la placa rectangular. A modo de ejemplo, veamos dos casos particulares, tomando en ambos el sistema de referencia coincidente con los ejes de simetría de la placa.

Si todos los coeficientes son nulos, excepto a

$$\phi = \frac{a}{12} x^4 - \frac{a}{12} y^4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{nx} = -ay^2 \\ \sigma_{ny} = ax^2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (6.13.18)$$

En la Figura 6.21 se representan los esfuerzos unitarios sobre el contorno para valores de a positivos. La placa está sometida a compresión según el eje x y a tracción según el

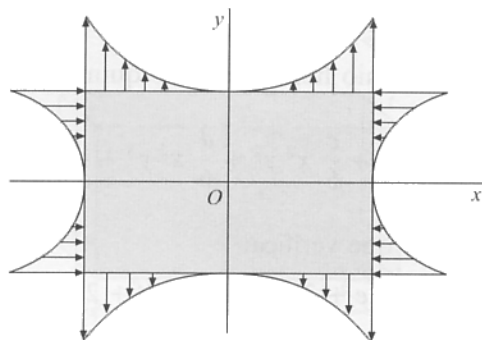


Figura 6.21.

eje y . Ambas distribuciones siguen una ley parabólica anulándose en los puntos medios de los lados.

Si todos los coeficientes son nulos, excepto b

$$\phi = \frac{b}{6} x^3 y \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{nx} = 0 \\ \sigma_{ny} = b x y \\ \tau_{xy} = -\frac{b}{2} x^2 \end{cases} \quad (6.13.19)$$

La placa está sometida a esfuerzos normales en los lados $y = \pm h$ que siguen una ley lineal, y a esfuerzos tangenciales: ley uniforme en los lados $x = \pm \frac{\ell}{2}$ y parabólica en $y = \pm h$ (Fig. 6.22).

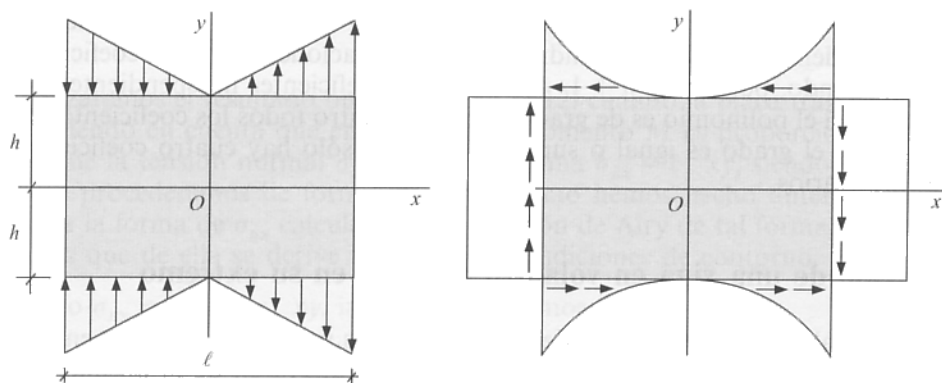


Figura 6.22.

Polinomio de quinto grado

Si la función de Airy es un polinomio homogéneo de quinto grado

$$\phi = \frac{a}{20} x^5 + \frac{b}{12} x^4 y + \frac{c}{6} x^3 y^2 + \frac{d}{6} x^2 y^3 + \frac{e}{12} x y^4 + \frac{f}{20} y^5 \quad (6.13.20)$$

para que sea biarmónica se tiene que verificar

$$\Delta^2 \phi = (3a + e + 2c)x + (b + 3f + 2d)y = 0$$

es decir, los coeficientes no pueden ser arbitrarios, sino que tienen que cumplir las relaciones

$$\begin{cases} e = -(2c + 3a) \\ f = -\frac{1}{3}(b + 2d) \end{cases} \quad (6.13.21)$$

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{c}{3} x^3 + d x^2 y - (2c + 3a) x y^2 - \frac{1}{3} (b + 2d) y^3 \\ \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + \frac{d}{3} y^3 \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{b}{3} x^3 - c x^2 y - d x y^2 + \frac{1}{3} (2c + 3a) y^3 \end{cases} \quad (6.13.22)$$

en donde los coeficientes a, b, c, d son arbitrarios. Si se eligen convenientemente se obtienen las soluciones correspondientes a distintas condiciones de carga de la placa, análogamente a como hemos hecho en los casos anteriores.

De lo expuesto anteriormente se deduce, de forma general, que si la función de tensiones es un polinomio de grado n tenemos $n + 1$ coeficientes. Al imponer la condición de biarmonicidad nos quedará un polinomio de grado $n - 4$ con $n - 3$ coeficientes, que como ha de ser idénticamente nulo tendremos $n - 3$ relaciones entre los coeficientes del polinomio, quedando, por tanto, $n + 1 - (n - 3) = 4$ coeficientes independientes.

Resumiendo, si el polinomio es de grado inferior a cuatro todos los coeficientes pueden ser arbitrarios. Si el grado es igual o superior a cuatro sólo hay cuatro coeficientes que pueden ser arbitrarios.

6.14. Flexión de una viga en voladizo cargada en su extremo

Determinaremos ahora la distribución de tensiones en los puntos de una viga en voladizo de espesor constante t , pequeño en comparación con la altura $2h$ de la misma, que está sometida a una carga P en su extremo libre, como se indica en la Figura 6.23, de la que se considera despreciable su peso propio.

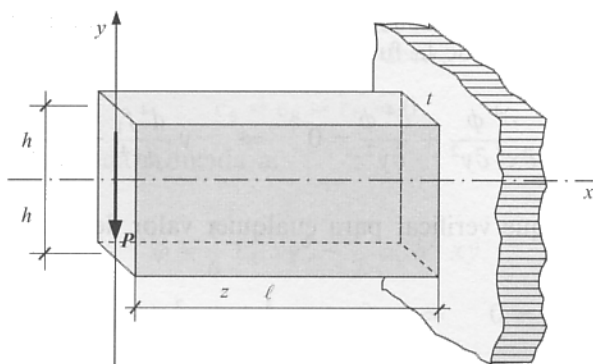


Figura 6.23.

En cualquier sección recta de esta viga es fácil ver que la reducción de la solicitación aplicada a una de las partes, en que la viga queda dividida por la sección, se compone de un momento flector en la dirección del eje z , y de un esfuerzo cortante. En estas condiciones se dice que la viga trabaja a *flexión simple*.

Como se ha supuesto que $t \ll 2h$ podemos considerar que esta viga está sometida a un estado tensional plano, cuyas condiciones de contorno son las siguientes:

- a) Las caras superior e inferior están libres de fuerzas de superficie tanto normales como tangenciales, es decir, para $y = \pm h$

$$\sigma_{ny} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = 0 \quad (6.14.1)$$

- b) No existen tensiones normales en la cara extrema libre, es decir, para $x = 0$

$$\sigma_{nx} = 0 \quad (6.14.2)$$

- c) La distribución de tensiones tangenciales en la cara extrema libre tiene que ser tal que su resultante sea igual a la carga P aplicada

$$P = \int_{-h}^h \tau_{xy} t \, dy \quad (6.14.3)$$

Utilizaremos el resultado obtenido en (6.13.12) cuando la placa trabaja a flexión pura, pero teniendo en cuenta que en este caso el momento M es proporcional a la abscisa x , por lo que la tensión normal σ_{nx} será de la forma $\sigma_{nx} = c_1 xy$, siendo c_1 una constante.

Aquí procederemos de forma inversa a como hemos hecho anteriormente, es decir, conocida la forma de σ_{nx} calcularemos la función de Airy de tal forma que la solución de tensiones que de ella se derive verifique las condiciones de contorno.

Como $\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_1 xy$, integrando, tenemos

$$\phi = \frac{1}{6} c_1 xy^3 + y f_1(x) + f_2(x) \quad (6.14.4)$$

siendo $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones arbitrarias de la variable x , que determinaremos imponiendo la condición de biarmonicidad de la función ϕ

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad y \frac{d^4 f_1}{dx^4} + \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$

y de aquí, como se tiene que verificar para cualquier valor de y :

$$\frac{d^4 f_1}{dx^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 = c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5 \quad (6.14.5)$$

$$\frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2 = c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9 \quad (6.14.6)$$

Sustituyendo las expresiones de f_1 y de f_2 en (6.14.4), se tiene como función de Airy

$$\phi = \frac{1}{6} c_1 x y^3 + (c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5) y + (c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9) \quad (6.14.7)$$

de la que se obtiene la solución de tensiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_1 xy \\ \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6 c_2 xy + 2 c_3 y + 6 c_6 x + 2 c_7 \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} c_1 y^2 - 3 c_2 x^2 - 2 c_3 x - c_4 \end{array} \right. \quad (6.14.8)$$

Determinemos las constantes imponiendo las condiciones de contorno:

Para $y = \pm h$: $\sigma_{ny} = 0$; $\tau_{xy} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 c_2 hx + 2 h c_3 + 6 c_6 x + 2 c_7 = 0 \\ -6 c_2 hx - 2 h c_3 + 6 c_6 x + 2 c_7 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow c_2 = c_3 = c_6 = c_7 = 0$$

$$-\frac{1}{2} c_1 h^2 - 3 c_2 x^2 - 2 c_3 x - c_4 = 0$$

$$\Rightarrow c_4 = -\frac{1}{2} c_1 h^2$$

Como en la función de Airy los términos lineales no van a intervenir en la solución del problema elástico, podemos suponerlos nulos, es decir:

$$c_5 = c_8 = c_9 = 0$$

La función de Airy queda reducida a:

$$\phi = \frac{1}{6} c_1 x y^3 - \frac{1}{2} c_1 h^2 x y \quad (6.14.9)$$

y la solución de tensiones a

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = c_1 x y \\ \sigma_{ny} = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{1}{2} c_1 (y^2 - h^2) \end{cases} \quad (6.14.10)$$

La única constante no nula, c_1 , se determina imponiendo la condición de contorno (6.14.3)

$$\int_{-h}^h \tau_{xy} t \, dy = - \int_{-h}^h \frac{1}{2} c_1 t (y^2 - h^2) \, dy = P$$

de donde

$$c_1 = \frac{3P}{2t h^3}$$

y como $\frac{2}{3} t h^3 = I_z$ es el momento de inercia de la sección recta de la viga respecto del eje z , podemos poner

$$\sigma_{nx} = \frac{Px}{I_z} y \quad ; \quad \sigma_{ny} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{P}{2I_z} (h^2 - y^2) \quad (6.14.11)$$

Por tanto, si llamamos fibra neutra la formada por los puntos para los cuales la tensión normal es nula, resulta que en los puntos de una sección recta de la viga la tensión normal es proporcional a la distancia a la fibra neutra, y la tensión tangencial es una función parabólica, que se anula en las fibras extremas y toma su valor máximo en los puntos de la fibra neutra. Su representación gráfica se indica en la Figura 6.24.

La solución del problema elástico planteado será tanto más exacta cuanto más se acerque a la ley parabólica indicada el reparto de la carga P en la superficie de la sección extrema libre.

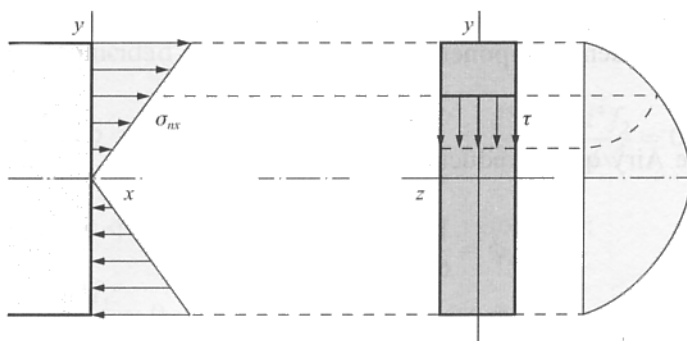


Figura 6.24.

6.15. Presa de gravedad de perfil triangular

Un ejemplo interesante de problema de elasticidad plana, al que es aplicable la resolución mediante una función de tensión polinómica, es la *presa de gravedad de perfil triangular*.

Que se trata de un problema de elasticidad plana es evidente, ya que tanto las fuerzas de masa o peso propio como las exteriores originadas por la presión hidrostática, normales a la superficie de la presa, son paralelas al plano xOy (Fig. 6.25).

Si suponemos que es muy grande la longitud de la presa en dirección normal al plano del perfil indicado, se trata de un problema de deformación plana.

Veamos, pues, cómo podemos encontrar la solución de tensiones en los puntos de la presa a partir de una función de Airy de tipo polinómico considerando en primer lugar que el embalse esté totalmente lleno.

Como en los puntos de la superficie mojada la tensión (igual a la presión hidrostática) es una función lineal de la cota y , cabe esperar que la función de Airy sea un polinomio de tercer grado de la forma

$$\phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad (6.15.1)$$

que es biarmónica para valores arbitrarios de los coeficientes y , por tanto, las tensiones que de ella se derivan verifican las ecuaciones de equilibrio interno y las condiciones de compatibilidad.

La solución de tensiones (6.13.3), teniendo en cuenta que las fuerzas de masa son $X = 0$, $Y = \gamma$, siendo γ el peso específico del material de la presa, es

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2cx + 6dy \\ \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6ax + 2by \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx = -2bx - 2cy - \gamma x \end{array} \right. \quad (6.15.2)$$

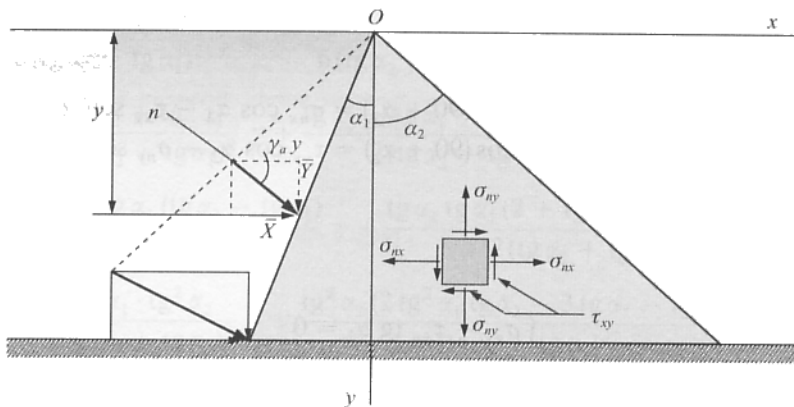


Figura 6.25.

Veamos si es posible determinar los coeficientes a, b, c, d para que estas ecuaciones determinen de forma unívoca las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_{nx} \alpha + \tau_{xy} \beta \\ \bar{Y} = \tau_{xy} \alpha + \sigma_{ny} \beta \end{cases} \quad (6.15.3)$$

En los puntos del paramento de aguas arriba, si γ_a es el peso específico del agua, la aplicación de estas ecuaciones nos da

$$\begin{aligned} \gamma_a y \cos \alpha_1 &= \sigma_{nx} \cos(90 + 90 - \alpha_1) + \tau_{xy} \cos(90 + \alpha_1) = -\sigma_{nx} \cos \alpha_1 - \tau_{xy} \sin \alpha_1 \\ \gamma_a y \sin \alpha_1 &= \tau_{xy} \cos(90 + 90 - \alpha_1) + \sigma_{ny} \cos(90 + \alpha_1) = -\tau_{xy} \cos \alpha_1 - \sigma_{ny} \sin \alpha_1 \end{aligned} \quad (6.15.4)$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las expresiones de las componentes de la matriz de tensiones dadas por (6.15.2) y dividiendo por $\cos \alpha_1$, tenemos

$$\begin{cases} \gamma_a y = -(2cx + 6dy) - (-2bx - 2cy - \gamma x) \operatorname{tg} \alpha_1 \\ \gamma_a y \operatorname{tg} \alpha_1 = -(-2bx - 2cy - \gamma x) - (6ax + 2by) \operatorname{tg} \alpha_1 \end{cases} \quad (6.15.5)$$

Sustituyendo x por su expresión en función de y

$$x = -y \operatorname{tg} \alpha_1$$

y dividiendo los dos miembros de ambas ecuaciones por y , se obtiene

$$\begin{cases} \gamma_a = 2c \operatorname{tg} \alpha_1 - 6d - (2b \operatorname{tg} \alpha_1 - 2c + \gamma \operatorname{tg} \alpha_1) \operatorname{tg} \alpha_1 \\ \gamma_a \operatorname{tg} \alpha_1 = -(2b \operatorname{tg} \alpha_1 - 2c + \gamma \operatorname{tg} \alpha_1) - (-6a \operatorname{tg} \alpha_1 + 2b) \operatorname{tg} \alpha_1 \end{cases} \quad (6.15.6)$$

Para encontrar las otras dos ecuaciones que necesitamos para determinar los cuatro coeficientes impongamos las condiciones de contorno en los puntos del paramento situado aguas abajo.

En esta superficie $\bar{X} = \bar{Y} = 0$, por lo que las ecuaciones de contorno serán:

$$\begin{cases} 0 = \sigma_{nx} \cos \alpha_2 + \tau_{xy} \cos(90 + \alpha_2) = \sigma_{nx} \cos \alpha_2 - \tau_{xy} \sin \alpha_2 \\ 0 = \tau_{xy} \cos \alpha_2 + \sigma_{ny} \cos(90 + \alpha_2) = \tau_{xy} \cos \alpha_2 - \sigma_{ny} \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (6.15.7)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{cases} \sigma_{nx} - \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \\ \tau_{xy} - \sigma_{ny} \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (6.15.8)$$

Sustituyendo las componentes de la matriz de tensiones por sus expresiones dadas por (6.15.2), tenemos:

$$\begin{cases} 2cx + 6dy + (2bx + 2cy + \gamma x) \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \\ -2bx - 2cy - \gamma x - (6ax + 2by) \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (6.15.9)$$

Como en los puntos de este paramento

$$x = y \operatorname{tg} \alpha_2$$

si sustituimos x en el sistema de ecuaciones anterior por su expresión dada por la relación anterior y dividimos por y , tenemos

$$\begin{cases} 2c \operatorname{tg} \alpha_2 + 6d + (2b \operatorname{tg} \alpha_2 + 2c + \gamma \operatorname{tg} \alpha_2) \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \\ -2b \operatorname{tg} \alpha_2 - 2c - \gamma \operatorname{tg} \alpha_2 - (6a \operatorname{tg} \alpha_2 + 2b) \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (6.15.10)$$

Las ecuaciones (6.15.6) y (6.15.10) forman el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} 4c \operatorname{tg} \alpha_1 - 6d - 2b \operatorname{tg}^2 \alpha_1 = \gamma_a + \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha_1 \\ 2c + 6a \operatorname{tg}^2 \alpha_1 - 4b \operatorname{tg} \alpha_1 = \gamma_a \operatorname{tg} \alpha_1 + \gamma \operatorname{tg} \alpha_1 \\ 4c \operatorname{tg} \alpha_2 + 6d + 2b \operatorname{tg}^2 \alpha_2 = -\gamma \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \\ -2c - 6a \operatorname{tg}^2 \alpha_2 - 4b \operatorname{tg} \alpha_2 = \gamma \operatorname{tg} \alpha_2 \end{cases} \quad (6.15.11)$$

que permite obtener los siguientes valores de los cuatro coeficientes que resuelven el problema

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{\dot{\text{tg}} \alpha_2 - \text{tg} \alpha_1}{6(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^2} \gamma + \frac{\text{tg}^2 \alpha_1 + 3 \text{tg} \alpha_1 \text{tg} \alpha_2 - 2}{6(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^3} \gamma_a \\ b &= -\frac{\text{tg}^2 \alpha_2 + \text{tg}^2 \alpha_1}{2(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^2} \gamma + \frac{\text{tg} \alpha_2 - \text{tg} \alpha_1 - 2 \text{tg} \alpha_1 \text{tg}^2 \alpha_2}{2(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^3} \gamma_a \\ c &= -\frac{\text{tg} \alpha_2 \text{tg} \alpha_1 (\text{tg} \alpha_2 - \text{tg} \alpha_1)}{2(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^2} \gamma + \frac{\text{tg} \alpha_2 \text{tg} \alpha_1 (2 + \text{tg}^2 \alpha_2 - \text{tg} \alpha_2 \text{tg} \alpha_1)}{2(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^3} \gamma_a \\ d &= -\frac{\text{tg}^2 \alpha_1 \cdot \text{tg}^2 \alpha_2}{3(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^2} \gamma + \frac{\text{tg}^2 \alpha_2 (2 \text{tg}^2 \alpha_1 \text{tg} \alpha_2 - 3 \text{tg} \alpha_1 - \text{tg} \alpha_2)}{6(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^3} \gamma_a \end{aligned} \right. \quad (6.15.12)$$

Vemos, en efecto, que en una presa de perfil triangular sometida a un estado de deformación plana es posible resolver el problema elástico mediante una función de Airy de forma polinómica de tercer grado.

Sin embargo, es necesario hacer la observación que la solución al problema planteado no es exacta, ya que a lo largo del lado horizontal del triángulo la solución encontrada impone unas tensiones y unos corrimientos que, en general, no se verificarán.

El resultado anterior nos permite encontrar la solución de tensiones en los puntos interiores de la presa en el caso de embalse totalmente vacío, sin más que hacer $\gamma_a = 0$ en la solución (6.15.12) de los coeficientes. Se obtendría, pues, el estado tensional provocado en la presa por su propio peso a partir de una función de Airy (6.15.1) polinómica de tercer grado, cuyos coeficientes, en función de las características geométricas del perfil de la presa y del peso específico y del material, toman los valores

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{\text{tg} \alpha_2 - \text{tg} \alpha_1}{6(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^2} \gamma \\ b &= -\frac{\text{tg}^2 \alpha_2 + \text{tg}^2 \alpha_1}{2(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^2} \gamma \\ c &= -\frac{\text{tg} \alpha_2 \text{tg} \alpha_1 (\text{tg} \alpha_2 - \text{tg} \alpha_1)}{2(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^2} \gamma \\ d &= -\frac{\text{tg}^2 \alpha_1 \cdot \text{tg}^2 \alpha_2}{3(\text{tg} \alpha_2 + \text{tg} \alpha_1)^2} \gamma \end{aligned} \right. \quad (6.15.13)$$

EJERCICIOS

- 6.1. En un punto de un sólido elástico en el que existe un estado tensional plano, la matriz de tensiones, referida a un sistema de ejes cartesianos ortogonales, es

$$[T] = \begin{pmatrix} -100 & 25\sqrt{3} \\ 25\sqrt{3} & -200 \end{pmatrix}$$

estando expresadas sus componentes en kp/cm^2 . Se pide, en ese punto:

- 1.º Determinar analítica y gráficamente las tensiones y direcciones principales.
- 2.º Hallar la elipse de tensiones y representarla gráficamente.
- 3.º Calcular las deformaciones principales.
- 4.º Calcular la variación angular experimentada por la dirección a la que corresponde la deformación transversal unitaria máxima, dándola en grados, e indicar la dirección o direcciones correspondientes.

Datos: módulo de elasticidad $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$; coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$.

- 1.º De la matriz de tensiones se deduce el esquema indicado en la Figura E6.1a.

Cálculo de las tensiones principales:

- a) Analíticamente, aplicando las ecuaciones (6.4.4)

$$\sigma_1 = \frac{-100 - 200}{2} + \sqrt{\left(\frac{-100 + 200}{2}\right)^2 + (25\sqrt{3})^2} = -84 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{-100 - 200}{2} - \sqrt{\left(\frac{-100 + 200}{2}\right)^2 + (25\sqrt{3})^2} = -216 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_1 = -84 \text{ kp/cm}^2 ; \quad \sigma_2 = -216 \text{ kp/cm}^2$$

- b) Gráficamente, mediante el círculo de Mohr (Fig. E6.1b).

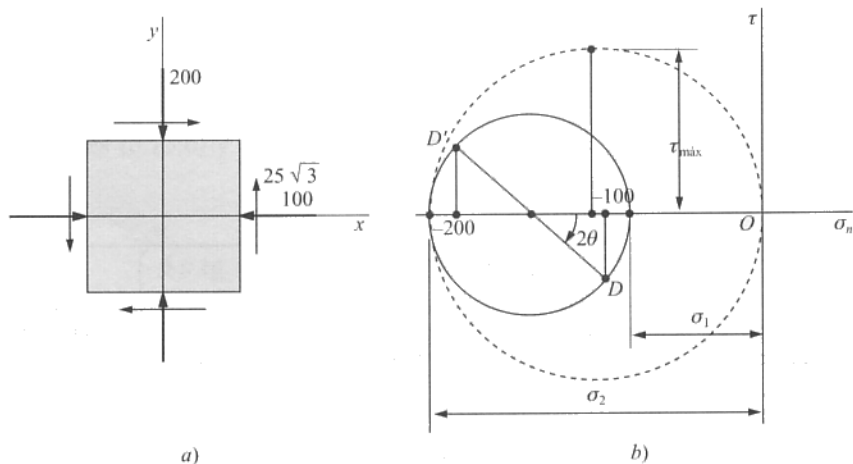


Figura E6.1.

Cálculo de las direcciones principales. Vienen determinadas por los ángulos θ que verifican (6.4.7)

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} = \frac{2 \cdot 25 \cdot \sqrt{3}}{-100 + 200} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

de donde

$$2\theta = 40^{\circ} 40' \quad \Rightarrow \quad \theta = 20^{\circ} 20'$$

es decir:

$$\theta_1 = 20^{\circ} 20' \quad ; \quad \theta_2 = 110^{\circ} 20'$$

Se representan gráficamente en la Figura E6.1c.

2.º La ecuación de la elipse de tensiones, referida a las direcciones principales, es

$$\frac{X^2}{84^2} + \frac{Y^2}{216^2} = 1$$

que se representa gráficamente en la Figura E6.1c.

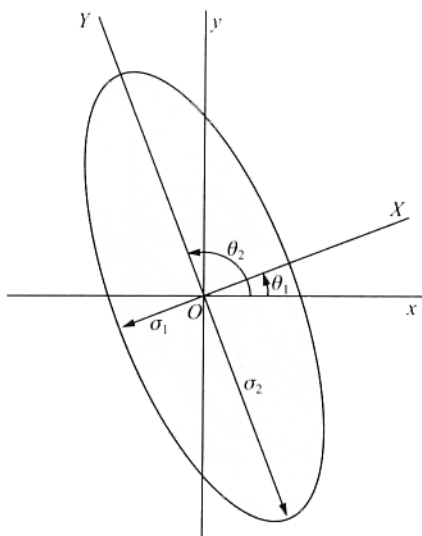


Figura E6.1c.

3.º Aplicando las leyes de Hooke, los alargamientos unitarios principales son

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) = \frac{1}{2 \cdot 10^6} (-84 + 0,3 \cdot 216) = -9,6 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) = \frac{1}{2 \cdot 10^6} (-216 + 0,3 \cdot 84) = -95,4 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{-1}{E} \mu (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{0,3}{2 \cdot 10^6} (84 + 216) = 4,5 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 = -9,6 \cdot 10^{-6} ; \quad \varepsilon_2 = -95,4 \cdot 10^{-6} ; \quad \varepsilon_3 = 4,5 \cdot 10^{-6}$$

4.º La deformación transversal unitaria máxima es

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n \right)_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{2 G}$$

siendo $|\tau_{\max}| = \frac{|\sigma_2|}{2} = 108 \text{ kp/cm}^2$, según se deduce del círculo de Mohr

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2 \cdot 10^6}{2(1 + 0,3)} = 7,7 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$$

Luego:

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n \right)_{\max} = \frac{108}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^5} \text{ rad} = \frac{108}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^5 \cdot 2\pi} 360^\circ = 4 \cdot 10^{-3}^\circ$$

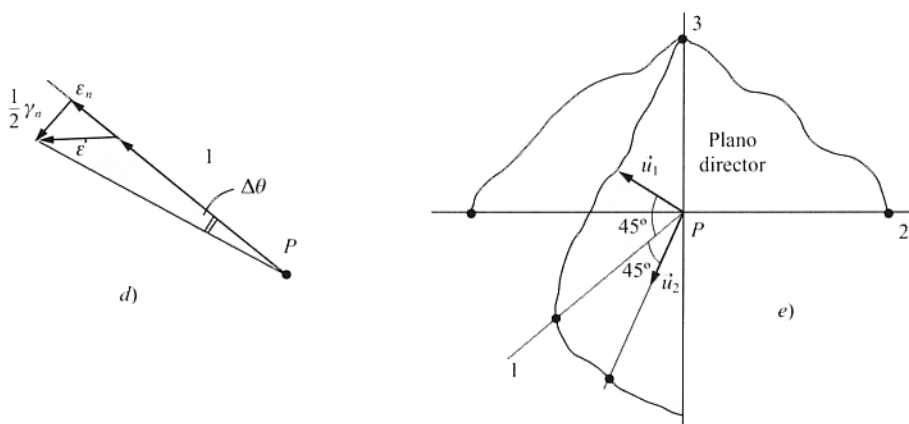


Figura E6.1d y e.

Como se trata de ángulos muy pequeños, la variación angular que experimenta la dirección a la que corresponde la deformación transversal máxima es precisamente igual a ésta (Fig. E6.1d)

$$\Delta\theta \simeq \operatorname{tg} \Delta\theta = \frac{\frac{1}{2} \gamma_n}{1 + \epsilon_n} \simeq \frac{1}{2} \gamma_n$$

Por tanto

$$\Delta\theta = 4 \cdot 10^{-3}^\circ$$

Las direcciones correspondientes coinciden con las bisectrices de los ejes principales 1 y 3. En este caso, la dirección principal que corresponde a la tensión principal mayor ($\sigma = 0$) es perpendicular al plano director (Fig. E6.1e).

- 6.2. Un bloque metálico está sometido a un estado tensional plano. En un punto P , el vector tensión correspondiente a un plano perpendicular al plano director, como el indicado en la Figura E6.2 tiene de módulo $|\vec{\sigma}| = 80 \text{ kp/cm}^2$ y forma con la normal un ángulo $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3/4$.

Sabiendo que este ángulo que forma el vector tensión correspondiente a un plano de los del haz de vértice P con su normal es máximo, se pide:

- 1.º Calcular los valores de las tensiones principales.
- 2.º Ecuación analítica y dibujo de la elipse de tensiones.
- 3.º Deformación transversal unitaria máxima, en grados.
- 4.º Hallar el valor de la dilatación cúbica unitaria.

Datos: módulos de elasticidad: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$; $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$.

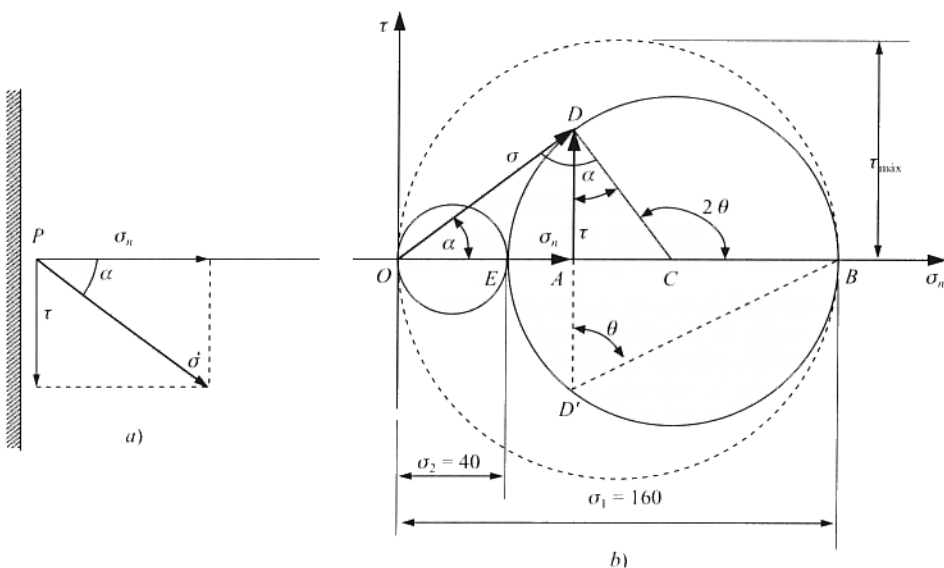


Figura E6.2.

1.º Las componentes intrínsecas del vector tensión sobre el plano considerado son:

$$\sigma_n = \sigma \cdot \cos \alpha = 80 \cdot \frac{4}{5} = 64 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau = \sigma \cdot \sin \alpha = 80 \cdot \frac{3}{5} = 48 \text{ kp/cm}^2$$

Estos valores nos permiten situar el punto D (64, 48) en el diagrama de Mohr. De la condición de ser máximo el ángulo α se deduce que la recta OD es tangente al círculo de Mohr, por lo que el centro C de dicho círculo, situado sobre el eje de abscisas, se obtendrá trazando por D una perpendicular a OD .

Las tensiones principales valen:

$$\sigma_1 = \overline{OA} + \overline{AC} + \overline{CB} = 64 + 48 \operatorname{tg} \alpha + 80 \operatorname{tg} \alpha = 160 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \overline{OA} + \overline{AC} - \overline{CB} = 64 + 48 \operatorname{tg} \alpha - 80 \operatorname{tg} \alpha = 40 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 160 \text{ kp/cm}^2 ; \quad \sigma_2 = 40 \text{ kp/cm}^2$$

2.º La normal n forma con la dirección principal 1 (que tomaremos como eje x) un ángulo θ , cuya tangente tiene el valor

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD'}} = \frac{36 + 60}{48} = 2$$

de donde $\theta = 63^\circ 30'$.

Con este valor podemos dibujar las direcciones principales (Fig. E6.2c).

La elipse de tensiones, referida a las direcciones principales, tiene de ecuación

$$\frac{x^2}{160^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1$$

y su representación gráfica queda indicada en la misma Figura E6.2c.

3.º La deformación transversal unitaria máxima, según la ley de Hooke, es

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n \right)_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{2G} = \frac{80}{2 \cdot 8 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = \frac{360}{4\pi} 10^{-4}^\circ$$

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n \right)_{\max} = 2,86 \cdot 10^{-3}^\circ$$

4.º La dilatación cúbica unitaria

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

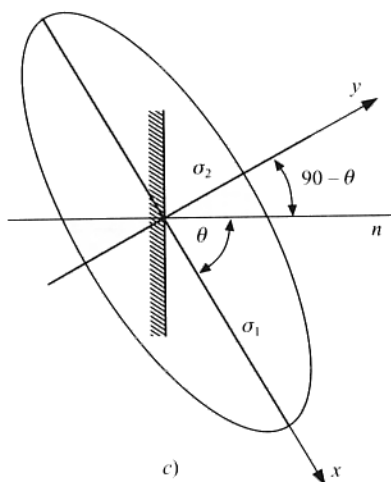


Figura E6.2c.

siendo μ el coeficiente de Poisson, cuyo valor se puede obtener a partir de los módulos de elasticidad E y G

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \Rightarrow \mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 8 \cdot 10^5} - 1 = 0,25$$

Luego

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 2 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^6} (160 + 40) = 0,5 \cdot 10^{-4}$$

$$e = \frac{\Delta V}{V} = 0,00005$$

6.3. En el interior de un sólido elástico existe un estado tensional plano superposición de los dos indicados en la Figura E6.3a, estando las tensiones expresadas en kp/mm^2 . Se pide calcular:

- 1.º Tensiones principales dando módulo, dirección y sentido de cada una de ellas.
- 2.º La tensión correspondiente a un plano perpendicular al plano director cuya normal exterior forma un ángulo de 30° con el eje x , contado en sentido antihorario.
- 3.º La tensión correspondiente a un plano perpendicular al plano director que forma un ángulo de 30° con el correspondiente a la mayor tensión principal.
- 4.º La deformación transversal unitaria máxima, en grados, indicando la dirección a la que corresponde.

Se tomará $G = 8,3 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$.

1.º El primer estado tensional lo sustituimos por su equivalente girado 45° , deducido del círculo de Mohr (Fig. E6.3b).

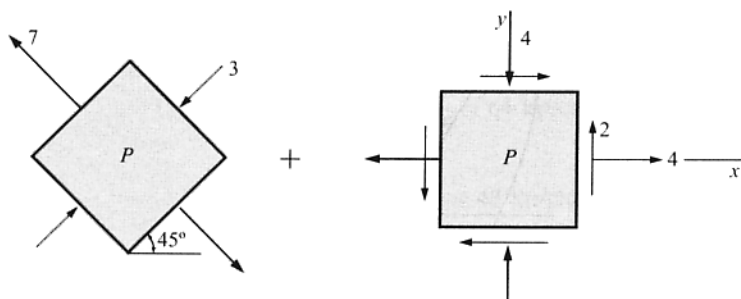


Figura E6.3a.

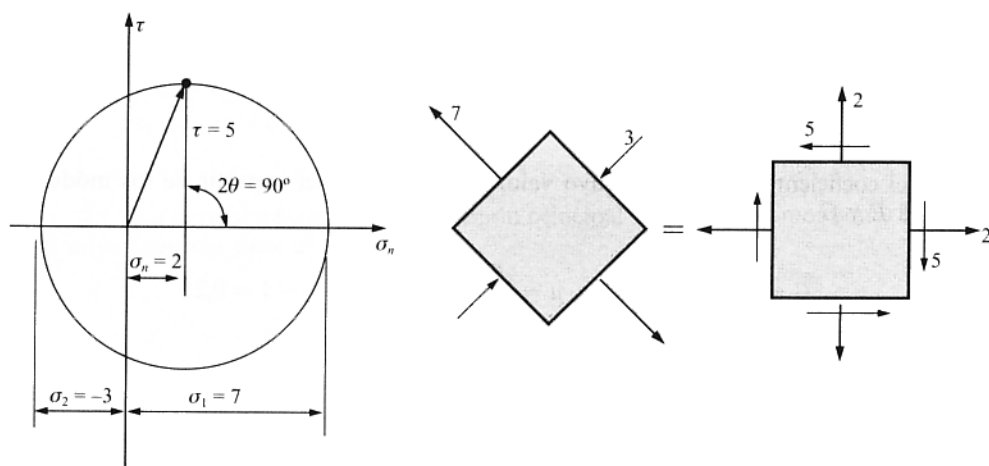


Figura E6.3b.

Por el principio de superposición, el estado tensional resultante es el indicado en la Figura E6.3c.

Las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = \frac{6-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{6+2}{2}\right)^2 + 9} = 7 \text{ kp/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{6-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{6+2}{2}\right)^2 + 9} = -3 \text{ kp/mm}^2$$

cuyas direcciones vienen dadas por:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} = \frac{-6}{6+2} = -0,75 \Rightarrow 2\theta = -36^\circ 52'$$

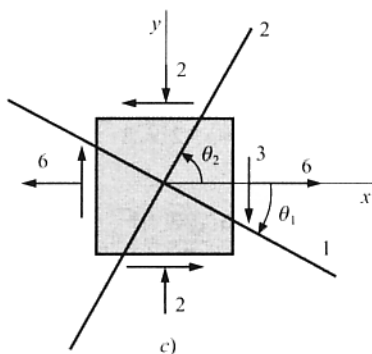


Figura E6.3c.

de donde:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -18^\circ 26' \\ \theta_2 &= \theta_1 + 90 = 71^\circ 34'\end{aligned}$$

que se representan gráficamente en la misma Figura E6.3c.

2.º Sustituyendo los valores $\sigma_{nx} = 6$, $\sigma_{ny} = -2$, $\tau_{xy} = -3$, $\theta = 30^\circ$ en las fórmulas (6.4.10) se obtienen las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente al plano considerado

$$\sigma_n = \frac{6-2}{2} + \frac{6+2}{2} \frac{1}{2} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,42 \text{ kp/mm}^2$$

$$\tau = \frac{6+2}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \frac{1}{2} = 4,96 \text{ kp/mm}^2$$

Se representan en la Figura E6.3d.

La obtención gráfica del mismo resultado mediante el círculo de Mohr queda indicada en la Figura E6.3f.

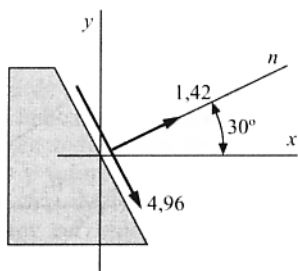


Figura E6.3d.

3.º Aplicando ahora las fórmulas (6.4.14), siendo $\sigma_1 = 7$, $\sigma_2 = -3$, $\theta = 30^\circ$, se tiene

$$\boxed{\sigma_n} = \frac{7 - 3}{2} + \frac{7 + 3}{2} \frac{1}{2} = \boxed{4,5 \text{ kp/mm}^2}$$

$$\boxed{\tau} = \frac{7 + 3}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{4,33 \text{ kp/mm}^2}$$

Se representan en la Figura E6.3e.

La resolución gráfica, utilizando el círculo de Mohr, se indica en la Figura E6.3g.

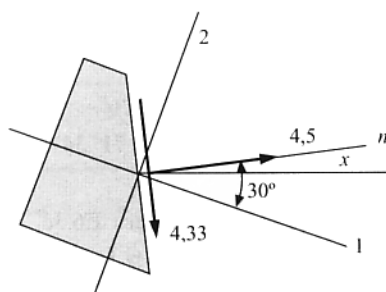


Figura E6.3e.

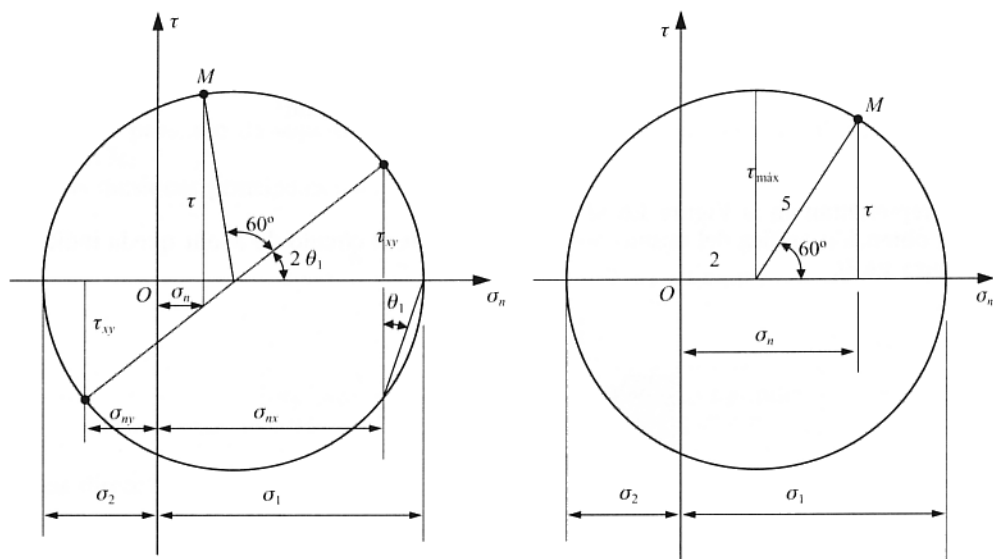


Figura E6.3f y g.

4.º La deformación transversal unitaria máxima es

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{2G}$$

$$\text{siendo: } \tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5 \text{ kp/mm}^2$$

$$G = 8,3 \cdot 10^3 \text{ kp/mm}^2$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}} = \frac{5}{2 \cdot 8,3 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \frac{3}{2\pi} 360 \cdot 10^{-4}^\circ$$

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_n\right)_{\text{máx}} = 0,0172^\circ$$

que se presenta en dos direcciones coincidentes con las bisectrices de las direcciones principales contenidas en el plano director.

6.4. Una presa de gravedad de perfil triangular está construida mediante hormigón de peso específico $5/2 \gamma$ (γ es el peso específico del agua), siendo su forma y dimensiones transversales las indicadas en la Figura E6.4. La solución de tensiones para este problema de deformación plana es conocida

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = -\gamma y \\ \sigma_{ny} = \frac{\gamma}{2} (x - 3y) \\ \tau_{xy} = -\gamma x \end{cases}$$

Coefficiente de Poisson $\mu = \frac{1}{4}$.

Módulo de elasticidad E .

Se pide:

1.º Representación gráfica de las fuerzas de superficie que debe ejercer el terreno sobre el lado AB , para que la solución indicada sea correcta.

2.º Tensiones principales en todo punto de la sección. A partir de los círculos de Mohr, realizar la discusión de signos y valores extremos, indicando dónde se producen estos últimos.

3.º Componentes de la matriz de deformación.

4.º Componentes del vector corrimiento, sabiendo que en el entorno del origen O no se produce giro y que el punto A no experimenta ningún corrimiento.

5.º Representar de forma aproximada la deformada del lado AB .

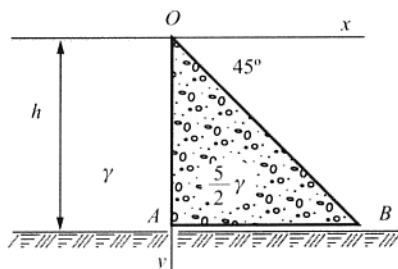


Figura E6.4a.

1.º Las fuerzas de superficie que ejerce el terreno sobre el lado AB tienen que ser tales que verifiquen las condiciones de contorno para la solución de tensiones dada.

Como la ecuación del lado AB es $y = h$, y el vector unitario en sus puntos es \vec{u} (0, 1), se tiene

$$[\vec{f}_{\Omega}] = \begin{pmatrix} -\gamma y & -\gamma x \\ -\gamma x & \frac{\gamma}{2} (x - 3y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma x \\ \frac{\gamma}{2} (x - 3y) \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\bar{X} = -\gamma x \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{\gamma}{2} (x - 3y)$$

cuya representación gráfica se hace en las Figuras E6.4b y E6.4c, respectivamente.

2.º Como es un estado de deformación plana una tensión principal es σ_{nz}

$$\sigma_{nz} = \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = \frac{1}{4} \left[-\gamma y + \frac{\gamma}{2} (x - 3y) \right] = \frac{\gamma}{8} (x - 5y)$$

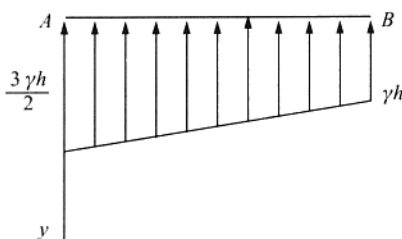
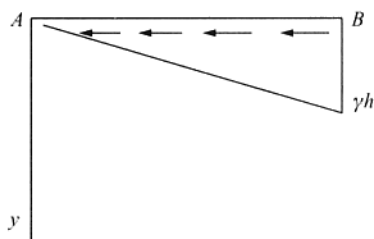


Figura E6.4b y c.

Las otras dos se obtienen de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -\gamma y - \sigma & -\gamma x \\ -\gamma x & \frac{\gamma}{2} (x - 3y) - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^2 - \frac{\gamma}{2} (x - 5y) \sigma - \frac{\gamma^2}{2} y(x - 3y) - \gamma^2 x^2 = 0$$

$$\sigma = \frac{x - 5y \pm \sqrt{17x^2 + y^2 - 2xy}}{4} \gamma$$

Veamos cuáles serían las tensiones principales en los puntos del contorno:

— Lado \overline{OA} ($x = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{nx} = -\gamma y \\ \sigma_{ny} = -\frac{3}{2} \gamma y \\ \sigma_{nz} = -\frac{5}{8} \gamma y \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_1 = -\frac{5}{8} \gamma y & (\text{eje } x^* \equiv \text{eje } z) \\ \sigma_2 = -\gamma y & (\text{eje } y^* \equiv \text{eje } x) \\ \sigma_3 = -\frac{3}{2} \gamma y & (\text{eje } z^* \equiv \text{eje } y) \end{array} \right.$$

En todos los puntos del lado OA y en todas las direcciones, el hormigón trabaja a compresión. Las direcciones principales coinciden con las del triedro de referencia, pero con la correspondencia que se ha señalado.

Los valores máximos de las componentes intrínsecas del vector tensión se presentan en el punto $A(0, h)$

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_3| = 1,5 \gamma h$$

$$\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| = \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{8}}{2} \gamma h = \frac{7}{16} \gamma h$$

La tensión normal de máximo valor absoluto tiene la dirección del eje y , mientras que la tensión tangencial máxima se presente en los planos cuyas normales son las bisectrices de los ejes z e y de la referencia dada (Figura E6.4d).

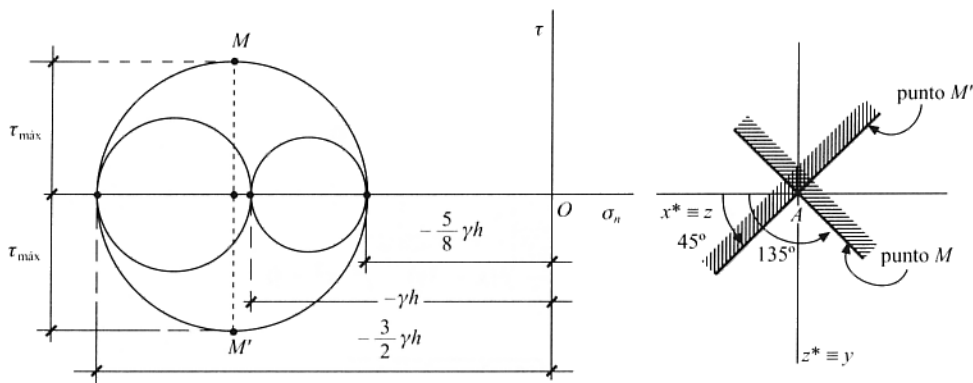


Figura E6.4d.

— Lado \overline{AB} ($y = h$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nx} &= -\gamma h \\ \sigma_{ny} &= \frac{\gamma}{2} (x - 3h) \\ \sigma_{nz} &= \frac{\gamma}{8} (x - 5h) \\ \tau_{xy} &= -\gamma x \end{aligned} \right\}$$

Las tensiones principales son:

$$\sigma = \frac{x - 5h \pm \sqrt{17x^2 + h^2 - 2hx}}{4} \gamma$$

$$\sigma_{nz} = \frac{\gamma}{8} (x - 5h)$$

También en todos los puntos del lado \overline{AB} el hormigón trabaja a compresión. Los valores máximos se presentan en el punto $B(h, h)$. Las tensiones principales en este punto son:

$$\sigma = \frac{h - 5h \pm \sqrt{17h^2 + h^2 - 2h^2}}{4} \gamma = \frac{-4h \pm 4h}{4} \gamma = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow -2\gamma h \end{matrix}$$

$$\sigma_{nz} = \frac{\gamma}{8} (h - 5h) = -0,5 \gamma h$$

es decir:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -0,5 \gamma h \text{ (eje } y^* \equiv \text{ eje } z) \\ \sigma_3 = -2 \gamma h \end{cases}$$

Por tanto:

$$|\sigma_{n \text{ máx}}| = 2 \gamma h \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{2 \gamma h}{2} = \gamma h$$

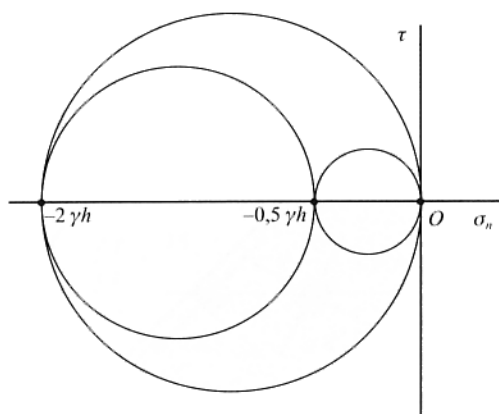


Figura E6.4e.

— Lado $OB(y = x)$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nx} &= -\gamma y \\ \sigma_{ny} &= -\gamma y \\ \sigma_{nz} &= -\gamma \frac{y}{2} \\ \tau_{xy} &= -\gamma y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Las tensiones principales son:} \\ &\sigma = \frac{-4y \pm \sqrt{18y^2 - 2y^2}}{4} \quad \gamma = \frac{-4y \pm 4y}{4} \quad \gamma = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow -2\gamma y \end{matrix} \\ &\sigma_{nz} = \frac{\gamma}{8} (y - 5y) = -0,5 \gamma y \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -0,5 \gamma y \\ \sigma_3 = -2 \gamma h \end{cases} \quad (\text{eje } y^* \equiv \text{eje } z)$$

En la Figura E6.4f se dibujan las direcciones principales y las tensiones correspondientes a los puntos de contorno e interiores que se indican.

De esta figura se deduce que en todos los puntos de la presa y en todas direcciones el hormigón trabaja a compresión, salvo en los puntos del contorno \overline{OB} en los que la tensión normal a la superficie libre es nula.

El valor absoluto de la máxima tensión principal se alcanza en B

$$|\sigma_{n\text{máx}}| = 2 \gamma h$$

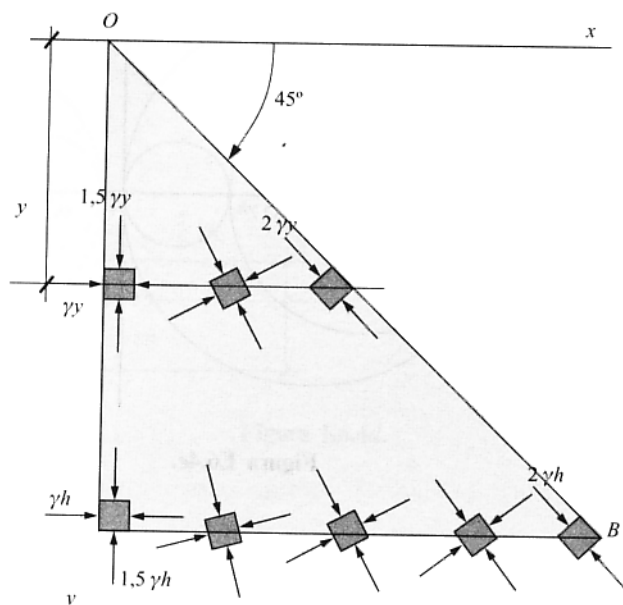


Figura E6.4f.

La tensión tangencial máxima también se alcanza en el punto B

$$\tau_{\text{máx}} = \gamma h$$

3.º Aplicando las leyes de Hooke generalizadas obtenemos las deformaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu(\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] = \frac{1 + \mu}{E} [(1 - \mu)\sigma_{nx} - \mu\sigma_{ny}] = -\frac{5\gamma}{32E} (3y + x) \\ \varepsilon_y = \frac{1 + \mu}{E} [(1 - \mu)\sigma_{ny} - \sigma_{nx}] = -\frac{5\gamma}{32E} (7y - 3x) \\ \varepsilon_z = 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{5}{4E} \tau_{xy} = -\frac{5}{4E} \gamma x \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, la matriz de deformación pedida será:

$$[D] = \frac{\gamma}{4E} \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} (3y + x) & -5x & 0 \\ -5x & -\frac{5}{8} (7y - 3x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.º Calculemos primeramente las componentes p_x , p_y , p_z del vector $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{\delta}$ aplicando las ecuaciones

$$dp_x = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = C_1$$

$$dp_y = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y = C_2$$

$$dp_z = \left(-\frac{5\gamma}{4E} + \frac{15\gamma}{32E} \right) dx + \frac{15\gamma}{32E} dy = -\frac{25\gamma}{32E} dx + \frac{15\gamma}{32E} dy$$

$$\Rightarrow \quad p_z = -\frac{25\gamma}{32E} x + \frac{15\gamma}{32E} y + C_3$$

Como no se produce giro en el origen:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

Aplicando ahora el sistema (3.16.4), se tiene:

$$du = \varepsilon_x dx + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} - p_z \right) dy + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} + p_y \right) dz$$

$$du = -\frac{5\gamma}{32E} (3y + x) dx + \left(-\frac{5\gamma}{4E} x + \frac{25\gamma}{32E} x - \frac{15\gamma}{32E} y \right) dy =$$

$$= -\frac{5\gamma}{32E} x dx - \frac{15\gamma}{32E} (y dx + x dy) - \frac{15\gamma}{32E} y dy$$

$$u = -\frac{5\gamma}{64E} x^2 - \frac{15\gamma}{32E} xy - \frac{15\gamma}{64E} y^2 + C_4$$

$$dv = \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} + p_z \right) dx + \varepsilon_y dy + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} - p_x \right) dz$$

$$dv = \left(-\frac{5\gamma}{4E} x - \frac{25\gamma}{32E} x + \frac{15\gamma}{32E} y \right) dx + \left(-\frac{35\gamma}{32E} y + \frac{15\gamma}{32E} x \right) dy =$$

$$= -\frac{65\gamma}{32E} x dx + \frac{15\gamma}{32E} (y dx + x dy) - \frac{35\gamma}{32E} y dy$$

$$v = -\frac{65\gamma}{64E} x^2 + \frac{15\gamma}{32E} xy - \frac{35\gamma}{64E} y^2 + C_5$$

$$dw = \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} - p_y \right) dx + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} + p_x \right) dy + \epsilon_z dz ; \quad \boxed{w = C_6}$$

Condiciones de contorno: $\vec{\delta}_A = 0$ en $A(0, h)$

$$-\frac{15\gamma}{64E} h^2 + C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = \frac{15\gamma h^2}{64E}$$

$$-\frac{15\gamma h^2}{64E} + C_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_5 = \frac{35\gamma h^2}{64E}$$

$$C_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_6 = 0$$

El vector corrimiento es, por tanto:

$$\vec{\delta} \begin{cases} u = -\frac{5\gamma}{64E} (x^2 + 6xy + 3y^2 - 3h^2) \\ v = -\frac{5\gamma}{64E} (13x^2 - 6xy + 7y^2 - 7h^2) \\ w = 0 \end{cases}$$

5.º El vector corrimiento para los puntos del lado \overline{AB} del contorno de la presa se obtendrá particularizando las anteriores ecuaciones para $y = h$

$$\begin{cases} u = -\frac{5\gamma}{64E} (x^2 + 6hx) \\ v = -\frac{5\gamma}{64E} (13x^2 - 6hx) \\ w = 0 \end{cases}$$

La deformada del lado \overline{AB} respecto de la referencia dada se representa en la Figura E6.4g.

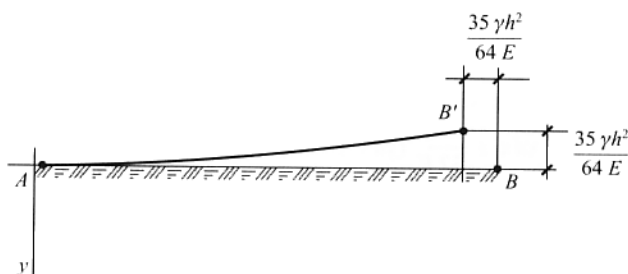


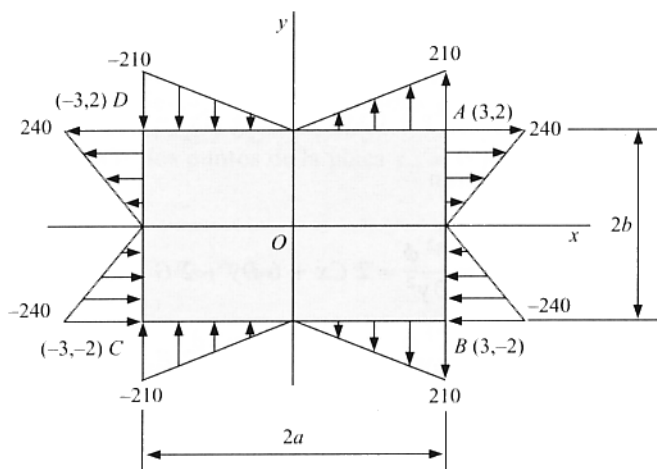
Figura E6.4g.

6.5. Se considera una placa rectangular de pequeño espesor y peso despreciable, afectada de un sistema de fuerzas que crea en su contorno, de dimensiones $2a = 6$ m, $2b = 4$ m, la distribución de tensiones indicada en la Figura E6.5a, es decir, el estado tensional en los puntos del contorno de la placa presenta las siguientes características:

- Sobre los lados de longitud $2a$ la variación de las tensiones normales es lineal.
- Sobre los lados de longitud $2b$ la variación de las tensiones normales es también lineal.
- No existen tensiones tangenciales en todo el contorno.

Se pide, tomando como sistema de referencia el constituido por los ejes de simetría de la placa:

- 1.º Ecuaciones analíticas de la distribución de tensiones dadas sobre el contorno de la placa.
- 2.º La función de Airy.
- 3.º La matriz de tensiones en un punto cualquiera de la placa.
- 4.º Puntos singulares, señalando los neutros si los hubiere.
- 5.º Líneas isostáticas.
- 6.º Líneas isoclinas.
- 7.º Líneas isobaras.
- 8.º Líneas de máxima tensión cortante.



NOTA: Las tensiones indicadas están expresadas en kp/cm^2 .

Figura E6.5a.

1.º Las leyes de las tensiones normales y tangenciales en los puntos del contorno de la placa son:

a) En los lados AB y CD , la tensión nominal será de la forma

$$\sigma_{nx} = a_0 y + a_1$$

siendo a_0, a_1 , dos parámetros que determinaremos con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \text{— para } y = 0 ; \quad \sigma_{nx} &= 0 & \Rightarrow & a_1 = 0 \\ \text{— para } y = 2 ; \quad \sigma_{nx} &= 240 & \Rightarrow & a_0 = 120 \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{nx} &= 120 \text{ y} \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned}}$$

b) En los lados DA y CB , la tensión normal será de la forma

$$\sigma_{ny} = b_0 x + b_1$$

$$\begin{aligned} \text{— para } x = 0 ; \quad \sigma_{ny} &= 0 & \Rightarrow & b_1 = 0 \\ \text{— para } x = 3 ; \quad \sigma_{ny} &= 210 & \Rightarrow & b_0 = 70 \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{\sigma_{ny} = 70 x}$$

En ambas ecuaciones las tensiones normales vienen dadas en kp/cm^2 cuando la coordenada se expresa en metros.

2.º Al ser las leyes de las tensiones en el contorno de forma lineal, ensayaremos como función de Airy un polinomio de tercer grado que es, por otra parte, idénticamente biarmónico

$$\phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2$$

Las tensiones σ_{nx} , σ_{ny} y τ_{xy} serán

$$\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 Cx + 6 Dy + 2 G$$

$$\sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6 Ax + 2 By + 2 E$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2 Bx - 2 Cy - F$$

Los valores de los parámetros $A \dots G$ los determinaremos particularizando estas ecuaciones para el contorno

$$\left. \begin{aligned} \text{Para } x = 3 \quad \sigma_{nx} &= 6 C + 6 Dy + 2 G = 120 \text{ y} \\ \text{Para } x = -3 \quad \sigma_{nx} &= -6 C + 6 Dy + 2 G = 120 \text{ y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D = 20 ; \quad C = G = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Para } y = 2 \quad \sigma_{ny} &= 6 Ax + 4 B + 2 E = 70 x \\ \text{Para } y = -2 \quad \sigma_{ny} &= 6 Ax - 4 B + 2 E = 70 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{70}{6} ; \quad B = E = 0$$

De la expresión de la tensión tangencial

$$\tau_{xy} = -2 Bx - 2 Cy - F = 0 \quad \Rightarrow \quad B = C = F = 0$$

Obtenemos, pues, como función de Airy

$$\phi = \frac{70}{6} x^3 + 20 y^3$$

3.º Una vez obtenida la función de Airy, se deduce inmediatamente la solución de tensiones:

$$\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 120 y ; \quad \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 70 x ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

Por consiguiente, la matriz de tensiones pedida, es

$$[T] = \begin{pmatrix} 120 y & 0 \\ 0 & 70 x \end{pmatrix}$$

Se deduce de la forma de la matriz, válida para todo punto de la placa, que en todos ellos las direcciones principales son las determinadas por los ejes cartesianos de referencia y las tensiones principales son σ_{nx} y σ_{ny} .

4.º Al ser en todos los puntos de la placa $\tau_{xy} = 0$, los puntos singulares vendrán definidos por la ecuación

$$\sigma_{nx} = \sigma_{ny} \quad \Rightarrow \quad 12 y = 7 x$$

que representa una recta (Fig. E6.5b).

En el origen de coordenadas $\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = 0$. Por tanto, el origen es el único punto neutro.

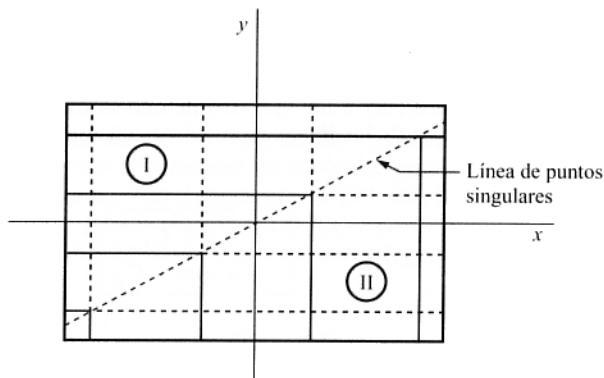


Figura E6.5b.

5.º Como las tensiones principales son σ_{nx} y σ_{ny} , las líneas isostáticas son dos familias de rectas paralelas a los ejes coordenados.

En la Figura E6.5b se han dibujado con trazo continuo las líneas isostáticas correspondientes a la mayor tensión principal (σ_1) y con trazo discontinuo las de la menor (σ_2). Se observa que la línea de puntos singulares divide a la placa en dos partes: I y II.

$$\begin{array}{ll} \text{En I} & \sigma_{nx} > \sigma_{ny} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_{nx} ; \quad \sigma_2 = \sigma_{ny} \\ \text{En II} & \sigma_{nx} < \sigma_{ny} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_{ny} ; \quad \sigma_2 = \sigma_{nx} \end{array}$$

Por tanto, en los puntos de la recta de puntos singulares las líneas isostáticas presentan un cambio brusco de dirección.

6.º De la ecuación (6.7.5)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} = k$$

se desprende, al ser $\tau_{xy} = 0$ en todos los puntos, que las isoclinas existen sólo para $k = 0$ ($\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$). Coinciden con las isostáticas.

7.º Las isobaras, dadas por (6.7.13), son

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = k_1 = 120 \text{ y} \\ \sigma_2 = k_2 = 70 \text{ x} \end{array} \right\} \text{ (en la zona I)} \Rightarrow \begin{array}{l} y = k_1/120 = \text{cte} \\ x = k_2/70 = \text{cte} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = k'_1 = 70 \text{ x} \\ \sigma_2 = k'_2 = 120 \text{ y} \end{array} \right\} \text{ (en la zona II)} \Rightarrow \begin{array}{l} x = k'_1/70 = \text{cte} \\ y = k'_2/120 = \text{cte} \end{array}$$

Son dos familias de rectas paralelas a los ejes. Coinciden también con las isostáticas.

8.º Las ecuaciones diferenciales de las líneas de máxima tensión cortante, según (6.7.9), son:

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1 \Rightarrow \begin{array}{l} y = x + C_1 \\ y = -x + C_2 \end{array}$$

Estas ecuaciones representan dos familias de rectas, bisectrices de las líneas isostáticas (Figura E6.5c).

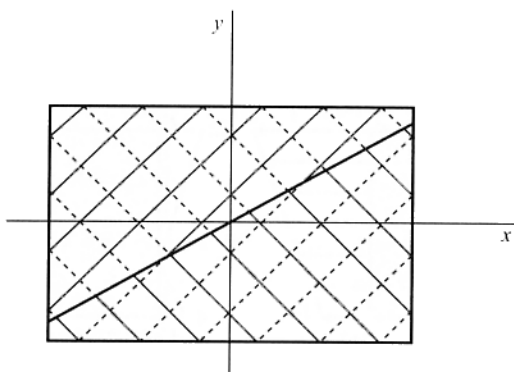


Figura E6.5c.

- 6.6. Se tiene una placa de peso despreciable y dimensiones 80×40 cm sometida a un estado elástico bidimensional. Se conocen las componentes de la matriz de tensiones en los vértices A, B, C, D , de la misma, que figuran en el siguiente cuadro:

	A (4, 2)	B (-4, 2)	C (-4, -2)	D (4, -2)
σ_{nx}	38	6	-18	14
σ_{ny}	0	0	0	0
τ_{xy}	-12	-12	4	4

viendo dadas dichas tensiones en kp/cm^2 cuando las coordenadas se expresan en decímetros.

Sabiendo que tanto las tensiones normales como las tangenciales varían linealmente a lo largo de las aristas de la placa, se pide:

- 1.º Hacer dos croquis con las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en los bordes de la placa.
- 2.º Ver si existe una función de Airy de tipo polinómico.
- 3.º Hallar la solución de tensiones en cualquier punto de la placa.
- 4.º Hallar las isoclinas correspondientes a $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ y 90° .
- 5.º Posición de los puntos singulares, si los hay.
- 6.º Ecuaciones de las isostáticas que sean rectas.

1.º El cuadro dado nos permite dibujar directamente las fuerzas de superficie que actúan sobre el contorno de la plana. En la Figura E6.6a se indican las correspondientes distribuciones de tensiones normales y de tensiones tangenciales.

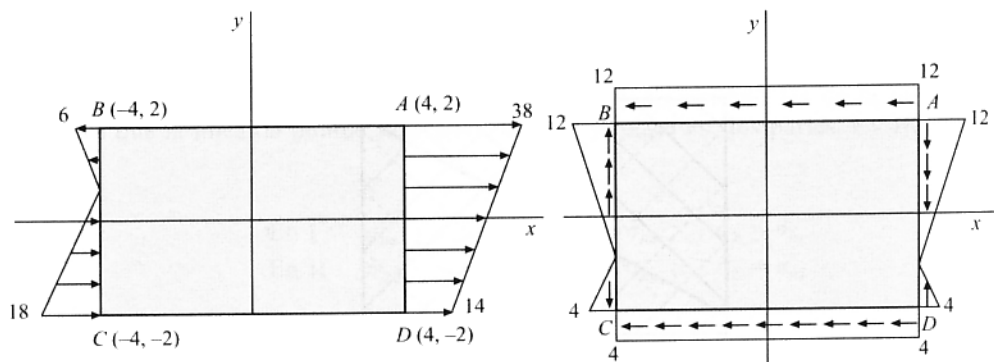


Figura E6.6a.

Las ecuaciones analíticas de ambas distribuciones son:

$$DA (x = 4) \quad : \quad \sigma_{nx} = 6y + 26 \quad ; \quad \tau_{xy} = -4y - 4$$

$$AB (y = 2) \quad : \quad \sigma_{ny} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = -12$$

$$BC (x = -4) \quad : \quad \sigma_{nx} = 6y - 6 \quad ; \quad \tau_{xy} = -4y - 4$$

$$CD (y = -2) \quad : \quad \sigma_{ny} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = 4$$

2.º Como las tensiones sobre el contorno son lineales, cabe esperar una función de Airy polinómica de tercer grado

$$\phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2$$

que por ser de tercer grado está asegurada la condición de biarmonicidad.

La solución de tensiones que de ella se deriva es

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 Cx + 6 Dy + 2 G \\ \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6 Ax + 2 By + 2 E \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2 Bx - 2 Cy - F \end{array} \right.$$

habiendo supuesto nulas las fuerzas de masa por unidad de volumen.

Existirá la función de Airy supuesta si particularizando estas ecuaciones para los puntos del contorno e identificando con las leyes encontradas anteriormente, el sistema de ecuaciones que se obtiene, cuyas incógnitas son los coeficientes, es compatible y determinado.

En los puntos del lado DA ($x = 4$)

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= 8C + 6Dy + 2G \equiv 6y + 26 & \Rightarrow & D = 1 ; & 4C + G &= 13 \\ \tau_{xy} &= -8B - 2Cy - F \equiv -4y - 4 & \Rightarrow & C = 2 ; & 8B + F &= 4\end{aligned}$$

En los puntos del lado AB ($y = 2$)

$$\begin{aligned}\sigma_{ny} &= 6Ax + 4By + 2E \equiv 0 & \Rightarrow & A = 0 ; & 2B + E &= 0 \\ \tau_{xy} &= -2Bx - 4C - F \equiv -12 & \Rightarrow & B = 0 ; & 4C + F &= 12\end{aligned}$$

En los puntos del lado BC ($x = -4$)

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= -8C + 6Dy + 2G \equiv 6y - 6 & \Rightarrow & D = 1 ; & -4C + G &= -3 \\ \tau_{xy} &= 8B - 2Cy - F \equiv -4y - 4 & \Rightarrow & C = 2 ; & 8B - F &= -4\end{aligned}$$

En los puntos del lado CD ($y = -2$)

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= 6Ax - 4B + 2E \equiv 0 & \Rightarrow & A = 0 ; & -2B + E &= 0 \\ \tau_{xy} &= -2Bx + 4C - F \equiv 4 & \Rightarrow & B = 0 ; & 4C - F &= 4\end{aligned}$$

Se obtiene la solución única

$$A = B = 0 ; \quad C = 2 ; \quad D = 1 ; \quad E = 0 ; \quad F = 4 ; \quad G = 5$$

Por tanto, existe función de Airy de tipo polinómico y ésta es:

$$\phi = 2xy^2 + y^3 + 4xy + 5y^2$$

3.º La expresión de las componentes de la matriz de tensiones en cualquier punto de la placa será

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = 4x + 6y + 10 \\ \sigma_{ny} = 0 \\ \tau_{xy} = -4y - 4 \end{cases}$$

4.º La ecuación de las isoclinas es

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} = \frac{-8y - 8}{4x + 6y + 10} = a$$

es decir, las isoclinas constituyen una familia de rectas, como corresponde a un estado elástico bidimensional cuya función de Airy sea un polinomio de tercer grado

$$y = -\frac{2a}{3a+4}x - \frac{5a+4}{3a+4}$$

Esta ecuación se puede poner en la forma

$$y + 1 = -\frac{2a}{3a + 4} (x + 1) = m(x + 1)$$

que representa un haz de rectas de vértice el punto $P(-1, -1)$ y coeficiente angular

$$m = -\frac{2a}{3a + 4}, \quad \text{siendo } a = \operatorname{tg} 2\theta$$

Para los valores dados de θ se obtiene el parámetro m , cuyos valores figuran en el siguiente cuadro

θ°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
a	0,364	0,839	1,732	5,671	-5,671	-1,732	-0,839	-0,364	0
m	-0,143	-0,257	-0,376	-0,540	-0,871	-2,896	1,131	0,250	0

lo que nos permite representar fácilmente las isoclinas correspondientes a los valores de θ indicados (Fig. E6.6b).

5.º De la figura anterior se desprende que el punto $P(-1, -1)$ es un punto singular. Veamos cómo lo calculamos analíticamente.

Los puntos singulares verifican

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_{ny} & \Rightarrow 4x + 6y + 10 = 0 \\ \tau_{xy} = 0 & \Rightarrow -4y - 4 = 0 \end{cases}$$

sistema que admite la única solución $x = -1, y = -1$.

Por tanto, sólo hay un punto singular: $P(-1, -1)$, y todas las isoclinas pasarán por él.

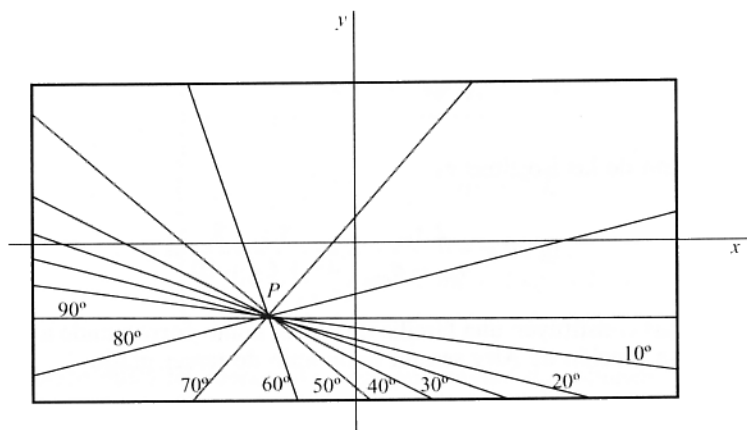


Figura E6.6b.

6.º Las isostáticas rectas son aquellas isoclinas que forman un ángulo con el eje $0x$ igual a su parámetro, es decir, aquellas cuya pendiente coincide con $\operatorname{tg} \theta$

$$-\frac{2 \operatorname{tg} 2\theta}{3 \operatorname{tg} 2\theta + 4} = \operatorname{tg} \theta$$

Expresando $\operatorname{tg} 2\theta$ en función de θ y sustituyendo, tenemos

$$\operatorname{tg} \theta (2 \operatorname{tg}^2 \theta - 3 \operatorname{tg} \theta - 4) = 0$$

equivalente a:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta = 0 \\ 2 \operatorname{tg}^2 \theta - 3 \operatorname{tg} \theta - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4} = \begin{cases} 2,35 \\ -0,85 \end{cases}$$

Por tanto, existen tres isostáticas rectas, cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} y + 1 &= 0 \\ y + 1 &= 2,35(x + 1) \\ y + 1 &= -0,85(x + 1) \end{aligned}$$

- 6.7. El estado tensional de una placa poligonal de vértices $A(2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(-2, 0)$, $D(0, -2)$, cuyas coordenadas vienen expresadas en metros, está definido por la función de Airy

$$\phi = 3x^3 - xy^2 - 3y^3 + x^2$$

Sabiendo que las tensiones que de ella se derivan vienen dadas en kp/cm^2 cuando las coordenadas se expresan en metros, se pide:

- 1.º Comprobar que la función ϕ es función de Airy.
- 2.º Representar en dos croquis las distribuciones correspondientes a las tensiones normales y tangenciales que actúan en los lados de la placa.

1.º La comprobación es trivial por tratarse de un polinomio de tercer grado que verifica idénticamente la condición de biarmonicidad

$$\Delta^2 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

- 2.º La solución de tensiones derivadas de la función de Airy dada:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2x - 18y \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 18x + 2 \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 2y \end{cases}$$

permite formar el siguiente cuadro en el que se recogen las componentes de la matriz de tensiones en los vértices de la placa

	A (2,0)	B (0,4)	C (-2,0)	D (0,-2)
σ_{nx}	-4	-72	4	36
σ_{ny}	38	2	-34	2
τ_{xy}	0	8	0	-4

A partir de estos valores calculemos las componentes intrínsecas de los vectores tensión en los vértices, respecto de los planos coincidentes con las caras que limitan la placa

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}{2} + \frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau = \frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

Punto A

Normal a AB: $\theta = \theta_1 = \arctg \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{3}{5}; \sin 2\theta = \frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sigma_n = 17 - 21 \frac{3}{5} = 4,4 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = -21 \frac{4}{5} = -16,8 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Normal a AD: $\theta = -45^\circ \Rightarrow \sin 2\theta = -1; \cos 2\theta = 0$

$$\begin{cases} \sigma_n = 17 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = 21 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Punto B

Normal a BA: $\theta = \theta_1$

$$\begin{cases} \sigma_n = -35 - 37 \frac{3}{5} + 8 \frac{4}{5} = -50,8 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = -37 \frac{4}{5} - 8 \frac{3}{5} = -34,4 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

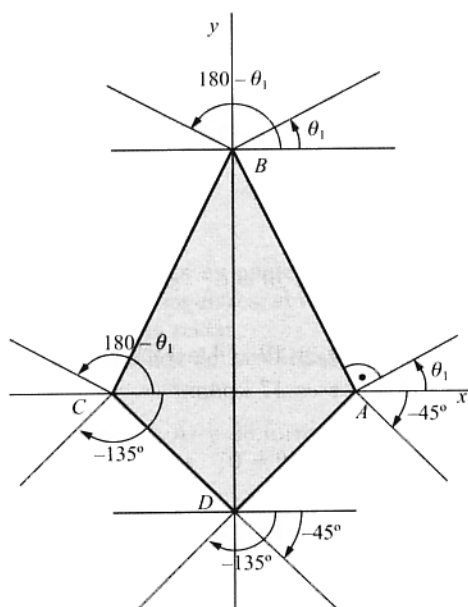


Figura E6.7a.

Normal a BC : $\theta = 180 - \theta_1 \Rightarrow \cos 2\theta = \cos(-2\theta_1) = \frac{3}{5}$; $\sin 2\theta = \sin(-2\theta_1) = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sigma_n = -35 - 37 \frac{3}{5} - 8 \frac{4}{5} = -63,6 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = -37 \frac{4}{5} - 8 \frac{3}{5} = -24,8 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Punto C

Normal a CB : $\theta = 180 - \theta_1 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{3}{5}$; $\sin 2\theta = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sigma_n = -15 + 19 \frac{3}{5} = -3,6 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = -19 \frac{4}{5} = -15,2 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Normal a CD : $\theta = -135^\circ \Rightarrow \cos 2\theta = 0$; $\sin 2\theta = 1$

$$\begin{cases} \sigma_n = -15 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = 19 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Punto D

Normal a DC : $\theta = -135^\circ \Rightarrow \cos 2\theta = 0$; $\sin 2\theta = 1$

$$\begin{cases} \sigma_n = 19 - 4 = 15 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = 17 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Normal a DA : $\theta = -45^\circ \Rightarrow \cos 2\theta = 0$; $\sin 2\theta = -1$

$$\begin{cases} \sigma_n = 19 + 4 = 23 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = -17 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Con los valores obtenidos en los vértices para los planos que limitan la placa, y teniendo en cuenta que, según la solución de tensiones, la variación es lineal, se dibujan las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en la Figura E6.7b.

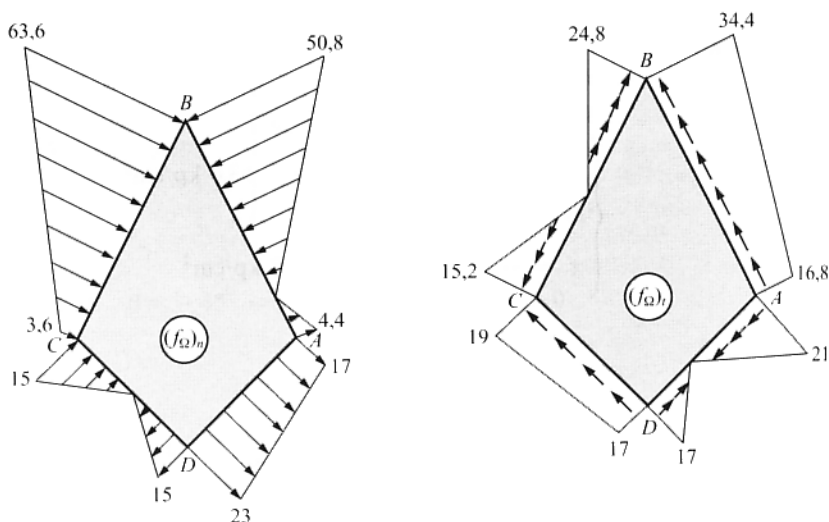


Figura E6.7b.

- 6.8. Una placa rectangular de espesor constante tiene sus vértices en los puntos $A(6, 4)$, $B(6, -2)$, $C(-4, -2)$, $D(-4, 4)$, estando las coordenadas expresadas en centímetros. La placa está sometida a un estado de tensión plana y las expresiones de las tensiones en los lados del contorno son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{Lado } AB: \quad \sigma_{nx} &= y^2 - 36 \quad ; \quad \tau_{xy} = 12y \\
 \text{Lado } BC: \quad \sigma_{ny} &= x^2 - 4 \quad ; \quad \tau_{xy} = -4x \\
 \text{Lado } CD: \quad \sigma_{nx} &= y^2 - 16 \quad ; \quad \tau_{xy} = -8y \\
 \text{Lado } AD: \quad \sigma_{ny} &= x^2 - 16 \quad ; \quad \tau_{xy} = 8x
 \end{aligned}$$

Se pide:

- 1.º Expresiones de las tensiones en un punto cualquiera de la placa.
- 2.º Coordenadas de los puntos singulares, si los hubiere.
- 3.º Ecuaciones de las isostáticas rectas.
- 4.º Ecuaciones de las dos familias de isostáticas y dibujarlas.

1.º Buscaremos una función de Airy de forma polinómica de cuarto grado

$$\begin{aligned}
 \phi &= Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 + Fx^3 + Gx^2y + \\
 &\quad + Hxy^2 + Iy^3 + Jx^2 + Kxy + Ly^2
 \end{aligned}$$

La solución de tensiones que de ella se deriva es:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sigma_{nx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2Cx^2 + 6Dxy + 12Ey^2 + 2Hx + 6Iy + 2L \\
 \sigma_{ny} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 12Ax^2 + 6Bxy + 2Cy^2 + 6Fx + 2Gy + 2J \\
 \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -3Bx^2 - 4Cxy - 3Dy^2 - 2Gx - 2Hy - K
 \end{aligned} \right.$$

Obtenemos los coeficientes particularizando estas ecuaciones para los bordes e identificando con las condiciones de contorno dadas.

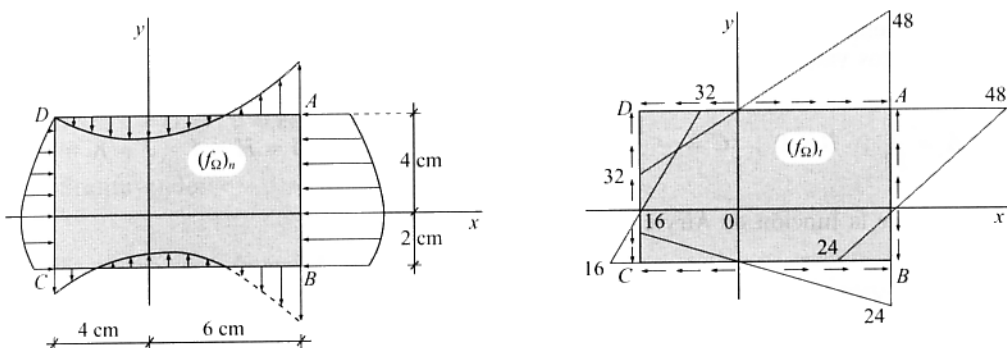


Figura E6.8a.

Lado AB ($x = 6$)

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = 72C + 36Dy + 12Ey^2 + 12H + 6Iy + 2L = y^2 - 36 \\ \tau_{xy} = -108B - 24Cy - 3Dy^2 - 12G - 2Hy - K = 12y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12E = 1 ; & 36D + 6I = 0 ; & 72C + 12H + 2L = -36 \\ D = 0 ; & -24C - 2H = 12 ; & -108B - 12G - K = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Lado BC ($y = -2$)

$$\begin{cases} \sigma_{ny} = 12Ax^2 - 12Bx + 8C + 6Fx - 4G + 2J = x^2 - 4 \\ \tau_{xy} = -3Bx^2 + 8Cx - 120 - 2Gx + 4H - K = -4x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12A = 1 ; & -12B + 6F = 0 ; & 8C - 4G + 2J = -4 \\ B = 0 ; & 8C - 2G = -4 ; & -120 + 4H - K = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Lado CD ($x = -4$)

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = 32C - 24Dy + 12Ey^2 - 8H + 6Iy + 2L = y^2 - 16 \\ \tau_{xy} = -48B + 16Cy - 3Dy^2 + 8G - 2Hy - K = -8y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12E = 1 ; & -24D + 6I = 0 ; & 32C - 8H + 2L = -16 \\ D = 0 ; & 16C - 2H = -8 ; & -48B + 8G - K = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Lado DA ($y = 4$)

$$\begin{cases} \sigma_{ny} = 12Ax^2 + 24Bx + 32C + 6Fx + 8G + 2J = x^2 - 16 \\ \tau_{xy} = -3Bx^2 - 16Cx - 48D - 2Gx - 8H - K = 8x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12A = 1 ; & 24B + 6F = 0 ; & 32C + 8G + 2J = -16 \\ B = 0 ; & -16C - 2G = 8 ; & -48D - 8H - K = 0 \end{cases} \quad (4)$$

El sistema de ecuaciones formado por (1), (2), (3) y (4) es compatible y determinado. Se obtienen los valores de los coeficientes

$$A = \frac{1}{12} ; \quad B = 0 ; \quad C = -\frac{1}{2} ; \quad D = 0 ; \quad E = \frac{1}{12} ; \quad F = G = H = I = J = K = L = 0$$

por lo que la función de Airy existe y resulta ser:

$$\phi = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{12} y^4$$

Se comprueba que verifica la condición de biarmonicidad.

Las expresiones de las tensiones en un punto cualquiera de la placa son:

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= -x^2 + y^2 \\ \sigma_{ny} &= x^2 - y^2 \\ \tau_{xy} &= 2xy\end{aligned}$$

2.º Los puntos singulares son aquellos en los que se verifique

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_{ny} & \Rightarrow -x^2 + y^2 = x^2 - y^2 \\ \tau_{xy} = 0 & \Rightarrow 2xy = 0 \end{cases}$$

Se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $x = 0$; $y = 0$. Por tanto, existe un único punto singular que es el origen de coordenadas.

Punto singular: 0 (0, 0)

3.º Las isostáticas rectas son aquellas isoclinas que forman un ángulo con el eje 0x igual a su parámetro

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}} = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2m}{1 - m^2}$$

Existirán isostáticas rectas si haciendo $y = mx + h$ en la expresión anterior la ecuación que se obtenga tiene solución

$$\frac{2xy}{y^2 - x^2} = \frac{2x(mx + h)}{(mx + h)^2 - x^2} = \frac{2m}{1 - m^2} = F(x, m)$$

Como esta función de x , m , es constante a lo largo de la isoclina, se ha de anular la derivada $F'_x(x, m)$

$$F'_x(x, m) = 0 \Rightarrow h(m^2 x^2 + 2hmx + h^2 + x^2) = 0$$

Para $h = 0 \Rightarrow y = mx$

Sustituyendo:

$$\frac{mx^2}{(m^2 - 1)x^2} = \frac{m}{1 - m^2}$$

Se obtiene $m = 0$; $m = 1$; $m = -1$, junto con $x = 0$.

Por tanto, las isostáticas rectas son los ejes coordenados y las bisectrices de los mismos

$$x = 0 ; \quad y = 0 ; \quad y = x ; \quad y = -x$$

4.º Las ecuaciones diferenciales de las líneas isostáticas, según (6.7.3) son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma_{ny} - \sigma_{nx}}{2 \tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2 \tau_{xy}}\right)^2 + 1}$$

Aplicando a nuestro caso, sustituyendo, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 - y^2}{2xy}\right)^2 + 1} = \frac{x^2 - y^2 \pm (x^2 + y^2)}{2xy}$$

que se descompone en las dos ecuaciones siguientes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{2xy} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 - x^2 - y^2}{2xy} = -\frac{y}{x} \Rightarrow xy = C_2$$

Por tanto, las isostáticas son dos familias de hipérbolas equiláteras, de asíntotas los ejes y las bisectrices de los mismos, respectivamente

<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 10px;">isostáticas</div> <div style="text-align: left;"> $x^2 - y^2 = C_1$ $xy = C_2$ </div> </div>

Para identificar la familia de hipérbolas correspondiente a la tensión σ_1 veremos previamente si existen puntos singulares. Si existen, se habrá de verificar en ellos

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{nx} = \sigma_{ny} \\ \tau_{xy} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 - y^2 = -x^2 + y^2 \\ 2xy = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = 0; \quad y = 0$$

El resultado indica que el origen es el único punto singular.

Tomemos un punto cualquiera distinto del origen, por ejemplo, el $P(0, 1)$. En este punto

$$\sigma_{nx} = 1; \quad \sigma_{ny} = -1; \quad \tau_{xy} = 0$$

es decir, la dirección del eje principal correspondiente a σ_1 es paralela al eje x .

Por consiguiente, la red de isostáticas, distinguiendo con trazo continuo la familia de las σ_1 y con trazo discontinuo la correspondiente a las σ_2 , es la dibujada en la Figura E6.8b.

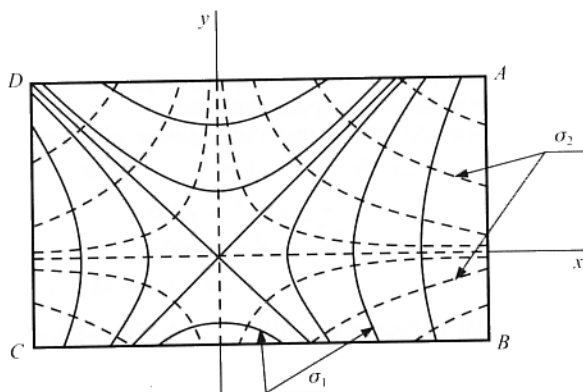


Figura E6.8b.

Las isostáticas rectas encontradas anteriormente se obtienen también de la solución general, para $C_1 = C_2 = 0$. Se trata de cónicas degeneradas

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 0 &\Rightarrow y = \pm x \\ xy = 0 &\Rightarrow x = 0; \quad y = 0 \end{aligned}$$

- 6.9. En los vértices de una placa rectangular de 40×20 cm existen las tensiones que figuran en el siguiente cuadro:

	σ_{nx}	σ_{ny}	τ_{xy}
A (20, 10)	-900	900	1200
B (20, -10)	-900	900	-1200
C (-20, -10)	-900	900	1200
D (-20, 10)	-900	900	-1200

estando expresadas en kp/cm^2 .

Se conocen, además: en los puntos medios de los lados del contorno de longitud 40 cm $\sigma_{ny} = -300 \text{ kp/cm}^2$, y en los correspondientes a los lados de longitud 20 cm $\sigma_{nx} = -1.200 \text{ kp/cm}^2$.

Sabiendo que las leyes de tensiones normales sobre el contorno son parabólicas de 2.º grado y que las correspondientes a las tensiones tangenciales son lineales, se pide:

- 1.º Dibujar las fuerzas de superficie sobre el contorno.
- 2.º Determinar la función de Airy y la solución de tensiones que de ella se deduce.
- 3.º Hallar los puntos singulares.
- 4.º Calcular la red de isostáticas y representarlas gráficamente distinguiendo las dos familias mediante trazos continuos o discontinuos, respectivamente.

1.º A la vista del cuadro dado y de los datos suplementarios que se indican en el enunciado se pueden dibujar las distribuciones de las fuerzas de superficie sobre el contorno. En las Figuras E6.9a y E6.9b se indican las correspondientes a las fuerzas correspondientes a las fuerzas normales y tangenciales, respectivamente.

Las ecuaciones analíticas de ambas distribuciones se obtienen fácilmente

$$\sigma_{nx} = 3y^2 - 1200$$

$$\sigma_{ny} = 3x^2 - 300$$

$$\tau_{xy} = \pm 60 x, \text{ para } y = \pm 10; \tau_{xy} = \pm 120 y, \text{ para } x = \pm 120$$

2.º Ensayaremos como función de Airy un polinomio de cuarto grado, pero sin términos en x o y , de grado impar, a la vista de la simetría que presentan las fuerzas de superficie sobre el contorno

$$\phi = Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4$$

La solución de tensiones que de ella se deduce es:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = 2Bx^2 + 12Cy^2 \\ \sigma_{ny} = 12Ax^2 + 2By^2 \\ \tau_{xy} = -4Bxy \end{cases}$$

Determinemos los valores de los coeficientes imponiendo las condiciones de contorno.

Para $x = \pm 20$:

$$\sigma_{nx} = 800B + 12Cy^2 = 3y^2 - 1200 \Rightarrow B = -\frac{3}{2}; \quad C = \frac{1}{4}$$

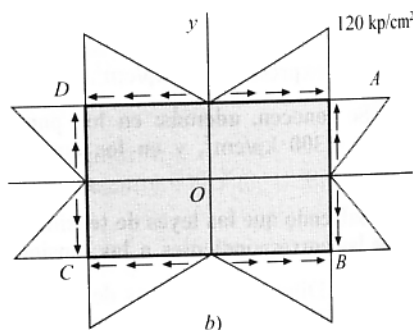
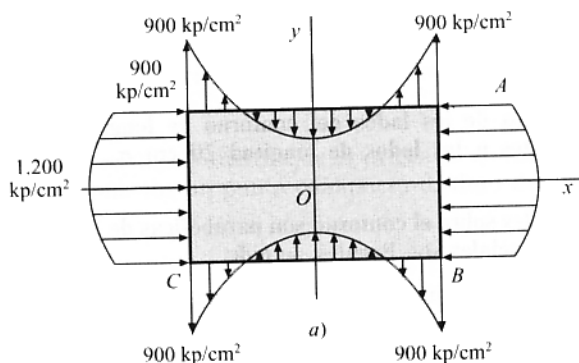


Figura E6.9a y b.

Para $y = \pm 10$:

$$\sigma_{ny} = 12 A x^2 + 200 B = 3 x^2 - 300 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo el valor de $B = -\frac{3}{2}$ en la expresión de τ_{xy}

$$\tau_{xy} = 6 xy$$

vemos que verifica las condiciones dadas:

$$\begin{aligned} \text{Para } y = \pm 10: \quad \tau_{xy} &= \pm 60 x \\ x = \pm 20: \quad \tau_{xy} &= \pm 120 y \end{aligned}$$

Por tanto, la función de Airy es:

$$\phi = \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4$$

y se comprueba que verifica la condición de biarmonicidad.

La solución de tensiones que de ella se deduce es:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = 3 y^2 - 3 x^2 \\ \sigma_{ny} = 3 x^2 - 3 y^2 \\ \tau_{xy} = 6 xy \end{cases}$$

3.º Los puntos singulares vienen dados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_{ny} & \Rightarrow 3 y^2 - 3 x^2 = 3 x^2 - 3 y^2 \\ \tau_{xy} = 0 & \Rightarrow 6 xy = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $y = \pm x = 0$, es decir, el único punto singular es el origen de coordenadas

$$0(0,0)$$

4.º Las ecuaciones diferenciales de las dos familias de isostáticas son:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2 \tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2 \tau_{xy}}\right)^2 + 1}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 x^2 - 6 y^2}{12 xy} \pm \sqrt{\left(\frac{6 y^2 - 6 x^2}{12 xy}\right)^2 + 1} = \frac{x^2 - y^2}{2 xy} \pm \frac{y^2 + x^2}{2 xy} = \begin{cases} x/y \\ -y/x \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y dy - x dx = 0 \Rightarrow \boxed{y^2 - x^2 = c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow x dy + y dx = 0 \Rightarrow \boxed{xy = c_2}$$

siendo c_1 y c_2 constantes de integración.

Las isostáticas resultan ser dos familias de hipérbolas equiláteras.

Se representan en la Figura E6.9c.

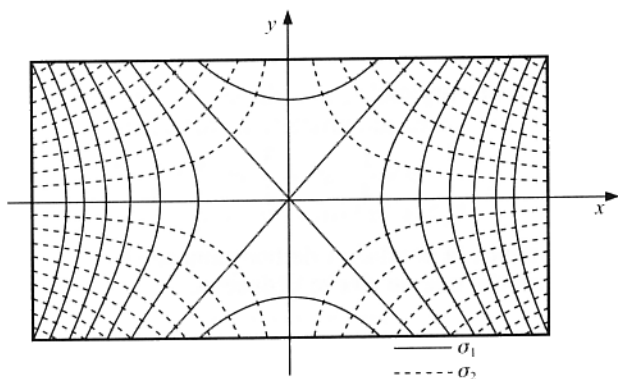


Figura E6.9c.

6.10. Dada la presa de perfil triangular indicado en la Figura E6.10 se pide calcular a embalse totalmente vacío:

- 1.º Función de Airy.
- 2.º Expresión de las tensiones en un punto cualquiera de la presa.
- 3.º Ecuación de las líneas isostáticas.
- 4.º Ecuación de las líneas isobaras.

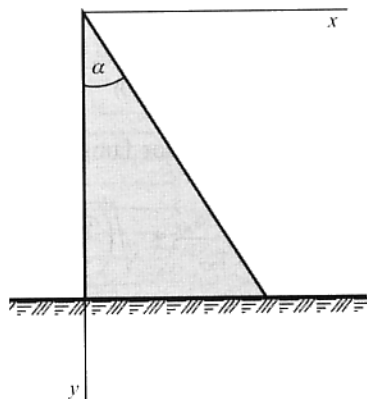


Figura E6.10.

1.º A embalse totalmente vacío encontramos los valores de los coeficientes de la función de Airy particularizando las ecuaciones (6.15.13) para $\text{tg } \alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \alpha$

$$a = \frac{\gamma}{6 \text{tg } \alpha} ; \quad b = -\frac{\gamma}{2} ; \quad c = d = 0$$

Por tanto, la función de Airy será

$$\phi = \frac{\gamma}{6 \text{tg } \alpha} x^3 - \frac{\gamma}{2} x^2 y$$

siendo γ el peso específico del material de la presa.

2.º La solución de tensiones se obtiene de forma inmediata a partir de la función de Airy

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\gamma}{\text{tg } \alpha} x - \gamma y = \frac{\gamma}{\text{tg } \alpha} (x - y \text{tg } \alpha) \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \gamma x \end{cases}$$

3.º Aplicando la ecuación general de las líneas isostáticas

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2 \tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx} - \sigma_{ny}}{2 \tau_{xy}}\right)^2 + 1}$$

tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y \text{tg } \alpha}{2 x \text{tg } \alpha} \pm \frac{1}{2 x \text{tg } \alpha} \sqrt{(x - y \text{tg } \alpha)^2 + 4 x^2 \text{tg}^2 \alpha}$$

De estas dos ecuaciones se deduce lo siguiente:

- a) Para $x = 0$: $\frac{dy}{dx} = \infty$, es decir, el paramento coincidente con el eje y es una isostática.
- b) Para $x = y \text{tg } \alpha$: $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, es decir, en los puntos del paramento aguas abajo las isostáticas forman ángulos de 45° y -45° con el eje x .

4.º Al ser $\sigma_{nx} = 0$ la ecuación de las isobaras se reduce a

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{ny}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{ny}^2 + 4 \tau_{xy}^2} = k$$

de donde:

$$\left(k - \frac{\sigma_{ny}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (\sigma_{ny}^2 + 3 \tau_{xy}^2) \Rightarrow k^2 - k \sigma_{ny} - \tau_{xy}^2 = 0$$

Sustituyendo los valores de σ_{ny} y τ_{xy} en función de las coordenadas, obtenemos finalmente

$$y = \frac{\gamma}{k} x^2 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} x - \frac{k}{\gamma}$$

que representa una familia de parábolas.

6.11. Demostrar que la función de tensiones

$$\phi = C \left[(x^2 + y^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - xy \right]$$

da la solución del problema elástico del medio semiinfinito indicado en la Figura E6.11 y sobre el que actúa una presión constante a un lado del origen.

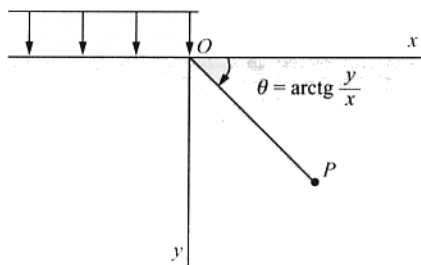


Figura E6.11.

La función ϕ dada resolverá el problema elástico del medio semiinfinito considerado si la tensión σ_{ny} que de ella se deriva verifica las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \sigma_{ny} = \text{constante} & \text{para } \theta = \pi \quad (x < 0) \\ \sigma_{ny} = 0 & \text{para } \theta = 0 \quad (x > 0) \end{cases}$$

Se verifican, en efecto, ya que

$$\sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = C \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right)$$

y para:

$$\begin{aligned} y = 0 ; \quad x > 0 & \Rightarrow \sigma_{ny} = 0 \\ y = 0 ; \quad x < 0 & \Rightarrow \sigma_{ny} = C \cdot 2\pi = -p \end{aligned}$$

Por tanto, queda demostrado que la función dada ϕ es la función de Airy que resuelve el problema elástico del medio semiinfinito considerado.

La presión constante que actúa a un lado del origen está relacionada con la constante C mediante la relación

$$p = -2\pi C$$

7.1. Introducción

La solución del problema elástico en una barra cilíndrica de sección circular sometida a torsión pura fue dada por Coulomb en 1784. Posteriormente, en 1826, Navier intentó generalizar sus resultados a barras de sección recta arbitraria, haciendo la hipótesis de conservación de las secciones planas, es decir, admitiendo que los puntos de la barra contenidos en una sección recta antes de la deformación continuaban perteneciendo a un plano después de producida ésta. Admitir esta hipótesis era equivalente a decir que las secciones rectas no experimentan alabeo alguno. Esta hipótesis es análoga a la de Bernouilli en la flexión, pero así como, aun no siendo rigurosamente cierta, en la flexión conduce a fórmulas de una aproximación más que aceptable, en la teoría de la torsión introduce errores que la hacen inadmisibles, como ya puso de manifiesto Cauchy en 1829.

En este capítulo comenzaremos estudiando la torsión de barras cilíndricas de sección recta circular o anular, mediante la solución del problema elástico correspondiente, para continuar con el de barras cilíndricas de sección arbitraria. Es éste un ejemplo ilustrativo del planteamiento del problema elástico según se formule en desplazamientos, solución expuesta por Saint-Venant, o en tensiones, utilizando la función de tensiones de Prandtl.

Como ejemplos de aplicación de la teoría de la torsión para barras cilíndricas de sección arbitraria, consideraremos los casos de secciones: elíptica, triangular equilátera y rectangular, estudiando la distribución de tensiones en cada uno de ellos.

Más adelante, de entre los numerosos métodos existentes para la resolución de las ecuaciones de la Elasticidad, expondremos en el Capítulo 10 el método de Ritz, basado en consideraciones energéticas, que es un método aproximado para la resolución del problema elástico en torsión.

7.2. Torsión en barras prismáticas de sección circular o anular

Consideremos una barra prismática de longitud l y sección recta circular de radio R , sometida a momentos torsores M_T de sentidos inversos aplicados en sus secciones extremas (Fig. 7.1). Admitiremos la hipótesis de Bernouilli de conservación de las secciones

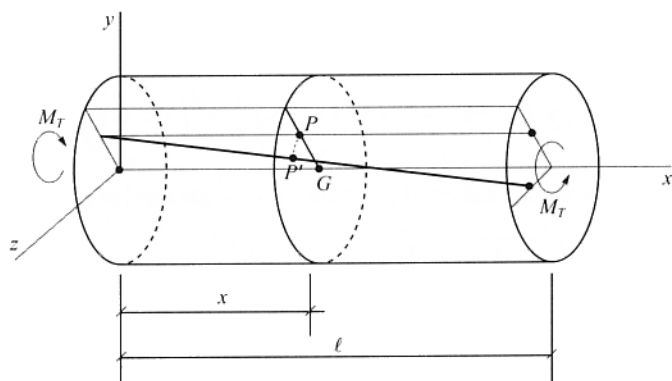


Figura 7.1.

rectas y que el efecto que produce el momento torsor es una rotación de una sección respecto de otra indefinidamente próxima alrededor del eje longitudinal del prisma, es decir, todos los puntos contenidos en un plano perpendicular al eje del prisma siguen perteneciendo al mismo plano después de la deformación.

Llamaremos θ al ángulo de torsión por unidad de longitud que, por razón de isotropía del material, es constante para todas las secciones del prisma.

Con estas hipótesis, que pueden ser comprobadas experimentalmente, es fácil expresar las componentes u, v, w del vector desplazamiento de un punto P (Fig. 7.2):

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= -r\theta x \cos \alpha = -\theta xz \\ w &= r\theta x \sin \alpha = \theta xy \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

ya que $r \cos \alpha = z$; $r \sin \alpha = y$.

La simple observación de estas expresiones nos indica que la dilatación cúbica unitaria es nula

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.2.2)$$

es decir, en la barra no se produce variación de volumen.

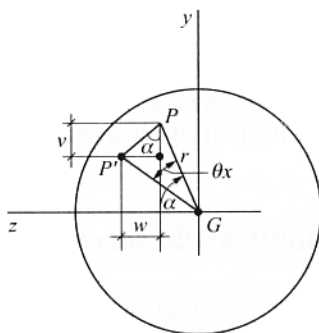


Figura 7.2.

A partir de las componentes del vector desplazamiento se obtienen las componentes de la matriz de tensiones aplicando las ecuaciones de Lamé

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{nx} = \lambda e + 2G\varepsilon_x = 2G \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \sigma_{ny} = \lambda e + 2G\varepsilon_y = 2G \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \sigma_{nz} = \lambda e + 2G\varepsilon_z = 2G \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -G\theta z \\ \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G\theta y \\ \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (7.2.3)$$

La matriz de tensiones será:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -G\theta z & G\theta y \\ -G\theta z & 0 & 0 \\ G\theta y & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.4)$$

Si $\overline{OP} = r$, la tensión tangencial en todo punto P

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = G\theta \sqrt{z^2 + y^2} = G\theta r \quad (7.2.5)$$

resulta ser proporcional a la distancia del punto P al centro de gravedad de la sección.

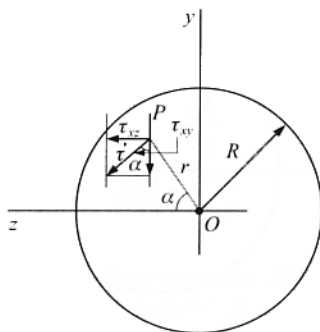


Figura 7.3.

Como de la Figura 7.3 se deduce que

$$\alpha = \widehat{OP}, z = \widehat{\tau}, \tau_{xy}$$

el vector tensión $\vec{\tau}$ es perpendicular a la recta que une el punto P con el centro O de la sección.

La solución de tensiones (7.2.3) verifica idénticamente las ecuaciones de compatibilidad, ya que hemos partido de los desplazamientos. Verifica también, idénticamente, las ecuaciones de equilibrio interno. En cuanto a las condiciones de contorno, fácilmente se comprueba que se verifican en los puntos de la superficie cilíndrica (Fig. 7.4)

$$[\vec{f}_{\Omega}] = [T][\vec{u}] = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \hat{\gamma} \\ \cos \hat{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \sin \hat{\gamma} + \tau_{xz} \cos \hat{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.6)$$

y como
$$\tau_{xy} \sin \hat{\gamma} + \tau_{xz} \cos \hat{\gamma} = G\theta \cos \hat{\gamma} \left(-z \frac{y}{z} + y \right) = 0$$

resulta $\vec{f}_{\Omega} = 0$, en todos los puntos de la superficie lateral.

Para dar por resuelto el problema elástico nos queda por comprobar las condiciones de contorno en las bases, en las que $\alpha = \pm 1$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$ (+1, en la base de la derecha; -1, en la base de la izquierda).

$$\bar{X} = \pm \sigma_{nx} = 0$$

$$\bar{Y} = \pm \tau_{xy} = \mp G\theta z \quad (7.2.7)$$

$$\bar{Z} = \pm \tau_{xz} = \pm G\theta y$$

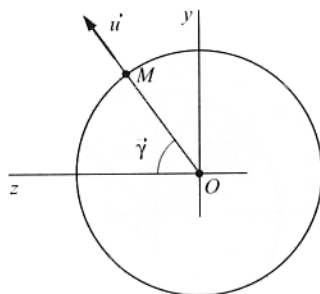


Figura 7.4.

La solución de tensiones dada por la matriz (7.2.4) no queda invalidada si la sollicitación aplicada en las secciones extremas no coincide exactamente con las fuerzas superficiales dadas por estas ecuaciones, ya que, en virtud del principio de Saint-Venant, tal distribución de tensiones en secciones a partir de cierta distancia de las extremas, la produciría cualquier sollicitación que fuera estáticamente equivalente a un par torsor M_T . Cuanto más se ajustara la distribución de fuerzas superficiales a las dadas por las ecuaciones (7.2.7), menor será la distancia a las secciones extremas a partir de la cual será válida la solución de tensiones dada por la matriz (7.2.4).

Nos interesa encontrar la relación existente entre el ángulo de torsión por unidad de longitud y el momento torsor M_T . Para ello expresaremos que el momento resultante de las fuerzas engendradas por las tensiones tangenciales en cualquier sección es M_T

$$\vec{M} = \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & -G\theta z & G\theta y \end{vmatrix} dy dz = \quad (7.2.8)$$

$$= \vec{i} G\theta \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) dy dz - \vec{j} G\theta x \iint_{\Omega} y dy dz - \vec{k} G\theta x \iint_{\Omega} z dy dz = M_T \vec{i}$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{cases} M_T = G\theta \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) dy dz = G\theta I_0 \\ \iint_{\Omega} y dy dz = 0 ; \quad \iint_{\Omega} z dy dz = 0 \end{cases} \quad (7.2.9)$$

siendo I_0 el momento de inercia polar de la sección respecto del centro de la sección

$$I_0 = \int_0^R 2\pi r r^2 dr = \frac{\pi R^4}{2} \quad (7.2.10)$$

Las dos últimas ecuaciones se verifican, ya que son los momentos estáticos de la sección respecto a ejes que pasan por el centro de gravedad.

De la primera, se obtiene la relación que buscábamos entre θ y M_T

$$\theta = \frac{M_T}{GI_0} \quad (7.2.11)$$

y de aquí:

$$GI_0 = \frac{M_T}{\theta}$$

Al producto GI_0 , que depende exclusivamente del material de la barra y del radio de la misma, se le denomina *rigidez a la torsión*. Resulta ser igual al cociente entre el par torsor aplicado y el ángulo de torsión por unidad de longitud que dicho par produce en la barra.

Sustituyendo la expresión de θ dada por (7.2.11) en (7.2.5), obtenemos la ley de distribución de la tensión tangencial en la sección

$$\tau = \frac{M_T}{I_0} r \quad (7.2.12)$$

Si suponemos marcada en la superficie de la barra prismática una reticulación como la indicada en la Figura 7.5a, fácilmente deducimos mediante el círculo de Mohr (Fig. 7.5b) las tensiones y direcciones principales.

Resulta, por consiguiente, que las isostáticas son hélices que forman con el eje longitudinal de la barra un ángulo de 45° (Fig. 7.5c). Este resultado no solamente es válido para la superficie exterior de la barra, sino también para cualquier cilindro coaxial que sea interior.

Para materiales que presentan poca resistencia a la tracción, como es el caso del hormigón, si la pieza va a ser sometida a torsión habrá que colocar armaduras helicoidales a 45° con el eje de la pieza, en dirección de las tracciones, próximas a la superficie exterior, que es donde se van a producir las máximas tensiones de tracción, y uniformemente espaciadas.

Las componentes de la matriz de deformación se pueden obtener a partir de los desplazamientos (7.2.1) aplicando las ecuaciones de definición.

Si llamamos φ al ángulo de torsión, es decir, el ángulo girado por la sección de abscisa x respecto de la extrema correspondiente a $x = 0$, es fácil deducir cuál es la deformada de cualquier fibra longitudinal del prisma cilíndrico de sección circular.

En efecto, integrando la expresión del ángulo de torsión

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{k}, \quad \text{siendo } k \text{ una constante}$$

se tiene

$$x = k\varphi + C \quad (7.2.13)$$

en donde C es una constante a determinar imponiendo las condiciones de contorno.

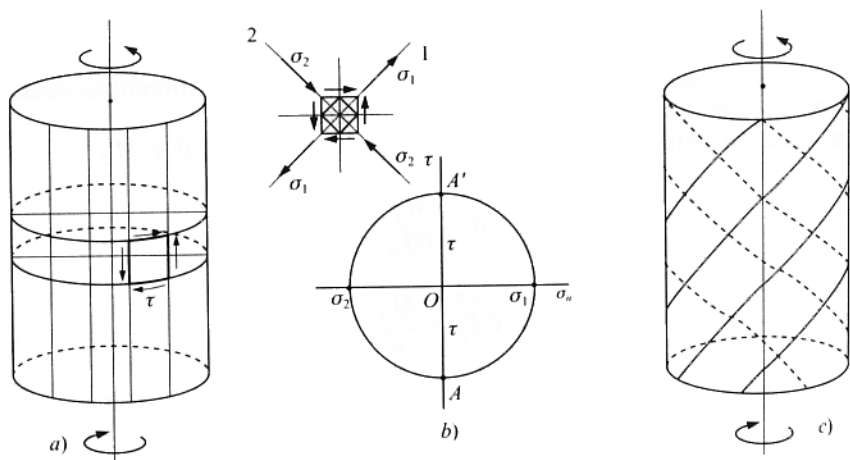


Figura 7.5.

Pero esta expresión es la característica de una hélice cilíndrica, cuyas ecuaciones paramétricas son (Fig. 7.6):

$$\begin{cases} x = r \cdot \operatorname{tg} \alpha = k\varphi \\ y = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

Por tanto, la deformada de toda fibra longitudinal de la barra es una hélice.

En la construcción de máquinas se suelen utilizar barras de sección anular (Fig. 7.7) más que las de sección circular. Para barras prismáticas de sección anular sometidas a torsión sigue siendo válida la solución de tensiones dada por (7.2.4), y de análoga forma a como lo hemos hecho anteriormente en el caso de sección circular vemos que se verifican las ecuaciones de equilibrio interno y las ecuaciones de equilibrio en el contorno.

En el caso de sección anular varía la rigidez de la pieza y, por tanto, la relación (7.2.11) entre el momento torsor M_T y el ángulo de torsión por unidad de longitud. La expresión de I_0 es ahora

$$I_0 = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r r^2 dr = \pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{2} \quad (7.2.14)$$

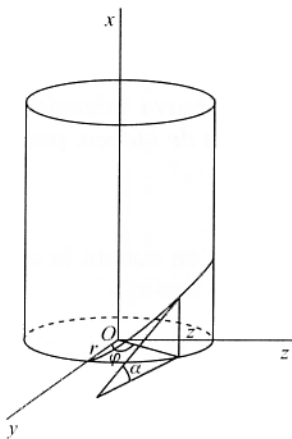


Figura 7.6.

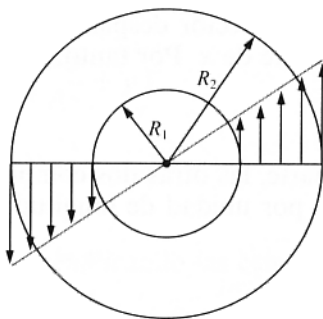


Figura 7.7.

7.3. Torsión de barras prismáticas de sección arbitraria. Método semi-inverso de Saint-Venant

Consideremos una barra prismática de sección recta arbitraria, solicitada a torsión por dos pares M_T de sentidos opuestos, aplicados en sus secciones extremas, de ejes coincidentes con el eje de la barra. Supondremos que son nulas las fuerzas másicas.

Mediante una sencilla comprobación experimental se demuestra que en el caso de sección recta no circular, las secciones planas antes de aplicar los pares torsores no se mantienen planas después de la deformación, sino que se alabean. Se comprueba, en

efecto, que si se somete a torsión una pieza prismática de goma de sección cuadrada, en la que previamente se ha dibujado una retícula coincidiendo con lados de secciones rectas y paralelas al eje de la pieza (Fig. 7.8a), las secciones rectas inicialmente planas sufren un cierto alabeo (Fig. 7.8b).

Se atribuye a *Saint-Venant* un método para el cálculo de las tensiones que existen en la barra, así como las deformaciones que se producen en ella. Este método consiste en admitir que las componentes de la matriz de tensiones son nulas excepto τ_{xy} y τ_{xz} , en un sistema de referencia cuyo eje x tiene la dirección del eje longitudinal de la pieza. Las tensiones que se obtienen aplicando las ecuaciones de la Elasticidad representarán la solución del problema elástico si satisfacen todas las condiciones necesarias, ya que hemos visto anteriormente que en un problema de elasticidad la solución es única.

Se denomina *método semi-inverso* porque consiste en suponer que ciertas tensiones son nulas, verificando *a posteriori* que se verifica esta hipótesis a la vez que se determinan las tensiones no nulas.

En el estudio de la torsión de una barra prismática de sección arbitraria, Saint-Venant, para aplicar el método semi-inverso, como más adelante podremos comprobar, estableció las siguientes hipótesis:

- 1.^a La deformación de cualquier sección recta es un giro alrededor de un punto O acompañado de una alabeo que es igual para todas las secciones.
- 2.^a El ángulo θ girado por unidad de longitud es constante.

En virtud de la primera hipótesis de ser el alabeo el mismo para todas las secciones, la componente u del vector desplazamiento de un punto de la barra prismática (Fig. 7.9a) será independiente de x . Por tanto, si llamamos ψ a la *función de alabeo*, podemos poner:

$$u = \theta \psi(y, z) \quad (7.3.1)$$

Por otra parte, las otras dos componentes v y w , teniendo en cuenta la constancia del ángulo girado por unidad de longitud (Fig. 7.9b), si $\overline{OP} = \rho$, serán:

$$\begin{aligned} v &= -\rho \theta x \cos \alpha = -\theta x z \\ w &= \rho \theta x \sin \alpha = \theta x y \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

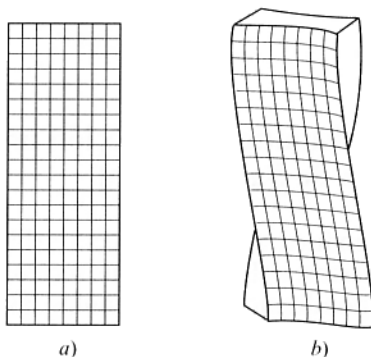


Figura 7.8.

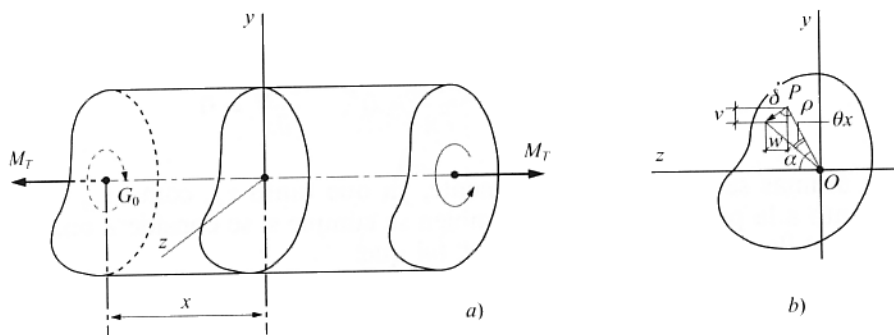


Figura 7.9.

Diremos, por ahora, que el punto O no tiene por qué coincidir con el centro de gravedad G de la sección, a no ser que G sea centro de simetría de la misma.

Conocidas las componentes del vector corrimiento, la obtención de las componentes de la matriz de deformación es inmediata

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (7.3.3)$$

A partir de éstas se obtiene la matriz de tensiones aplicando las ecuaciones de Lamé:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) & G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \\ G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) & 0 & 0 \\ G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3.4)$$

Comprobamos que los términos de la matriz de tensiones son nulos, excepto los correspondientes a τ_{xy} y τ_{xz} .

Podemos comprobar que la solución obtenida verifica las condiciones que requiere la solución del problema elástico.

En efecto, las ecuaciones de equilibrio interno se reducen a las siguientes:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (7.3.5)$$

Las dos últimas se verifican idénticamente, ya que tanto τ_{xy} como τ_{xz} no dependen de x . En cuanto a la primera ecuación, también se cumple si se considera una función de tensiones $\Phi(y, z)$ llamada *función de Prandtl*, tal que:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} ; \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (7.3.6)$$

Podemos ver la condición que tiene que cumplir esta función de tensiones eliminando la función de alabeo entre las ecuaciones que resultan de sustituir en (7.3.6) las expresiones de τ_{xy} y τ_{xz} dadas por la matriz de tensiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \end{aligned}$$

Derivando la primera ecuación respecto a z , la segunda respecto a y , y sumando miembro a miembro, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta \Phi = -2G\theta \quad (7.3.7)$$

es decir, la función de tensiones es tal que su laplaciana es constante en todos los puntos de la barra e igual a $-2G\theta$.

Que la matriz de deformación, cuya componentes vienen dadas por las ecuaciones (7.3.3), verifican las condiciones de compatibilidad es evidente, ya que hemos partido de la solución de corrimientos.

En cuanto a las condiciones de contorno, por ser éste libre (Fig. 7.10), se habrá de verificar:

$$[T][\vec{u}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen } \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\tau_{xy} \text{ sen } \alpha + \tau_{xz} \cos \alpha = 0$$

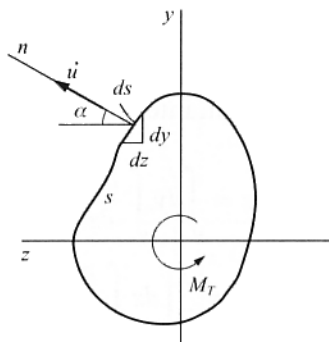


Figura 7.10.

Como

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{dz}{ds} ; \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds}$$

teniendo en cuenta (7.3.6), resulta:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = -\frac{d\Phi}{ds} = 0 \quad (7.3.8)$$

Este resultado nos dice que la función de tensiones Φ es independiente de la abscisa curvilínea s en el contorno de la sección, por lo que ha de tener un valor constante en todos los puntos del mismo.

Si consideramos barras de sección recta llena, es decir, piezas cuya sección recta tiene un contorno simplemente conexo, esta constante puede ser elegida arbitrariamente, ya que para la resolución del problema elástico sólo nos interesan sus derivadas. Por consiguiente, por simplicidad, consideraremos en lo que sigue que

$$\Phi = 0$$

en los puntos del contorno de la sección.

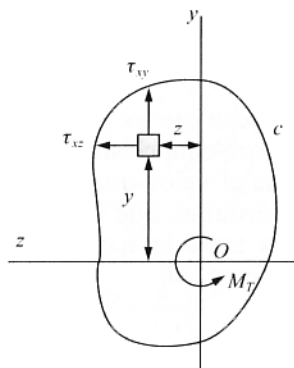


Figura 7.11.

Finalmente, comprobemos que en cualquier sección recta la resultante de las fuerzas engendradas por las tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{xz} es nula, así como que el momento resultante respecto de O de dichas fuerzas es igual al momento torsor M_T .

En efecto, las componentes de la resultante son:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \tau_{xy} dy dz &= \int dy \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0 \\ \iint_{\Omega} \tau_{xz} dy dz &= - \int dz \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0\end{aligned}$$

que se anulan ambas por ser Φ nula en el contorno, aunque también lo harían si Φ tuviera un valor constante en el mismo.

Por otra parte, el momento ha de verificarse:

$$M_T = \iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y} y d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial z} z d\Omega \quad (7.3.9)$$

Integremos por partes estas dos últimas integrales teniendo en cuenta que, si se trata de secciones que sean recintos simplemente conexos, podemos considerar que la función de tensiones Φ se anula en los puntos del contorno, como hemos visto anteriormente.

$$\begin{aligned}- \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial y} y d\Omega &= - \int_a^b dz \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dy = - \int_a^b dz \left\{ [y\Phi]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \Phi dy \right\} = \iint_{\Omega} \Phi dy dz \\ - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial z} z d\Omega &= - \int_c^d dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} z dz = - \int_c^d dy \left\{ [z\Phi]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \Phi dz \right\} = \iint_{\Omega} \Phi dy dz\end{aligned}$$

Sustituyendo en (7.3.9), se obtiene:

$$M_T = 2 \iint_{\Omega} \Phi(y, z) dy dz \quad (7.3.10)$$

Los resultados anteriores nos indican que es necesario que la laplaciana de la función de tensiones Φ , que nos resuelve el problema elástico de la torsión, sea constante en todos los puntos de la sección recta, y que el valor que toma dicha función en los puntos del contorno es también igual a una constante, que puede ser elegida arbitrariamente.

Veamos otra relación de interés entre la tensión tangencial $\vec{\tau}$ y la función de tensiones Φ . La tensión $\vec{\tau}$ se puede expresar así:

$$\vec{\tau} = \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{k} = -\vec{i} \times \text{grad } \Phi \quad (7.3.11)$$

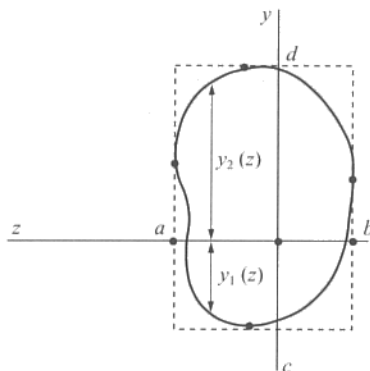


Figura 7.12.

Ahora bien, la función Φ representa una superficie o, mejor dicho, un casquete de superficie que se apoya en el contorno de la sección, ya que Φ se anula en el citado contorno.

Si cortamos el casquete por planos paralelos al plano de la sección se obtiene una serie de curvas que no son otra cosa que las líneas de nivel del campo escalar $\Phi = \Phi(y, z)$ (Fig. 7.13).

Como el gradiente de la función Φ es, en cualquier punto P de la sección, perpendicular a la línea de nivel que pasa por él, y la tensión tangencial viene dada por (7.3.11), $\vec{\tau}$ resulta ser tangente a dicha curva de nivel.

En cuanto al módulo de $\vec{\tau}$, de la misma ecuación (7.3.11) se desprende:

$$\tau = |\vec{i} \times \text{grad } \Phi| = |\text{grad } \Phi| = \frac{d\Phi}{dn} \quad (7.3.12)$$

es decir, el módulo de la tensión tangencial en un punto cualquiera de la sección es igual a la derivada de la función Φ en la dirección normal a la línea de nivel que pasa por él.

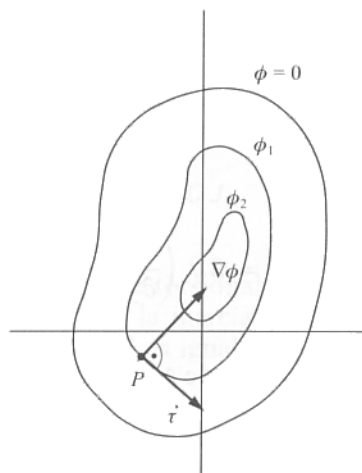


Figura 7.13.

De lo anterior se deduce que dibujadas en el plano de la sección las curvas de nivel de la función de tensiones, la tensión tangencial creada en un determinado punto P por un momento torsor es tangente a la curva de nivel que pasa por él y su módulo será tanto mayor cuanto más próximas se encuentren entre sí las líneas de nivel.

Conocida la función de tensiones Φ , o función de Prandtl, queda determinado el punto O alrededor del cual gira una sección respecto de la indefinidamente próxima. En efecto, la función $\Phi = \Phi(y, z)$ toma su valor máximo en un punto para el cual

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (7.3.13)$$

Según (7.3.6), se anulan en dicho punto las tensiones τ_{xy} y τ_{xz} , por lo que este punto de la sección de la barra no está sometido a tensión alguna. Es el punto que hemos designado por O y que se denomina *centro de torsión*. Al lugar geométrico de los centros de torsión para todas las secciones de la barra prismática se le llama *eje de torsión* por ser la única fibra que no está sometida a sollicitación alguna y, además, no sufre deformación.

El cálculo del *centro de torsión* se hará imponiendo la condición de ser el único punto de la sección cuya tensión tangencial $\vec{\tau}$ es nula, es decir:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad (7.3.14)$$

Una observación importante hay que hacer respecto del origen del sistema de referencia, y es que si para el estudio de las tensiones es indiferente, no lo es para el estudio de las deformaciones. En este caso el origen tiene que ser el centro de torsión O de la base de la izquierda, que supondremos fija, pues sólo así se verificarán las fórmulas (7.3.1) y (7.3.2).

De lo anterior podemos deducir que si la sección de la barra prismática carece de simetrías, el centro de torsión no coincide con el centro de gravedad. Si la sección tiene un eje de simetría, sobre él se encuentran ambos puntos, sin que se pueda afirmar que sean coincidentes. Solamente si la sección admite dos ejes de simetría, el centro de torsión coincide con el centro de gravedad.

Podemos hacer algunas consideraciones sobre la función de alabeo ψ . De la primera ecuación (7.3.5) de equilibrio interno, derivando las expresiones de las tensiones dadas por (7.3.4) se tiene:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G\theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (7.3.15)$$

Este resultado nos dice que la función de alabeo es una función armónica en todos los puntos de la sección.

Para el cálculo de ψ , podemos obtener las derivadas parciales respecto de las dos variables de las que depende, a partir de las expresiones de las tensiones en función de los desplazamientos.

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xy}}{G} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} - \theta z \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G\theta} + z \\ \frac{\tau_{xz}}{G} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \theta y \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}}{G\theta} - y\end{aligned}\quad (7.3.16)$$

De las expresiones obtenidas se deduce que la determinación de la función de alabeo ψ se reduce, conocidas las tensiones, a la integración de la diferencial total

$$d\psi = \left(\frac{\tau_{xy}}{G\theta} + z \right) dy + \left(\frac{\tau_{xz}}{G\theta} - y \right) dz \quad (7.3.17)$$

Nos puede interesar buscar la relación existente entre el momento torsor M_T y el ángulo de torsión por unidad de longitud θ .

Para ello, sustituyamos las expresiones de las tensiones que figuran en la matriz (7.3.4) en la expresión del momento torsor (7.3.9)

$$\begin{aligned}M_T &= \iint_{\Omega} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) d\Omega = \iint_{\Omega} \left[G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} y + y^2 \right) - G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} z - z^2 \right) \right] d\Omega = \\ &= G\theta \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\Omega\end{aligned}\quad (7.3.18)$$

A la integral

$$J = \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\Omega \quad (7.3.19)$$

se le denomina *inercia torsional*.

Al cociente entre el par torsor aplicado y el ángulo de torsión por unidad de longitud, que es la relación que íbamos buscando,

$$\frac{M_T}{\theta} = GJ \quad (7.3.20)$$

se le denomina *rigidez torsional*. La rigidez torsional es, pues, el producto del módulo de elasticidad transversal G del material por la inercia torsional J .

Observamos que la inercia torsional J es igual al momento de inercia polar I_0 de la sección respecto del centro de torsión

$$J = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega = I_0 \quad (7.3.21)$$

solamente cuando se anula el alabeo, esto es, cuando la sección recta es circular, como hemos visto en el epígrafe anterior. En tal caso, el centro de torsión coincide con el centro de gravedad de la sección.

Veamos, como aplicación de lo expuesto, cómo podríamos resolver el cálculo de la distribución de tensiones en el caso de sección recta cuya ecuación analítica de la curva de su contorno fuera de la forma:

$$f(y, z) = 0 \quad (7.3.22)$$

y tal que su laplaciana fuera constante

$$\Delta f(y, z) = \text{constante} \quad (7.3.23)$$

En tal caso, comprobamos que cualquier función del tipo

$$\Phi = C f(y, z) \quad (7.3.24)$$

siendo C una constante, puede ser tomada como función de tensiones que nos resuelve el problema elástico de la torsión.

En efecto, al ser nula la función Φ en los puntos del contorno:

$$\Phi = C f(y, z) = 0 \text{ en el contorno} \quad (7.3.25)$$

la constante C se determina teniendo en cuenta la ecuación que relaciona Φ y el momento torsor M_T

$$M_T = 2 \iint_{\Omega} \Phi(y, z) dy dz = 2 C \iint_{\Omega} f(y, z) dy dz$$

de donde:

$$C = \frac{M_T}{2 \iint_{\Omega} f(y, z) dy dz} \quad (7.3.26)$$

Obtenida esta constante, el valor θ del ángulo girado por unidad de longitud, en virtud de (7.3.7), será:

$$\Delta \Phi = C \Delta f(y, z) = -2 G \theta$$

de donde:

$$\theta = - \frac{C \Delta f(y, z)}{2 G} \quad (7.3.27)$$

7.4. Torsión de barras prismáticas de sección elíptica

Sea una barra prismática de longitud l , de sección recta elíptica, cuyas longitudes de los semiejes son a y b (supondremos $a > b$), sometida a torsión mediante pares torsores M_T aplicados en sus secciones extremas.

Es éste un caso típico de los que se puede resolver el problema elástico de torsión aplicando lo expresado al final del epígrafe anterior, ya que la ecuación analítica del contorno

$$f(y, z) = \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) = 0 \quad (7.4.1)$$

se anula en los puntos del mismo y, además, su laplaciana es constante.

$$\Delta f(y, z) = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = \text{constante} \quad (7.4.2)$$

La función de tensiones que resuelve el problema elástico en este caso es, según sabemos, de la forma

$$\Phi(y, z) = C \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (7.4.3)$$

siendo C una constante que determinaremos aplicando la ecuación (7.3.26)

$$C = \frac{M_T}{2 \iint_{\Omega} f(y, z) dy dz} = \frac{M_T}{2 \iint_{\Omega} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) dy dz} = \frac{M_T}{2 \left(\frac{I_z}{a^2} + \frac{I_y}{b^2} - \Omega \right)}$$

siendo I_y e I_z los momentos de inercia de la sección respecto de los ejes y y z , respectivamente, y Ω el área de la misma.

Como

$$I_y = \frac{\pi ab^3}{4} ; \quad I_z = \frac{\pi ba^3}{4} ; \quad \Omega = \pi ab$$

la constante C será:

$$C = \frac{M_T}{2 \frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} - 4 \right)} = - \frac{M_T}{\pi ab} \quad (7.4.4)$$

Sustituyendo esta expresión en (7.4.3) obtenemos la función de Prandtl

$$\Phi = - \frac{M_T}{\pi ab} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (7.4.5)$$

Conocida la función de tensiones, la obtención de la solución de tensiones es inmediata

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{2 M_T}{\pi a b^3} z \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2 M_T}{\pi a^3 b} y\end{aligned}\quad (7.4.6)$$

El centro de torsión es, en este caso, el centro de la elipse que hemos tomado como origen del sistema cartesiano de referencia.

Las tensiones tangenciales resultan ser funciones lineales de las coordenadas. Se representan en la Figura 7.14 para los puntos coincidentes con los ejes (Fig. 7.14a) y para los puntos de dos rectas que pasan por el origen (Fig. 7.14b).

Observamos que el cociente τ_{xz}/τ_{xy} es constante en todos los puntos de una recta OA cualquiera y que en todos ellos la tensión tangencial resultante, τ , tiene dirección constante, paralela a la tangente en el punto A del contorno.

La tensión tangencial máxima se produce en los extremos del eje menor: τ_{xy} en los puntos $(0, \pm b)$

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_T}{\pi a b^2} \quad (7.4.7)$$

En estos puntos se anula la componente τ_{xz} , por lo que la τ_{\max} tiene la dirección del eje y . Se observa que la tensión máxima se produce en los puntos del contorno más cercanos al centro de torsión.

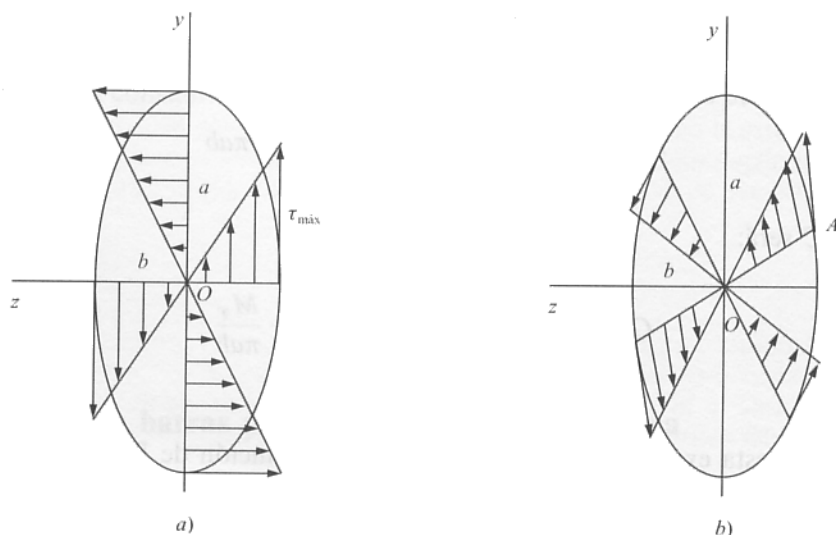


Figura 7.14.

El valor del ángulo de torsión por unidad de longitud se obtiene de la expresión de la laplaciana de la función de tensiones

$$\Delta \Phi = C \Delta f(y, z) = -\frac{M_T}{\pi ab} \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2 G \theta$$

es decir:

$$\theta = \frac{M_T (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} \quad (7.4.8)$$

De esta expresión se obtiene de forma inmediata las correspondientes a la rigidez torsional

$$G J = \frac{M_T}{\theta} = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (7.4.9)$$

y a la inercia torsional

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (7.4.10)$$

A la misma expresión de J llegamos, evidentemente, aplicando (7.3.19). En efecto

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} z^2 \right) dy dz = \frac{2 a^2}{a^2 + b^2} I_y + \frac{2 b^2}{a^2 + b^2} I_z = \\ &= \frac{2 a^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

habiendo sustituido las derivadas de la función de alabeo por las correspondientes expresiones que obtendremos a continuación.

Para el cálculo de la función de alabeo, despejamos sus derivadas de las expresiones de las tensiones que figuran en la matriz (7.3.4)

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) = -\frac{2 M_T}{\pi a b^3} z \\ \tau_{xz} &= G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) = \frac{2 M_T}{\pi a^3 b} y \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

De aquí obtenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{2 M_T}{G \theta \pi a b^3} z + z = -\frac{2 a^2}{a^2 + b^2} z + z = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} z \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2 M_T}{G \theta \pi a^3 b} y - y = \frac{2 b^2}{a^2 + b^2} y - y = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} y \end{cases} \quad (7.4.12)$$

sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a:

$$d\psi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} z \, dy + \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} y \, dz \quad (7.4.13)$$

cuya integración es inmediata

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} yz + \psi_0 \quad (7.4.14)$$

siendo ψ_0 una constante de integración que se determina aplicando las condiciones de contorno.

Como el origen es fijo, dado que es el centro de torsión, el valor de ψ_0 es cero.

Por consiguiente, la función de alabeo es

$$\psi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} yz \quad (7.4.15)$$

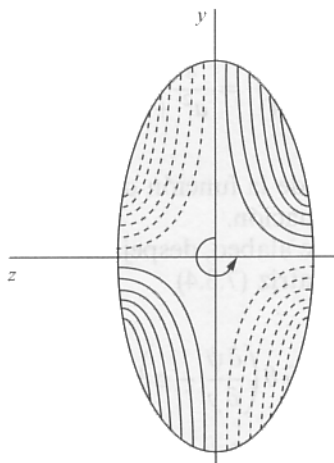


Figura 7.15.

Esta expresión nos indica que cualquier sección recta de la barra prismática, inicialmente plana, se convierte por efecto de la torsión en un paraboloide hiperbólico. Las líneas de nivel de esta función escalar son hipérbolas equiláteras.

Se representan en la Figura 7.15, en la que se han indicado con trazo continuo los puntos en los que la componente u del vector desplazamiento es positiva, es decir, el alabeo de la sección se produce en sentido hacia el lector. Con los puntos discontinuos indicamos que el alabeo se produce en sentido negativo.

Una vez conocidos el ángulo de torsión por unidad de longitud y la función de alabeo, queda determinada la solución de desplazamientos.

$$\begin{cases} u = \theta \psi(y, z) = -\frac{M_T(a^2 - b^2)}{\pi G a^3 b^3} yz \\ v = -\theta xz = -\frac{M_T(a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} xz \\ w = \theta xy = \frac{M_T(a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} xy \end{cases} \quad (7.4.16)$$

7.5. Torsión de barras prismáticas de sección triangular equilátera

Consideremos una barra prismática cuya sección recta es un triángulo equilátero, sometida a torsión mediante la aplicación de sendos pares M_T aplicados en sus secciones extremas.

Por el centro de gravedad de la sección pasan los tres ejes de simetría, de lo que se deduce que en este caso el centro de torsión O coincide con el centro de gravedad.

Podríamos pensar que la función de Prandtl es igual al producto de una constante por las ecuaciones de las rectas en las que están contenidos los lados del contorno (Fig. 7.16)

$$\Phi = C(z - \sqrt{3}y + 2a)(z + \sqrt{3}y + 2a)(z - a) \quad (7.5.1)$$

Esta función es la función de tensiones que nos resuelve el problema elástico, ya que cumple todas las condiciones para serlo. En efecto, es evidente que se anula en los puntos del contorno y, además, su laplaciana es constante.

$$\Delta \Phi = C \Delta(z^3 + 3az^2 - 3y^2z - 4a^3 + 3ay^2) = 12Ca \quad (7.5.2)$$

$$\text{Como} \quad \Delta \Phi = 12Ca = -2G\theta \quad (7.5.3)$$

La función de Prandtl que estamos considerando es:

$$\Phi = -\frac{G\theta}{6a} (z - \sqrt{3}y + 2a)(z + \sqrt{3}y + 2a)(z - a) \quad (7.5.4)$$

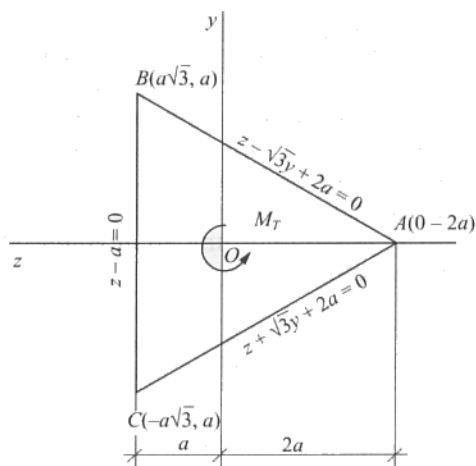


Figura 7.16.

La solución de tensiones que de ella se deriva es

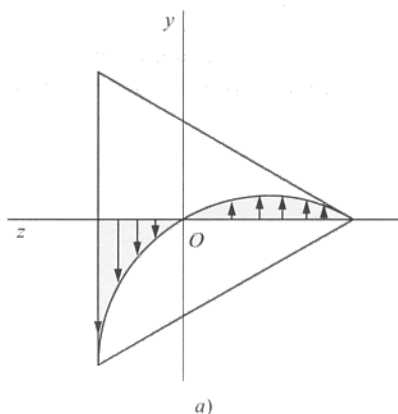
$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{G\theta}{2a} (z^2 + 2az - y^2) \quad (7.5.5)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{G\theta}{a} (z - a)y \quad (7.5.6)$$

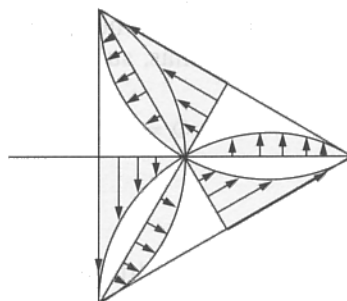
Se observa que en los puntos del eje z ($y = 0$) se anula la componente τ_{xz} , reduciéndose la tensión tangencial a

$$\tau_{xy} = -\frac{G\theta}{2a} (z + 2a)z \quad (7.5.7)$$

por lo que la distribución de τ_{xy} en esos puntos sigue una ley parabólica, de la forma indicada en la Figura 7.17a.



a)



b)

Figura 7.17.

Por razón de simetría, serán iguales a esta distribución de tensiones las correspondientes a los otros dos ejes de simetría de la sección (Fig. 7.17b).

El valor de $\tau_{\text{máx}}$ se presenta en los puntos medios de los lados de la sección

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3a}{2} G \theta \quad (7.5.8)$$

La solución de tensiones estará determinada cuando se conozca θ . El ángulo de torsión por unidad de longitud se puede obtener aplicando la relación (7.3.10) entre el momento torsor y la función de Prandtl.

$$M_T = 2 \iint_{\Omega} -\frac{G \theta}{6a} (z - \sqrt{3} y + 2a)(z + \sqrt{3} y + 2a)(z - a) dy dz = \frac{9\sqrt{3}}{5} G \theta a^4 \quad (7.5.9)$$

Obtenemos así la expresión de θ

$$\theta = \frac{5 M_T}{9\sqrt{3} G a^4} \quad (7.5.10)$$

siendo a un tercio de la altura del triángulo equilátero.

Esta misma expresión nos permite determinar la rigidez torsional

$$G J = \frac{M_T}{\theta} = \frac{9\sqrt{3} G a^4}{5} \quad (7.5.11)$$

así como la inercia torsional

$$J = \frac{9\sqrt{3} a^4}{5} \quad (7.5.12)$$

Es fácil ver que en el caso que estamos estudiando de sección recta triangular equilátera, el momento de inercia polar de la sección respecto del centro de torsión es

$$I_0 = 3\sqrt{3} a^4$$

En efecto

$$I_z = 2 \int_0^{a\sqrt{3}} (3a - \sqrt{3} y) y^2 dy = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^4$$

Y como $I_z = I_y$, ya que la elipse de inercia es una circunferencia por tener tres ejes, los de simetría, que respecto de ellos los momentos de inercia correspondientes tienen el mismo valor:

$$I_0 = I_y + I_z = 2 I_z = 3 \sqrt{3} a^4$$

la inercia torsional se puede poner en la forma:

$$J = \frac{3}{5} I_0 \quad (7.5.13)$$

Para el cálculo de la función de alabeo despejamos sus derivadas de las expresiones de las tensiones que figuran en la matriz (7.3.4), teniendo en cuenta que son iguales a las (7.5.5) y (7.5.6), respectivamente

$$\tau_{xy} = G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) = - \frac{G \theta}{2a} (z^2 + 2az - y^2)$$

$$\tau_{xz} = G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) = - \frac{G \theta}{a} (z - a) y$$

De aquí obtenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{1}{2a} (z^2 - y^2) \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \frac{1}{a} zy \end{cases} \quad (7.5.14)$$

sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a

$$d\psi = - \frac{1}{2a} (z^2 - y^2) dy - \frac{1}{a} zy dz \quad (7.5.15)$$

cuya integración nos conduce a

$$\psi(y, z) = - \frac{3z^2y - y^3}{6a} + C \quad (7.5.16)$$

siendo C una constante de integración que resulta ser nula, ya que el alabeo es nulo en el origen por ser éste el centro de torsión.

Finalmente, aplicando (7.3.1) y (7.3.2) obtenemos las componentes del vector desplazamiento.

$$\begin{aligned} u &= \theta \psi(y, z) = -\frac{5 M_T}{9 \sqrt{3} G a^4} \frac{3 z^2 y - y^3}{6 a} = -\frac{5 M_T}{18 G a I_0} (3 z^2 y - y^3) \\ v &= -\theta x z = -\frac{5 M_T}{9 \sqrt{3} G a^4} x z = -\frac{5 M_T}{3 G I_0} x z \\ w &= \theta x y = \frac{5 M_T}{9 \sqrt{3} G a^4} x y = \frac{5 M_T}{3 G I_0} x y \end{aligned} \quad (7.5.17)$$

La expresión de la primera componente se puede poner en la forma

$$u = -\frac{5 M_T}{18 G a I_0} y(\sqrt{3} z + y)(\sqrt{3} z - y) \quad (7.5.18)$$

De esta expresión se deduce que el alabeo es nulo en los puntos de los ejes de simetría. Dichos ejes determinan seis zonas en las que, alternativamente, la superficie alabeada de la sección es cóncava ($-$) y convexa ($+$). En la Figura 7.18 se representan las líneas de nivel de la función de alabeo, indicando con trazo continuo las que corresponden a la componente u positiva (superficie convexa) y con trazo discontinuo en las zonas en las que u es negativa (superficie cóncava).

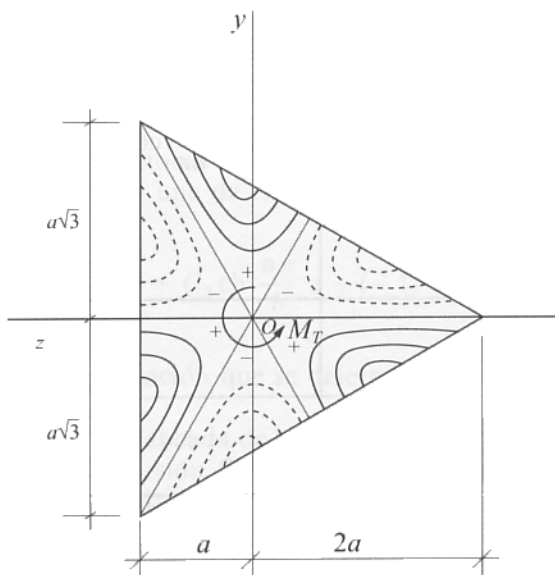


Figura 7.18.

7.6. Torsión de barras prismáticas de sección rectangular

Consideremos ahora una barra prismática de sección recta rectangular de lados a y b sometida a torsión pura mediante la aplicación de sendos pares torsores M_T aplicados en sus secciones extremas. Tomaremos como ejes del sistema de referencia los coincidentes con el eje de simetría de la sección (Fig. 7.19). En este caso el origen de coordenadas es el centro de torsión, ya que es centro de simetría.

Para resolver el problema elástico, como ya hemos visto anteriormente, se trata de buscar una función $\Phi(y, z)$ que satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta \quad (7.6.1)$$

que pondremos en la forma

$$\Phi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} Z_n \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (7.6.2)$$

en donde $Z_n = f(z)$ es función exclusivamente de z .

Esta serie satisface la condición de simetría respecto al eje z , ya que la función Φ debe tomar el mismo valor en dos puntos simétricos respecto a los ejes y y z . En efecto, si no verificaran esta condición las tensiones τ no estarían dispuestas simétricamente con relación a los ejes de simetría, que hemos tomado como ejes coordenados.

Se observa que Φ se anula en los puntos del contorno $y = \pm \frac{b}{2}$.

Por otra parte, para $-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$ se tiene la identidad.

$$1 = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (7.6.3)$$

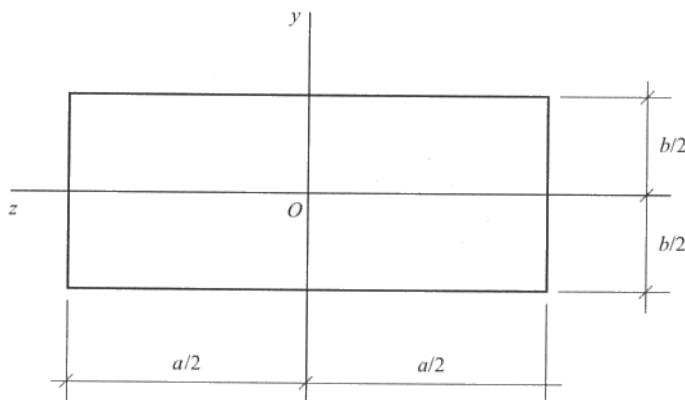


Figura 7.19.

Como

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} Z_n \cos \frac{n \pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} \cos \frac{n \pi y}{b}$$

en virtud de (7.6.3) podemos poner

$$2 G \theta = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8 G \theta}{n \pi} \cos \frac{n \pi y}{b}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.6.1) que expresa la condición que tiene que verificar la laplaciana de la función de tensiones, se tiene

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} Z_n + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8 G \theta}{n \pi} \right) \cos \frac{n \pi y}{b} \right\} = 0 \quad (7.6.4)$$

Para que se verifique esta ecuación habrá que elegir las funciones Z_n , de tal forma que se anulen los coeficientes de $\cos \frac{n \pi y}{b}$, para todo valor de n , es decir, se tendrá que verificar

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} Z_n - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8 G \theta}{n \pi} = 0 \quad (7.6.5)$$

que representa un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas totales, no homogéneas, cuya solución general de cada una de ellas es:

$$Z_n = C_1 \operatorname{sh} \frac{n \pi}{b} z + C_2 \operatorname{ch} \frac{n \pi}{b} z + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8 G \theta b^2}{n^3 \pi^3} \quad (7.6.6)$$

siendo C_1 y C_2 constantes de integración que se determinarán aplicando las condiciones de contorno.

Así, la simetría de la superficie alabeada de la sección recta, después de deformada por la torsión, respecto del centro de torsión O exige que la constante C_1 sea nula.

Anteriormente hemos visto que la función Φ se anulaba en los puntos del contorno que pertenecen a las rectas $y = \pm b/2$. Pues bien, tomaremos la constante C_2 de tal forma que la función Z_n se anule en los puntos pertenecientes a las dos rectas $z = \pm a/2$, que contienen a los otros dos lados del contorno. De esta forma se asegura la nulidad de la función de tensiones Φ en todos los puntos del contorno.

$$C_2 = -(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8 G \theta b^2}{n^3 \pi^3 \operatorname{ch} \frac{n \pi a}{b}} \quad (7.6.7)$$

Por consiguiente, la expresión de Z_n será:

$$Z_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{8 G \theta b^2}{n^3 \pi^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n \pi z}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b}} \right) \quad (7.6.8)$$

y la correspondiente a la función Φ

$$\Phi = \frac{8 G \theta b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n \pi z}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b}} \right) \cos \frac{n \pi y}{b} \quad (7.6.9)$$

serie que es uniformemente convergente en el dominio

$$-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}; \quad -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$$

Una vez obtenida la función de tensiones la determinación de las tensiones es inmediata.

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{8 G \theta b}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{n \pi z}{b} \cos \frac{n \pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b}} \quad (7.6.10)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{8 G \theta b}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n \pi z}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b}} \right) \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}$$

Saint-Venant demostró que la tensión tangencial máxima se produce en los puntos medios de los lados del contorno de mayor longitud.

Si hacemos la hipótesis $b < a$, la tensión tangencial máxima se presenta en los puntos: $y = \pm \frac{b}{z}$; $z = 0$, en los cuales se anula la componente τ_{xy} . Su expresión será:

$$\tau_{\max} = \frac{8 G \theta b}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b}} \right) \quad (7.6.11)$$

y teniendo en cuenta que $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ queda:

$$\tau_{\max} = G \theta b \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b}} \right) \quad (7.6.12)$$

Si hacemos

$$k_1 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b}} \quad (7.6.13)$$

se tendrá

$$\tau_{\max} = k_1 G b \theta \quad (7.6.14)$$

expresión más cómoda, ya que podemos tabular el valor de la constante k_1 en función del valor de la relación a/b , relación que será siempre un valor mayor que la unidad, ya que esta expresión es válida para $a \geq b$.

La función de tensiones Φ la hemos obtenido en función de θ , ángulo de torsión por unidad de longitud. Para que quede determinada será necesario hallar la expresión de θ en función de los datos. Para ello aplicaremos la ecuación (7.3.10) que relaciona la función Φ con el momento torsor M_T .

$$\begin{aligned} M_T &= 2 \iint_{\Omega} \Phi dy dz = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Phi dz = \\ &= \frac{16 G \theta b^2}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \frac{n \pi y}{b} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n \pi z}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b}} \right) dz \right\} = \\ &= \frac{32 G \theta b^3 a}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{64 G \theta b^4}{\pi^5} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n \pi a}{2b} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

queda como expresión del momento M_T la siguiente

$$M_T = \frac{G \theta b^3 a}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n \pi a}{2b} \right) \quad (7.6.15)$$

Si hacemos

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n \pi a}{2b} \right) \quad (7.6.16)$$

se puede expresar el ángulo de torsión por unidad de longitud en la forma

$$\theta = \frac{k_2 M_T}{G b^3 a} \quad (7.6.17)$$

Sustituyendo esta expresión en la (7.6.14) obtenemos:

$$\tau_{\max} = k_1 G b \frac{k_2 M_T}{G b^3 a} = \frac{k_1 k_2 M_T}{b^2 a} = \frac{k_3 M_T}{b^2 a} \quad (7.6.18)$$

siendo $k_3 = k_1 \cdot k_2$.

Los valores de las constantes k_1 , k_2 y k_3 figuran en la Tabla 7.1, según los valores que tome la relación a/b .

Esta tabla nos permite obtener las expresiones correspondientes a la tensión máxima y ángulo de torsión por unidad de longitud en algunos casos particulares.

Si se trata de una sección cuadrada (Fig. 7.20):

$$\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$

$$\tau_{\max} = \frac{k_3 M_T}{b^2 a} = \frac{4,80 M_T}{a^3} \quad (7.6.19)$$

$$\theta = \frac{\tau_{\max}}{k_1 G b} = \frac{4,80 M_T}{0,675 G a^4} = \frac{7,11 M_T}{G a^4} \quad (7.6.20)$$

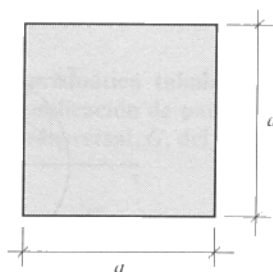
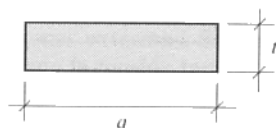
Tabla 7.1. Valores de las constantes k_1 , k_2 , k_3

$\frac{a}{b}$	k_1	k_2	k_3
1	0,6753	7,1126	4,8031
1,2	0,7587	6,0192	4,5667
1,4	0,8221	5,3499	4,3981
1,6	0,8694	4,9080	4,2670
1,8	0,9043	4,5989	4,1497
2	0,9302	4,3727	4,0674
2,5	0,9680	4,0100	3,8816
3	0,9854	3,7976	3,7421
4	0,9969	3,5610	3,5499
5	0,9993	3,4326	3,4301
10	1,0000	3,2017	3,2017
∞	1,0000	3,0000	3,0000

Para el caso de un perfil delgado (Fig. 7.21) en el que la relación toma un valor muy grande, generalmente $\frac{a}{t} \geq 10$: $k_1 = 1$; $k_2 = k_3 = 3$

$$\tau_{\max} = \frac{k_3 M_T}{b^2 a} = \frac{3 M_T}{a t^2} \quad (7.6.21)$$

$$\theta = \frac{\tau_{\max}}{k_1 G b} = \frac{3 M_T}{G a t^3} \quad (7.6.22)$$

**Figura 7.20.****Figura 7.21.**

EJERCICIOS

7.1. En una barra prismática de sección circular de radio R , sometida a torsión mediante la aplicación en sus secciones extremas de pares torsores M_T , se pide:

1.º Calcular las máximas tensiones normales y tangenciales en la barra.

2.º Determinar las direcciones principales en la fibra longitudinal periférica $\begin{cases} y = 0 \\ z = R \end{cases}$

1.º Respecto de la referencia indicada en la Figura E7.1a, la matriz de tensiones en los puntos de la barra se puede poner en la forma:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{M_T}{I_0} z & \frac{M_T}{I_0} y \\ -\frac{M_T}{I_0} z & 0 & 0 \\ \frac{M_T}{I_0} y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales son las raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -\sigma & -\frac{M_T}{I_0} z & \frac{M_T}{I_0} y \\ -\frac{M_T}{I_0} z & -\sigma & 0 \\ \frac{M_T}{I_0} y & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$-\sigma^3 + \frac{M_T}{I_0} (y^2 + z^2) \sigma = 0$$

$$\sigma = 0 ; \quad \sigma = \pm \frac{M_T}{I_0} \sqrt{y^2 + z^2} = \pm \frac{M_T}{I_0} r$$

siendo r la distancia del punto P que se considere al eje de la barra, e I_0 el momento de inercia polar de la sección respecto de su centro.

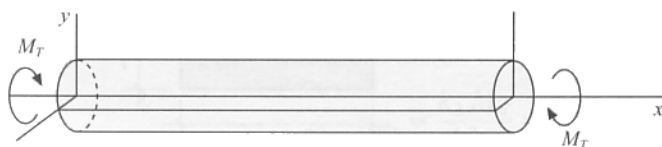


Figura E7.1a.

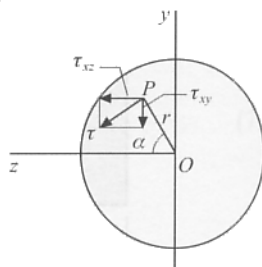


Figura E7.1b.

Las tensiones principales, ordenadas de mayor a menor, serán:

$$\sigma_1 = \frac{2 M_T}{\pi R^4} r ; \quad \sigma_2 = 0 ; \quad \sigma_3 = -\frac{2 M_T}{\pi R^4} r$$

Los valores máximos pedidos de presentación en los puntos correspondientes a $r = R$, es decir, en los puntos del contorno.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{2 M_T}{\pi R^3} ; \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{2 M_T}{\pi R^3}$$

2.º Considerando un entorno de los puntos de la fibra $\{y = 0; z = R\}$ se obtienen las direcciones principales en esos puntos, de forma inmediata, mediante el círculo de Mohr (Fig. E7.1c).

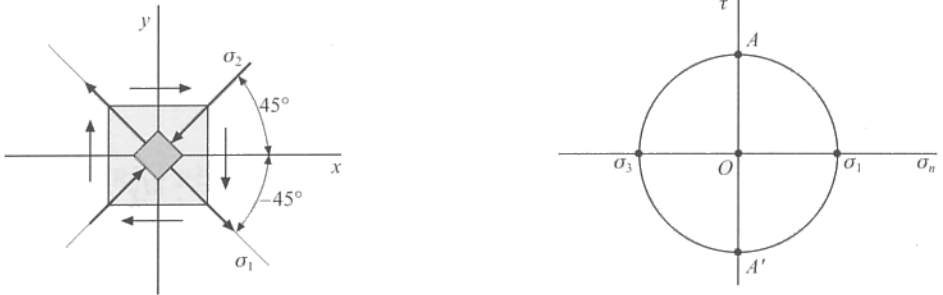


Figura E7.1c.

Respecto de la referencia adoptada, las direcciones principales vienen definidas por los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} - \vec{j}) ; \quad \vec{u}_2 = \vec{k} ; \quad \vec{u}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j})$$

que corresponden a planos que forman 45° con el eje x y son perpendiculares al plano tangente (que a su vez su normal corresponde a la segunda dirección principal).

- 7.2. Una barra prismática tubular de radios: interior R_1 y exterior R_2 , está sometida a torsión mediante la aplicación de pares torsores M_T en sus secciones extremas. Se conoce el módulo de elasticidad transversal, G , del material de la barra, así como la tensión tangencial admisible τ_{adm} . Se pide:

- 1.º Matriz de tensiones.
- 2.º Calcular el ángulo de torsión por unidad de longitud.
- 3.º Demostrar que para un área dada de la sección recta, el momento torsor máximo aumenta con el radio interior R_1 .

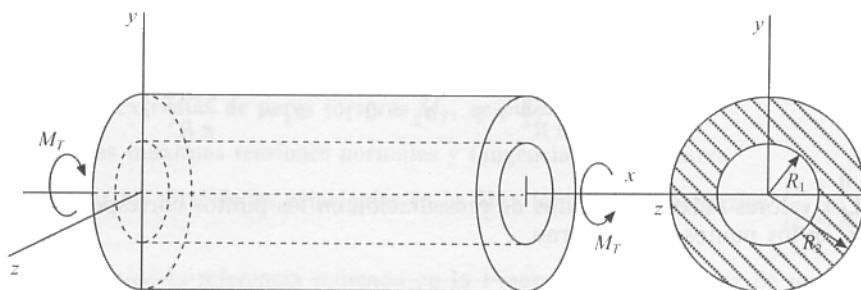


Figura E7.2.

1.º Sabemos que en una barra prismática de sección circular o tubular, sometida a torsión, las componentes de la matriz de tensiones, respecto del sistema de referencia indicado en la Figura E7.2, son:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_{ny} = \sigma_{nz} = 0 \\ \tau_{xy} = -G\theta z ; \quad \tau_{xz} = G\theta y ; \quad \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Como

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = G\theta r = \frac{M_T}{I_0} r \Rightarrow G\theta = \frac{\tau}{r} = \frac{M_T}{I_0}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{M_T}{I_0} z ; \quad \tau_{xz} = \frac{M_T}{I_0} y ; \quad \tau_{yz} = 0$$

La matriz de tensiones pedida, teniendo en cuenta que el momento de inercia polar I_0 de la sección respecto al centro tiene por expresión $I_0 = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}$, será:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2M_T}{\pi(R_2^4 - R_1^4)} z & \frac{2M_T}{\pi(R_2^4 - R_1^4)} y \\ -\frac{2M_T}{\pi(R_2^4 - R_1^4)} z & 0 & 0 \\ \frac{2M_T}{\pi(R_2^4 - R_1^4)} y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.º La expresión del ángulo de torsión por unidad de longitud, θ , en función de los datos, según (7.2.11), será:

$$\theta = \frac{M_T}{G I_0} = \frac{2 M_T}{G \pi (R_2^4 - R_1^4)}$$

3.º Sabemos que la tensión tangencial alcanza su valor máximo en los puntos periféricos, es decir, para $r = R_2$. Deberá ser menor que la tensión tangencial admisible

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_T}{I_0} R_2 \leq \tau_{\text{adm}}$$

lo que nos indica que el momento torsor M_T habrá de verificar la inecuación

$$M_T \leq \frac{\tau_{\text{adm}} \cdot I_0}{R_2}$$

por lo que la expresión del momento torsor que se puede aplicar al prisma tubular será

$$M_{T \text{ máx}} = \frac{\tau_{\text{adm}} \cdot I_0}{R_2}$$

Como

$$I_0 = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} = \frac{\pi(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)}{2} = \frac{\Omega(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

siendo $\Omega = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ el área de la sección recta.

Despejando R_2 de esta expresión

$$R_2 = \sqrt{\frac{\Omega}{\pi} + R_1^2} = \sqrt{\frac{\Omega + \pi R_1^2}{\pi}}$$

y sustituyendo en la expresión del momento torsor máximo tenemos

$$M_{T \text{ máx}} = \frac{\tau_{\text{adm}} \Omega \left(\frac{\Omega}{\pi} + 2R_1^2 \right)}{2 \sqrt{\frac{\Omega}{\pi} + R_1^2}} = \frac{\tau_{\text{adm}} \Omega (\Omega + 2\pi R_1^2)}{2 \sqrt{\pi} \sqrt{\Omega + \pi R_1^2}}$$

o lo que es lo mismo

$$(M_{T \text{ máx}})^2 = \frac{\tau_{\text{adm}}^2 \Omega^2 (\Omega + 2\pi R_1^2)^2}{4\pi (\Omega + \pi R_1^2)}$$

expresión que nos demuestra que el momento torsor máximo aumenta con el radio interior R_1 , c.q.d.

- 7.3. Se consideran dos ejes del mismo material: uno de sección elíptica cuya longitud del eje mayor es doble de la correspondiente al eje menor; otro de sección circular de radio R . La tensión tangencial admisible es τ_{adm} .

1.º Hallar la relación entre los momentos torsores a los que se pueden someter ambos ejes en los siguientes casos:

- El radio de la sección circular es igual al semieje mayor de la sección elíptica.
- El radio de la sección circular es igual al semieje menor de la sección elíptica.

2.º Calcular la relación entre los ángulos de torsión por unidad de longitud en los dos casos del apartado anterior cuando el par torsor en ambas barras es el mismo.

1.º Sabemos que la tensión tangencial máxima en una sección elíptica se produce en los extremos del eje menor.

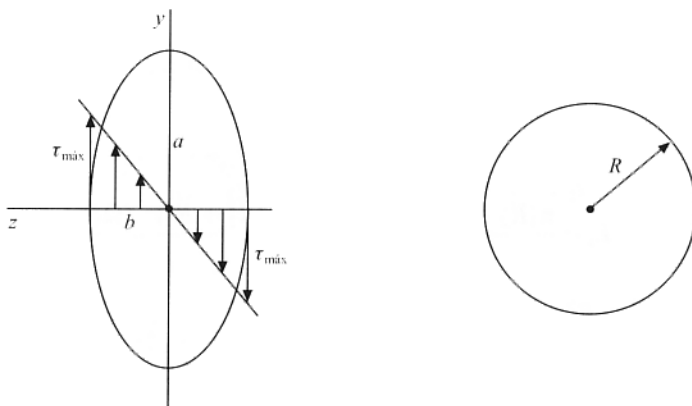


Figura E7.3.

Tomaremos un sistema de referencia (Fig. E7.3) tal que la ecuación del contorno de la sección elíptica sea

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \text{siendo } a = 2b$$

El momento torsor máximo al que se puede someter cada uno de los dos ejes que se consideran se calcula mediante la ecuación (7.4.7) para la sección elíptica y la (7.2.12), particularizada para los puntos periféricos, para la sección circular.

- En el caso que $R = a$

$$\tau_{\text{máx } e} = \frac{M_{T_1}}{\pi ab^2} \leq \tau_{\text{adm}} \quad \Rightarrow \quad M_{T_1 \text{ máx}} = \pi ab^2 \tau_{\text{adm}}$$

$$\tau_{\text{máx } e} = \frac{2 M_{T_2}}{\pi a^4} a \leq \tau_{\text{adm}} \quad \Rightarrow \quad M_{T_2 \text{ máx}} = \frac{\pi a^3}{2} \tau_{\text{adm}}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos últimas ecuaciones, teniendo en cuenta que $b = \frac{a}{2}$, tenemos:

$$\boxed{\frac{M_{T_1 \text{ máx}}}{M_{T_2 \text{ máx}}}} = \frac{\pi a b^2 \tau_{\text{adm}}}{\frac{\pi a^3}{2} \tau_{\text{adm}}} = \frac{2b^2}{a^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Si $R = b$, análogamente, tendremos:

$$M_{T_1 \text{ máx}} = \pi a b^2 \tau_{\text{adm}}$$

$$M_{T_2 \text{ máx}} = \frac{\pi b^3}{2} \tau_{\text{adm}}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\boxed{\frac{M_{T_1 \text{ máx}}}{M_{T_2 \text{ máx}}}} = \frac{\pi a b^2 \tau_{\text{adm}}}{\frac{\pi b^3}{2} \tau_{\text{adm}}} = \frac{2a}{b} = \boxed{4}$$

2.º Las expresiones de los ángulos de torsión en las secciones elíptica y circular vienen dadas por (7.4.8) y (7.2.11), respectivamente.

$$\theta_1 = \frac{M_T (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3} ; \quad \theta_2 = \frac{M_T}{G I_0} = \frac{2 M_T}{\pi G R^4}$$

Las relaciones pedidas serán:

a) Si $R = a$

$$\boxed{\frac{\theta_1}{\theta_2}} = \frac{\frac{M_T (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3}}{\frac{2 M_T}{\pi G a^4}} = \frac{a(a^2 + b^2)}{2 b^3} = \boxed{5}$$

b) Si $R = b$

$$\boxed{\frac{\theta_1}{\theta_2}} = \frac{\frac{M_T (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3}}{\frac{2 M_T}{\pi G b^4}} = \frac{b(a^2 + b^2)}{2 a^3} = \boxed{\frac{5}{16}}$$

7.4. Una barra prismática de sección elíptica de longitudes de semiejes $a = 40$ cm; $b = 20$ cm, longitud $L = 4$ m, está sometida a torsión pura. El ángulo de torsión que se produce entre las secciones extremas es de $\phi = 6,092 \cdot 10^{-3}$ rad y el módulo de elasticidad transversal es $G = 0,8 \cdot 10^4$ MPa. Se pide:

- 1.º Calcular en $m \cdot t$ el momento torsor a que está sometida la barra.
- 2.º Hallar el valor de la inercia torsional.
- 3.º Si simultáneamente con el momento torsor actúa un esfuerzo normal N , calcular el valor máximo que puede alcanzar éste con la condición que la tensión principal en el punto B de la sección media indicada en la Figura E7.4a no supere el valor de 120 MPa.

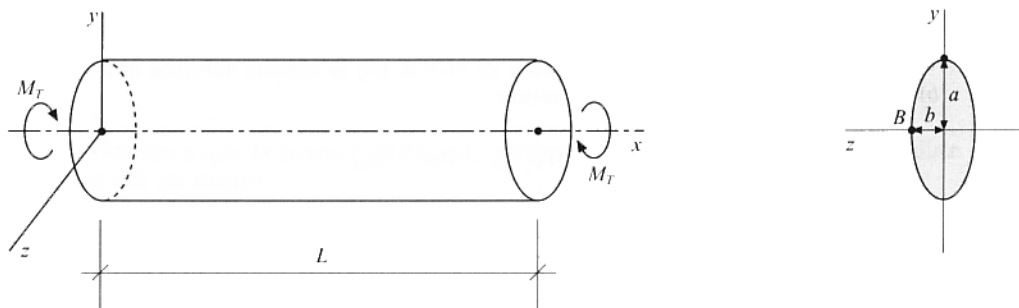


Figura E7.4.

1.º Sabemos que la función de Prandtl que resuelve el problema elástico de una barra prismática de sección elíptica sometida a torsión es

$$\Phi = C \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right)$$

De la condición que tiene que verificar su laplaciana

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2 G \theta$$

obtenemos el valor de la constante C

$$C \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2 G \theta \Rightarrow C = - \frac{G \theta a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$C = - \frac{0,8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{6,092 \cdot 10^{-3}}{4} \cdot 0,4^2 \cdot 0,2^2}{0,4^2 + 0,2^2} = 389.888$$

y como según (7.4.4)

$$C = - \frac{M_T}{\pi a b}$$

el momento torsor M_T al que está sometida la barra será:

$$M_T = - C \pi a b = 389.888 \pi \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 97.990 \text{ m} \cdot \text{N} = 10.000 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

es decir

$$M_T = 10 \text{ m} \cdot \text{t}$$

2.º De la expresión de la rigidez torsional

$$GJ = \frac{M_T}{\theta} = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

se obtiene la inercia torsional

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Sustituyendo valores:

$$J = \frac{\pi \cdot 0,4^3 \cdot 0,2^3}{0,4^2 + 0,2^2} = 8,042 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

3.º Cuando actúa simultáneamente un esfuerzo axial N , la matriz de tensiones en un punto $P(y, z)$ de cualquier sección es, en virtud del principio de superposición

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{N}{\pi ab} & -\frac{2M_T}{\pi ab^3} z & \frac{2M_T}{\pi a^3 b} y \\ -\frac{2M_T}{\pi ab^3} z & 0 & 0 \\ \frac{2M_T}{\pi a^3 b} y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Particularizada para el punto $B(0, b)$, se obtienen las tensiones principales como raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} \frac{N}{\pi ab} - \sigma & -\frac{2M_T}{\pi ab^2} & 0 \\ -\frac{2M_T}{\pi ab^2} & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$-\sigma \left(\sigma^2 - \frac{N}{\pi ab} \sigma - \frac{4M_T^2}{\pi^2 a^2 b^4} \right) = 0$$

El valor máximo de N pedido se obtendrá imponiendo la condición de alcanzar la mayor tensión principal σ_1 el valor de 120 MPa.

$$\sigma_1 = \frac{N}{2\pi ab} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{N}{\pi ab}\right)^2 + \frac{16 M_T^2}{\pi^2 a^2 b^4}} = 120 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Sustituyendo valores

$$\frac{N}{2\pi \cdot 0,4 \cdot 0,2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2\pi \cdot 0,4 \cdot 0,2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 97.990^2}{\pi^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,2^4}} = 120 \cdot 10^6$$

$$2N + \sqrt{4N^2 + 6,08 \cdot 10^{11}} = 120 \cdot 10^6$$

$$(120 \cdot 10^6 - 2N)^2 = 4N^2 + 6,08 \cdot 10^{11}$$

$$(14.400 - 0,608) \cdot 10^{12} = 480 \cdot 10^6 N$$

obtenemos:

$$N = 30 \text{ MN}$$

7.5. En una barra prismática de sección elíptica, de longitudes de los semiejes a y b ($a > b$), sometida a torsión pura se pide:

1.º Calcular las tensiones normal y tangencial máximas en cualquier punto $P(y, z)$ de la barra.

2.º Hallar la relación entre las tensiones tangenciales en los extremos de los ejes mayor y menor de la sección.

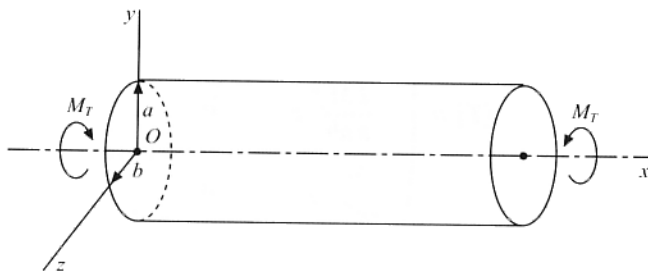


Figura E7.5a.

1.º Tomando el sistema de referencia indicado en la Figura E7.5a, la matriz de tensiones en los puntos de la barra considerada es

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2 M_T}{\pi a b^3} z & \frac{2 M_T}{\pi a^3 b} y \\ -\frac{2 M_T}{\pi a b^3} z & 0 & 0 \\ \frac{2 M_T}{\pi a^3 b} y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de esta matriz nos da las tensiones principales

$$-\sigma^3 + \left(\frac{2M_T}{\pi ab}\right)^2 \left(\frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}\right) \sigma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{2M_T}{\pi ab} \sqrt{\frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\frac{2M_T}{\pi ab} \sqrt{\frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}$$

La tensión normal máxima en un punto $P(y, z)$ es la máxima tensión principal

$$\sigma_{n \text{ máx}} = \frac{2M_T}{\pi ab} \sqrt{\frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}$$

La tensión tangencial máxima será

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{2M_T}{\pi ab} \sqrt{\frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}$$

que tiene el mismo valor que la $\sigma_{n \text{ máx}}$, como tenía que ser, ya que la barra prismática trabaja a torsión pura.

2.º Las tensiones tangenciales en los puntos $B(a, 0)$ y $C(0, b)$ (Fig. E7.5b) son:

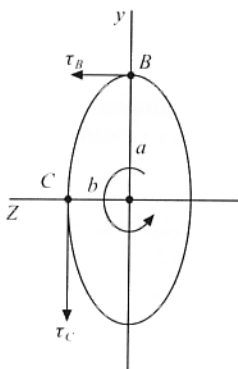


Figura E7.5b.

- Punto $B(a, 0)$: $\tau_{xy} = 0$; $\tau_{xz} = \frac{2M_T}{\pi ab} \frac{1}{a}$.
- Punto $C(0, b)$: $\tau_{xy} = \frac{2M_T}{\pi ab} \frac{1}{b}$; $\tau_{xz} = 0$.

La relación pedida será:

$$\frac{\tau_B}{\tau_A} = \frac{b}{a}$$

- 7.6. Una barra prismática AB de sección elíptica de longitudes de semiejes a y b ($a < b$), tiene su extremo A empotrado y el B libre. Sobre la barra actúa un momento torsor m ($m \cdot t/m$) uniformemente repartido en toda su longitud ℓ . Si G es el módulo de elasticidad transversal, se pide:

1.º Hallar la función de tensiones que resuelve el problema de torsión respecto del sistema de referencia indicado en la Figura E7.6a.

2.º Tensión tangencial máxima, indicando el punto o puntos donde se produce.

3.º Ángulo que gira la sección del extremo libre respecto de la sección empotrada.

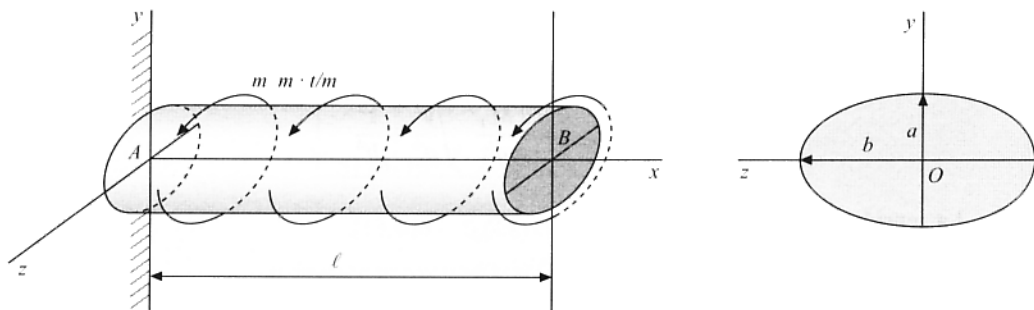


Figura E7.6a.

1.º La función de tensiones será de la forma

$$\Phi = C \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right)$$

siendo C una constante que determinaremos aplicando la ecuación que relaciona Φ y el momento torsor M_T existente en una determinada sección

$$M_T = 2 \iint_{\Omega} \Phi(y, z) dy dz = 2C \iint_{\Omega} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) dy dz$$

de donde

$$C = \frac{M_T}{2 \iint_{\Omega} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) dy dz} = \frac{M_T}{2 \left(\frac{I_z}{a^2} + \frac{I_y}{b^2} - \Omega \right)}$$

Sustituyendo las expresiones de los momentos de inercia I_y e I_z de la sección respecto de los ejes y y z , respectivamente, así como la correspondiente al área de la sección, tenemos:

$$C = \frac{M_T}{2 \frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} - 4 \right)} = -\frac{M_T}{\pi ab}$$

Teniendo en cuenta que la ley de momentos torsores es $M_T = m(l - x)$ en una sección a distancia x del empotramiento, la función de tensiones o función de Prandtl que nos resuelve el problema elástico de torsión en los puntos de dicha sección es

$$\Phi = -\frac{m(l-x)}{\pi ab} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right)$$

expresión en la que habrá que tener en cuenta que m viene dado en $m \cdot t/m$ y si operamos en el S.I. habrá que multiplicar por $9,8 \times 10^3$ para expresar en $N \cdot m/m$ el momento torsor uniformemente repartido.

2.º La tensión tangencial máxima se produce en la sección en la que el momento torsor es máximo, es decir, en la sección del empotramiento, y dentro de ésta en los puntos que son extremos del eje menor.

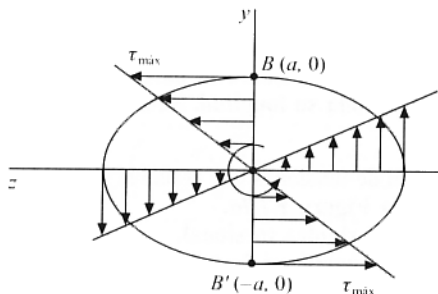


Figura E7.6b.

Como

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2ml}{\pi a^3 b} y$$

y

$$\tau_{máx} = (\tau_{xz})_{y = \pm a, z = 0}$$

queda:

$$\tau_{máx} = \frac{2ml}{\pi a^2 b}$$

3.º Para calcular el ángulo ϕ que gira la sección del extremo libre respecto de la sección del empotramiento tendremos en cuenta que la expresión del ángulo de torsión en una sección del prisma es:

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_T}{GJ}$$

siendo GJ la rigidez a torsión.

Integrando:

$$\phi = \int_0^l \frac{M_T}{GJ} dx = \int_0^l \frac{m(l-x)}{GJ} dx = \frac{ml^2}{2GJ}$$

Ahora bien, de la expresión de la laplaciana de la función de Prandtl

$$\Delta \Phi = -2 G \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\Delta \Phi}{2 G} = -\frac{2 M_T}{2 G \pi a b} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

se obtiene la rigidez torsional

$$G J = \frac{M_T}{\theta} = \frac{G \pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Sustituyendo esta expresión en la correspondiente del ángulo de torsión, obtenemos finalmente

$$\phi = \frac{m l^2 (a^2 + b^2)}{2 G \pi a^3 b^3}$$

- 7.7. Una barra prismática cuya sección recta es un triángulo equilátero de lado $a = 0,2$ m, tiene un extremo empotrado y el otro libre. Sobre la barra actúa un momento torsor $m = 0,816$ mt/m uniformemente repartido en toda su longitud. Sabiendo que el módulo de elasticidad transversal es $G = 80$ GPa, se pide:

- 1.º Calcular la función de tensiones que resuelve el problema de torsión, respecto del sistema de referencia indicado en la Figura E7.7a.
- 2.º Hallar el valor de la rigidez torsional.
- 3.º Si la longitud de la barra en $L = 3$ m, hallar el ángulo de giro de la sección B del extremo libre.
- 4.º Calcular la máxima tensión tangencial que se produce en la barra.

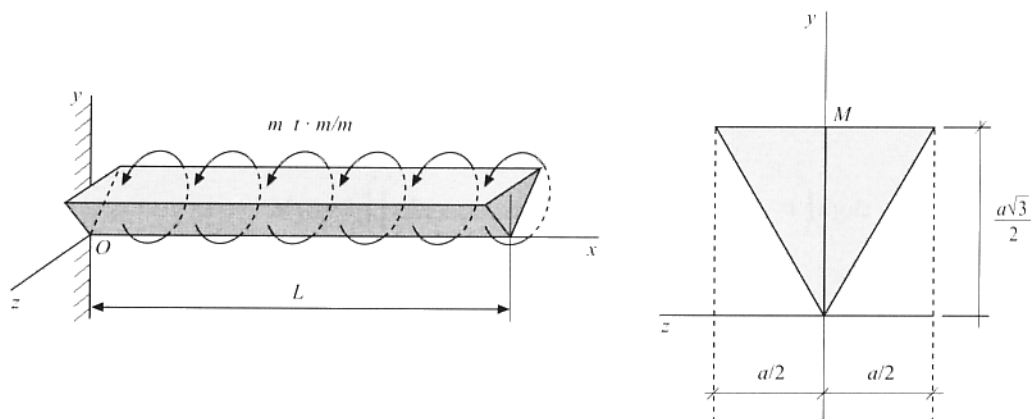


Figura E7.7a.

- 1.º Respecto de la referencia indicada, la función de tensiones tendría que ser de la forma

$$\Phi = C \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) (y - \sqrt{3}z)(y + \sqrt{3}z)$$

siendo C una constante para cada determinada sección.

Evidentemente, la función Φ se anula en todos los puntos del contorno y cumple también la condición, para ser función de tensiones, de tener laplaciana constante, ya que

$$\Delta \Phi = C \Delta \left(y^3 - 3z^2y - \frac{a\sqrt{3}}{2} y^2 + \frac{3a\sqrt{3}}{2} z^2 \right) = 2a\sqrt{3} C$$

Como

$$\Delta \Phi = -2G\theta = 2a\sqrt{3}C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{G\theta}{a\sqrt{3}}$$

que es constante para cualquier determinada sección.

Por tanto, la función de tensiones que resuelve el problema de torsión de la barra considerada es

$$\Phi = -\frac{G\theta}{a\sqrt{3}} \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) (y - \sqrt{3}z)(y + \sqrt{3}z)$$

siendo θ el ángulo de torsión por unidad de longitud, cuyo cálculo haremos más adelante.

2.º Para calcular la rigidez torsional GJ consideremos la relación existente entre la función de tensiones y el momento torsor

$$\begin{aligned} M_T &= 2 \iint_{\Omega} \Phi dy dz = 2 \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} -\frac{G\theta}{a\sqrt{3}} \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) dy \int_{-\frac{y}{\sqrt{3}}}^{+\frac{y}{\sqrt{3}}} (y^2 - 3z^2) dz = \\ &= -\frac{4G\theta}{a\sqrt{3}} \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{y^3}{\sqrt{3}} - \frac{y^3}{3\sqrt{3}} \right) dy = \frac{\sqrt{3}G\theta}{80} a^4 \end{aligned}$$

La expresión de la rigidez torsional GJ de la barra prismática es

$$GJ = \frac{M_T}{\theta} = \frac{\sqrt{3}Ga^4}{80}$$

que, como vemos, depende exclusivamente del material y de las características geométricas de la sección recta.

Sustituyendo valores

$$GJ = \frac{\sqrt{3} \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,2^4}{80} = 2.771 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

De la expresión de la rigidez torsional podemos obtener el ángulo de torsión por unidad de longitud

$$\theta = \frac{80 M_T}{\sqrt{3} G a^4}$$

que nos permite obtener la expresión de la función de Prandtl en función de los datos

$$\Phi = -\frac{80 m (L-x)}{3 a^5} \left(y - \frac{a \sqrt{3}}{2} \right) (y^2 - 3 z^2)$$

3.º El ángulo de giro ϕ de la sección extrema B respecto de la sección A del empotramiento se obtiene fácilmente recordando la expresión del ángulo de torsión por unidad de longitud

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_T}{G J}$$

De esta expresión, integrando

$$\phi = \int_0^L \frac{M_T}{G J} dx = \int_0^L \frac{m(L-x)}{G J} dx = \frac{m L^2}{2 G J}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la rigidez torsional obtenida en el apartado anterior, tenemos

$$\phi = \frac{80 m L^2}{2 \sqrt{3} G a^4}$$

Sustituyendo valores:

$$\phi = \frac{80 \cdot 0,816 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 3^2}{2 \sqrt{3} \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,2^4} = 13 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

4.º La tensión tangencial máxima se presenta en la sección en la que el momento torsor es máximo, es decir, en la sección del empotramiento, y dentro de ésta en los puntos medios de los lados del contorno

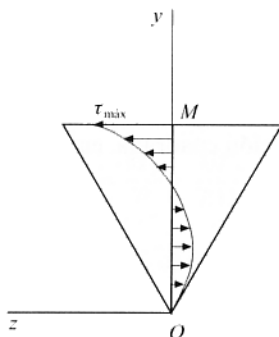


Figura E7.7b.

La expresión de la tensión tangencial máxima la obtenemos a partir de la función de Prandtl y su valor es

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{xz}$$

particularizada para el punto $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{G\theta}{a\sqrt{3}} (3y^2 - 3z^2 - a\sqrt{3}y) \\ \tau_{\text{máx}} &= \frac{G\theta}{a\sqrt{3}} \left(3 \frac{3a^2}{4} - a\sqrt{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{G\theta\sqrt{3}a}{4}\end{aligned}$$

Como

$$G\theta = \frac{80 M_T}{\sqrt{3}a^4}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{80 M_T}{\sqrt{3}a^4} \frac{\sqrt{3}a}{4} = \frac{20 mL}{a^3}$$

Sustituyendo valores se obtiene:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{20 \cdot 0,816 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 3}{0,2^3} = 60 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

es decir

$$\tau_{\text{máx}} = 60 \text{ MPa}$$

- 7.8. Se consideran tres barras prismáticas del mismo material, de secciones respectivas: circular, triangular equilátera y cuadrada, siendo iguales las áreas de sus secciones rectas. Todas las barras están sometidas a torsión mediante pares torsores M_T aplicados en sus secciones extremas.

Comparar en las tres barras los valores de las tensiones tangenciales máximas, así como las rigideces torsionales correspondientes.

Si R es el radio de la sección circular, a la longitud del lado de la sección triangular equilátera y l el lado de la sección cuadrada, entre R , a y l , al ser las áreas iguales, existirán las siguientes relaciones:

$$\Omega = \pi R^2 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = l^2$$

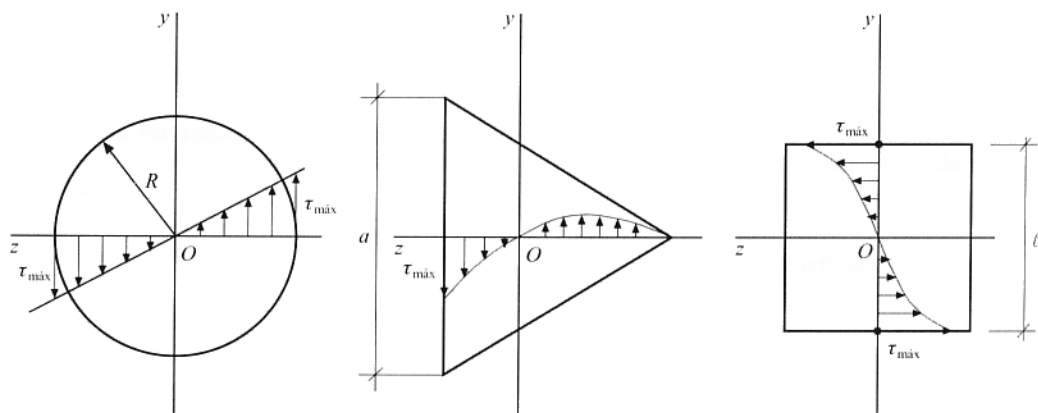


Figura E7.8.

La tensión tangencial máxima y la rigidez torsional, en cada uno de los casos considerados, son:

a) Sección circular

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_T}{I_0} R = \frac{2 M_T}{\pi R^3} \quad (7.2.12)$$

$$G J_1 = \frac{M_T}{\theta} = G I_0 = G \frac{\pi R^4}{2} \quad (7.2.11)$$

b) Sección triangular equilátera

$$\tau_{\max 2} = \frac{3 G \theta}{2} \frac{1}{3} \frac{a \sqrt{3}}{2} = \frac{a \sqrt{3}}{4} \frac{5 M_T}{9 \sqrt{3} \left(\frac{1}{3} \frac{a \sqrt{3}}{2} \right)^4} = \frac{20 M_T}{a^3} \quad (7.5.8) \text{ y } (7.5.10)$$

$$G J_2 = \frac{M_T}{\theta} = G \frac{9 \sqrt{3}}{5} \left(\frac{1}{3} \frac{a \sqrt{3}}{2} \right)^4 = G \frac{\sqrt{3} a^4}{80} \quad (7.5.11)$$

c) Sección cuadrada

$$\tau_{\text{máx } 3} = \frac{4,80 M_T}{l^3} \quad (7.6.19)$$

$$G J_3 = \frac{M_T}{\theta} = \frac{G l^4}{7,11} \quad (7.6.20)$$

Las relaciones existentes entre las tensiones triangulares máximas, correspondientes a los tres casos considerados, serán:

$$\tau_{\text{máx } 1} : \tau_{\text{máx } 2} : \tau_{\text{máx } 3} = \frac{2 M_T}{\pi R^3} : \frac{20 M_T}{a^3} : \frac{4,80 M_T}{l^3}$$

y como

$$a = \frac{2 R \pi^{1/2}}{3^{1/4}} = 2,69 R, \quad l = R \cdot \pi^{1/2}$$

queda:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{máx } 1} : \tau_{\text{máx } 2} : \tau_{\text{máx } 3} &= \frac{2 M_T}{\pi R^3} : \frac{20 M_T}{2,69^3 R^3} : \frac{4,80 M_T}{\pi^{3/2} R^3} = \\ &= \frac{M_T}{1,57 R^2} : \frac{M_T}{0,97 R^3} : \frac{M_T}{1,16 R^3} = 0,62 : 1 : 0,84 \end{aligned}$$

es decir:

$$\tau_{\text{máx } 1} : \tau_{\text{máx } 2} : \tau_{\text{máx } 3} = 0,62 : 1 : 0,84$$

El resultado nos indica que para un mismo momento torsor aplicado a cada una de las barras, la mayor tensión tangencial máxima se presenta en la sección triangular, le sigue la correspondiente a la sección cuadrada (84 por 100), y, finalmente, la menor es la que corresponde a la sección circular (62 por 100).

Procediendo de forma análoga con las correspondientes rigideces, tenemos:

$$G J_1 : G J_2 : G J_3 = G \frac{\pi R^4}{2} : G \frac{\sqrt{3} a^4}{80} : \frac{G l^4}{7,11} = 1,57 R^4 : 2,69 R^4 : 1,38 R^4$$

es decir

$$G J_1 : G J_2 : G J_3 = 1,13 : 1,95 : 1$$

resultado que nos indica que la barra menos rígida a torsión es la de sección cuadrada, le sigue la de sección circular (13 por 100 más rígida) y, finalmente, la más rígida es la de sección triangular (95 por 100 más rígida).

7.9. Una barra prismática de longitud L tiene sección recta triangular equilátera de lado a y está sometida simultáneamente a un momento torsor constante M_T y a una compresión uniforme de tensión σ_n . Se pide:

- 1.º Calcular la función de tensiones que resuelve el problema elástico de la torsión, referida al sistema de ejes indicado en la Figura E7.9, coincidiendo el eje x con la línea media del prisma.
- 2.º Hallar el módulo del vector tensión en el punto D medio de AB , correspondiente a un plano que pasa por él y cuya normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados.
- 3.º Valor de la tensión tangencial máxima en los puntos del eje x .

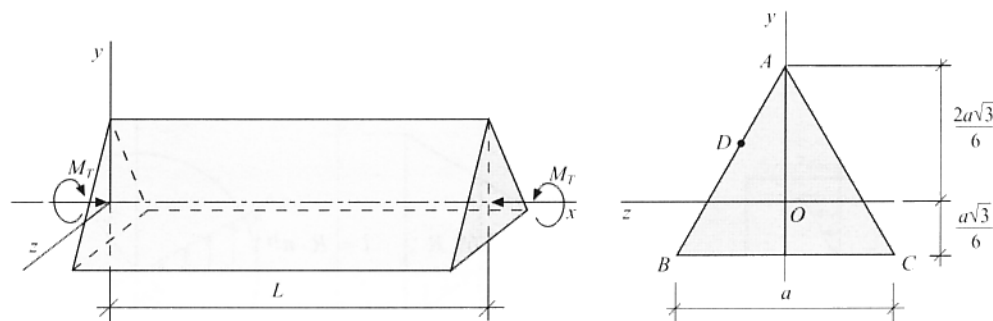


Figura E7.9.

1.º La función de Prandtl que resuelve el problema elástico de la torsión de la barra, como sabemos, es de la forma

$$\Phi = C \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}z \right) \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}z \right)$$

siendo C una constante que determinaremos mediante la aplicación de la ecuación que relaciona la función Φ con el momento torsor M_T .

$$\begin{aligned} M_T &= 2 \iint_{\Omega} C \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}z \right) \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}z \right) dy dz = \\ &= 4C \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{6}}^{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) \int_0^{\frac{a}{3} - \frac{y}{\sqrt{3}}} \left[\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 3z^2 \right] dz = C \frac{3a^5}{80} \end{aligned}$$

De aquí obtenemos el valor de la constante C : $C = \frac{80}{3a^5} M_T$. Por consiguiente, la función de tensiones pedida es:

$$\Phi = + \frac{80 M_T}{3 a^5} \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6} \right) \left[\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 3 z^2 \right]$$

2.º De la función de Prandtl obtenemos la solución de tensiones

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \frac{80 M_T}{3 a^5} (6 y + a\sqrt{3}) z$$

$$\tau_{xz} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{80 M_T}{3 a^5} (3 y^2 - a\sqrt{3} y - 3 z^2)$$

Las coordenadas del punto D son:

$$y = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12} \quad ; \quad z = \frac{a}{4}$$

por lo que las tensiones debidas a la torsión serán:

$$\tau_{xy} = - \frac{80 M_T}{3 a^5} \left(6 \frac{a\sqrt{3}}{12} + a\sqrt{3} \right) \frac{a}{4} = - \frac{10\sqrt{3} M_T}{a^3}$$

$$\tau_{xz} = - \frac{80 M_T}{3 a^5} \left(3 \frac{3 a^2}{12^2} - a\sqrt{3} \frac{a\sqrt{3}}{12} - 3 \frac{a^2}{16} \right) = \frac{10 M_T}{a^3}$$

La matriz de tensiones en el punto D , teniendo en cuenta el principio de superposición, es

$$[T]_D \begin{pmatrix} \sigma_n & \frac{-10\sqrt{3} M_T}{a^3} & \frac{10 M_T}{a^3} \\ \frac{-10\sqrt{3} M_T}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{10 M_T}{a^3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector tensión correspondiente al plano que pasa por D y es normal al vector definido por el vector unitario $\vec{u} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ es:

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_n + \tau_{xy} + \tau_{xz}) \\ \tau_{xy}/\sqrt{3} \\ \tau_{xz}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

es decir, respecto de la referencia indicada en la Figura E7.9, el vector tensión pedido tiene por expresión trinomia:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_n - \frac{10 M_T}{a^3} (\sqrt{3} - 1) \right] \vec{i} - \frac{10 M_T}{a^3} \vec{j} + \frac{10 M_T}{\sqrt{3} a^3} \vec{k}$$

Su norma es

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{3} \left\{ \left[\sigma_n - \frac{10 M_T}{a^3} (\sqrt{3} - 1) \right]^2 + \frac{100 M_T^2}{a^6} + \frac{100 M_T^2}{3a^6} \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \left[\sigma_n^2 + \frac{100 M_T^2}{a^6} (4 - 2\sqrt{3}) - \frac{20 M_T}{a^3} (\sqrt{3} - 1) \sigma_n + \frac{400 M_T^2}{3a^6} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[\sigma_n^2 - \frac{20 M_T}{a^3} (\sqrt{3} - 1) \sigma_n + \frac{1.600 M_T^2}{3a^6} - \frac{200 \sqrt{3} M_T^2}{a^6} \right] \end{aligned}$$

El módulo pedido será:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_n^2 - \frac{20 M_T}{a^3} (\sqrt{3} - 1) \sigma_n + \frac{1.600 M_T^2}{3a^6} - \frac{200 \sqrt{3} M_T^2}{a^6}}$$

3.º El eje x de la barra prismática es el lugar geométrico de los centros de torsión de sus secciones, por lo que en sus puntos sólo existe la tensión de compresión σ_n , es decir

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_n}{2}$$

sobre todo plano cuya normal forme un ángulo de 45° con él.

Elasticidad en coordenadas cilíndricas

8.1. Introducción

Al iniciar el estudio del estado tensional o de deformación de un cuerpo elástico resulta siempre interesante analizar las características que presenta el mismo cuerpo y el sistema de fuerzas exteriores, antes de abordar la formulación analítica del mismo.

La consideración de las simetrías geométricas del cuerpo, de la variación de las fuerzas aplicadas, etc., pueden llevar de la mano al planteamiento más plausible, la elección más adecuada de las coordenadas y el enjuiciamiento razonable de los resultados, rechazando aquellos que se ponen en contradicción con las previsiones lógicas o la interpretación física de los resultados.

Para el planteamiento analítico de todo problema concreto se han de utilizar necesariamente unas coordenadas. La oportuna elección de un sistema particular de ellas simplificará el cálculo de forma notable en la casi totalidad de los casos.

Es por ello que se estime la conveniencia de dedicar este capítulo a analizar la forma que tienen las componentes de la matriz de tensiones, las ecuaciones de equilibrio interno, las componentes de la matriz de deformaciones y, en fin, la formulación del problema elástico cuando sea aconsejable el uso de coordenadas cilíndricas.

Recordemos las características de este sistema de coordenadas: un punto P viene dado por tres números reales (ρ, θ, z) , que son sus coordenadas cilíndricas (Fig. 8.1).

Las *superficies coordenadas*, lugares geométricos de los puntos en que una de las coordenadas es constante, son:

$\rho = \text{cte}$: cilindro de revolución de eje Oz .

$\theta = \text{cte}$: semiplano del haz de vértice el eje Oz .

$z = \text{cte}$: plano paralelo al xOy .

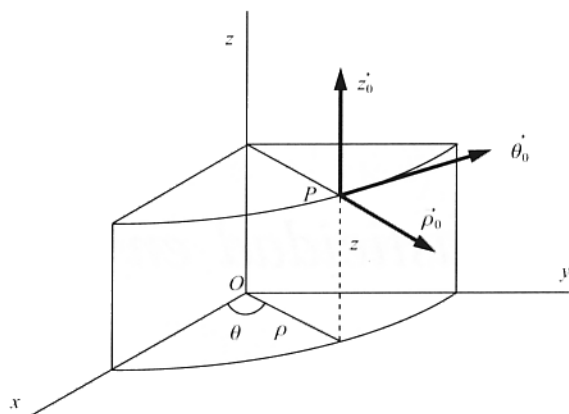


Figura 8.1.

La intersección de cada dos de estas superficies coordenadas se llaman *líneas coordenadas*

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \text{cte} \\ z = \text{cte} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^{\text{a}} \text{ línea:} \\ \text{semirrecta} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \rho = \text{cte} \\ z = \text{cte} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2.^{\text{a}} \text{ línea:} \\ \text{circunferencia} \\ \text{paralela al} \\ \text{plano } xOy \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \rho = \text{cte} \\ \theta = \text{cte} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3.^{\text{a}} \text{ línea:} \\ \text{recta paralela} \\ \text{al eje } Oz \end{array}$$

En cada punto P consideraremos un triedro formado por las tangentes a las tres líneas coordenadas que pasan por él y una terna de vectores unitarios $\vec{\rho}_0, \vec{\theta}_0, \vec{z}_0$ con direcciones las de los ejes del triedro y en el sentido creciente de las coordenadas. Se observa que el triedro considerado en cada punto es trirrectangular.

Recordemos también las expresiones de los distintos operadores diferenciales. Si tenemos un campo escalar $\phi = \phi(\rho, \theta, z)$ se definen dos operadores, gradiente y laplaciana, de naturaleza vectorial y escalar, respectivamente, cuyas expresiones son:

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{z}_0 \quad (8.1.1)$$

$$\text{lapl } \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

A partir de un campo vectorial $\vec{V} = \vec{V}(\rho, \theta, z)$

$$\vec{V} = V_\rho \vec{\rho}_0 + V_\theta \vec{\theta}_0 + V_z \vec{z}_0 \quad (8.1.3)$$

se definen dos operadores, divergencia y rotacional, de naturaleza escalar y vectorial, respectivamente, de expresiones:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_\rho}{\rho} \quad (8.1.4)$$

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{\rho}_0 + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{\theta}_0 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{\rho} \right) \vec{z}_0 \quad (8.1.5)$$

La laplaciana, definida para un campo escalar, también se puede aplicar a un campo vectorial. Su definición intrínseca, es decir, independiente de cualquier sistema particular de coordenadas es:

$$\text{lapl } \vec{V} = \nabla^2 \vec{V} = \Delta \vec{V} = \text{grad div } \vec{V} - \text{rot rot } \vec{V} \quad (8.1.6)$$

Los operadores gradiente, divergencia y rotacional se pueden representar simbólicamente por ∇ , $\nabla \cdot$, $\nabla \times$, respectivamente, en los que el punto del operador divergencia y el aspa del rotacional indican multiplicación escalar y multiplicación vectorial, respectivamente, del operador gradiente por el vector del campo al que se apliquen.

Basándonos en esta posibilidad de representación simbólica de los operadores diferenciales, y que se rigen por las mismas reglas formales de estas operaciones, podemos obtener de forma inmediata importantes propiedades entre ellos, de las que haremos uso más adelante.

$$\text{div rot } \vec{V} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0 \quad (8.1.7)$$

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (8.1.8)$$

$$\text{rot rot } \vec{V} = \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V} \quad (8.1.9)$$

$$\text{div grad } \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi \quad (8.1.10)$$

$$\text{div lapl } \vec{V} = \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{V}) = \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{V}) = \text{lapl div } \vec{V} \quad (8.1.11)$$

$$\text{lapl grad } \phi = \nabla^2 (\nabla \phi) = \nabla (\nabla^2 \phi) = \text{grad lapl } \phi \quad (8.1.12)$$

8.2. Matriz de tensiones

Consideremos el entorno elemental de un punto P en un sistema de coordenadas cilíndricas. En la Figura 8.2 se han dibujado las tensiones que actúan sobre las caras del paralelepípedo elemental despreciando los términos infinitesimales y habiendo tenido en cuenta el teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales.

Las tensiones normales correspondientes a las caras del paralelepípedo elemental se denominan σ_ρ , σ_θ y σ_z , mientras que las tensiones tangenciales son $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\rho z}$ y $\tau_{\theta z}$. El significado de los subíndices es el mismo que se vio en coordenadas cartesianas, sin más variación que en el sistema de coordenadas cartesianas el sistema de referencia era fijo y aquí, como hemos visto anteriormente, depende del punto.

Seguiremos tomando positivas las tensiones normales cuando sean de tracción, y negativas cuando sean de compresión. En cuanto al signo de las tensiones tangenciales, las consideraremos positivas cuando tengan el sentido indicado en la Figura 8.3.

Supongamos ahora un sistema de coordenadas cartesianas local en P , cuyos ejes x , y , z son coincidentes con los vectores unitarios $\vec{\rho}_0$, $\vec{\theta}_0$, \vec{z}_0 de las coordenadas cilíndricas. El entorno equivalente de P es un paralelepípedo recto-rectangular cuyos lados tienen de

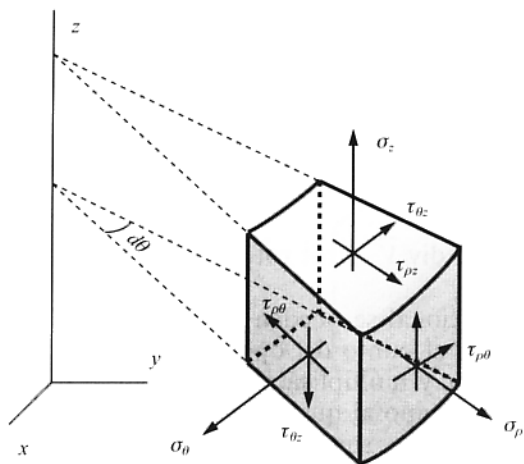


Figura 8.2.

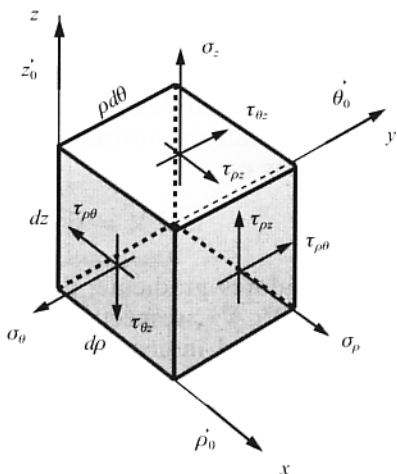


Figura 8.3.

longitud $d\rho$, $\rho d\theta$ y dz (Fig. 8.3). El estado tensional equivalente en este sistema de referencia cartesiano viene definido por la matriz de tensiones tal que:

$$\sigma_{nx} = \sigma_\rho ; \quad \sigma_{ny} = \sigma_\theta ; \quad \sigma_{nz} = \sigma_z ; \quad \tau_{xy} = \tau_{\rho\theta} ; \quad \tau_{xz} = \tau_{\rho z} ; \quad \tau_{yz} = \tau_{\theta z}$$

Es decir, la matriz de tensiones en el sistema de referencia local es:

$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\theta} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\rho\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{\rho z} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (8.2.1)$$

En el estudio de las tensiones, por tanto, será aplicable todo lo dicho en el Capítulo 2 tomando como matriz de tensiones la (8.2.1) y como sistema de referencia el formado por los ejes que coinciden en cada punto con las direcciones y sentidos definidos por los vectores $\vec{\rho}_0$, $\vec{\theta}_0$ y \vec{z}_0 .

Así, el vector tensión $\vec{\sigma}$ correspondiente a un plano cuyo vector unitario en dirección y sentido de la normal exterior es \vec{u} (α, β, γ), será

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}] = \begin{pmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\theta} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\rho\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{\rho z} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (8.2.2)$$

estando dicho vector \vec{u} (α, β, γ) referido a la terna de ejes definidos por los vectores de base $\vec{\rho}_0$, $\vec{\theta}_0$, \vec{z}_0 de las coordenadas cilíndricas.

8.3. Ecuaciones de equilibrio

Consideremos el entorno elemental de un punto P de un medio elástico en coordenadas cilíndricas, como se indica en la Figura 8.4. Sean σ_ρ , σ_θ , σ_z las componentes normales de los vectores tensión sobre las tres superficies coordenadas que limitan el paralelepípedo elemental correspondientes al punto de coordenadas (ρ, θ, z) , y $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\theta z}$, $\tau_{\rho z}$ las componentes tangenciales. Sobre las superficies coordenadas que definen el punto $(\rho + d\rho, \theta + d\theta, z + dz)$, los valores de las componentes normales y tangenciales se obtienen como se indica en la Figura 8.4 para las caras vistas.

Sea \vec{f}_v la fuerza de masa por unidad de volumen y F_ρ , F_θ , F_z , sus componentes según los ejes definidos por $\vec{\rho}_0$, $\vec{\theta}_0$, \vec{z}_0 .

Proyectemos el sistema de fuerzas que actúa sobre las caras del paralelepípedo elemental sobre los ejes. La condición de equilibrio exige que dicho sistema tenga resultante nula, es decir, han de anularse sus tres componentes.

$$\begin{aligned} \Sigma R_\rho = & F_\rho \rho d\theta d\rho dz + \left(\sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\theta dz - \sigma_\rho \rho d\theta dz - \\ & - \sigma_\theta d\rho dz \sin \frac{d\theta}{2} - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) d\rho dz \sin \frac{d\theta}{2} - \tau_{\rho\theta} d\rho dz \cos \frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(\tau_{\rho\theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) d\rho dz \cos \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\rho z} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} dz \right) \rho d\theta d\rho - \tau_{\rho z} \rho d\theta d\rho = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma R_\theta = & F_\theta \rho d\theta d\rho dz + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) d\rho dz \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta d\rho dz \cos \frac{d\theta}{2} + \\ & + \tau_{\rho\theta} d\rho dz \sin \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\rho\theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) d\rho dz \sin \frac{d\theta}{2} - \tau_{\rho\theta} d\rho dz + \\ & + \left(\tau_{\rho\theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\theta dz - \tau_{\theta z} \rho d\theta d\rho + \left(\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} dz \right) \rho d\theta d\rho = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma R_z = & F_z \rho d\theta d\rho dz + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) \rho d\theta d\rho - \sigma_z \rho d\theta d\rho + \\ & + \left(\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} d\theta \right) d\rho dz - \tau_{\theta z} d\rho dz + \\ & + \left(\tau_{\rho z} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\theta dz - \tau_{\rho z} \rho d\theta dz = 0 \end{aligned}$$

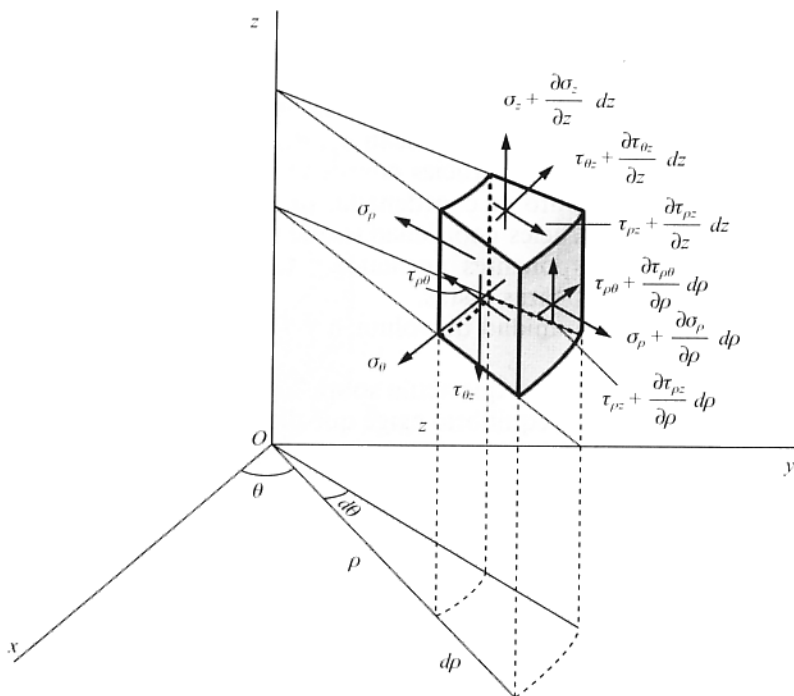


Figura 8.4.

Simplificando, teniendo en cuenta que $d\theta$ es un infinitésimo, obtenemos las ecuaciones de equilibrio interno en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} F_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} = 0 \\ F_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho} \frac{\tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0 \\ F_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \end{cases} \quad (8.3.1)$$

8.4. Matriz de deformaciones

Antes de iniciar el estudio de las deformaciones en el sistema de coordenadas cilíndricas estableceremos la nomenclatura que se utilizará en lo que sigue.

Respecto al sistema de referencia de vectores unitarios $\vec{\rho}_0$, $\vec{\theta}_0$, \vec{z}_0 , designaremos por u , v , w , las componentes del vector corrimiento de un punto.

Llamaremos, asimismo, ε_ρ , ε_θ , ε_z las deformaciones unitarias en las direcciones de los ejes respectivos, así como $\gamma_{\rho\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, $\gamma_{\rho z}$, las deformaciones angulares, cuyo significado es análogo al que tenían γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} en coordenadas cartesianas, es decir, estos términos representan la variación angular que experimentan los ángulos, inicialmente rectos, cuyos lados coinciden con los ejes.

Expresemos las deformaciones unitarias ε_ρ , ε_θ , ε_z en las direcciones de los ejes, así como las deformaciones angulares, en función de las componentes u , v , w , del vector corrimiento.

Para ello consideraremos el volumen elemental $abcd$ $a_1 b_1 c_1 d_1$ antes de la deformación, representado en la Figura 8.5 y sea $a' b' c' d'$ $a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ la posición del paralelepípedo elemental después de la deformación.

Proyectaremos los vértices de este paralelepípedo sobre los planos definidos por $\vec{\rho}_0$, $\vec{\theta}_0$; $\vec{\theta}_0$, \vec{z}_0 ; $\vec{\rho}_0$, \vec{z}_0 y utilizaremos la misma denominación en los vértices proyectados con objeto de evitar subíndices innecesarios.

Consideremos los dos vértices a y c (Fig. 8.6) y si u es el desplazamiento radial del punto a , el del punto c será $u + \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho$. Por tanto, la deformación unitaria en dirección radial es:

$$\varepsilon_\rho = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho - u}{d\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad (8.4.1)$$

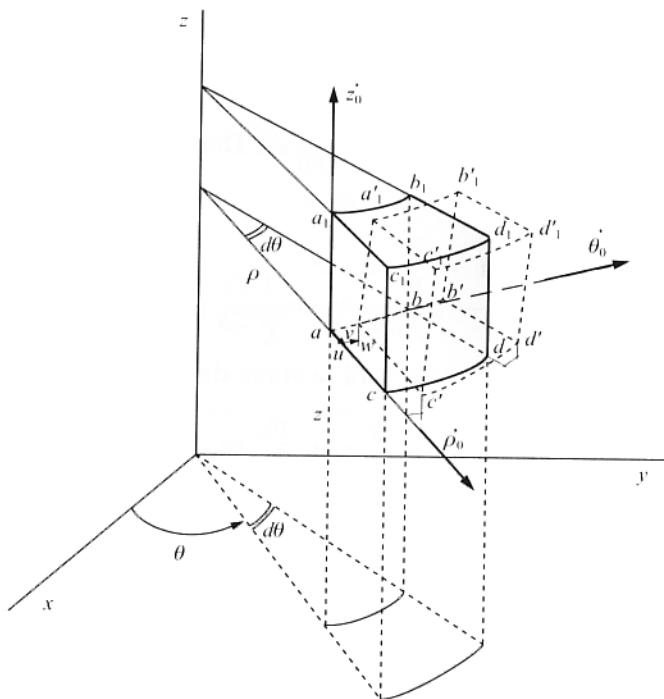


Figura 8.5.

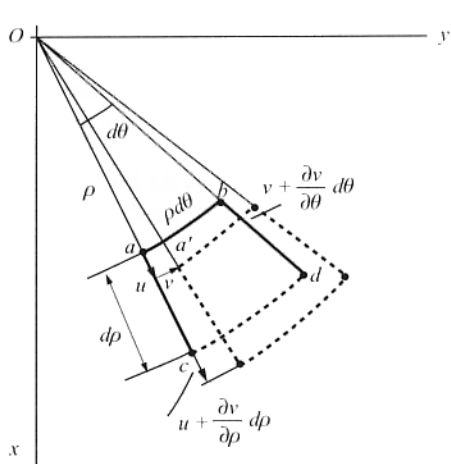


Figura 8.6.

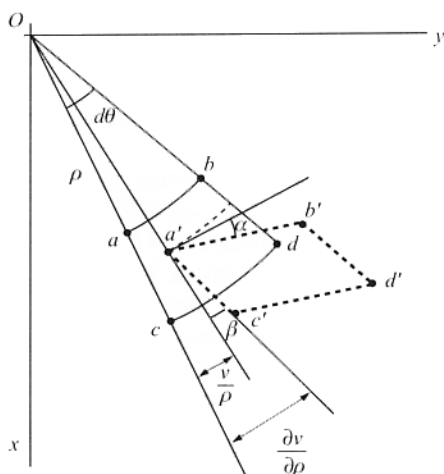


Figura 8.7

En cuanto a la deformación en la dirección $\vec{\theta}_0$ se observa que depende tanto del corrimiento tangencial como del radial. Debido al desplazamiento radial exclusivamente, el elemento ab de longitud $(\rho + u) d\theta$ experimenta una deformación unitaria en la dirección tangencial, de valor

$$\frac{(\rho + u) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{u}{\rho} \quad (8.4.2)$$

Por otra parte, el extremo a del elemento ab tiene un corrimiento tangencial v , mientras que el extremo b lo tiene de valor $v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$. Debido a esta causa, la deformación unitaria tangencial es:

$$\frac{v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta - v}{\rho d\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (8.4.3)$$

Por tanto, la deformación unitaria ε_θ será la suma de las dos deformaciones parciales anteriores

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (8.4.4)$$

La deformación unitaria ε_z en la dirección del eje z coincide con la expresión en coordenadas cartesianas

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (8.4.5)$$

En cuanto a las deformaciones angulares, calculemos primeramente $\gamma_{\rho\theta}$. Según se indica en la Figura 8.7, y recordando el significado que tiene este término, $\gamma_{\rho\theta}$ será la suma

de los ángulos α y β , siendo α el ángulo girado por el lado ab y β el girado por el ac , ambos en a y positivos en el sentido de disminuir el ángulo \widehat{bac} inicialmente recto.

Como el ángulo α está provocado por la variación del corrimiento radial de b respecto de a , su valor será

$$\alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta}{\rho d\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (8.4.6)$$

Por su parte, el ángulo β es debido a la variación del corrimiento tangencial de c respecto del de a . Como el ángulo formado por $a'c'$ con Oa' es

$$\frac{v + \frac{\partial v}{\partial \rho} d\rho - v}{d\rho} = \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

y el ángulo formado por las dos rectas radiales Oa y Oa' es $\frac{v}{\rho}$, el ángulo β que es el formado por $a'c'$ con Oa' , vale:

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} \quad (8.4.7)$$

Por tanto, la expresión de $\gamma_{\rho\theta}$ será:

$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} \quad (8.4.8)$$

Para el cálculo de $\gamma_{\theta z}$ proyectaremos sobre el plano definido por $\vec{\theta}_0$ y \vec{z}_0 . De la Figura 8.8 fácilmente se deduce:

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial \theta} d\theta}{\rho d\theta} + \frac{\frac{\partial v}{\partial z} dz}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (8.4.9)$$

Finalmente, teniendo en cuenta los valores de las variaciones angulares de los lados ac y aa_1 , de la Figura 8.9 se desprende:

$$\gamma_{\rho z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial \rho} d\rho}{d\rho} + \frac{\frac{\partial u}{\partial z} dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (8.4.10)$$

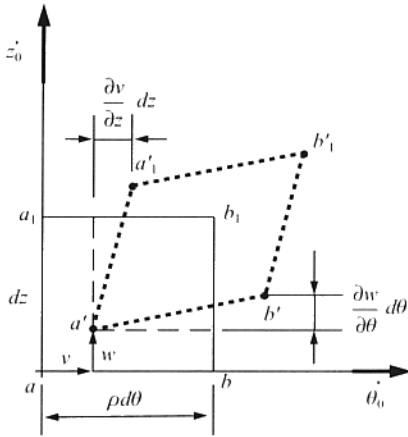


Figura 8.8.

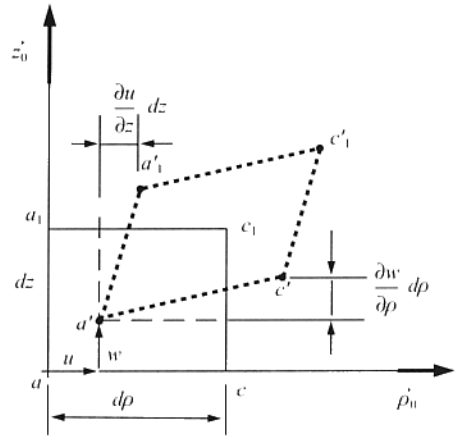


Figura 8.9.

Las anteriores expresiones nos permiten calcular los términos de la matriz de deformación $[D]$ en función de las componentes del vector corrimiento. Respecto al sistema de referencia local en cada punto, la matriz de deformación será:

$$[D] = \begin{pmatrix} \varepsilon_\rho & 1/2 \gamma_{\rho\theta} & 1/2 \gamma_{\rho z} \\ 1/2 \gamma_{\rho\theta} & \varepsilon_\theta & 1/2 \gamma_{\theta z} \\ 1/2 \gamma_{\rho z} & 1/2 \gamma_{\theta z} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (8.4.11)$$

Es evidente que para que una matriz de deformación dada represente un estado de deformación físicamente posible es necesario que sus componentes verifiquen las *condiciones de compatibilidad*. Estas condiciones, cuya demostración omitimos, expresadas en coordenadas cilíndricas, son:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \rho} = 2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \gamma_{\rho\theta}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \gamma_{\rho\theta}}{\partial \theta} \right) \quad (8.4.12)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \rho} = 2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \gamma_{\theta z}}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_{\rho z}}{\partial \theta} \right) \quad (8.4.13)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{\rho z}}{\partial z \partial \rho} \quad (8.4.14)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_{\rho z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \rho} - \frac{\partial \gamma_{\rho \theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma_{\theta z}}{\rho} \right) \quad (8.4.15)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \theta \partial z} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_{\rho z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \gamma_{\rho \theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\gamma_{\theta z}}{\rho} \right) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \gamma_{\rho \theta}}{\partial z} \quad (8.4.16)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_{\rho z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \gamma_{\rho \theta}}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\gamma_{\theta z}}{\rho} \right) \quad (8.4.17)$$

8.5. Relaciones entre tensiones y deformaciones

En el epígrafe anterior hemos obtenido las expresiones de las componentes de la matriz de deformación en función de las componentes del vector corrimiento. No nos debe extrañar que estas expresiones difieran de las correspondientes cuando la referencia es cartesiana, ya que las componentes de la matriz de deformación se definen como derivadas de las componentes del vector corrimiento y en ese proceso de derivación los ejes son fijos, por lo que las derivadas de los vectores base son nulas, mientras que en el sistema de coordenadas cilíndricas los vectores unitarios de la base son variables y sus derivadas, no nulas, habrá que tenerlas en cuenta.

Sin embargo, en las relaciones entre las componentes de las matrices de tensiones y de deformación no intervienen derivadas, por lo que tanto las expresiones de las leyes de Hooke generalizadas como las ecuaciones de Lamé tendrán en coordenadas cilíndricas la misma estructura formal que las correspondientes cuando el sistema de referencia es cartesiano.

Por tanto, si $[T]$ y $[D]$ son, respectivamente, las matrices de tensiones y de deformación en un determinado punto, las componentes de $[D]$ se pueden expresar en función de las de $[T]$ mediante las *leyes de Hooke generalizadas*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\rho = \frac{1}{E} [\sigma_\rho - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_\rho + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)] \\ \gamma_{\rho\theta} = \frac{\tau_{\rho\theta}}{G} ; \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\tau_{\rho z}}{G} ; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G} \end{array} \right. \quad (8.5.1)$$

así como las componentes de $[T]$ en función de las de $[D]$, en virtud de las *ecuaciones de Lamé*.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \lambda e + 2 G \varepsilon_\rho & ; & \tau_{\rho\theta} = G \gamma_{\rho\theta} \\ \sigma_\theta = \lambda e + 2 G \varepsilon_\theta & ; & \tau_{\rho z} = G \gamma_{\rho z} \\ \sigma_z = \lambda e + 2 G \varepsilon_z & ; & \tau_{\theta z} = G \gamma_{\theta z} \end{cases} \quad (8.5.2)$$

siendo λ y G los *coeficientes de Lamé* definidos en (4.5.4) y (4.4.16), y e la dilatación cúbica unitaria, cuya expresión ahora es:

$$e = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{\rho} \quad (8.5.3)$$

8.6. Estados axilsimétricos. Función de deformación de Love

En las aplicaciones técnicas se encuentran con frecuencia problemas en los que tanto la forma del cuerpo como la distribución de fuerzas exteriores presentan simetría respecto de una recta.

Como, en general, las fuerzas pueden ser variables en puntos de una recta paralela al eje de simetría o a lo largo de una curva meridiana, no se trata de estados de elasticidad plana, que se definieron en el Capítulo 6, ya que no existe plano director tal que en cualquier plano paralelo a él la distribución de tensiones y de deformaciones se reproduzca idénticamente.

Sin embargo, dada su importancia en la práctica, es aconsejable dedicar algún tiempo a analizar el estado elástico que se produce en estos cuerpos. Por la simetría que presenta, será recomendable utilizar un sistema de referencia de coordenadas cilíndricas cuyo eje z sea coincidente con el eje de simetría.

Dentro de los estados de tensión simétricos respecto de un eje existen dos tipos de problemas, que se diferencian en las características de los desplazamientos: 1.º aquellos en los que la segunda componente del vector corrimiento es nula ($v = 0$) en todos los puntos del sólido elástico; 2.º aquellos en que $v = v(\rho \cdot z)$.

Para resolver el problema elástico que se presenta en los sólidos de revolución, sin fuerzas de masa, bajo carga axilsimétrica, Love propuso un vector de Galerkin que sólo tiene componente según el eje z

$$\vec{P}(0, 0, \phi) \quad (8.6.1)$$

es decir, una función $\phi = \phi(\rho, \theta, z)$ que, según (5.4.4), será biarmónica

$$\Delta^2 \phi = 0 \quad (8.6.2)$$

La solución de corrimientos en función de esta función ϕ que se denomina *función de deformación de Love*, en virtud de (5.4.5), verificará

$$2 G \vec{\delta} = 2 (1 - \mu) \Delta \phi \vec{z}_0 - \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (8.6.3)$$

por lo que las componentes del vector corrimiento, teniendo en cuenta la expresión (8.1.1) del gradiente en coordenadas cilíndricas, se obtendrán de

$$\begin{cases} 2 Gu = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial z} \\ 2 Gv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \\ 2 Gw = 2(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{cases} \quad (8.6.4)$$

A partir de estas componentes obtenemos las de la matriz de deformación aplicando las ecuaciones obtenidas en el Epígrafe 8.4.

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \rho^2 \partial z} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{2G\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{2G\rho^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta^2 \partial z} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1-\mu}{G} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \phi - \frac{1}{2G} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \\ \gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} = -\frac{1}{G\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \rho \partial \theta \partial z} + \frac{1}{G\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \\ \gamma_{\theta z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2G\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2(1-\mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2G\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta \partial z^2} \\ \gamma_{\rho z} = \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial \rho} [2(1-\mu) \Delta \phi] - \frac{1}{G} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \rho \partial z^2} \end{cases} \quad (8.6.5)$$

Sumando miembro a miembro las tres primeras ecuaciones, teniendo en cuenta la expresión (8.1.2) de la laplaciana en coordenadas cilíndricas, obtenemos la dilatación cúbica unitaria

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2(1-\mu) \Delta \phi \right] = \\ &= \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial z} (1-2\mu) \Delta \phi \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Finalmente, la solución de tensiones se obtiene aplicando las ecuaciones de Lamé. Sustituyendo los coeficientes λ y G por sus expresiones (4.5.4), (4.4.16) y la dilatación cúbica unitaria obtenida en (8.6.6), se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = \lambda e + 2 G \varepsilon_{\rho} = \frac{\lambda}{2 G} \frac{\partial}{\partial z} [(1 - 2\mu) \Delta \phi] - \frac{\partial^3 \phi}{\partial \rho^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right) \\ \sigma_{\theta} = \lambda e + 2 G \varepsilon_{\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \\ \sigma_z = \lambda e + 2 G \varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \\ \tau_{\rho\theta} = G \gamma_{\rho\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \rho \partial \theta \partial z} + \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} = -\frac{\partial^3}{\partial \rho \partial \theta \partial z} \left(\frac{\phi}{\rho} \right) \\ \tau_{\theta z} = G \gamma_{\theta z} = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta \partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \\ \tau_{\rho z} = G \gamma_{\rho z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[2(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \rho \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \end{array} \right. \quad (8.6.7)$$

Para los casos en los que el corrimiento circunferencial v se anula, la función de Love $\phi = \phi(\rho, z)$ no depende de la variable θ , y la solución de tensiones se reduce a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right) \\ \sigma_{\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{\rho z} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left((1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right. \quad (8.6.8)$$

Dado que si la función ϕ de Love es biarmónica verifica las ecuaciones de Navier, las soluciones obtenidas satisfacen tanto las ecuaciones de equilibrio interno como las de compatibilidad. Por consiguiente, las únicas condiciones que tienen que verificar son las de contorno.

8.7. La representación de Neuber-Papkovich. Problema de Boussinesq

El vector desplazamiento $\vec{\delta}$, en el caso que no existan fuerzas de masa, se puede expresar como una combinación de dos funciones armónicas: una vectorial \vec{A} y otro escalar B , de la siguiente forma

$$2G\vec{\delta} = \vec{A} - \nabla \left[B + \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{4(1-\mu)} \right] \quad (8.7.1)$$

Esta forma fue introducida por *Papkovich* en el año 1932 e independientemente por *Neuber* en 1934. Sin embargo, fue *Mindlin* quien la relacionó con el vector de *Galerkin* en 1936.

Se puede comprobar que tal expresión, que recibe el nombre de representación de *Neuber-Papkovich*, verifica la ecuación de Navier si

$$\Delta \vec{A} = 0 ; \quad \Delta B = 0 \quad (8.7.2)$$

es decir, si tanto el campo vectorial \vec{A} como la función escalar B se definen mediante funciones armónicas.

Que la representación de *Neuber-Papkovich* está relacionada con el vector de *Galerkin* es evidente. En efecto, si en la solución general (5.4.5) de la ecuación de Navier mediante el vector de *Galerkin*

$$2G\vec{\delta} = 2(1-\mu)\Delta\vec{P} - \nabla \operatorname{div} \vec{P}$$

hacemos

$$\Delta\vec{P} = \frac{1}{2(1-\mu)}\vec{A} ; \quad \operatorname{div} \vec{P} = B \quad (8.7.3)$$

ésta se reduce a

$$2G\vec{\delta} = \vec{A} - \Delta B \quad (8.7.4)$$

Tomando gradientes en la segunda ecuación (8.7.3) y divergencias en la expresión que resulta, se tiene

$$\nabla \operatorname{div} \vec{P} = \nabla B \quad (8.7.5)$$

$$\operatorname{div} \nabla \operatorname{div} \vec{P} = \Delta \operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div} \nabla B = \Delta B \quad (8.7.6)$$

o bien, simbólicamente, teniendo en cuenta la primera ecuación (8.7.3)

$$\Delta \nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot \Delta \vec{P} = \Delta B = \nabla \cdot \frac{\vec{A}}{2(1-\mu)} \quad (8.7.7)$$

Ahora bien, si se considera la identidad

$$\Delta(\vec{A} \cdot \vec{r}) = 2 \nabla \cdot \vec{A} \quad (8.7.8)$$

en la que \vec{r} es el vector de posición de un punto genérico del medio elástico, la ecuación (8.7.7) adopta la siguiente forma:

$$\Delta B = \frac{2 \cdot \nabla \cdot \vec{A}}{4(1 - \mu)} = \Delta \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{4(1 - \mu)} \quad (8.7.9)$$

y admite como solución particular

$$B_1 = \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{4(1 - \mu)} \quad (8.7.10)$$

Su solución general será:

$$B_g = B + \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{4(1 - \mu)} \quad (8.7.11)$$

siendo B una función armónica arbitraria.

Vemos, pues, que la expresión del corrimiento (8.7.1)

$$2G\vec{\delta} = \vec{A} - \nabla \left[B + \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{4(1 - \mu)} \right]$$

es la solución general del problema elástico cuando se formula éste en desplazamientos, si el campo vectorial \vec{A} y el campo escalar B vienen definidos por funciones armónicas. Ambos campos están relacionados con el vector de Galerkin \vec{P} mediante las ecuaciones (8.7.3)

$$\vec{A} = 2(1 - \mu) \Delta \vec{P} ; \quad B = \text{div } \vec{P}$$

Por tanto, si se sustituyen en (8.7.1) cuatro funciones armónicas A_x, A_y, A_z y B , dicha ecuación verifica la ecuación de Navier. Sin embargo, estas cuatro ecuaciones no son completamente independientes. Se puede demostrar que en todo recinto convexo de un espacio tridimensional el número de funciones armónicas independientes se reduce a tres.

Esta forma de representar los desplazamientos como solución de la ecuación de Navier tiene una especial importancia en el tratamiento de problemas con simetría axial, en los casos en los que las funciones que definen las componentes del campo vectorial \vec{A} , así como la función escalar B , en coordenadas cilíndricas, son de la forma

$$A_\rho = A_\theta = 0 ; \quad A_z = A_z(\rho, z) \quad (8.7.12)$$

$$B = B(\rho, z) \quad (8.7.13)$$

Tal es el caso del estado tensional creado en un medio elástico semi-infinito limitado por un plano cuando se aplica una carga concentrada P en un punto de dicho plano perpendicularmente al mismo. Este caso es el llamado *problema de Boussinesq*.

Se parte de un campo vectorial \vec{A} y otro escalar B definidos mediante las ecuaciones

$$\vec{A} = 4(1 - \mu) \frac{k}{r} \vec{z}_0 \quad (8.7.14)$$

$$B = C L(1 - \mu) \quad (8.7.15)$$

siendo k y C constantes y r la distancia del punto 0 de aplicación de la carga a un punto genérico del medio

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (8.7.16)$$

Se comprueba que tanto el campo vectorial \vec{A} como el campo escalar B son armónicos, es decir:

$$\Delta \vec{A} = 0 ; \quad \Delta B = 0 \quad (8.7.17)$$

La representación de Neuber-Papkovich correspondiente

$$\vec{\delta} = \frac{4(1 - \mu)k}{2G} \frac{1}{r} \vec{z}_0 - \frac{1}{2G} \nabla \left[CL(r + z) \frac{kz}{r} \right] \quad (8.7.18)$$

que, evidentemente, verifica la ecuación de Navier, será la solución del *problema de Boussinesq* si las tensiones que de ella se deducen verifican las condiciones de contorno (Fig. 8.10), esto es:

- 1.º En todos los puntos del plano que limita el sólido semi-infinito se tiene que anular la tensión $\tau_{\rho z}$.
- 2.º En todos los puntos del mismo plano, salvo en el origen que coincide con el punto de aplicación de la carga P , se ha de anular la tensión σ_z .

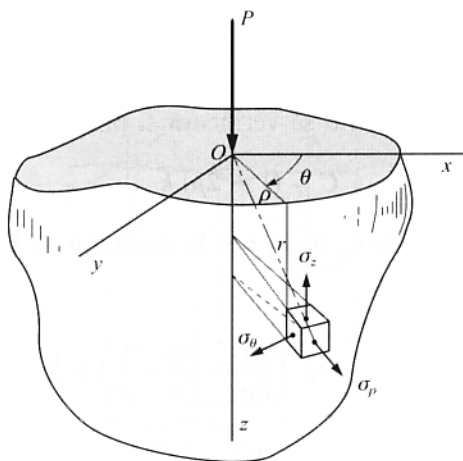


Figura 8.10.

De la ecuación (8.7.18) se deducen las componentes del vector corrimiento:

$$\begin{cases} u = -\frac{C}{2G} \frac{\rho}{r(r+z)} + \frac{k}{2G} \frac{z\rho}{r^3} \\ v = 0 \\ w = \frac{(3-4\mu)k-C}{2Gr} + \frac{kz^2}{2Gr^3} \end{cases} \quad (8.7.19)$$

A partir de estas ecuaciones obtenemos la expresión de la tensión tangencial $\tau_{\rho z}$

$$\tau_{\rho z} = G \gamma_{\rho z} = G \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (8.7.20)$$

Como

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = -\frac{(3-4\mu)k-C}{2G} \frac{1}{r^2} \frac{\rho}{r} - \frac{kz^2}{2G} \frac{3}{r^4} \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{2Gr^3} \left[-(3-4\mu)k + C - \frac{3kz^2}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{C\rho}{2G} \frac{2r \frac{z}{r} + r + z \frac{z}{r}}{r^2(r+z)^2} + \frac{k\rho}{2G} \frac{r^2 - z 3r^2 \frac{z}{r}}{r^6} = \frac{\rho}{2Gr^3} \left[C + k \left(1 - 3 \frac{z^2}{r^2} \right) \right]$$

sumando miembro a miembro, multiplicando por G , se tiene:

$$\tau_{\rho z} = \frac{\rho}{r^3} \left[C - (1-2\mu)k - 3k \frac{z^2}{r^2} \right] \quad (8.7.21)$$

La primera condición de contorno se verificará si para $z=0$; $\tau_{\rho z}=0$, es decir, si

$$C = (1-2\mu)k \quad (8.7.22)$$

Por otra parte, la expresión de σ_z dada por la ecuación de Lamé, teniendo en cuenta (8.5.3) y (8.4.5), será:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \lambda e + 2G \varepsilon_z = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{\rho} \right) + 2G \frac{\partial w}{\partial z} = \\ &= \frac{2G\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} \right) + \frac{2G(1-\mu)}{1-2\mu} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (8.7.23)$$

Si sustituimos las derivadas de las componentes de $\vec{\delta}$, operamos y simplificamos, obtenemos:

$$\sigma_z = -\frac{3k z^3}{r^5} \quad (8.7.24)$$

Vemos que esta expresión verifica la segunda condición de contorno, ya que en todos los puntos del plano $z = 0$ se anula σ_z , salvo en el origen que presenta una singularidad.

Para determinar el valor de la constante k plantearemos el equilibrio de fuerzas verticales sobre la porción del medio elástico comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = a$ (Fig. 8.11).

$$P - \int_0^\infty \frac{3kz^3}{r^5} 2\pi\rho d\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 6k\pi a^3 \int_0^\infty \frac{\rho}{r^3} d\rho$$

Haciendo el cambio de variable

$$\rho = a \operatorname{tg} \varphi ; \quad d\rho = \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

y como $r = \frac{a}{\cos \varphi}$, tenemos:

$$\begin{aligned} P &= 6k\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \frac{\cos^5 \varphi}{a^5} \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi = 6k\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 6k\pi \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\pi/2} = 2k\pi \end{aligned}$$

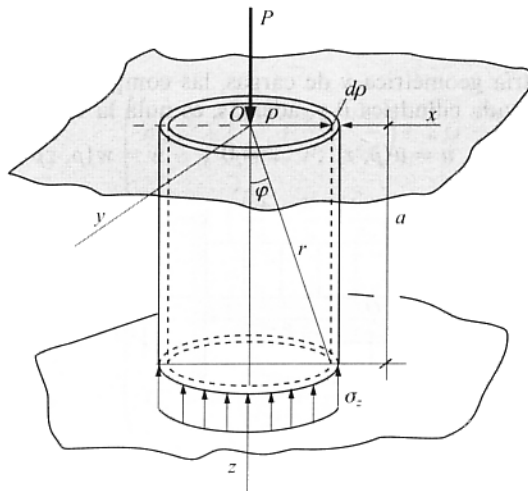


Figura 8.11.

de donde:

$$k = \frac{P}{2\pi} \quad (8.7.25)$$

y, por tanto, según (8.7.22):

$$C = \frac{(1 - 2\mu) P}{2\pi} \quad (8.7.26)$$

Una vez determinadas las constantes k y C , la solución de corrimientos del problema de Boussinesq es:

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{4\pi Gr} \left[\frac{z\rho}{r^2} - \frac{(1 - 2\mu)\rho}{r + z} \right] \\ v = 0 \\ w = \frac{P}{4\pi Gr} \left[2(1 - \mu) + \frac{z^2}{r^2} \right] \end{cases} \quad (8.7.27)$$

A partir de estas ecuaciones se pueden obtener sin ninguna dificultad, como ya se ha indicado, las matrices de tensiones y de deformación.

EJERCICIOS

- 8.1. Una placa circular horizontal, de radio R , espesor constante e y peso despreciable, se encuentra empotrada rígidamente en su contorno. Sobre la cara superior actúa una carga uniforme p por unidad de superficie.

Expresar las condiciones de contorno de la placa.

Debido a la simetría geométrica y de cargas, las componentes del vector corrimiento no depende de la coordenada cilíndrica θ y, además, es nula la componente circunferencial.

$$u = u(\rho, z); \quad v = 0; \quad w = w(\rho, z)$$

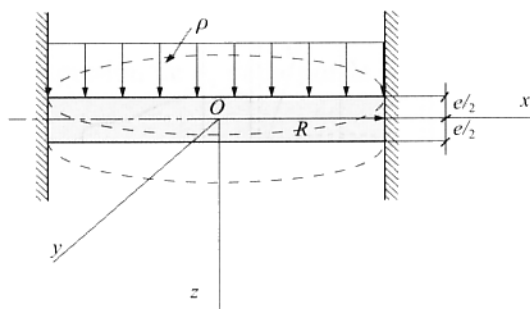


Figura E8.1.

Las componentes de la matriz de deformación se reducen a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u}{\partial \rho} & ; & \quad \gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} = 0 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{u}{\rho} & ; & \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & ; & \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno son de dos tipos:

- a) Condiciones de empotramiento.
- b) Condiciones de carga.

a) Las condiciones de empotramiento expresarán la nulidad del vector desplazamiento en sus puntos, así como la nulidad del giro.

$$\begin{aligned} u(R, z) &= 0 \\ w(R, z) &= 0 \\ \text{rot } \vec{\delta} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \vec{\theta}_0 = 0 \quad \text{para } \rho = R \end{aligned}$$

b) Como se trata de un estado axilsimétrico de carga, la matriz de tensiones carece de los términos $\tau_{\rho\theta}$ y $\tau_{\theta z}$.

Sus componentes, en virtud de las ecuaciones de Lamé, tendrán por expresiones:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_\rho &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial \rho} \\ \sigma_\theta &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{u}{\rho} \\ \sigma_z &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{\rho z} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right.$$

Las condiciones de contorno debidas a las cargas superficiales aplicadas se expresarán de la siguiente forma:

— En la cara $z = -\frac{e}{2}$

$$\begin{aligned}\tau_{\rho z} = 0 &\Rightarrow G\gamma_{\rho z} = G\left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=-\frac{e}{2}} = 0 \\ \sigma_z = p &\Rightarrow \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right)_{z=-\frac{e}{2}} + 2G\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{z=-\frac{e}{2}} = -p\end{aligned}$$

— En la cara $z = \frac{e}{2}$

$$\begin{aligned}\tau_{\rho z} = 0 &\Rightarrow G\gamma_{\rho z} = G\left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=\frac{e}{2}} = 0 \\ \sigma_z = 0 &\Rightarrow \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right)_{z=\frac{e}{2}} + 2G\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{z=\frac{e}{2}} = 0\end{aligned}$$

8.2. Determinar el vector desplazamiento y la matriz de tensiones en los puntos de un medio elástico de módulo de elasticidad transversal G , tal que la solución del problema elástico creado en el mismo por una sollicitación exterior viene dada por el potencial de deformación de Lamé

$$\phi = C\rho^n \cos n\theta$$

siendo C y n constantes.

Si ϕ es un potencial de deformación de Lamé, se comprueba, en efecto, que la función dada es armónica. El vector desplazamiento verifica:

$$2G\vec{\delta} = \nabla \phi$$

Teniendo en cuenta la expresión (8.1.1) del gradiente en coordenadas cilíndricas, las componentes de $\vec{\delta}$ serán:

$$\vec{\delta} \begin{cases} u = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{Cn}{2G} \rho^{n-1} \cos n\theta \\ v = \frac{1}{2G\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{Cn}{2G} \rho^{n-1} \sin n\theta \\ w = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

A partir de los desplazamientos calculamos las deformaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{Cn(n-1)}{2G} \rho^{n-2} \cos n\theta \\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{Cn}{2G} \rho^{n-2} \cos n\theta - \frac{Cn^2}{2G} \rho^{n-2} \cos n\theta = \frac{Cn(1-n)}{2G} \rho^{n-2} \cos n\theta \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} = -\frac{Cn^2}{2G} \rho^{n-2} \sin n\theta - \frac{Cn(n-1)}{2G} \rho^{n-2} \sin n\theta + \\ \quad + \frac{Cn}{2G} \rho^{n-2} \sin n\theta = -\frac{Cn(n-1)}{G} \rho^{n-2} \sin n\theta \\ \gamma_{\rho z} = \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{\theta z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Finalmente, las componentes de la matriz de tensiones se obtienen aplicando las ecuaciones de Lamé. Como la dilatación cúbica unitaria es nula.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\rho = 2G\varepsilon_\rho = Cn(n-1)\rho^{n-2} \cos n\theta \\ \sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta = -Cn(n-1)\rho^{n-2} \cos n\theta \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = G\gamma_{\rho\theta} = -Cn(n-1)\rho^{n-2} \sin n\theta \\ \tau_{\rho z} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

Se trata, pues, de un estado de deformación plana cuya matriz de tensiones tiene de componentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\rho = Cn(n-1)\rho^{n-2} \cos n\theta \\ \sigma_\theta = -Cn(n-1)\rho^{n-2} \cos n\theta \\ \tau_{\rho\theta} = -Cn(n-1)\rho^{n-2} \sin n\theta \\ \sigma_z = \tau_{\rho z} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

- 8.3. Hallar la matriz de tensiones que se deduce del potencial de deformación de Lamé, expresado en coordenadas cilíndricas:

$$\phi = CL \frac{\rho}{k}$$

siendo C y k constantes. (L indica logaritmo neperiano.)

Se comprueba que el potencial de deformación de Lamé es una función armónica $\Delta\phi = 0$. Como el corrimiento $\vec{\delta}$ deriva del potencial ϕ

$$2G\vec{\delta} = \nabla\phi = \frac{C}{\rho}\vec{p}_0 \Rightarrow u = \frac{C}{2G\rho}; \quad v = w = 0$$

Aplicando las ecuaciones que nos dan las deformaciones en función de las componentes del vector corrimiento, se tiene:

$$e_\rho = -\frac{C}{2G}\frac{1}{\rho^2}; \quad e_\theta = \frac{C}{2G}\frac{1}{\rho^2}; \quad e_z = \gamma_{\rho\theta} = \gamma_{\rho z} = \gamma_{\theta z} = 0$$

Por las ecuaciones de Lamé, teniendo en cuenta que la dilatación cúbica unitaria es nula, las expresiones de las tensiones serán:

$$\sigma_\rho = -\frac{C}{\rho^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{C}{\rho^2}; \quad \sigma_z = \tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho z} = \tau_{\theta z} = 0$$

Por tanto, la matriz de tensiones pedidas es:

$$[T] = \begin{pmatrix} -\frac{C}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 8.4. Dada una función de Love $\phi = \phi(\rho, z)$, se pide expresar en función de ϕ :

- 1.º El invariante lineal de la matriz de tensiones.
- 2.º La dilatación cúbica unitaria e .

1.º Para una función de Love que no dependa de θ , las tensiones normales vienen dadas por las ecuaciones (8.6.8).

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \end{cases}$$

El invariante lineal Θ de la matriz de tensiones lo obtenemos sumando miembro a miembro estas tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}\Theta = \sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi + 2\Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi + 2\Delta \phi - \Delta \phi \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + \mu) \Delta \phi \right)\end{aligned}$$

es decir:

$$\Theta = (1 + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \Delta \phi$$

2.º Para el cálculo de la dilatación cúbica unitaria sumaremos miembro a miembro las expresiones de las deformaciones en función de las tensiones dadas por las leyes de Hooke:

$$e = \varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\Theta - 2\mu \Theta] = \frac{1 - 2\mu}{E} \Theta$$

y teniendo en cuenta la expresión de Θ obtenida anteriormente, sustituyendo, se obtiene:

$$e = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \phi$$

8.5. Dada la función de Love en coordenadas cilíndricas

$$\phi = 3z^3 + \frac{5}{3} \rho^2$$

1.º Comprobar qué es una función biarmónica.

2.º Hallar la solución de tensiones que de ella se deduce.

3.º Calcular las componentes del vector corrimiento en función de sus coordenadas cilíndricas.

1.º Calculemos primeramente la laplaciana de la función de Love

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{20}{3} + 18z$$

La bilaplaciana será:

$$\Delta^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{20}{3} + 18z \right) = 0$$

Queda comprobado, por tanto, que la función dada es una función biarmónica.

2.º La solución de tensiones se obtiene directamente aplicando las fórmulas (8.6.8), ya que la función de Love dada resuelve el problema elástico en un estado axilsimétrico en el que se anula la componente circunferencial del vector corrimiento.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{20}{3} + 18z \right) - \frac{10}{3} \right] = 18 \mu \\ \sigma_{\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{20}{3} + 18z \right) - \frac{10}{3} \right] = 18 \mu \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \left(\frac{20}{3} + 18z \right) - 18z \right] = 18(1 - \mu) \\ \tau_{\rho z} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1 - \mu) \left(\frac{20}{3} + 18z \right) - 18z \right] = 0 \\ \tau_{\rho \theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = \sigma_{\theta} = 18 \mu \\ \sigma_z = 18(1 - \mu) \\ \tau_{\rho z} = 0 \\ \tau_{\rho \theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

3.º Aplicando (8.6.4), se tiene:

$$u = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial z} = -\frac{1 + \mu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial z} = 0$$

$$w = \frac{1 + \mu}{E} \left[2(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = \frac{1 + \mu}{E} \left[2(1 - \mu) \left(\frac{20}{3} + 18z \right) - 18z \right]$$

Las componentes del vector corrimiento son, pues

$$u = v = 0 ; \quad w = \frac{1 + \mu}{E} \left[\frac{40}{3} (1 - \mu) + 18(1 - 2\mu)z \right]$$

8.6. Un cilindro de revolución de radio $R = 25$ cm, de peso despreciable y altura $h = 150$ cm está sometido a una sollicitación exterior que presenta simetría axial. Las fuerzas exteriores están aplicadas en la superficie lateral, normalmente a ella, originando una distribución de tensiones que varían linealmente con la altura, de la forma que se indica en la Figura E8.6.

Sabiendo que el coeficiente de Poisson vale $\mu = 0,1$ y que la función de tensiones es un polinomio de cuarto grado, se pide:

- 1.º Determinar la función de Love.
- 2.º Deducir las expresiones de las tensiones en un punto cualquiera del cilindro.
- 3.º Hallar la dilatación cúbica e .

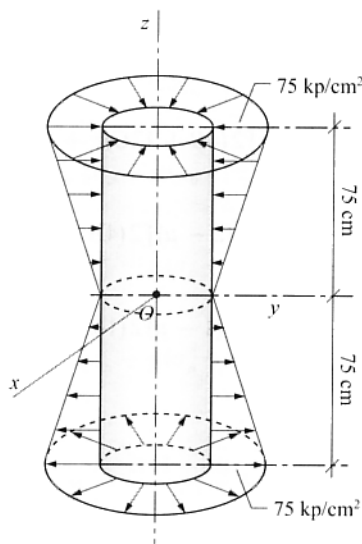


Figura E8.6.

1.º Por presentar simetría axial el cuerpo elástico que se considera, la función de Love ϕ es independiente de la coordenada θ . Por otra parte, como al cambiar ρ en $-\rho$ la función ϕ no varía, la expresión polinómica de ϕ tiene que carecer de términos impares en ρ . Sea ésta:

$$\phi = A \rho^4 + B \rho^2 z^2 + C z^4 + D \rho^2 z + E z^3$$

habiendo prescindido de los términos de segundo grado por no intervenir en la solución de tensiones.

La laplaciana de ϕ es:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = (16A + 2B) \rho^2 + (4B + 12C) z^2 + (4D + 6E) z$$

La condición de biarmonicidad nos da la ecuación:

$$\Delta^2 \phi = 2(16A + 2B) + 2(16A + 2B) + 2(4B + 12C) = 0$$

es decir, simplificando:

$$8A + 2B + 3C = 0 \quad (1)$$

relación que tienen que verificar necesariamente los coeficientes.

Las otras ecuaciones que permiten calcular los coeficientes las obtenemos al imponer las condiciones de contorno a las tensiones que se deducen de ϕ , según se desprende de (8.6.8).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right) = \mu [2(4B + 12C)z + 4D + 6E] - (4Bz + 2D) \\ \sigma_{\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = \mu [2(4B + 12C)z + 4D + 6E] - (4Bz + 2D) \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = (2 - \mu) [2(4B + 12C)z + 4D + 6E] - (24Cz + 6E) \\ \tau_{\rho z} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = (1 - \mu) 2(16A + 2B)\rho - 4B\rho \\ \tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

Condiciones de contorno:

- Para $\rho = 25$ cm; $\sigma_{\rho} = -z$ kp/cm²; $\tau_{\rho z} = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} = -z &\Rightarrow -z = \mu [2(4B + 12C)z + 4D + 6E] - 4Bz - 2D \\ &\Rightarrow \begin{cases} -1 = 2\mu(4B + 12C) - 4B \\ 0 = 4\mu D + 6\mu E - 2D \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tau_{\rho z} = 0 \Rightarrow 0 = 2(1 - \mu)(16A + 2B) - 4B \quad (4)$$

- Para $z = \pm 75$; $\sigma_z = 0$; $\tau_{\sigma z} = 0$

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow 0 = (2 - \mu) [\pm 150(4B + 12C) + 4D + 6E] \mp 24 \cdot 75C - 6E = 0 \quad (5)$$

$$\tau_{\rho z} = 0 \Rightarrow 2(1 - \mu)(16A + 2B) - 4B = 0 \quad (6)$$

El sistema formado por las ecuaciones de (1) a (6) es compatible y determinado. Resolviéndolo se obtienen las soluciones:

$$A = \frac{1}{352}; \quad B = \frac{9}{44}; \quad C = -\frac{19}{132}; \quad D = E = 0$$

La función de tensiones de Love será:

$$\phi = \frac{1}{352} \rho^4 + \frac{9}{44} \rho^2 z^2 - \frac{19}{132} z^4$$

2.º Sustituyendo los valores de los coeficientes en la solución de tensiones se obtiene ésta, válida en todos los puntos del cilindro

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \sigma_{\theta} = -z \\ \sigma_z &= \tau_{\rho z} = \tau_{\theta z} = \tau_{\rho\theta} = 0 \end{aligned}$$

3.º La dilatación cúbica unitaria es:

$$e = \varepsilon_{\rho} + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z$$

Sustituiremos las expresiones de las deformaciones en función de las tensiones, según las leyes de Hooke, y éstas en función de las coordenadas aplicando la solución de tensiones encontrada anteriormente

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{1}{E} [\sigma_\rho - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] = \frac{-z}{E} (1 - \mu) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_\rho + \sigma_z)] = \frac{-z}{E} (1 - \mu) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)] = \frac{2\mu z}{E} \end{cases}$$

$$e = \varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = -\frac{2z(1 - \mu)}{E} + \frac{2\mu z}{E} = -\frac{2(1 - 2\mu)}{E} z$$

- 8.7. Un cilindro de 50 cm de radio y 140 cm de altura, de fuerzas de masa nulas, está sometido a un estado axilsimétrico mediante la aplicación de unas fuerzas exteriores normales a su superficie lateral, que varían linealmente con la altura, como se indica en la Figura E8.7.

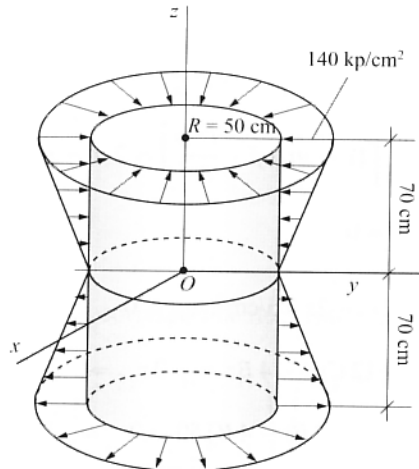


Figura E8.7.

Sabiendo que el estado elástico del cilindro admite una función de Love de tipo polinómico de cuarto grado, y que el coeficiente de Poisson toma el valor $\mu = 0,1$, se pide:

- 1.º Hallar la solución de tensiones en un punto cualquiera del cilindro.
- 2.º Calcular los vectores tensión en los puntos de coordenadas cilíndricas

$$A \left(24, \frac{\pi}{2}, 8\sqrt{3} \right), \quad B \left(24, \frac{\pi}{2}, -24\sqrt{3} \right)$$

correspondientes a los planos que admiten las rectas OA y OB , respectivamente, como líneas de máxima pendiente, respecto a la sección recta del cilindro.

Las coordenadas ρ y z están dados en cm.

1.º Por las mismas consideraciones de simetría que se han hecho en el ejercicio anterior, y teniendo en cuenta el resultado obtenido allí con el mismo tipo de sollicitación exterior, la función de Love que nos resuelve el problema elástico en el cilindro considerado será de la forma:

$$\phi = A \rho^4 + B \rho^2 z^2 + C z^4$$

La condición de biarmonicidad que tiene que cumplir esta función se traduce en la ecuación:

$$8A + 2B + 3C = 0$$

Las otras ecuaciones que permiten calcular los coeficientes A , B y C , las obtenemos al imponer que las tensiones que se deducen de ϕ , según (8.6.8), verifican las condiciones de contorno.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right) = 2\mu(4B + 12C)z - 4Bz \\ \sigma_{\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 2\mu(4B + 12C)z - 4Bz \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = 2(2 - \mu)(4B + 12C)z - 24Cz \\ \tau_{\rho z} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \left[(1 - \mu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = 2(1 - \mu)(16A + 2B)\rho - 4B\rho \\ \tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{array} \right.$$

- Para $\rho = 50$ cm; $\sigma_{\rho} = -2z$ kp/cm²; $\tau_{\rho z} = 0$

$$\sigma_{\rho} = 2\mu(4B + 12C)z - 4Bz = -2z \Rightarrow 2\mu(4B + 12C) - 4B = -2 \quad (2)$$

$$\tau_{\rho z} = [2(1 - \mu)(16A + 2B) - 4B]50 = 0 \Rightarrow 2(1 - \mu)(16A + 2B) - 4B = 0 \quad (3)$$

- Para $z = \pm 70$ cm; $\sigma_z = 0$; $\tau_{\rho z} = 0$

$$\sigma_z = 2z[(2 - \mu)(4B + 12C) - 12C] = 0 \Rightarrow (2 - \mu)(4B + 12C) - 12C = 0 \quad (4)$$

$$\tau_{\rho z} = [2(1 - \mu)(16A + 2B) - 4B] = 0 \Rightarrow 2(1 - \mu)(16A + 2B) - 4B = 0 \quad (5)$$

Del sistema lineal de ecuaciones formado por las ecuaciones (1) a (5) se obtienen las soluciones:

$$A = \frac{1}{176} ; \quad B = \frac{9}{22} ; \quad C = -\frac{19}{66}$$

la función de Love será:

$$\phi = \frac{1}{176} \rho^4 + \frac{9}{22} \rho^2 z^2 - \frac{19}{66} z^4$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes en las expresiones de las tensiones se obtienen la solución de tensiones pedida, válida para cualquier punto del cilindro.

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = -2z \quad ; \quad \sigma_z = 0 \quad ; \quad \tau_{\rho z} = \tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = 0$$

2.º Respecto de la referencia local, el vector unitario \vec{u} normal al plano que tiene a la recta OA por línea de máxima pendiente, tiene de componentes (Fig. E8.7b).

$$\vec{u} \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

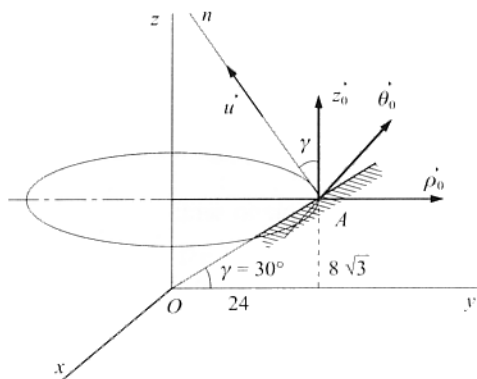


Figura E8.7a.

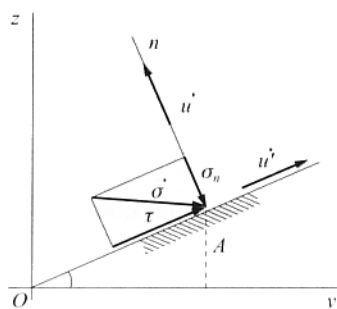


Figura E8.7b.

El vector tensión en el punto A correspondiente a este plano será

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}] = \begin{pmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & -2z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que su línea de acción se apoya en el eje de simetría del cilindro, es perpendicular a él y tiene de módulo $8\sqrt{3}$ kp/cm². Sus componentes intrínsecas son:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = [\vec{u}]^T \cdot [\vec{\sigma}] = -4\sqrt{3} \text{ kp/cm}^2 = -6,92 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = [\vec{u}']^T [\vec{\sigma}] = 12 \text{ kp/cm}^2$$

En el punto B , el vector unitario \vec{u} normal al plano que tiene a la recta OB por línea de máxima pendiente, tiene de componentes (Fig. E8.7c).

$$\vec{u} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

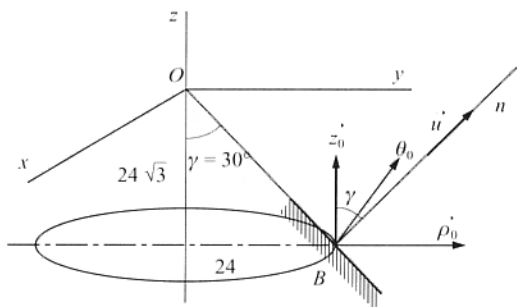


Figura E8.7c.

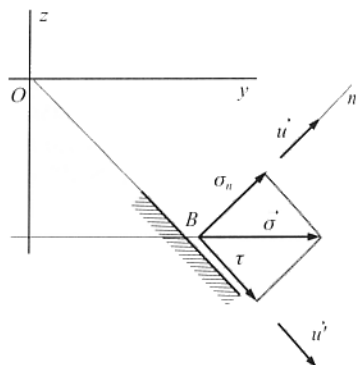


Figura E8.7d.

El vector tensión en el punto B correspondiente a este plano será:

$$[\vec{\sigma}] = [T] = [T][\vec{u}] = \begin{pmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & -2z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

También la línea de acción de este vector tensión se apoya en el eje de simetría del cilindro y es perpendicular a él. Su módulo es de 72 kp/cm^2 y tiene de componentes intrínsecas

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = [\vec{u}]^T [\vec{\sigma}] = 36\sqrt{3} \text{ kp/cm}^2 = 62,35 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = [\vec{u}']^T [\vec{\sigma}] = 36 \text{ kp/cm}^2$$

es decir

$$\sigma_n = 62,35 \text{ kp/cm}^2 ; \quad \tau = 36 \text{ kp/cm}^2$$

8.8. Una determinada sollicitación exterior aplicada al sólido elástico que tiene la forma indicada en la Figura E8.8 crea un estado tensional axilsimétrico cuya función de Love es

$$\phi = 3z^3 + \frac{5}{3} \rho^2$$

Conociendo el coeficiente de Poisson μ , se pide:

- 1.º Calcular la matriz de tensiones en cualquier punto del sólido.
- 2.º Dibujar las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en el contorno.

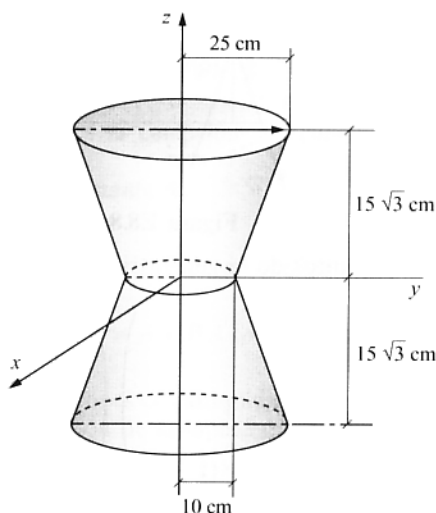


Figura E8.8.

La matriz de tensiones del estado cuyo problema elástico se resuelve con la función de Love dada ha sido hallada en el Ejercicio 8.5.

$$[T] = \begin{pmatrix} 8\mu & 0 & 0 \\ 0 & 18\mu & 0 \\ 0 & 0 & 18(1 - \mu) \end{pmatrix}$$

El vector unitario normal a la base es \vec{u} (0, 0, 1). El vector tensión en cualquier punto de la misma es:

$$[\vec{\sigma}] = [T][\vec{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18(1 - \mu) \end{pmatrix}$$

es decir, sobre las caras superior e inferior del sólido elástico que se considera actúan tensiones de tracción de valor constante igual a $18(1 - \mu)$.

Para calcular las fuerzas de superficie sobre el área lateral, consideremos un plano tangente, cuyo vector unitario en un plano meridiano (Fig. E8.8a). Las componentes de \vec{u} respecto de la terna de vectores de base de las coordenadas cilíndricas son:

$$\vec{u}' \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

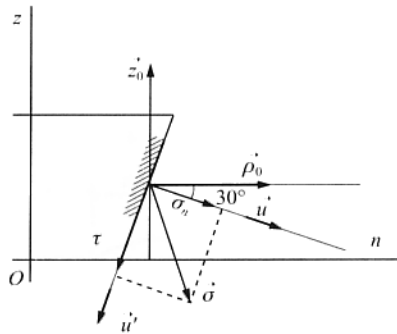


Figura E8.8a.

El vector tensión en los puntos de la generatriz indicada es:

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} 18\mu & 0 & 0 \\ 0 & 18\mu & 0 \\ 0 & 0 & 18(1-\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\mu\sqrt{3} \\ 0 \\ -9(1-\mu) \end{pmatrix}$$

Sus componentes intrínsecas son:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = \frac{27\mu}{2} + \frac{9(1-\mu)}{2} = \frac{9(1+2\mu)}{2}$$

$$\tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' = -\frac{9\mu\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}(1-\mu)}{2} = \frac{9\sqrt{3}(1-2\mu)}{2}$$

Con estos resultados y teniendo en cuenta las simetrías, se representan en la misma Figura E8.8b la distribución de tensiones normales (a la derecha) y tangenciales (a la izquierda) en los puntos del contorno de una sección meridiana del sólido de revolución dado.

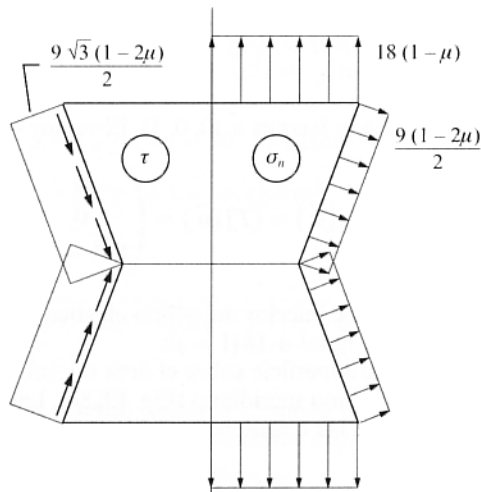


Figura E8.8b.

- 8.9. El estado elástico creado en un medio infinito por una carga concentrada $2P$ que actúa en un punto interior del mismo, se puede resolver mediante una función de Love de la forma

$$\phi = A r$$

siendo A una constante y r la distancia existente entre el punto O de aplicación de la carga y un punto genérico del medio (problema de Kelvin).

1.º Comprobar que se verifica la condición de contorno de ser nulas las tensiones en el infinito.

2.º Calcular el valor de la constante A .

1.º Expresemos la función de Love dada en coordenadas cilíndricas

$$\phi = A r = A (\rho^2 + z^2)^{1/2}$$

Para calcular la matriz de tensiones en cualquier punto del medio infinito que se considera, calculemos previamente la expresión de la laplaciana de la función de Love.

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 2A (\rho^2 + z^2)^{-1/2}$$

La solución de tensiones se obtiene aplicando las ecuaciones (8.6.7).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} \right) = A \left[\frac{(1-2\mu)}{r^3} - \frac{2\rho^2 z}{r^5} \right] \\ \sigma_{\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta\phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right) = \frac{A(1-2\mu)z}{r^3} \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\mu) \Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right] = -A \left[\frac{(1-2\mu)z}{r^3} + \frac{3z^3}{r^5} \right] \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial^3}{\partial\rho \partial\theta \partial z} \left(\frac{\phi}{\rho} \right) = 0 \\ \tau_{\theta z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[(1-\mu) \Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right] = 0 \\ \tau_{\rho z} = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \left[(1-\mu) \Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right] = -A \left[\frac{(1-2\mu)\rho}{r^3} + \frac{3z^2\rho}{r^5} \right] \end{array} \right.$$

De la simple observación de estas ecuaciones se deduce que la solución de tensiones es singular en el origen y se anula en el infinito, c.q.d.

2.º Consideremos la porción de medio comprendida entre dos planos paralelos de ecuaciones $z = \pm h$ (Fig. E8.9b).

El equilibrio de esta porción del medio exige que la proyección sobre el eje z de las fuerzas $2P$ y las engendradas por las tensiones normales σ_z en las superficies de los planos superior e inferior sea nula.

$$2P - \int_0^\infty 2\pi\rho |(\sigma_z)_{z=-h}| d\rho - \int_0^\infty 2\pi\rho |(\sigma_z)_{z=+h}| d\rho = 0$$

$$2P - 2A \cdot 2\pi \int_0^\infty \rho \frac{(1-2\mu)h}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} d\rho - \int_0^\infty \rho \frac{3h^3}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} d\rho = 0$$

$$2P - 4\pi A \left\{ (1-2\mu)h \left[-(\rho^2 + h^2)^{-1/2} \right]_0^\infty + 3h^3 \left[-\frac{1}{3}(\rho^2 + h^2)^{-3/2} \right]_0^\infty \right\} = 0$$

Simplificando, se obtiene:

$$A = \frac{P}{4\pi(1-\mu)}$$

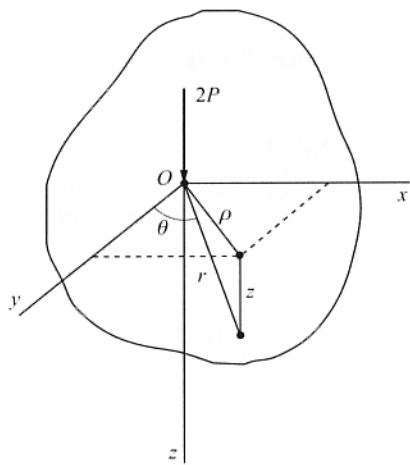


Figura E8.9a.

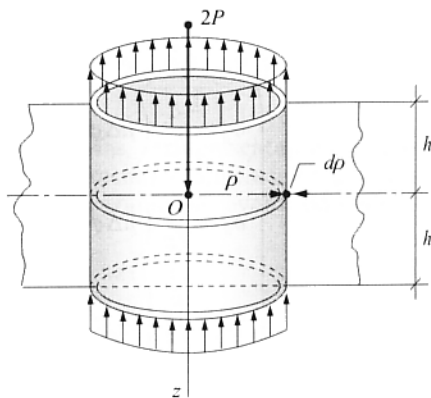


Figura E8.9b.

Elasticidad bidimensional en coordenadas polares

9.1. Estado de deformación plana

En el Capítulo 6 hemos definido los estados de deformación plana y de tensión plana. En ambos estados hemos formulado el problema elástico en coordenadas cartesianas. Trataremos ahora de formular el mismo problema cuando sea aconsejable, a la vista de la forma y simetrías del sólido elástico y del sistema de fuerzas aplicadas, adoptar un sistema de referencia de coordenadas polares.

En un estado de *deformación plana*, según vimos, las componentes del vector desplazamiento son:

$$u = u(\rho, \theta); \quad v = v(\rho, \theta); \quad w = 0 \quad (9.1.1)$$

Las deformaciones se obtienen de forma inmediata particularizando las expresiones (8.4) correspondientes, teniendo en cuenta las relaciones anteriores.

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}; & \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta}; & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho}; & \gamma_{\theta z} = \gamma_{\rho z} = 0 \end{cases} \quad (9.1.2)$$

Como consecuencia de ser nulas $\gamma_{\theta z}$ y $\gamma_{\rho z}$ se anulan las tensiones $\tau_{\theta z}$ y $\tau_{\rho z}$. Por otra parte, de la ecuación $\varepsilon_z = 0$, en virtud de la ley de Hooke, se deduce:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)] = 0 \Rightarrow \sigma_z = \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)$$

Por tanto, las leyes de Hooke en coordenadas polares en el caso de deformación plana toman la forma:

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{1}{E} [\sigma_\rho - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] = \frac{1 + \mu}{E} [(1 - \mu)\sigma_\rho - \mu\sigma_\theta] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_\rho + \sigma_z)] = \frac{1 + \mu}{E} [(1 - \mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_\rho] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)] = 0 \\ \gamma_{\rho\theta} = \frac{\tau_{\rho\theta}}{G}; \quad \gamma_{\theta z} = \gamma_{\rho z} = 0 \end{cases} \quad (9.1.3)$$

Sobre las caras que limitan el entorno elemental de un punto existirán, en general, las tensiones que se indican en la Figura 9.1, en la que se han representado todas las magnitudes positivas.

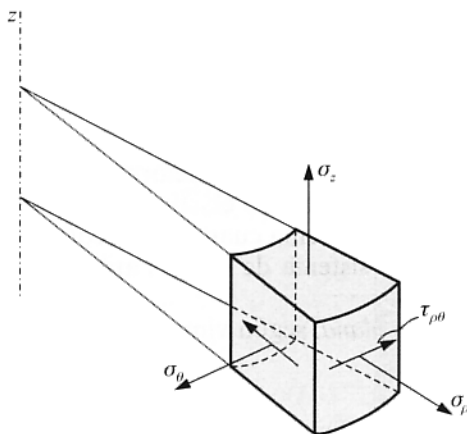


Figura 9.1.

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen particularizando las ecuaciones (8.2.1) de coordenadas cilíndricas al caso de coordenadas polares. Si $\vec{f}_v(F_\rho, F_\theta, 0)$ son las fuerzas de masa, estas ecuaciones se reducen a:

$$\begin{cases} F_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \\ F_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + 2 \frac{\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0 \end{cases} \quad (9.1.4)$$

La ecuación de compatibilidad se obtiene también de forma inmediata apoyándonos en la obtenida en coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta que

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\rho + \sigma_\theta$$

en virtud del invariante lineal de la matriz de tensiones, del hecho que σ_z es la misma en los dos sistemas de referencia y ambos (cartesianas y cilíndricas) son trirrectangulares.

La ecuación (6.3.7) se convierte en:

$$\Delta(\sigma_\rho + \sigma_\theta) = -\frac{1}{1-\mu} \operatorname{div} \vec{f}_v \quad (9.1-5)$$

en donde los operadores laplaciana y divergencia vienen dados por las expresiones (8.1.2) y (8.1.4), particularizadas para coordenadas cilíndricas planas:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (9.1.6)$$

$$\operatorname{div} \vec{f}_v = \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{F_\rho}{\rho} \quad (9.1.7)$$

En el caso de fuerzas de masa constantes o nulas, la ecuación (9.1.5), se reduce a

$$\Delta(\sigma_\rho + \sigma_\theta) = 0 \quad (9.1.8)$$

9.2. Estado tensional plano

Se diferencia del estado de deformación plana, según vimos, en que ahora w no es nula, sino función de la coordenada que se mide en dirección perpendicular al plano director, es decir, $w = w(z)$. Las otras dos componentes siguen siendo independientes de esta coordenada

$$u = u(\rho, \theta); \quad v = v(\rho, \theta); \quad w = w(z) \quad (9.2.1)$$

Las deformaciones, salvo ε_z , tienen las mismas expresiones que en el caso de deformación plana, es decir:

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}; & \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta}; & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho}; & \gamma_{\theta z} = \gamma_{\rho z} = 0 \end{cases} \quad (9.2.2)$$

También aquí se anulan las tensiones $\tau_{\theta z}$ y $\tau_{\rho z}$, así como σ_z , por lo que las leyes de Hooke serán:

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\rho) \\ \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_\rho + \sigma_\theta) \\ \gamma_{\rho\theta} = \frac{\tau_{\rho\theta}}{G}; & \gamma_{\theta z} = \gamma_{\rho z} = 0 \end{cases} \quad (9.2.3)$$

Al ser $\sigma_z = 0$, todas las tensiones que actúan sobre el volumen elemental estarán contenidas en el plano director, por lo que será posible una representación plana, como la indicada en la Figura 9.2.

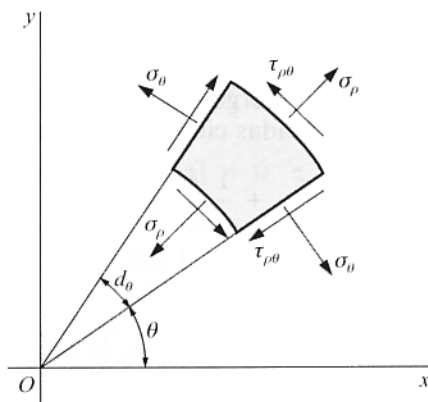


Figura 9.2.

Las ecuaciones de equilibrio interno son las mismas (9.1.4) del caso de deformación plana.

En cuanto a la ecuación de compatibilidad que corresponde al estado de tensión plana, haciendo las mismas consideraciones hechas anteriormente se llega a:

$$\Delta(\sigma_\rho + \sigma_\theta) = -(1 + \mu) \operatorname{div} \vec{f}_v \quad (9.2.4)$$

ecuación que en el caso de ser constantes o nulas las fuerzas de masa se reduce a

$$\Delta(\sigma_\rho + \sigma_\theta) = 0 \quad (9.2.5)$$

Vemos, pues, que si las fuerzas de masa son nulas, constantes o, aun siendo variables, se anula su divergencia, la ecuación de compatibilidad en los estados de deformación plana y en los de tensión plana es la misma.

9.3. Función de tensiones en coordenadas polares

En los casos de estados de deformación plana o de tensión plana en los que se anule la divergencia de las fuerzas de masa se puede obtener la solución de tensiones a partir de una función de Airy $\phi = \phi(\rho, \theta)$, de la que se deducen las tensiones de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (9.3.1)$$

Se comprueba que estas tensiones verifican idénticamente las ecuaciones (9.1.4) de equilibrio interno. En efecto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta^2 \partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} &= \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta^2 \partial \rho} \\ \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right) \end{aligned} \right\} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} \equiv 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \rho^2 \partial \theta} \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} &= -\frac{2}{\rho^3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \rho^2 \partial \theta} \\ 2 \frac{\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \theta} \end{aligned} \right\} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + 2 \frac{\tau_{\rho\theta}}{\rho} \equiv 0$$

Para que cumpla la condición de compatibilidad (9.1.8) o (9.2.5), se tiene que verificar:

$$\Delta(\sigma_\rho + \sigma_\theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

es decir, la función ϕ ha de ser biarmónica

$$\Delta^2 \phi = 0 \quad (9.3.2)$$

La resolución del problema elástico en casos de deformación plana o tensión plana se reduce, pues, a encontrar una función $\phi = \phi(\rho, \theta)$ que sea biarmónica y las tensiones que de ella se deducen, dadas por las ecuaciones (9.3.1), satisfagan las condiciones de equilibrio en el contorno.

9.4. Distribución simétrica de tensiones respecto a un eje en casos de deformación o de tensión planas, sin fuerzas de masa

Supongamos que tenemos un sólido elástico con simetría axial tal que la distribución de fuerzas exteriores nos permita afirmar que se trata de un caso de deformación plana o de tensión plana, cuyas tensiones presentan simetría respecto a dicho eje. En este caso las tensiones dependen exclusivamente de ρ , por lo que la función de Airy será de la forma $\phi = \phi(\rho)$.

La condición de compatibilidad se reduce a:

$$\Delta^2 \phi = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} \right) = 0 \quad (9.4.1)$$

Desarrollando, se obtiene:

$$\Delta^2 \phi = \frac{d^4 \phi}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 \phi}{d\rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{d\phi}{d\rho} = 0 \quad (9.4.2)$$

ecuación diferencial, que se resuelve haciendo el cambio de variable $\rho = e^t$, o lo que es lo mismo $t = L\rho$, obteniendo:

$$\frac{d^4 \phi}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \phi}{dt^3} + 4 \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0 \quad (9.4.3)$$

ecuación diferencial homogénea de cuarto orden de coeficientes constantes. Su ecuación característica $r^4 - 4r^3 + 4r^2 = 0$ tiene de raíces

$$r_1 = r_2 = 0; \quad r_3 = r_4 = 2$$

por lo que su ecuación integral será:

$$\phi = At + D + (Bt + C) e^{2t} \quad (9.4.4)$$

Teniendo en cuenta que $t = L\rho$, la función de Airy en función de ρ , resulta ser:

$$\phi = AL\rho + B\rho^2 L\rho + C\rho^2 + D \quad (9.4.5)$$

en la que A, B, C, D , son constantes de integración.

La solución de tensiones que se deduce de esta función de Airy es:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2L\rho) + 2C \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2L\rho) + 2C \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \quad (9.4.6)$$

La solución obtenida es válida tanto para un estado de deformación plana como tensional plano. La diferencia estriba en que en el primer caso σ_z existe y tiene de valor $\sigma_z = \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)$, mientras que en el segundo $\sigma_z = 0$.

Las constantes de integración se determinarán en cada caso imponiendo las condiciones de contorno.

Para calcular las deformaciones no resulta difícil obtener las componentes del vector corrimiento integrando las ecuaciones diferenciales que se obtienen al igualar las deformaciones dadas por las leyes de Hooke en función de las tensiones [ecuaciones (9.1.3) en casos de deformación plana, o ecuaciones (9.2.3) en estados de tensión plana], a las expresiones de éstas en función de u y v .

9.5. Análisis elástico de una tubería cilíndrica de pared gruesa sometida a presión

Consideremos ahora una tubería de pared gruesa, cuya sección recta es una corona circular de radios R_1 y R_2 , sometida a presión interior uniforme p_1 y presión exterior p_2 , también uniforme (Fig. 9.3).

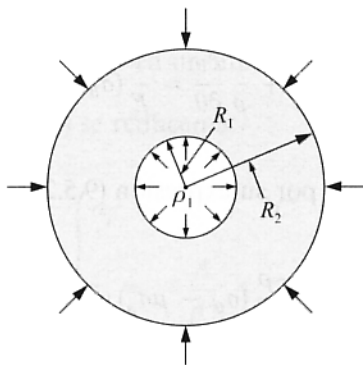


Figura 9.3.

Es evidente que por la simetría de forma y de sollicitación externa que presenta la tubería en estas condiciones, el estado elástico de la misma será de deformación plana en el caso que los extremos estuvieran fijos, y de tensión plana en el caso que estuvieran libres. En ambos casos existe plano director, perpendicular al eje de la tubería.

Podemos aplicar lo expuesto en el epígrafe anterior, es decir, la solución de tensiones será de la forma

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2L\rho) + 2C \\ \sigma_\theta = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2L\rho) + 2C \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \quad (9.5.1)$$

Veamos que la constante de integración B debe ser nula. Para ello consideremos los desplazamientos, suponiendo que el estado elástico es de tensión plana. Si se tratara de deformación plana el razonamiento es el mismo, así como el resultado, aunque las fórmulas a utilizar sean distintas.

Así pues, sustituyendo los valores de las tensiones (9.5.1) en la primera ecuación (9.2.3), se tiene:

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{E}(\sigma_\rho - \mu\sigma_\theta) = \frac{1}{E} \left[\frac{(1 + \mu)A}{\rho^2} + 2B(1 - \mu)L\rho + (1 - 3\mu)B + 2(1 - \mu)C \right]$$

de donde integrando:

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1 + \mu)A}{\rho} + 2(1 - \mu)B\rho L\rho + (1 + \mu)B\rho + 2(1 - \mu)C\rho \right] + f(\theta) \quad (9.5.2)$$

siendo $f(\theta)$ una función que depende exclusivamente de θ .

De la ecuación que se obtiene al igualar las dos expresiones de ε_θ de (9.2.2) y (9.2.3)

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\rho)$$

se puede despejar $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ y sustituir u por su expresión (9.5.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\rho}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\rho) - u = \\ &= \frac{1}{E} \left[-\frac{(1 + \mu)A}{\rho} + 2(1 - \mu)B\rho L\rho + (3 - \mu)B\rho + 2(1 - \mu)C\rho \right] - u = \\ &= \frac{4B\rho}{E} - f(\theta) \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

Integrando, se tiene:

$$v = \frac{4B\rho}{E} \theta - \int f(\theta) d\theta + f_1(\rho) \quad (9.5.4)$$

siendo $f_1(\rho)$ una función que depende exclusivamente de ρ .

Ahora bien, como $\tau_{\rho\theta} = 0$ también se anula $\gamma_{\rho\theta}$. De la ecuación (9.2.2) correspondiente teniendo en cuenta las expresiones de u y v obtenidas, se deduce:

$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{df(\theta)}{d\theta} + \frac{df_1(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \int f(\theta) d\theta - \frac{f_1(\rho)}{\rho} = 0$$

Como se satisface en todos los puntos de la tubería, se habrá de verificar:

$$\frac{df_1(\rho)}{d\rho} - \frac{f_1(\rho)}{\rho} = 0; \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta) d\theta = 0$$

de donde se deduce:

$$f_1(\rho) = k_1 \rho \quad ; \quad f(\theta) = k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta$$

por lo que la expresión (9.5.4) de la componente v del vector corrimiento tomará la forma:

$$v = \frac{4B\rho}{E} \theta + k_1\rho + k_2 \cos \theta - k_3 \sin \theta \quad (9.5.5)$$

Sin necesidad de determinar las constantes arbitrarias de integración que aparecen en esta expresión vemos que B se tiene que anular, ya que el término $\frac{4B\rho}{E} \theta$ sería multiforme en cada punto de la tubería al aumentar θ en un número entero de 2π , lo que es físicamente absurdo.

Por tanto, las ecuaciones (9.5.1) se reducen a:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_\theta = -\frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \quad (9.5.6)$$

Determinemos los valores de las constantes de integración A y B . Las condiciones de contorno son:

$$(\sigma_\rho)_{\rho=R_1} = -p_1 \quad ; \quad (\sigma_\rho)_{\rho=R_2} = -p_2 \quad (9.5.7)$$

Imponiendo éstas, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{A}{R_1^2} + 2C = -p_1 \\ \frac{A}{R_2^2} + 2C = -p_2 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$A = -\frac{(p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad ; \quad 2C = \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (9.5.8)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (9.5.6) se obtienen las tensiones siguientes:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{(p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ \sigma_\theta = \frac{(p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \quad (9.5.9)$$

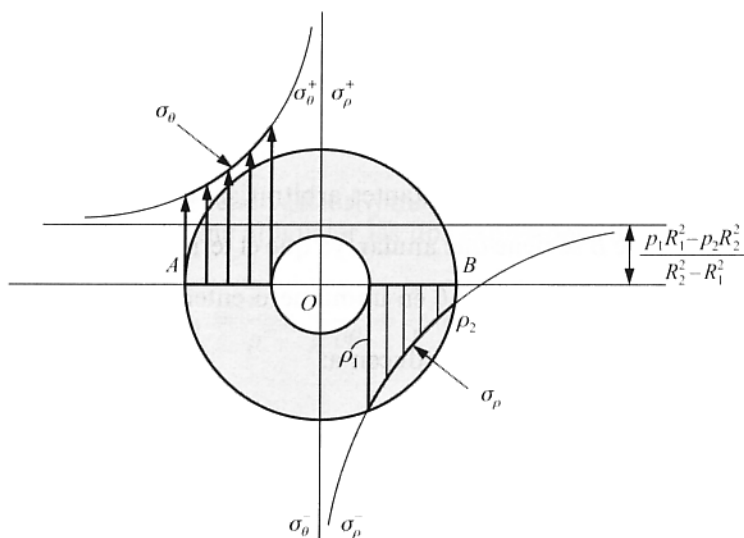


Figura 9.4.

En la Figura 9.4 se representa gráficamente la variación de las tensiones σ_ρ y σ_θ en los puntos de la recta diametral AB para tuberías de presión en las que $p_1 \gg p_2$.

De la figura se deduce que σ_ρ , por ser negativa en todos los puntos, es de compresión, mientras que σ_θ es positiva y, por tanto, de tracción. Tanto una como otra toman sus valores máximos en los puntos de la superficie interior de la tubería

$$(\sigma_\rho)_{\max} = p_1 \quad ; \quad (\sigma_\theta)_{\max} = \frac{p_1(R_2^2 + R_1^2 - 2p_2R_2^2)}{R_2^2 - R_1^2} \quad (9.5.10)$$

Para el cálculo de la variación del espesor de la tubería distinguiremos los estados de deformación plana y tensional plano.

a) Estado de deformación plana

Utilizaremos la primera ecuación (9.1.3), sustituyendo las expresiones (9.5.6) de las tensiones

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho} = \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_\rho - \mu\sigma_\theta] = \frac{1+\mu}{E} \left[\frac{A}{\rho^2} + 2C(1-2\mu) \right] \quad (9.5.11)$$

La variación del espesor e de la tubería se obtendrá como diferencia entre los corrimientos en sentido radial de los puntos de la periferia y de los puntos de la superficie interior. Por tanto, integrando entre R_1 y R_2 , tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta e &= u_2 - u_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1+\mu}{E} \left[\frac{A}{\rho^2} + 2C(1-2\mu) \right] d\rho = \\ &= \frac{1+\mu}{E} \left[A \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 2C(1-2\mu)(R_2 - R_1) \right] \end{aligned} \quad (9.5.12)$$

b) Estado de tensión plana

Utilizaremos ahora la primera ecuación (9.2.3) y procederemos de forma análoga al caso anterior.

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu\sigma_\theta) = \frac{1}{E} \left[\frac{A(1 + \mu)}{\rho^2} + 2C(1 - \mu) \right] \quad (9.5.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta e &= u_2 - u_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{E} \left[\frac{A(1 + \mu)}{\rho^2} + 2C(1 - \mu) \right] d\rho = \\ &= \frac{1}{E} \left[A(1 + \mu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + 2C(1 - \mu)(R_2 - R_1) \right] \end{aligned} \quad (9.5.14)$$

En las expresiones de Δe en ambos casos las constantes A y C vienen dadas por las fórmulas (9.5.8).

9.6. Disco macizo giratorio

En la mayoría de los problemas elásticos que se nos presentan podemos considerar nulas o despreciables las fuerzas de masa. Hay casos, sin embargo, en los cuales la sollicitación externa está formada exclusivamente por este tipo de fuerzas, como ocurre en los discos que giran alrededor de un eje de simetría, perpendicular a sus caras planas.

Para calcular el estado tensional que se crea en un disco de radio R cuando gira con velocidad angular ω , consideremos un elemento diferencial de espesor unidad en coordenadas polares (Fig. 9.5). Sean σ_ρ y σ_θ las tensiones radial y circunferencial, así como df_c la fuerza centrífuga que actúa sobre el elemento, como consecuencia de la rotación. Evidentemente, la tensión tangencial $\tau_{\rho\theta}$ se anula, por razón de simetría.

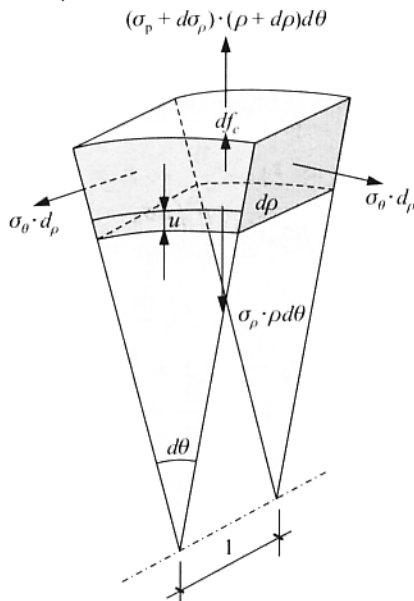


Figura 9.5.

La expresión de la fuerza centrífuga sobre el elemento es

$$df_c = \delta \rho \, d\theta \, d\rho \omega^2 \rho = \delta \rho^2 \omega^2 \, d\theta \, d\rho \quad (9.6.1)$$

siendo δ la densidad del material del disco.

Planteando el equilibrio y proyectando en dirección radial:

$$2\sigma_\theta \cdot d\rho \, \text{sen} \frac{d\theta}{2} + \sigma_\rho \cdot \rho d\theta - (\sigma_\rho + d\sigma_\rho)(\rho + d\rho) d\theta = \delta \rho^2 \omega^2 d\theta \, d\rho \quad (9.6.2)$$

Simplificando y tomando límites se llega a

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho - \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \delta \rho^2 \omega^2 \quad (9.6.3)$$

Si (u, v) son las componentes del corrimiento, la deformación unitaria radial está dada por

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\theta) \quad (9.6.4)$$

siendo μ el coeficiente de Poisson.

Por otra parte, la deformación circunferencial unitaria es

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{u}{\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\rho) \quad (9.6.5)$$

ya que por simetría $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$

De aquí, se tiene

$$u = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\rho) \rho$$

Derivando respecto de ρ

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\rho) + \frac{\rho}{E} \left(\frac{d\sigma_\theta}{d\rho} - \mu \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} \right) \quad (9.6.6)$$

Igualando a la expresión (9.6.4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\theta) &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_\rho) + \frac{\rho}{E} \left(\frac{d\sigma_\theta}{d\rho} - \mu \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} \right) \\ (\sigma_\theta - \sigma_\rho)(1 + \mu) + \rho \frac{d\sigma_\theta}{d\rho} - \mu \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (9.6.7)$$

Sustituyendo $(\sigma_\theta - \sigma_\rho)$ por la expresión (9.6.3), se tiene:

$$\left(\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \delta \rho^2 \omega^2 \right) (1 + \mu) + \rho \frac{d\sigma_\theta}{d\rho} - \mu \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = 0$$

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \delta\rho^2\omega^2 + \mu\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \mu\delta\rho^2\omega^2 + \rho \frac{d\sigma_\theta}{d\rho} - \mu\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = 0$$

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{d\sigma_\theta}{d\rho} = -\delta\rho\omega^2(1 + \mu) \quad (9.6.8)$$

Integrando:

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho = -\frac{\delta\omega^2(1 + \mu)}{2}\rho^2 + 2A \quad (9.6.9)$$

siendo $2A$ una constante de integración.

Restando la ecuación (9.6.3), se obtiene:

$$2\sigma_\rho + \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = -\frac{\delta\omega^2(3 + \mu)}{2}\rho^2 + 2A \quad (9.6.10)$$

Como el primer miembro de esta ecuación se puede poner en la forma:

$$2\sigma_\rho + \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \sigma_\rho) \quad (9.6.11)$$

tenemos:

$$\frac{d}{d\rho} (\rho^2 \sigma_\rho) = \rho \left[-\frac{\delta\omega^2(3 + \mu)}{2}\rho^2 + 2A \right] \quad (9.6.12)$$

e integrando

$$\rho^2 \sigma_\rho = -\frac{\delta\omega^2(3 + \mu)}{8}\rho^4 + A\rho^2 - B \quad (9.6.13)$$

siendo B otra constante de integración.

Despejando σ_ρ se obtiene la expresión de la tensión radial

$$\sigma_\rho = A - \frac{B}{\rho^2} - (3 + \mu) \frac{\delta\omega^2}{8} \rho^2 \quad (9.6.14)$$

La tensión circunferencial σ_θ se obtiene de (9.6.9)

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= -\sigma_\rho - \frac{\delta\omega^2(1 + \mu)}{2}\rho^2 + 2A = A + \frac{B}{\rho^2} - (1 + 3\mu) \frac{\delta\omega^2}{8} \rho^2 \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - (1 + 3\mu) \frac{\delta\omega^2}{8} \rho^2 \end{aligned} \quad (9.6.15)$$

Si el disco considerado es macizo las tensiones son finitas para $\rho = 0$, lo que exige la nulidad de la constante B de integración. La otra constante se determina imponiendo la condición de contorno.

$$(\sigma_\rho)_{\rho=R} = 0 \Rightarrow A = (3 + \mu) \frac{\delta\omega^2 R^2}{8} \quad (9.6.16)$$

Por tanto, la solución de tensiones del disco que gira es

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{(3 + \mu)\delta\omega^2}{8} (R^2 - \rho^2) \\ \sigma_\theta = \frac{\delta\omega^2}{8} [(3 + \mu)R^2 - (1 + 3\mu)\rho^2] \end{cases} \quad (9.6.17)$$

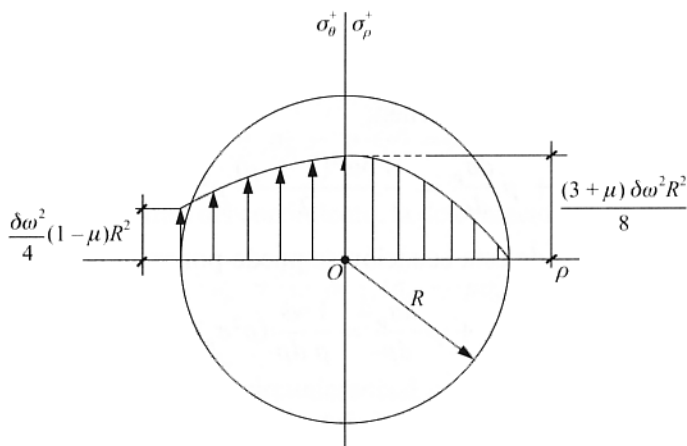


Figura 9.6.

En la Figura 9.6 se representan las distribuciones de las tensiones σ_ρ y σ_θ para los puntos de un radio: σ_ρ a la derecha, y σ_θ a la izquierda. Ambas tensiones se rigen por leyes parabólicas.

De la observación de esta figura se desprende que los valores máximos de las tensiones, que en todos los puntos son de tracción, se presentan en los puntos del eje de giro y que ambos valores son iguales

$$\sigma_{\rho \text{ máx}} = \sigma_{\theta \text{ máx}} = \frac{(3 + \mu)\delta\omega^2 R^2}{8} \quad (9.6.18)$$

9.7. Disco giratorio con orificio central

Las ecuaciones que nos dan las tensiones radial y circunferencial son las mismas (9.6.14) y (9.6.15) que hemos obtenido anteriormente.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = A - \frac{B}{\rho^2} - (3 + \mu) \frac{\delta\omega^2}{8} \rho^2 \\ \sigma_\theta = A + \frac{B}{\rho^2} - (1 + 3\mu) \frac{\delta\omega^2}{8} \rho^2 \end{cases} \quad (9.7.1)$$

La diferencia con el caso de cilindro macizo estriba en que ahora son distintas las condiciones de contorno y, por consiguiente, también serán distintas las expresiones de las constantes de integración.

Para la determinación de éstas tenemos que imponer las siguientes condiciones, si R_1 y R_2 son los radios interior y exterior, respectivamente.

$$(\sigma_\rho)_{\rho=R_1} = 0 \Rightarrow A - \frac{B}{R_1^2} - (3 + \mu) \frac{\delta\omega^2}{8} R_1^2 = 0 \quad (9.7.2)$$

$$(\sigma_\rho)_{\rho=R_2} = 0 \Rightarrow A - \frac{B}{R_2^2} - (3 + \mu) \frac{\delta\omega^2}{8} R_2^2 = 0 \quad (9.7.3)$$

De este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtienen las expresiones de A y B .

$$A = \frac{(3 + \mu) \delta\omega^2 (R_1^2 + R_2^2)}{8} \quad (9.7.4)$$

$$B = \frac{(3 + \mu) \delta\omega^2 R_1^2 R_2^2}{8} \quad (9.7.5)$$

Por tanto, la solución de tensiones en el caso de disco con orificio central que gira, es

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{(3 + \mu) \delta\omega^2}{8} \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{\rho^2} - \rho^2 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\delta\omega^2}{8} \left[(3 + \mu) \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{\rho^2} \right) - (1 + 3\mu)\rho^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (9.7.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{\delta\omega^2}{8} \left[(3 + \mu) \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{\rho^2} \right) - (1 + 3\mu)\rho^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (9.7.7)$$

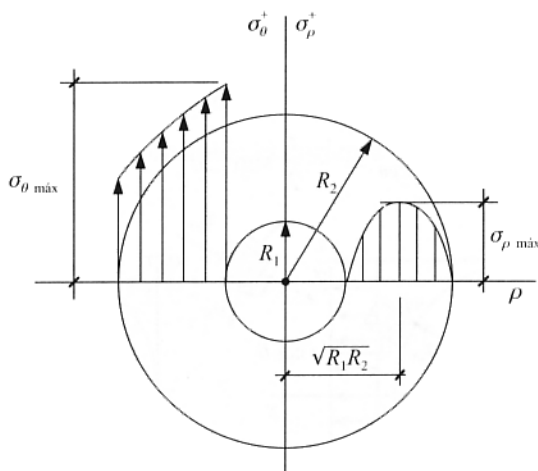


Figura 9.7.

En la Figura 9.7 se representan las distribuciones de tensiones σ_ρ y σ_θ a lo largo de un radio.

La tensión circunferencial máxima se presenta en los puntos de la superficie interior, es decir, para $\rho = R_1$

$$\sigma_{\theta \text{ máx}} = \frac{\delta \omega^2}{4} [(1 - \mu) R_1^2 + 2(3 + \mu) R_2^2] \quad (9.7.8)$$

El valor máximo de la tensión radial se presenta en los puntos en los cuales se verifica

$$\frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} = 0 \Rightarrow \frac{2R_1^2 R_2^2}{\rho^3} - 2\rho = 0 \Rightarrow \rho = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$$

Sustituyendo este valor de ρ en la ecuación (9.7.6) se obtiene:

$$\sigma_{\rho \text{ máx}} = \frac{(3 + \mu)\delta \omega^2}{8} (R_1 - R_2)^2 \quad (9.7.9)$$

9.8. Chapa plana o laja indefinida con taladro circular sometida a tracción o compresión y esfuerzo cortante

Consideremos una placa rectangular delgada en cuyo centro realizamos un taladro de radio r_1 , pequeño en comparación con las dimensiones de la misma.

Sometida a una tracción uniforme t en la dirección del eje x (Fig. 8.9a), en virtud del principio de Saint-Venant, las tensiones en los puntos de una circunferencia concéntrica con el taladro de radio r_2 , grande en comparación con r_1 , son las mismas que existirían en la placa si no hubiera taladro. Las expresiones de estas tensiones en coordenadas polares, tomando el centro de la placa como polo y el eje x como eje polar, se obtienen de forma inmediata utilizando el círculo de Mohr (Fig. 9.8b).

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta} = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{t}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (9.8.1)$$

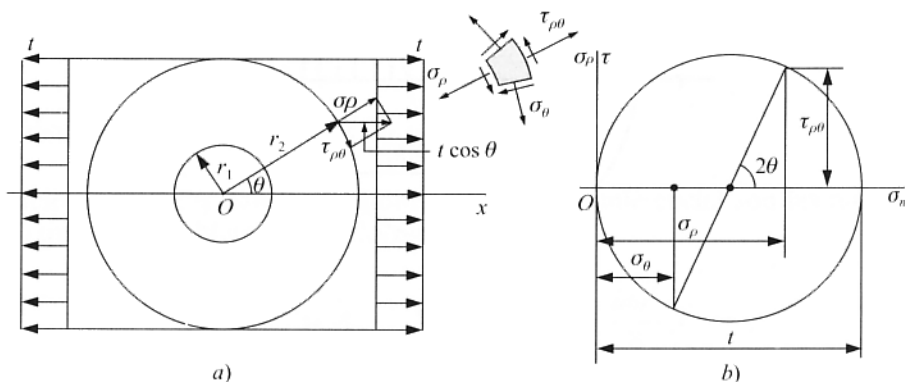


Figura 9.8.

Veamos cuál es la solución de tensiones en los puntos de la placa sabiendo que en los puntos de la circunferencia de radio r_2 las tensiones tienen los valores dados por las ecuaciones anteriores. Expondremos la solución dada a este problema por G. Kirsch, que ha sido confirmada mediante ensayos fotoelásticos y medidas extensométricas. Consiste en considerar este estado como suma de los dos siguientes:

$$\text{Estado I:} \quad (\sigma_\rho)_{\rho=r_2} = \frac{t}{2} \quad (9.8.2)$$

decir, una presión uniforme con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \text{Estado II:} \quad & (\sigma_\rho)_{\rho=r_1} = 0 \quad ; \quad (\sigma_\rho)_{\rho=r_2} = \frac{t}{2} \\ & \begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r_2} = \frac{t}{2} \cos 2\theta \\ (\tau_{\rho\theta})_{\rho=r_2} = -\frac{t}{2} \sin 2\theta \end{cases} \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

derivando este último de una función de Airy de la forma:

$$\phi = f(\rho) \cos 2\theta \quad (9.8.4)$$

en donde $f(\rho)$ es una función que depende exclusivamente de ρ .

Al estado I podemos aplicarle la solución (9.5.6) obtenida en el estudio elástico de la tubería de pared gruesa expuesto anteriormente, que verifica, como se vio, las ecuaciones de equilibrio y las de compatibilidad.

Para el cálculo de las constantes de integración A y C haremos en (9.5.8) $p_1 = 0$; $p_2 = -\frac{t}{2}$, y consideraremos despreciable el cociente $\frac{r_1}{r_2}$.

$$A = \frac{p_2 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{-\frac{t}{2} r_1^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = -\frac{t}{2} r_1^2$$

$$2C = \frac{-p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{\frac{t}{2}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = \frac{t}{2}$$

Por tanto, la solución de tensiones del estado I en los puntos de la placa será:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho}^I = \frac{A}{\rho^2} + 2C = -\frac{tr_1^2}{2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2}\right) \\ \sigma_{\theta}^I = -\frac{A}{\rho^2} + 2C = -\frac{tr_1^2}{2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2}\right) \\ \tau_{\rho\theta}^I = 0 \end{cases} \quad (9.8.5)$$

Para obtener la solución de tensiones del estado II determinemos la función $f(\rho)$ imponiendo la condición de compatibilidad $\Delta(\sigma_{\rho}^{II} + \sigma_{\theta}^{II}) = 0$, o lo que es lo mismo, la condición de biarmonicidad de la función ϕ de Airy.

Como la laplaciana de ϕ es

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = \left(\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{4f}{\rho^2}\right) \cos 2\theta$$

la ecuación de compatibilidad será:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{4}{\rho^2}\right) \left(\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{4f}{\rho^2}\right) = 0$$

cuyo desarrollo nos da:

$$\frac{d^4f}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3f}{d\rho^3} - \frac{9}{\rho^2} \frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{9}{\rho^3} \frac{df}{d\rho} = 0 \quad (9.8.6)$$

ecuación diferencial que se reduce, haciendo el cambio de variable $\rho = e^z$, a la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes:

$$\frac{d^4f}{dz^4} - 4 \frac{d^3f}{dz^3} - 4 \frac{d^2f}{dz^2} + 16 \frac{df}{dz} = 0 \quad (9.8.7)$$

cuya ecuación característica $r^4 - 4r^3 - 4r^2 + 16r = 0$ tiene por raíces: $r_1 = 2$; $r_2 = 4$; $r_3 = -2$; $r_4 = 0$, por lo que la solución general de la función $f(\rho)$ será de la forma:

$$f(\rho) = Ae^{2z} + Be^{4z} + Ce^{-2z} + D$$

en donde A , B , C y D son constantes de integración.

Deshaciendo el cambio de variable, la función ϕ de Airy para el estado II será:

$$\phi = \left(A\rho^2 + B\rho^4 + \frac{C}{\rho^2} + D\right) \cos 2\theta \quad (9.8.8)$$

de la que se deduce la solución de tensiones:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho}^{\text{II}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = - \left(2A + \frac{6C}{\rho^4} + \frac{4D}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta}^{\text{II}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = \left(2A + 12B\rho^2 + \frac{6C}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta}^{\text{II}} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \left(2A + 6B\rho^2 - \frac{6C}{\rho^4} - \frac{2D}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (9.8.9)$$

Sumando las tensiones correspondientes a los estados I y II, dadas por las ecuaciones (9.8.5) y (9.8.9) se tiene:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) - \left(2A + \frac{6C}{\rho^4} + \frac{4D}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta} = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) + \left(2A + 12B\rho^2 + \frac{6C}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = \left(2A + 6B\rho^2 - \frac{6C}{\rho^4} - \frac{2D}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (9.8.10)$$

Determinemos las constantes A, B, C, D imponiendo las condiciones de contorno. Para $\rho = r_1$:

$$\sigma_{\rho} = 0 \Rightarrow 2A + \frac{6C}{r_1^4} + \frac{4D}{r_1^2} = 0$$

$$\tau_{\rho\theta} = 0 \Rightarrow 2A + 6Br_1^2 - \frac{6C}{r_1^4} - \frac{2D}{r_1^2} = 0$$

Para $\rho = r_2 = \infty$

$$\sigma_{\rho} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \cos 2\theta = \frac{t}{2} - 2A \cos 2\theta \Rightarrow A = -\frac{t}{4}$$

$$\tau_{\rho\theta} = -\frac{t}{2} \sin 2\theta = (2A + 6Br_2^2) \sin 2\theta \Rightarrow B = 0$$

De las dos últimas ecuaciones de contorno se han obtenido directamente los valores de A y B . Con las dos primeras se calculan las otras dos constantes:

$$C = -\frac{r_1^4 t}{4} ; \quad D = \frac{r_1^2 t}{2}$$

Sustituyendo estos valores en (9.8-10) se obtiene, finalmente, la solución de tensiones en los puntos de la placa con taladro considerada, debida a la tracción t en la dirección del eje polar

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) + \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} - 4 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) - \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{t}{2} \left(1 - 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} + 2 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (9.8.11)$$

Estudiemos las tensiones en el borde del taladro. Las ecuaciones anteriores para $\rho = r_1$ se reducen a:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = 0 \\ \sigma_\theta = t - 2t \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \quad (9.8.12)$$

Evidentemente, la distribución de tensiones presenta simetría en torno al centro del taladro.

Representando gráficamente la tensión σ_θ mediante el diagrama cartesiano o radial indicados en la Figura 9.9 observamos que los valores máximos de σ_θ se presentan en los extremos a y b del diámetro del taladro perpendicular a la dirección de tracción. Este valor máximo se obtiene de (9.8.12) haciendo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$(\sigma_\theta)_{\max} = 3t$$

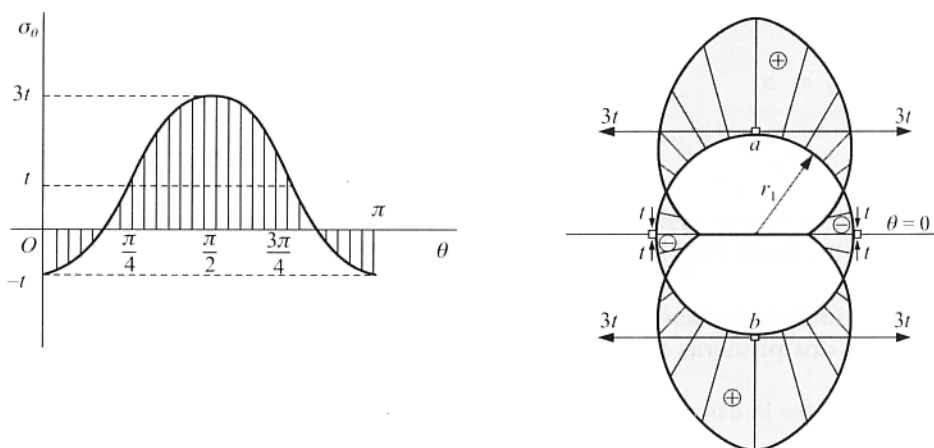


Figura 9.9.

es decir, en estos puntos se presenta la máxima tensión normal σ_θ de tracción, cuyo valor es el triple de la tensión de tracción aplicada a la placa.

En los puntos extremos del diámetro que tiene la misma dirección que la tracción, haciendo $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ en (9.8.12), tenemos:

$$\sigma_\theta = t - 2t = -t$$

es decir, una tensión de compresión del mismo valor absoluto que la tensión de tracción aplicada a la placa.

Para la sección recta de la placa que contiene el centro del taladro y es perpendicular a la dirección de la tracción, las ecuaciones (9.8.11), haciendo $\theta = \frac{\pi}{2}$, nos dan:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2} - 1 - 3 \frac{r_1^2}{\rho^4} + 4 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) = \frac{3t}{2} \left(\frac{r_1^2}{\rho^2} - \frac{r_1^4}{\rho^4} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} + 1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} \right) = \frac{t}{2} \left(2 + \frac{r_1^2}{\rho^2} + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} \right) \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \quad (9.8.13)$$

cuya representación gráfica se indica en la Figura 9.10. Nos valemos de la simetría que presentan las tensiones σ_ρ y σ_θ respecto del centro del taladro para hacer figurar la variación de ambas en un mismo gráfico, utilizando la parte superior para representar σ_θ y la inferior para representar σ_ρ .

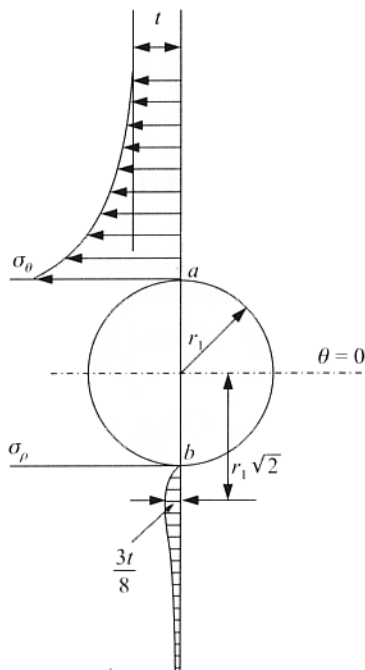


Figura 9.10.

De la observación de la figura se deduce que el taladro provoca localmente en los puntos a y b de su borde un efecto de concentración de tensiones. En estos puntos σ_θ toma el valor $3t$, pero para puntos de esa sección recta más alejados del centro del agujero decrece rápidamente al valor t .

σ_ρ , por el contrario, es una función creciente a partir de cero en el borde hasta $\rho = r_1 \sqrt{2}$ en cuyo punto presenta un máximo relativo de valor $(\sigma_\rho)_{\max} = \frac{3t}{8}$, para decrecer de forma rápida asintóticamente a cero.

Hasta aquí hemos supuesto que la placa estaba sometida a tracción en una dirección. Es evidente que las mismas fórmulas (9.8.11) serán aplicables al caso de una sollicitación de compresión uniforme en la dirección del eje polar sin más que considerar el signo negativo que entonces tendría t .

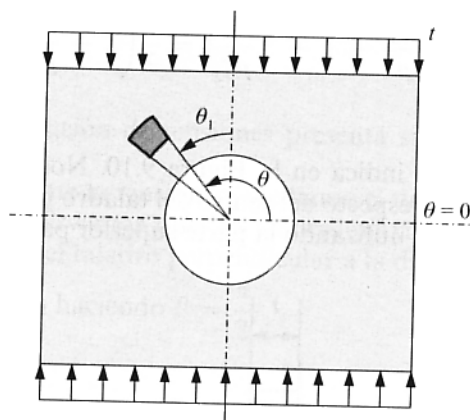


Figura 9.11.

Si se aplicara a la placa una tensión de compresión t en dirección perpendicular al eje polar (Fig. 9.11), las tensiones se obtienen aplicando las mismas fórmulas (9.8.11) teniendo en cuenta que $\theta_1 = \theta - \frac{\pi}{2}$ y, por tanto:

$$\cos 2\theta_1 = \cos (2\theta - \pi) = -\cos 2\theta \quad ; \quad \sin 2\theta_1 = \sin (2\theta - \pi) = -\sin 2\theta$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{t}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) + \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} - 4 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = -\frac{t}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) - \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{t}{2} \left(1 - 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} + 2 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (9.8.14)$$

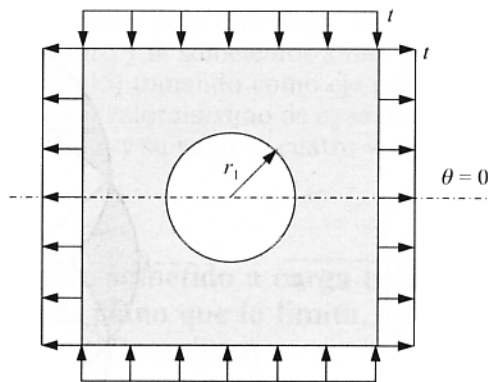


Figura 9.12.

A partir de las soluciones de tensiones que hemos obtenido para el caso de tracción en dirección del eje polar y compresión en dirección perpendicular a éste, la solución de tensiones para la acción simultánea de ambas sollicitaciones (Fig. 9.12), en virtud del principio de superposición, será:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) + \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} - 4 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta - \frac{t}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) + \\ \quad + \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} - 4 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta = t \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} - 4 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta} = -\frac{t}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) - \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta - \frac{t}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) - \\ \quad - \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta = -t \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{t}{2} \left(1 - 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} + 2 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta - \\ \quad - \frac{t}{2} \left(1 - 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} + 2 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta = -t \left(1 - 3 \frac{r_1^4}{\rho^4} + 2 \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{array} \right. \quad (9.8.15)$$

La distribución de tensiones en el borde del taladro es ahora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho} = 0 \\ \sigma_{\theta} = -4t \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (9.8.16)$$

cuya representación gráfica se indica en la Figura 9.13.

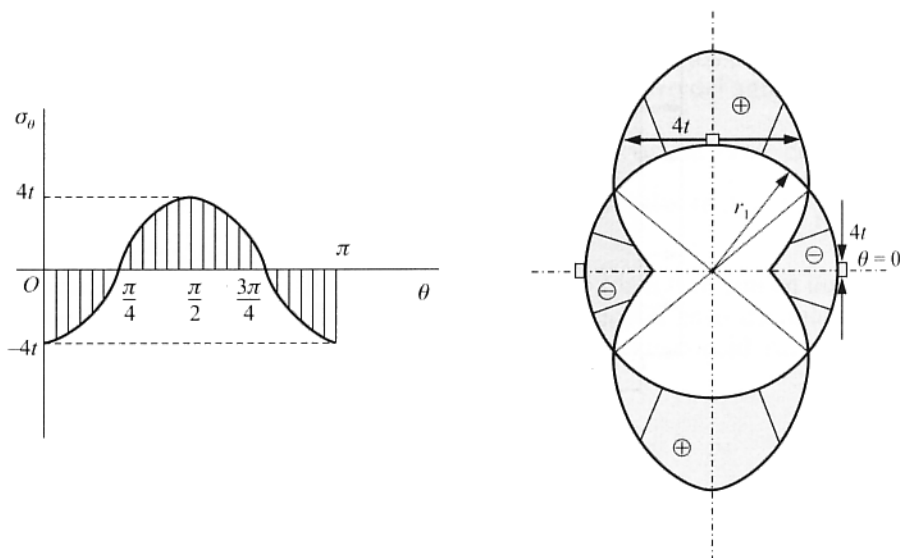


Figura 9.13.

De lo anterior se deduce el efecto producido por una tensión tangencial uniforme aplicada en los bordes de una placa de grandes dimensiones. En efecto, si la placa es de grandes dimensiones, como hemos supuesto, en los puntos suficientemente alejados del centro del taladro podemos despreciar el efecto de éste, en virtud del principio de Saint-Venant, y así, en los puntos de una placa contenida en aquélla cuyo centro coincide con el del taladro y sus lados forman 45° con las direcciones de tracción y compresión, existe un estado tensional de cortadura pura cuya tensión es precisamente t (Fig. 9.14).

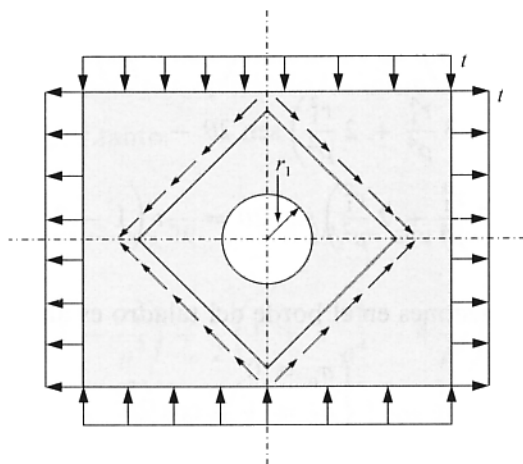


Figura 9.14.

Es decir, la solución de tensiones para una placa cuadrada de grandes dimensiones en cuyo centro realizamos un taladro y la sometemos a una tensión tangencial uniforme t en sus lados, será la dada por (9.8.15) tomando como eje polar una de las diagonales. En el borde del agujero de esta placa el valor máximo de σ_θ se presenta en los puntos de intersección del mismo con las diagonales y su valor es cuatro veces mayor que la tensión tangencial aplicada.

9.9. Sólido semi-indefinido sometido a carga uniformemente distribuida normal al plano que lo limita.

Problema de Flamant-Boussinesq

El problema de encontrar el estado tensional creado en un sólido semi-indefinido sometido a una carga uniformemente distribuida normal al plano que lo limita es conocido como *problema de Flamant-Boussinesq*.

Consideremos en primer lugar la placa de la Figura 9.15 en la que la carga aplicada está uniformemente repartida a lo largo de una recta contenida en el plano que limita a la placa como sólido semi-indefinido y perpendicular a las dos caras paralelas de la misma.

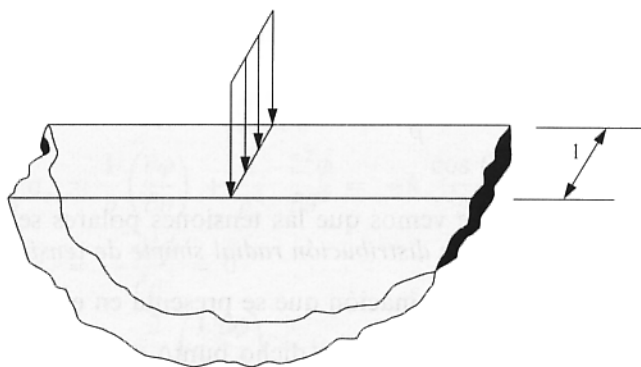


Figura 9.15.

Es evidente que cargada de esta forma la placa, de la que suponemos nulas las fuerzas de masa, el estado elástico es plano, siendo el plano director de la misma orientación que las caras paralelas de la placa. Si ésta es de pequeño espesor, el estado elástico es de tensión plana y si fuera indefinido en la dimensión del espesor sería de deformación plana.

El problema se puede, pues, estudiar en un plano. Si el espesor de la placa es la unidad podemos suponer en este plano una fuerza concentrada P igual a la densidad lineal de carga, aplicada en un punto O del borde, perpendicular al mismo.

Tomaremos como referencia un sistema de coordenadas polares con polo en O , punto de aplicación de la carga P , y eje polar el eje x vertical descendente.

A la solución del problema que tenemos planteado se llega teniendo en cuenta las siguientes consideraciones sobre las tensiones que actúan en las caras del elemento indicado en la Figura 9.16a.

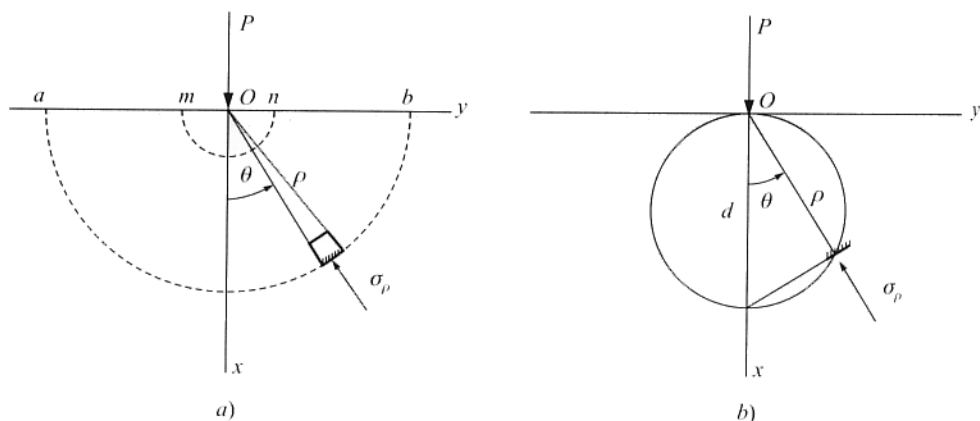


Figura 9.16.

a) Las tensiones σ_θ y $\tau_{\rho\theta}$ se anulan.

b) La tensión radial σ_ρ es de compresión y su valor es directamente proporcional al coseno del ángulo que forma el radio polar con la dirección de la carga e inversamente proporcional a la distancia al punto de aplicación de la misma.

Según esto, las tensiones en un punto de la placa serán:

$$\sigma_\rho = -k \frac{\cos \theta}{\rho} ; \quad \sigma_\theta = 0 ; \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad (9.9.1)$$

siendo k una constante positiva.

Este estado elástico, en el que vemos que las tensiones polares se reducen a su componente radial, recibe el nombre de *distribución radial simple de tensiones*.

Con objeto de obviar la indeterminación que se presenta en el punto O para $\theta = \frac{\pi}{2}$ y también para evitar el valor infinito de σ_ρ en dicho punto como consecuencia de la consideración teórica de carga puntual, excluirémos de nuestro estudio los puntos del pequeño entorno semicircular de diámetro mn indicado en la Figura 9.16a.

Determinemos el valor de la constante k . Para ello planteemos el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el semicírculo de centro O y radio ρ . Proyectando sobre el eje polar tenemos:

$$P - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_\rho \rho \, d\theta \cos \theta = P - k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = 0 \Rightarrow k = \frac{2P}{\pi}$$

Es fácil comprobar que la solución de tensiones (9.9.1) supuesta verifica las ecuaciones de equilibrio interno y la ecuación de compatibilidad.

En efecto, las ecuaciones de equilibrio (9.1.4) se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho}{\rho} = 0 \quad (9.9.2)$$

y la de compatibilidad (9.2.5) a:

$$\Delta\sigma_\rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\sigma_\rho}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\sigma_\rho}{\partial\theta^2} = 0 \quad (9.9.3)$$

y ambas se verifican idénticamente.

Se puede ver que la supuesta solución deriva de la función de Airy.

$$\phi = \frac{-k}{2} \rho\theta \sin\theta = \frac{-P}{\pi} \rho\theta \sin\theta \quad (9.9.4)$$

que se comprueba que es biarmónica.

En efecto:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = \frac{-k}{2\rho} \theta \sin\theta + \frac{-k}{2\rho} (2 \cos\theta - \theta \sin\theta) = -k \frac{\cos\theta}{\rho}$$

$$\Delta^2\phi = -\frac{2k \cos\theta}{\rho^3} + \frac{k \cos\theta}{\rho^3} + \frac{k \cos\theta}{\rho^3} = 0$$

La solución de tensiones que se deduce de esta función de Airy es:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -k \frac{\cos\theta}{\rho} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos\theta}{\rho} \\ \sigma_\theta = -\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) = 0 \end{cases} \quad (9.9.5)$$

Por tanto, la función de Airy (9.9.4) nos proporciona la solución correcta del problema.

Por los puntos de una circunferencia de diámetro d que pasa por el origen y tiene su centro en el eje polar (Fig. 9.16b) la tensión radial es:

$$\sigma_\rho = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos\theta}{d \cos\theta} = -\frac{2P}{\pi d} \quad (9.9.6)$$

de donde se deduce que la tensión radial en todos los puntos de la circunferencia toma el mismo valor, excluido el punto de aplicación de la carga, es decir, esta circunferencia es una isobara del estado tensional existente en la placa.

Las componentes de la matriz de tensiones en coordenadas cartesianas se pueden obtener a partir de la tensión radial de una forma muy cómoda utilizando el círculo de Mohr (Fig. 9.17).

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \frac{\sigma_\rho}{2} + \frac{\sigma_\rho}{2} \cos 2\theta = \sigma_\rho \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{\rho} \\ \sigma_{ny} = \frac{\sigma_\rho}{2} - \frac{\sigma_\rho}{2} \cos 2\theta = \sigma_\rho \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\rho} \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma_\rho}{2} \sin 2\theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\rho} \end{cases} \quad (9.9.7)$$

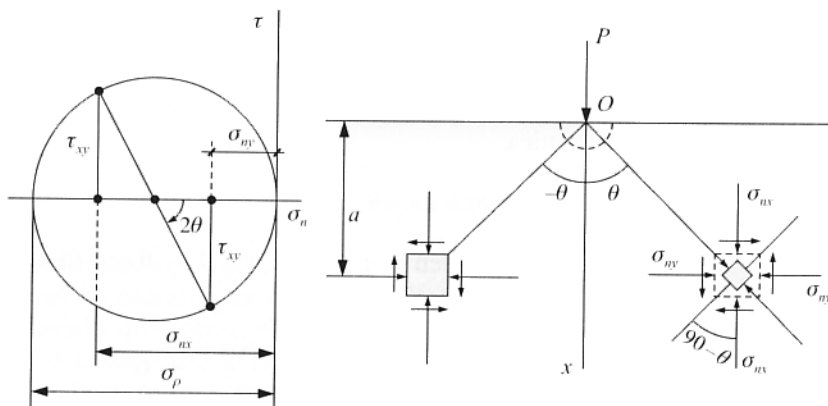


Figura 9.17.

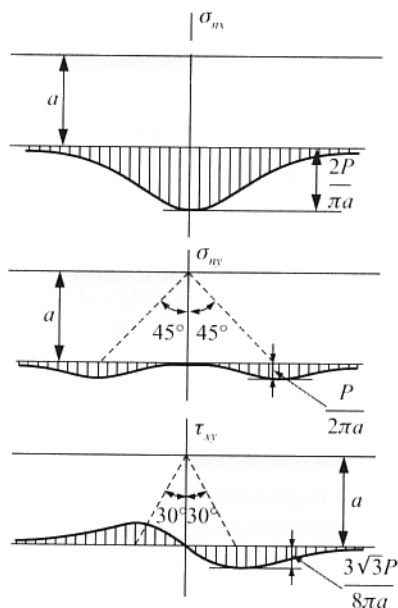


Figura 9.18.

En los puntos distantes a del borde de la placa, estas fórmulas, haciendo $\rho = \frac{a}{\cos \theta}$, nos dan:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta \\ \sigma_{ny} = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta \end{cases} \quad (9.9.8)$$

Los sentidos de estas tensiones se indican en la Figura 9.17. Sus valores para los puntos del plano considerado se representan en la Figura 9.18.

Lo dicho anteriormente puede ser aplicado al estudio del estado tensional creado en el sólido semi-indefinido cuando la carga es continua. Si p es la densidad lineal de carga o, lo que es lo mismo, la carga uniformemente distribuida en la placa de espesor unidad sobre la superficie plana que la limita, que corresponde a la longitud de borde unidad, las tensiones creadas en un punto $A(\rho, \theta)$ se obtendrán sustituyendo en las fórmulas (9.9.7) P por

$pdy = p \frac{\rho d\theta}{\cos \theta}$, como fácilmente se desprende de la Figura 9.19.

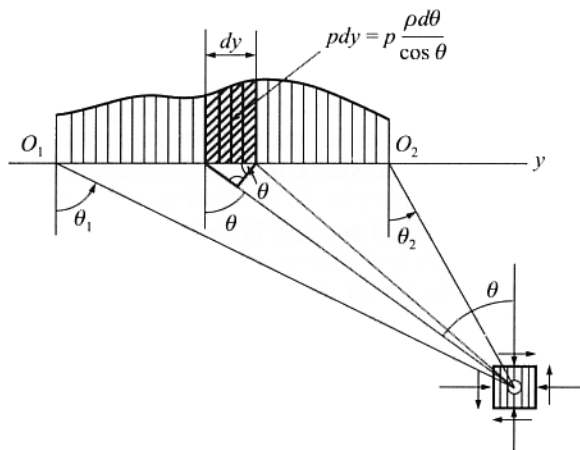


Figura 9.19.

Por tanto, las tensiones creadas en A por la carga elemental pdy es

$$\begin{cases} d\sigma_{nx} = -\frac{2}{\pi} p \frac{\rho d\theta}{\cos \theta} \frac{\cos^3 \theta}{\rho} = -\frac{2p}{\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ d\sigma_{ny} = -\frac{2}{\pi} p \frac{\rho d\theta}{\cos \theta} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\rho} = -\frac{2p}{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ d\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} p \frac{\rho d\theta}{\cos \theta} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\rho} = -\frac{2p}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \end{cases} \quad (9.9.9)$$

Las tensiones resultantes debidas a la carga total serán, en virtud del principio de superposición:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \cos^2 \theta d\theta \\ \sigma_{ny} = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin^2 \theta d\theta \\ \tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin \theta \cos \theta d\theta \end{cases} \quad (9.9.10)$$

Para calcular estas integrales sería necesario expresar p en función de θ . Si p es constante, la integración es inmediata:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = -\frac{2p}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 \theta d\theta = -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1] \\ \sigma_{ny} = -\frac{2p}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) - \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1] \\ \tau_{xy} = -\frac{2p}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{p}{2\pi} (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) \end{cases} \quad (9.9.11)$$

El problema expuesto, dada su gran importancia en la aplicación al análisis del estado tensional creado en el terreno por las cimentaciones en la construcción, ha sido objeto de estudio profundo por parte de especialistas como J. H. Michell, S. D. Carothers y M. Sadowski.

La solución dada por J. H. Michell cuando la densidad de carga es constante parte de una función de Airy de la forma

$$\phi = A\rho^2\theta \quad (9.9.12)$$

en la que A es una constante.

Fácilmente se comprueba que verifica la condición de biarmonicidad.

De esta función de tensiones se deducen las tensiones:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 2A\theta \\ \sigma_\theta = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = 2A\theta \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -A \end{cases} \quad (9.9.13)$$

que verifican idénticamente las condiciones (9.1.4) de equilibrio interno. Esto significa que la función $-\phi$ de la ecuación (9.9.12) es la función de Airy de una placa semi-indefinida cuyas condiciones de contorno sean las indicadas en la Figura 9.20a tomando el polo en O_1 .

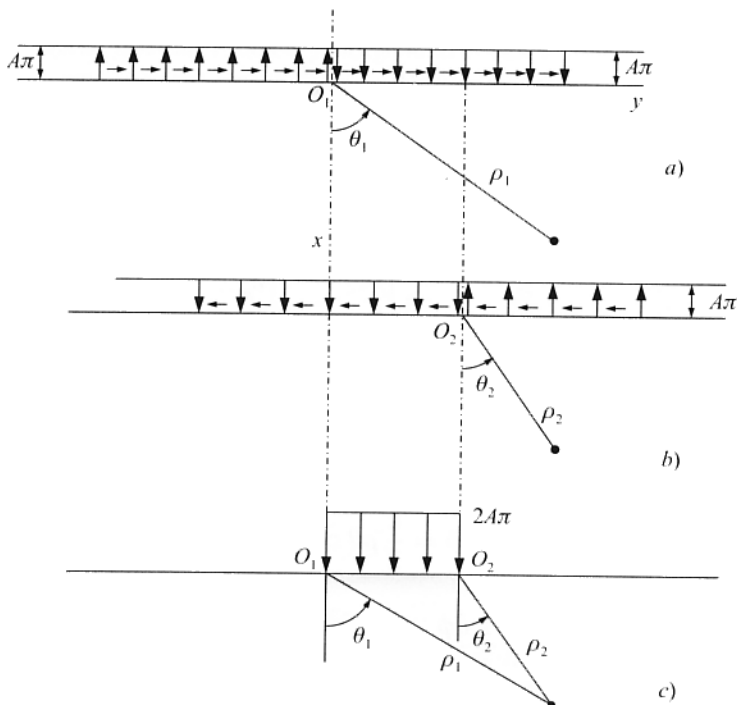


Figura 9.20.

Tomando ahora origen en O_2 la función de Airy ϕ nos dará la distribución de tensiones en el contorno indicada en la Figura 9.20b. Si superponemos los dos estados correspondientes a las funciones $-\phi$ con origen en O_1 y ϕ con origen en O_2 (Fig. 9.20a y 9.20b) se obtiene el de una carga uniforme sobre el segmento de borde de la placa limitado por O_1 y O_2 (Fig. 9.20c). Si la densidad lineal de carga es p

$$p = 2A\pi \Rightarrow A = \frac{p}{2\pi}$$

La función de tensiones será:

$$\phi = -\frac{p}{2\pi} (\rho_1^2 \theta_1 - \rho_2^2 \theta_2) \quad (9.9.14)$$

9.10. Placa semi-indefinida sometida a una fuerza tangencial o a un momento en un punto de su borde

Supongamos ahora que la placa considerada en el epígrafe anterior en vez de estar cargada en el punto O con una carga P normal a su borde está sometida en el mismo punto una fuerza P tangencial (Fig. 9.21).

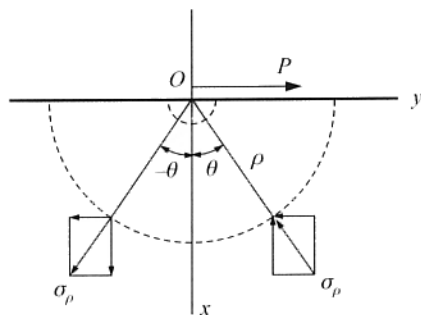


Figura 9.21.

Se puede comprobar fácilmente que la solución de tensiones deducidas de la función biarmónica

$$\phi = \frac{k}{2} \rho \theta \cos \theta \quad (9.10.1)$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -k \frac{\sin \theta}{\rho} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases} \quad (9.10.2)$$

verifica idénticamente las ecuaciones (9.1.4) de equilibrio interno y (9.2.5) de compatibilidad.

Por consiguiente, la función ϕ dada por la ecuación (9.10.1) es la función de Airy, de la que se deduce la solución correcta de las tensiones que conforman el estado tensional de la placa.

Determinemos la constante k considerando la distribución de tensiones sobre un semicilindro de radio ρ . Proyectando las correspondientes fuerzas sobre el eje y , tenemos:

$$P - 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_\rho \rho \, d\theta \sin \theta = P - 2k \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta = 0 \Rightarrow k = \frac{2P}{\pi}$$

La solución de tensiones será:

$$\sigma_\rho = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta}{\rho} \quad ; \quad \sigma_\theta = 0 \quad ; \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad (9.10.3)$$

Si se tratara de calcular las tensiones en una placa en la que se aplicara una fuerza P oblicua en un punto de su borde formando un ángulo α con el eje polar (Fig. 9.22), éstas se

obtienen de forma inmediata por superposición de las soluciones dadas por (9.9.5) y (9.10.3) considerando la fuerza normal $P \cos \alpha$ y tangencial $P \sin \alpha$

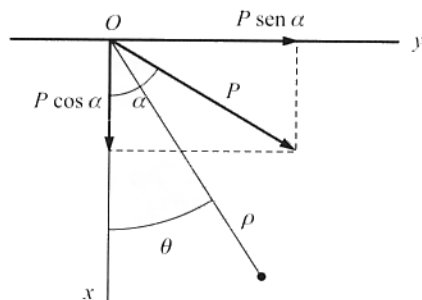


Figura 9.22.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{2P}{\pi\rho} (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = -\frac{2P}{\pi\rho} \cos(\alpha - \theta) \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \quad (9.10.4)$$

Se observa que las soluciones obtenidas en (9.10.3) para fuerza tangencial y (9.10.4) para fuerza oblicua son ambas la misma (9.9.5), pero contando el ángulo θ en cada caso a partir de la dirección de la fuerza aplicada.

De lo expuesto hasta ahora se puede deducir la solución de tensiones que correspondería en la placa al caso de aplicar en un punto de su borde un momento M perpendicular al plano director. En efecto, este momento M equivale a un par de fuerzas P normales al borde distanciadas a ($a \rightarrow 0$), tal que $M = Pa$ (Fig. 9.23):

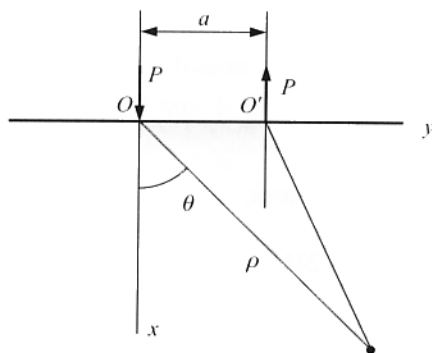


Figura 9.23.

Supongamos que para la fuerza P de compresión con origen en O la función de Airy sea $\phi(x, y)$. Para la fuerza P de tracción aplicada en O' será $-\phi(x, y + a)$. A la acción simultánea de ambas fuerzas corresponderá, en virtud del principio de superposición, una función de Airy

$$\phi_1 = \phi(x, y) - \phi(x, y + a) \quad (9.10.5)$$

Si a tiende a cero, por definición de derivada parcial de una función:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\phi(x, y + \Delta y) - \phi(x, y)}{\Delta y}$$

la función ϕ_1 se puede expresar así:

$$\phi_1 = -a \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (9.10.6)$$

Haciendo el cambio de variables a coordenadas polares

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \quad (9.10.7)$$

ya que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = \arctg \frac{y}{x}$

Sustituyendo este valor en la expresión de ϕ_1 , teniendo en cuenta la ecuación (9.9.4)

$\phi = \frac{-P}{\pi} \rho \theta \sin \theta$, se tiene:

$$\phi_1 = a \left[\frac{P}{\pi} \theta \sin^2 \theta + \frac{P}{\pi} (\sin \theta + \theta \cos \theta) \cos \theta \right] = \frac{Pa}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta)$$

o bien en función de M :

$$\phi_1 = \frac{M}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (9.10.8)$$

La solución de tensiones buscada será:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} = \frac{2M}{\pi} \frac{\sin 2\theta}{\rho^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \rho^2} = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[-\frac{M}{\pi \rho} (1 + \cos 2\theta) \right] = -\frac{M}{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{\rho^2} \end{cases} \quad (9.10.9)$$

válida en todos los puntos de la placa excepto en un entorno semicircular del punto de aplicación del par.

9.11. Cuña plana cargada en la arista de su diedro

Lo expuesto en los dos epígrafes anteriores se puede aplicar al estudio del estado tensional creado en una cuña cargada en su vértice.

Para el caso de una cuña plana de semiángulo α solicitada por una carga de compresión P según el eje de simetría (Fig. 9.24) consideraremos la función de tensión

$$\phi = \frac{k}{2} \rho \theta \sin \theta \quad (9.11.1)$$

siendo k una constante.

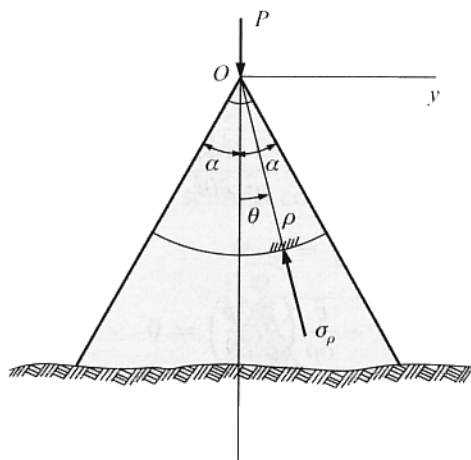


Figura 9.24.

De esta función de Airy se deduce la solución de tensiones siguiente:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -k \frac{\cos \theta}{\rho} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases} \quad (9.11.2)$$

La constante k se determina expresando la condición de equilibrio del sector circular de radio ρ sobre el que actúa la carga P y las fuerzas engendradas por las tensiones σ_ρ . Proyectando sobre el eje polar, tenemos:

$$P - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_\rho \rho \, d\theta \cos \theta = P - k \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \theta \, d\theta \Rightarrow k = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha}$$

La solución de tensiones será:

$$\sigma_\rho = -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta}{\rho} \quad ; \quad \sigma_\theta = 0 \quad ; \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad (9.11.3)$$

válida en todos los puntos de la cuña, excepto en un entorno del vértice que excluimos por las razones expuestas anteriormente.

Análogamente obtenemos las tensiones en el caso en que la fuerza estuviera aplicada en el vértice perpendicularmente al eje de la cuña (Fig. 9.25) a partir de la función de Airy

$$\phi = \frac{k}{2} \rho \theta \cos \theta \quad (9.11.4)$$

La solución de tensiones que de esta función de Airy se deduce, es:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -k \frac{\sin \theta}{\rho} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases} \quad (9.11.5)$$

Considerando ahora el sector circular de radio ρ y proyectando fuerzas sobre el eje y , tenemos:

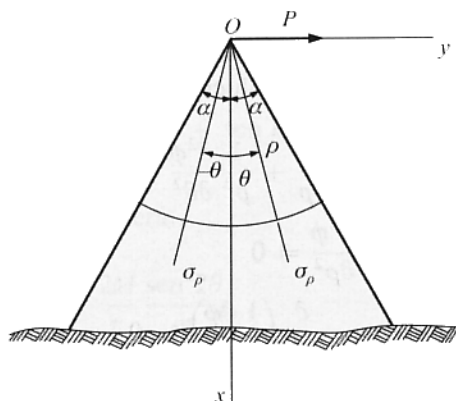


Figura 9.25.

$$P - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_\rho \rho d\theta \sin \theta = P - k \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = 0 \Rightarrow k = \frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

Por tanto, la solución de tensiones en este caso será:

$$\sigma_\rho = -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{\rho} ; \quad \sigma_\theta = 0 ; \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad (9.11.6)$$

Las soluciones de tensiones (9.11.2) y (9.11.5) de los dos casos que hemos estudiado verifican, según se ha comprobado en los dos epígrafes anteriores, las ecuaciones (9.1.5) de equilibrio interno y la (9.2.5) de compatibilidad. Fácilmente se comprueba que, exceptuando los puntos comprendidos en un entorno cilíndrico del vértice, se verifican también las condiciones de contorno, lo que nos lleva a afirmar que las soluciones encontradas son las correctas para cada caso.

Pero no ocurre lo mismo en el caso de que aplicáramos en el vértice O de la cuña un par contenido en su plano apoyándonos en una función de tensión del tipo (9.10.8), ya que la expresión de $\tau_{\rho\theta}$ no verificaría las condiciones de contorno. Señalaremos para este caso la función de tensión encontrada por C. E. Inglis

$$\phi = \frac{-M}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} (\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha) \quad (9.11.7)$$

en la que el par M es positivo si tiene sentido contrario a las agujas del reloj (Fig. 9.26).

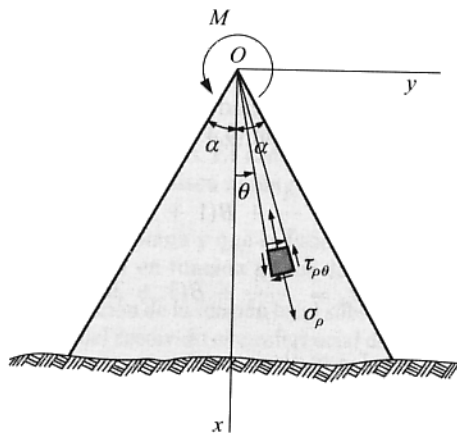


Figura 9.26.

La solución de tensiones de esta función se deduce es:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{2M}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \frac{\sin 2\theta}{\rho^2} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{M}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{\rho^2} \end{cases} \quad (9.11.8)$$

que verifica las ecuaciones (9.1.4) de equilibrio interno, (9.2.5) de compatibilidad y satisface, asimismo, las condiciones de contorno, como fácilmente se puede comprobar.

EJERCICIOS

- 9.1. Un disco de radio R y espesor constante e está sometido a una presión uniforme p en la superficie cilíndrica que lo limita.

Conociendo los valores del módulo de elasticidad E , coeficiente de Poisson μ , y considerando despreciables las fuerzas de masa, se pide:

- 1.º Las tensiones en un punto del disco.
- 2.º Variación de la longitud del radio del disco.
- 3.º Variación del espesor.

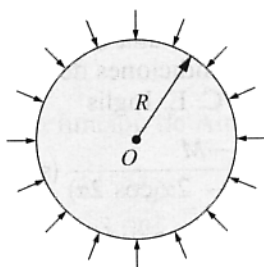


Figura E9.1.

- 1.º Según las condiciones del enunciado el disco está sometido a un estado de tensión plana, al que se puede aplicar la solución (9.4.7)

$$\sigma_r = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2L\rho) + 2C$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2L\rho) + 2C$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Para $\rho = 0$ las tensiones han de ser finitas, por lo que las constantes A y B han de ser nulas. Por tanto: $\sigma_r = \sigma_\theta = 2C = -p$.

En cualquier punto del disco:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p \quad ; \quad \tau_{r\theta} = 0$$

- 2.º De las expresiones de la deformación unitaria radial:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_\theta) = -\frac{p(1 - \mu)}{E} = \frac{du}{d\rho}$$

se obtiene el corrimiento radial de cualquier punto que se encuentre a distancia ρ del centro del disco integrando

$$u = \int_0^\rho -\frac{p(1 - \mu)}{E} d\rho \Rightarrow u = -\frac{p(1 - \mu)}{E} \rho$$

La variación de la longitud del radio será igual a este corrimiento particularizado para $\rho = R$

$$\Delta R = (u)_{\rho=R} = -\frac{p(1-\mu)}{E} R$$

El signo $-$ que aparece en esta expresión indica que el radio del disco experimenta un acortamiento.

3.º De la expresión que nos da la deformación unitaria en la dirección normal al plano director del disco

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_\rho + \sigma_\theta) = \frac{2p\mu}{E} = \frac{dw}{dz}$$

se obtiene, integrando, el corrimiento en esa dirección

$$w = \int_0^z \frac{2p\mu}{E} dz = \frac{2p\mu z}{E}$$

La variación del espesor pedida es igual a este corrimiento particularizado para $z = e$

$$\Delta e = (w)_{z=e} = \frac{2p\mu e}{E}$$

- 9.2. Un disco de forma circular y de espesor $e = 20$ cm está empotrado en un eje cilíndrico rígido coaxial con el disco y de radio $r = 10$ cm. El radio exterior del disco mide $R = 120$ cm.

Sobre el contorno curvo exterior del disco actúa un momento $M = 850$ m · ton que se supone se reparte uniformemente en el contorno.

Admitiendo un estado de tensión plana y que la función de Airy es de la forma $\phi = K\theta$, siendo K una constante que se determinará en función de los datos, se pide:

1.º Calcular y dibujar la variación de la tensión total sobre el plano AB indicado en la Figura E9.2.

2.º Calcular el valor en mm del recorrido circunferencial del punto C , sabiendo que $OC = 100$ cm.

El módulo de elasticidad del material es $E = 2 \cdot 10^5$ kp/cm² y su coeficiente de Poisson $\mu = 0,2$. No se consideran las fuerzas de masa.

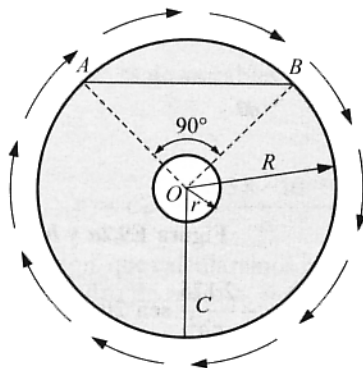


Figura E9.2.

1.º Si es conocida la función de Airy, que se comprueba que es biarmónica, la solución de tensiones que de ella se deduce es, según (9.3.1).

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \frac{K}{\rho^2} \end{cases}$$

Determinaremos el valor de la constante imponiendo la condición de contorno

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{M}{2\pi R e R} = \frac{850}{2\pi \cdot 1,2^2 \cdot 0,2} = \frac{K}{1,2^2} \Rightarrow K = \frac{2.125}{\pi} \text{ ton}$$

Por tanto, cuando ρ se expresa en metros, la expresión de la tensión tangencial será

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{2.125}{\pi \rho^2} \text{ ton/m}^2$$

Una vez conocida la tensión tangencial $\tau_{\rho\theta}$, sobre el elemento en coordenadas polares indicado en la Figura E9.2a, se pueden obtener de forma inmediata las componentes intrínsecas del vector tensión en los puntos del plano AB, en función del ángulo θ indicado, mediante el círculo de Mohr (Fig. E9.2b).

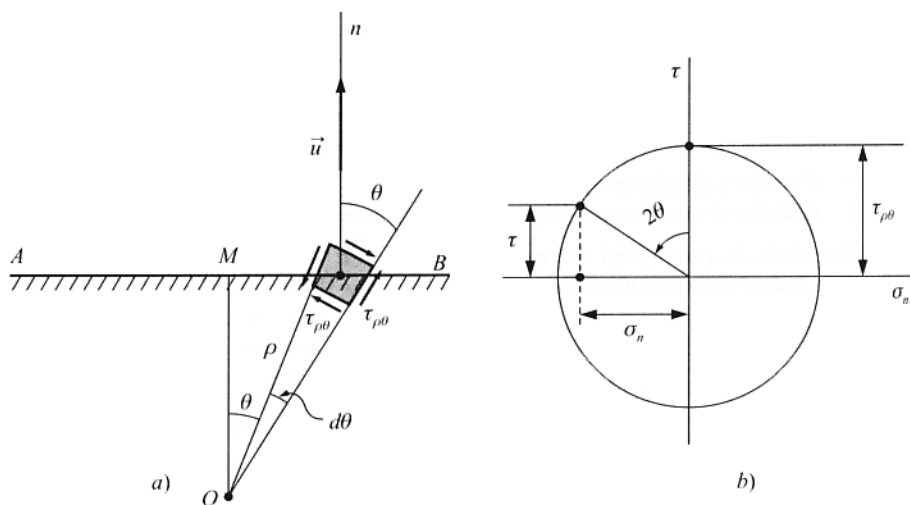


Figura E9.2a y b.

$$\begin{cases} \sigma_n = -\tau_{\rho\theta} \cdot \sin 2\theta = -\frac{2.125}{\pi \rho^2} \sin 2\theta = -\frac{2.125}{\pi R^2 \cos^2 45^\circ} \cos^2 \theta \cdot \sin 2\theta \\ \tau = \tau_{\rho\theta} \cdot \cos 2\theta = \frac{2.125}{\pi \rho^2} \cos 2\theta = \frac{2.125}{\pi R^2 \cos^2 45^\circ} \cos^2 \theta \cdot \cos 2\theta \end{cases}$$

El módulo del vector tensión para el punto del plano AB definido por el ángulo θ será

$$\boxed{\sigma} = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2} = \frac{2.125 \cos^2 \theta}{\pi \cdot 1,2^2 \cdot 0,5} = \boxed{939,46 \cos^2 \theta \text{ ton/m}^2}$$

En la Figura E9.2c se hace una representación gráfica de la variación del módulo de σ y en la Figura E9.2d se esquematiza la dirección y sentido del vector tensión en los puntos del plano AB considerado, según se deduce fácilmente observando el círculo de Mohr.

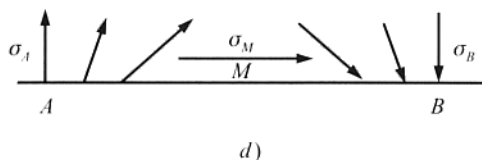
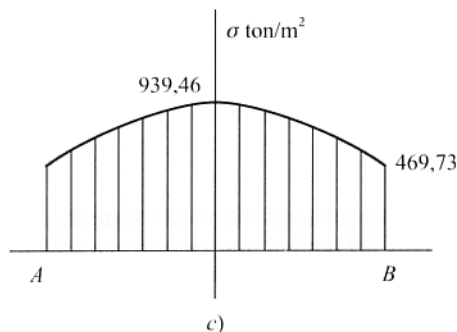


Figura E9.2c y d.

2.º Por razones de simetría, la componente u del vector corrimiento no depende de θ y v depende exclusivamente de ρ , por lo que la expresión de $\gamma_{\rho\theta}$ dada por (9.2.2) se reduce a

$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{dv}{d\rho} - \frac{v}{\rho} = \frac{\tau_{\rho\theta}}{G} = \frac{2.125}{\pi\rho^2 G}$$

en donde tenemos que expresar G en ton/m^2

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1 + 0,2)} \text{ kp/cm}^2 = \frac{10^6}{1,2} \text{ ton/m}^2$$

Sustituyendo este valor, se tiene:

$$\frac{dv}{d\rho} - \frac{v}{\rho} = \frac{2.125 \cdot 1,2}{\pi\rho^2 \cdot 10^6} = \frac{811,7 \cdot 10^{-6}}{\rho^2}$$

ecuación diferencial lineal, cuya ecuación integral podemos obtener sumando a la solución de la ecuación homogénea $\frac{dv}{d\rho} - \frac{v}{\rho} = 0$, que es de variables separadas, una solución particular de la completa de la forma $\frac{k}{\rho}$

$$v = C\rho - \frac{405,8 \cdot 10^{-6}}{\rho}$$

siendo C una constante de integración, que calcularemos imponiendo la condición de ser nulo el corrimiento v en los puntos del cilindro de radio $\rho = 0,1$ m, que están en contacto con el eje rígido fijo

$$(v)_{\rho=0,1} = C \cdot 0,1 - \frac{405,8 \cdot 10^{-6}}{0,1} = 0 \Rightarrow C = 405,8 \cdot 10^{-4}$$

La expresión del corrimiento v será, si ρ se expresa en metros

$$v = 405,8 \cdot 10^{-4} \rho - \frac{405,8 \cdot 10^{-6}}{\rho} \text{ m}$$

Particularizando para el punto $C(\rho = 1 \text{ cm})$, se obtiene

$$v_c = 4,05 \text{ cm}$$

- 9.3. Un embrague que forma parte de un grupo motobomba está formado por un tambor cilíndrico cuya sección es la indicada en la Figura E9.3 y que gira alrededor de su eje a 3.200 rpm. El material del embrague es fundición de las siguientes características:

Tensión de rotura: 31,5 kp/mm²
 Densidad δ : 8,1 kp/dm³
 Coeficiente de Poisson μ : 0,25

Los radios interior y exterior del tambor tienen los valores de $R_1 = 200 \text{ mm}$; $R_2 = 212,5 \text{ mm}$.

El embrague lleva unas masas en la parte interna del tambor, que ejercen una acción equivalente a una tensión de compresión uniforme sobre la cara interna del tambor, de valor $p = -435,6 \cdot \text{N/m}^2$.

Calcular las leyes de las tensiones radial y circunferencial que existen en el tambor del embrague en las condiciones de trabajo indicadas, señalando el valor de la tensión máxima, así como el coeficiente de seguridad.

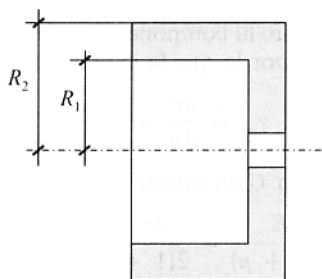


Figura E9.3.

Son aplicables al problema las ecuaciones generales (9.7.1).

$$\begin{cases} \sigma_r = A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{(3 + \mu) \delta \omega^2}{8} \rho^2 \\ \sigma_\theta = A + \frac{B}{\rho^2} - (1 + 3\mu) \frac{\delta \omega^2}{8} \rho^2 \end{cases}$$

Para la determinación de las constantes de integración impondremos las condiciones de contorno y teniendo en cuenta que:

$$\delta = 7.100 \text{ kp/m}^3$$

$$\omega = 3.200 \text{ rpm} = \frac{2\pi \cdot 3.200}{60} \text{ rad/seg} = 335,1 \text{ rad/seg}$$

$$(\sigma_r)_{\rho=R_1} = p \quad ; \quad (\sigma_r)_{\rho=R_2} = 0$$

$$\begin{cases} -435,6 \cdot 10^4 = A - \frac{B}{0,2^2} - \frac{3,25 \cdot 7.100 \cdot 335,1^2}{8} 0,2^2 \\ 0 = A - \frac{B}{0,2125^2} - \frac{3,25 \cdot 7.100 \cdot 335,1^2}{8} 0,2125^2 \end{cases}$$

Restando ambas expresiones

$$435,6 \cdot 10^4 = B \left(\frac{1}{0,2^2} - \frac{1}{0,2125^2} \right) - \frac{3,25 \cdot 7.100 \cdot 335,1^2}{8} (0,2125^2 - 0,2^2)$$

$$2,855B = 435,6 \cdot 10^4 + 167 \cdot 10^4 = 602,6 \cdot 10^4$$

de donde

$$B = 211,07 \cdot 10^4$$

De la segunda ecuación de contorno tenemos:

$$A = \frac{B}{0,2125^2} + 1.462,57 \cdot 10^4 = 4.674,25 \cdot 10^4 + 1.462,57 \cdot 10^4 = 6.136,82 \cdot 10^4$$

Por tanto, las leyes de las tensiones radial y circunferencial son:

$$\begin{cases} \sigma_r = 6.136,82 \cdot 10^4 - \frac{211,07 \cdot 10^4}{\rho^2} - \frac{3,25 \cdot 7.100 \cdot 335,1^2}{8} \rho^2 \text{ N/m}^2 \\ \sigma_\theta = 6.136,82 \cdot 10^4 + \frac{211,07 \cdot 10^4}{\rho^2} - \frac{1,75 \cdot 7.100 \cdot 335,1^2}{8} \rho^2 \text{ N/m}^2 \end{cases}$$

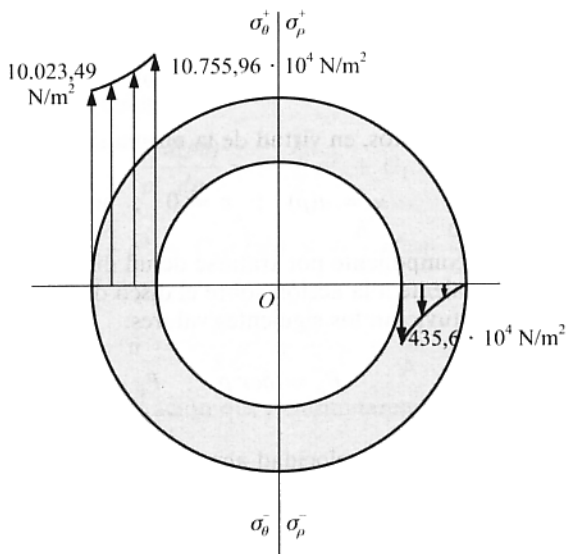


Figura E9.3a.

En la Figura E9.3a se representan ambas leyes. Se observa que la tensión máxima corresponde a la tensión circunferencial en los puntos de la superficie del tambor.

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta \text{ máx}} &= 6.136,82 \cdot 10^4 + \frac{211,07}{0,2^2} \cdot 10^4 - \frac{7.100 \cdot 335,1^2 \cdot 0,2^2}{8} = \\ &= 10.715,96 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 = 1.093,46 \text{ kp/cm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta \text{ máx}} = 1.093,46 \text{ kp/cm}^2$$

El coeficiente de seguridad será:

$$n = \frac{3.150}{1.093,46} = 2,88$$

9.4. Un disco delgado de radio $R = 20$ cm gira en torno al eje de simetría perpendicular a su plano a razón de $n = 15.000$ rpm. Sobre el disco, cuya densidad es $\delta = 1.600$ kp/m³, coeficiente de Poisson, $\mu = 0,25$ y módulo de elasticidad $E = 5 \cdot 10^4$ kp/cm² no actúa otra sollicitación que no sea la fuerza centrífuga. Se pide:

- 1.º Obtener la expresión del corrimiento de cualquier punto.
- 2.º Estudiar el estado tensional creado por la rotación en los puntos del disco, representando gráficamente las tensiones principales en los puntos de un radio.
- 3.º Calcular la variación de la longitud del radio del disco.

1.º En el disco se crea un estado tensional plano que presenta simetría respecto del centro del disco. Debido a ella, se deduce que las tensiones normales σ_ρ y σ_θ son funciones exclusivamente de ρ , así como que se ha de anular la tensión tangencial $\tau_{\rho\theta}$

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho(\rho) \quad ; \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(\rho) \quad ; \quad \tau_{\rho\theta} = 0$$

En cuanto a los corrimientos, en virtud de la misma simetría

$$u = u(\rho) \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad w = 0$$

anulándose esta última componente por tratarse de un disco delgado.

La rotación es equivalente a la acción sobre el disco de un sistema de fuerzas de masa por unidad de volumen que tuvieran los siguientes valores:

$$F_\rho = \delta \omega^2 \rho \quad ; \quad F_\theta = 0$$

en donde δ es la densidad y ω la velocidad angular expresada en radianes: $\omega = \frac{2\pi n}{60}$.

En nuestro caso las ecuaciones (9.1.4) de equilibrio interno se reducen a:

$$\delta \omega^2 \rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (1)$$

Para calcular el corrimiento bastará encontrar $u = u(\rho)$. Para ello contamos con las ecuaciones (9.2.2) que se reducen a:

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} \quad ; \quad \gamma_{\rho\theta} = \gamma_{\theta z} = \gamma_{\rho z} = 0$$

Igualando a las expresiones (9.2.3) correspondientes a las leyes de Hooke, tenemos

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu\sigma_\theta) = \frac{du}{d\rho}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_\rho) = \frac{u}{\rho}$$

de donde podemos despejar σ_ρ y σ_θ

$$\sigma_\rho = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{du}{d\rho} + \mu \frac{u}{\rho} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{u}{\rho} + \mu \frac{du}{d\rho} \right) \quad (3)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de equilibrio (1), se tiene

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} = -\frac{1 - \mu^2}{E} \delta\omega^2 \rho = -K\rho \quad (4)$$

siendo $K = \frac{1 - \mu^2}{E} \delta\omega^2$ que, como se ve, es una constante.

Esta ecuación diferencial se puede integrar mediante dos cuadraturas, ya que se puede poner en la forma

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho u)}{d\rho} \right) = -K\rho$$

Integrando una y otra vez, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho u)}{d\rho} &= -\frac{K}{2} \rho^2 + C_1 \\ \rho u &= -\int \left(\frac{K}{2} \rho^3 + C_1 \rho \right) d\rho = -\frac{K}{8} \rho^4 + \frac{C_1}{2} \rho^2 + C_2 \end{aligned}$$

de donde:

$$u = -\frac{K}{8} \rho^3 + \frac{C_1}{2} \rho + \frac{C_2}{\rho} \quad (5)$$

siendo C_1 y C_2 constantes de integración que determinaremos imponiendo las condiciones de contorno:

$$\text{Para } \rho = 0; \quad u \neq \infty \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\text{Para } \rho = R; \quad \sigma_\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\rho} + \mu \frac{u}{\rho} = 0, \text{ en virtud de (2)}$$

$$-\frac{3K}{8} R^2 + \frac{C_1}{2} + \mu \left(-\frac{K}{8} R^2 + \frac{C_1}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{K(3 + \mu)}{4(1 + \mu)} R^2$$

Llevando este valor a (5), la expresión del corrimiento será

$$u = -\frac{K}{8} \rho^3 + \frac{K(3 + \mu)R^2}{8(1 + \mu)} \rho = \frac{1 - \mu^2}{8E} \delta \omega^2 \left(-\rho^3 + \frac{(3 + \mu)R^2}{1 + \mu} \rho \right)$$

y sustituyendo los valores dados, se obtiene:

$$u = \frac{1 - 0,25^2}{8 \cdot 5 \cdot 10^4} \frac{1.600}{981 \cdot 10^6} \frac{4\pi^2 \cdot 225 \cdot 10^6}{3.600} \left(-\rho^3 + \frac{3,25 \cdot 400}{1,25} \rho \right) \text{ cm}$$

$$u = 0,9432 (1,040\rho - \rho^3) 10^{-5} \text{ cm}$$

2.º Teniendo en cuenta el valor de u obtenido, de (2) y (3) se calculan las tensiones normales σ_ρ y σ_θ , que son principales por ser $\tau_{\rho\theta} = 0$.

$$\sigma_\rho = \frac{5 \cdot 10^4}{1 - 0,25^2} [0,9432 \cdot 10^{-5} (1,040 - 3\rho^2) +$$

$$+ 0,25 \cdot 0,9432 \cdot 10^{-5} (1,040 - \rho^2)] = 0,503 (1,300 - 3,25 \rho^2) \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_\theta = \frac{5 \cdot 10^4}{1 - 0,25^2} [0,9432 \cdot 10^{-5} (1,040 - \rho^2) +$$

$$+ 0,25 \cdot 0,9432 \cdot 10^{-5} (1,040 - 3\rho^2)] = 0,503 (1,300 - 1,75 \rho^2) \text{ kp/cm}^2$$

Las tensiones principales son, pues

$$\sigma_\rho = 0,503 (1,300 - 3,25 \rho^2) \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_\theta = 0,503 (1,300 - 1,75 \rho^2) \text{ kp/cm}^2$$

La representación gráfica son sendas parábolas que se indican en la Figura E9.4.

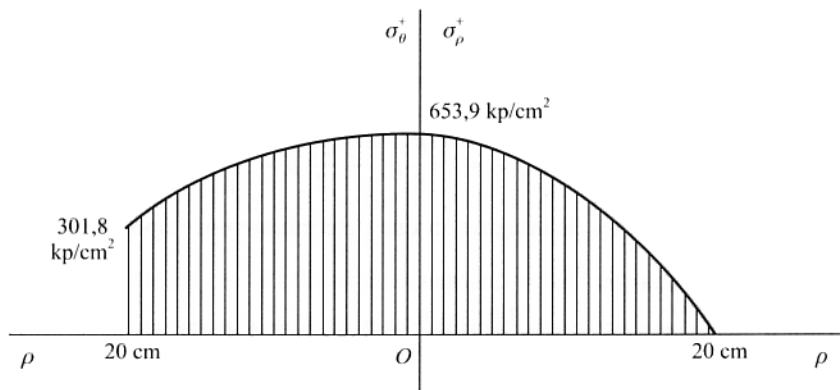


Figura E9.4.

3.º La variación del radio del disco es igual al corrimiento radial de un punto periférico. Por tanto:

$$\Delta R = (u)_{\rho=20} = 9,9432 (1,040 \cdot 20 - 20^3) 10^{-5} = 0,12 \text{ cm}$$

$$\Delta R = 0,12 \text{ cm}$$

- 9.5. Una chapa plana de forma cuadrada de $a = 6 \text{ m}$ de lado tiene en su centro un taladro de diámetro $2r = 60 \text{ cm}$. Está solicitada a una tracción uniforme $t = 600 \text{ kp/cm}^2$ que actúa sobre dos lados opuestos, como se indica en la Figura E9.5. Se pide:

1.º Calcular los vectores tensión en los puntos A , C , D y H del plano AB definidos por las distancias $\overline{OA} = 30 \text{ cm}$, $\overline{OC} = 60 \text{ cm}$, $\overline{OD} = 120 \text{ cm}$ y $\overline{OH} = 300 \text{ cm}$.

2.º Calcular los vectores tensión sobre el plano JK en los puntos L , M y N cuyas posiciones se indican en la figura.

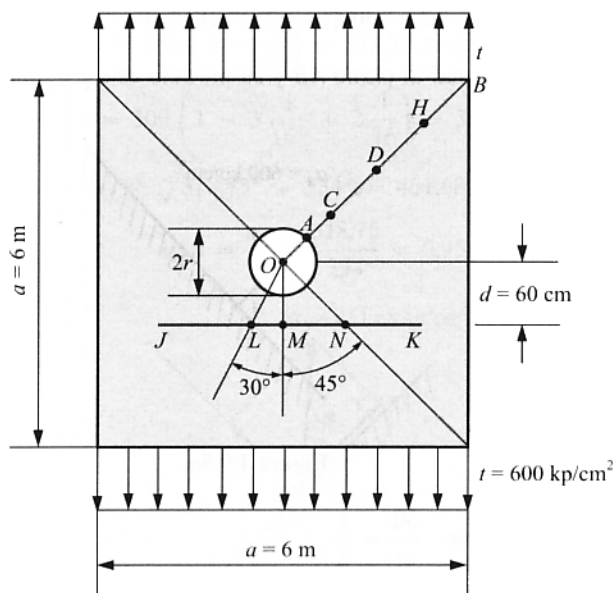


Figura E9.5.

1.º Tomando un sistema de coordenadas polares con el centro O del taladro como polo y como eje polar la semirrecta ascendente que coincide con la dirección de la tracción, al estado tensional existente en la placa le son aplicables las fórmulas (9.8.11)

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right) + \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} - 4 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2} \right) - \frac{t}{2} \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{t}{2} \left(1 - 3 \frac{r^4}{\rho^4} + 2 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{cases}$$

Para el plano AB ($\theta = -45^\circ$ en las ecuaciones anteriores), las componentes intrínsecas de los vectores tensión en sus puntos son precisamente σ_θ y $\tau_{\rho\theta}$.

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_\theta = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2} \right) = 300 \left(1 + \frac{30^2}{\rho^2} \right) \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = \tau_{\rho\theta} = \frac{t}{2} \left(1 - 3 \frac{r^4}{\rho^4} + 2 \frac{r^2}{\rho^2} \right) = 300 \left(1 - 3 \frac{30^4}{\rho^4} + 2 \frac{30^2}{\rho^2} \right) \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Aplicaremos estas fórmulas para obtener los vectores tensión en los puntos dados.

Punto A $\rho = 30 \text{ cm} \Rightarrow \frac{30}{\rho} = 1$

$$\begin{cases} \sigma_n = 300 (1 + 1) = 600 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = 300(1 - 3 + 2) = 0 \end{cases}$$

El vector tensión es normal al plano AB y su módulo es $\sigma_A = 600 \text{ kp/cm}^2$ (Fig. E9.5a).

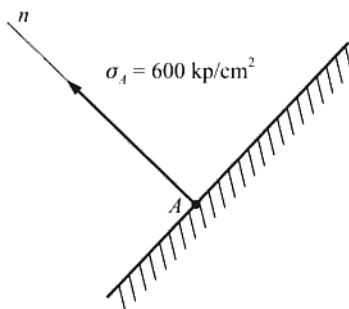


Figura E9.5a.

Punto C $\rho = 60 \text{ cm} \Rightarrow \frac{30}{\rho} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \sigma_n = 300 \left(1 + \frac{1}{4} \right) = 375 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = 300 \left(1 - 3 \frac{1}{16} + 2 \frac{1}{4} \right) = 393,75 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

El vector tensión tiene de módulo

$$\sigma_C = \sqrt{375^2 + 393,75^2} = 543,75 \text{ kp/cm}^2$$

y forma un ángulo α con el plano AB , tal que (Fig. E9.5b).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_n}{\tau} = \frac{375}{393,75} = 0,952$$

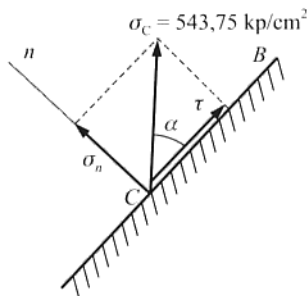


Figura E9.5b.

Punto D $\rho = 120 \text{ cm} \Rightarrow \frac{30}{\rho} = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \sigma_n = 300 \left(1 + \frac{1}{16} \right) = 318,75 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = 300 \left(1 - 3 \frac{1}{16^2} + 2 \frac{1}{16} \right) = 334 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_D = \sqrt{318,75^2 + 334^2} = 461,68 \text{ kp/cm}^2$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_n}{\tau} = \frac{318,75}{334} = 0,954$$

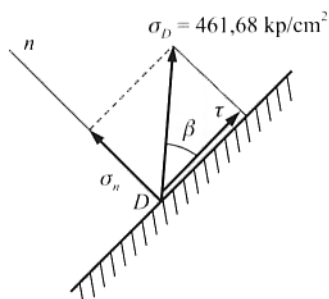


Figura E9.5c.

Punto H $\rho = 300 \text{ cm} \Rightarrow \frac{30}{\rho} = \frac{1}{10}$

$$\begin{cases} \sigma_n = 300 \left(1 + \frac{1}{10^2} \right) = 303 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = 300 \left(1 - 3 \frac{1}{10^4} + 2 \frac{1}{10^2} \right) = 305,91 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_H = \sqrt{303^2 + 305,91^2} = 430,57 \text{ kp/cm}^2$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sigma_n}{\tau} = \frac{303}{305,91} = 0,990$$

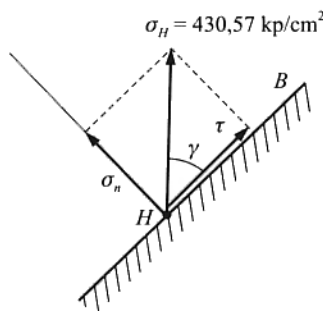


Figura E9.5d.

2.º Para calcular los vectores tensión en el plano JK tomaremos como eje polar la semi-recta descendente. Seguirán siendo válidas las fórmulas (9.8.11) tomando adecuadamente los valores de θ . Veamos qué valores toman en los puntos dados las tensiones polares para calcular después, a partir de éstas, las componentes intrínsecas.

Calcularemos las tensiones polares de los puntos L , M y N a partir de las coordenadas polares de los mismos, previamente determinadas.

Una vez obtenidas las coordenadas polares, hallaremos los valores pedidos de las componentes intrínsecas de los vectores tensión en los citados puntos apoyándonos en los círculos de Mohr.

Punto L $\theta = -30^\circ$; $\rho = \frac{d}{\cos 30^\circ} = 40\sqrt{3}$; $\frac{30}{\rho} = \frac{3}{4\sqrt{3}}$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = 300 \left(1 - \frac{9}{48}\right) + 150 \left(1 + 3 \frac{9^2}{48^2} - 4 \frac{9}{48}\right) = 297 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_\theta = 300 \left(1 + \frac{9}{48}\right) - 150 \left(1 + 3 \frac{9^2}{48^2}\right) = 190,43 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{\rho\theta} = 150 \sqrt{3} \left(1 - 3 \frac{9^2}{48^2} + 2 \frac{9}{48}\right) = 329,83 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Del círculo de Mohr (Fig. E9.5f), se deducen fácilmente las componentes intrínsecas del vector tensión

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} = \frac{659,66}{136,64} = 4,827 \Rightarrow \alpha = 78^\circ 18'$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2} \cos(\alpha - 60^\circ) = 578,54 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2} \sin(\alpha - 60^\circ) = -105,76 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

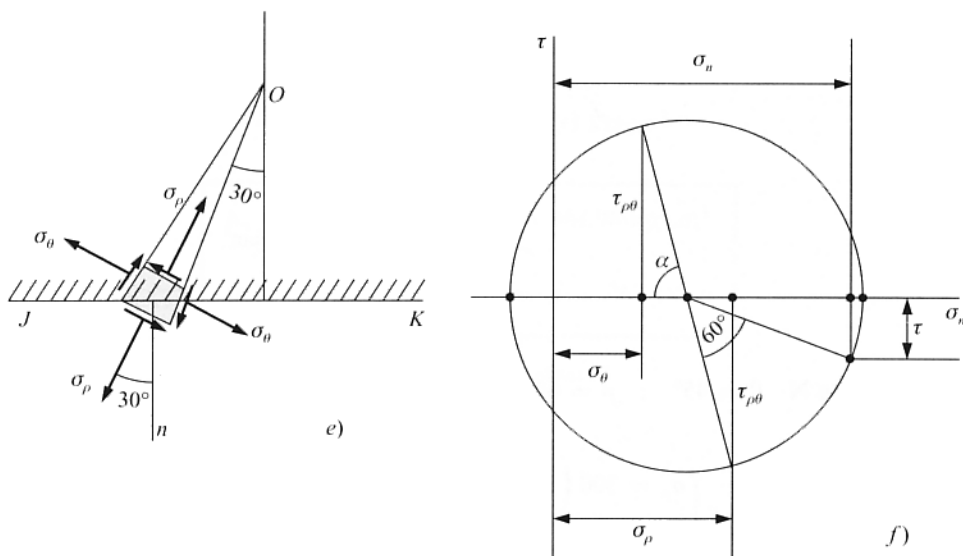


Figura E9.5e y f.

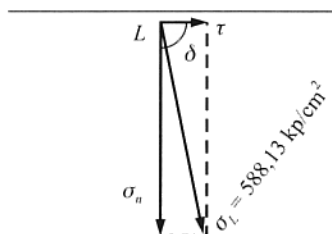


Figura E9.5g.

$$\sigma_L = \sqrt{578,54^2 + 105,76^2} = 588,13 \text{ kp/cm}^2$$

$$\text{tg } \delta = \frac{578,54}{105,76} = 5,470 \Rightarrow \delta = 79^\circ 18'$$

Punto M $\theta = 0$; $\rho = 60 \text{ cm}$; $\frac{30}{\rho} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = 300 \left(1 - \frac{1}{4} \right) + 300 \left(1 + 3 \frac{1}{16} - 4 \frac{1}{4} \right) = 281,25 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_\theta = 300 \left(1 + \frac{1}{4} \right) - 300 \left(1 + 3 \frac{1}{16} \right) = 18,75 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases}$$

El vector tensión en M es coincidente con σ_ρ (Fig. E9.5h)

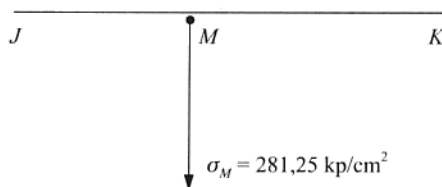


Figura E9.5h.

Punto N $\theta = 45^\circ$; $\rho = 60\sqrt{2}$; $\frac{30}{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = 300 \left(1 - \frac{1}{8} \right) = 262,5 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_\theta = 300 \left(1 + \frac{1}{8} \right) = 337,5 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{\rho\theta} = -300 \left(1 - 3 \frac{1}{64} + 2 \frac{1}{8} \right) = -360,94 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

Del círculo de Mohr (Fig. E9.5j) se deduce:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_\theta - \sigma_\rho}{2\tau_{\rho\theta}} = \frac{75}{721,8} = 0,1039 \Rightarrow \alpha = 6^\circ$$

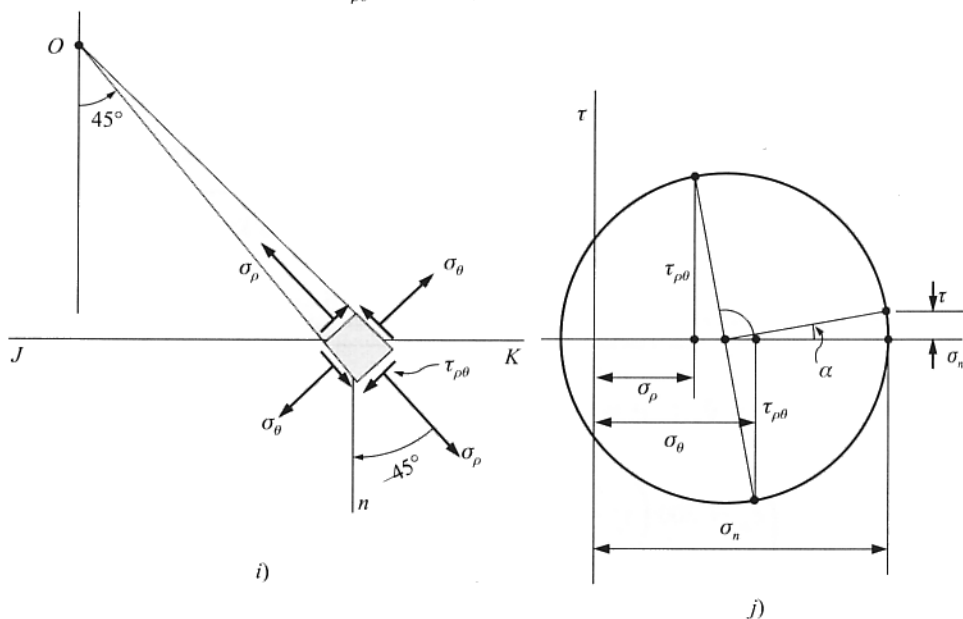


Figura E9.5i y j.

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2} \cos \alpha = 660,89 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\theta}^2} \sin \alpha = 37,93 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_n = \sqrt{660,89^2 + 37,93^2} = 661,98 \text{ kp/cm}^2$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{660,89}{37,93} = 17,42 \Rightarrow \varepsilon = 86^\circ 43'$$

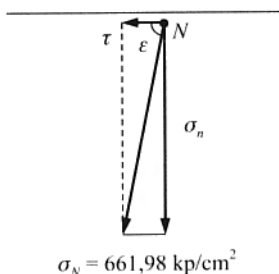


Figura E9.5k.

- 9.6. Una chapa plana indefinida tiene un taladro de radio $r = 10 \text{ cm}$ con centro en un punto O . Está sometida a dos tracciones uniformes perpendiculares entre sí: $t_1 = 20 \text{ kp/cm}^2$ y $t_2 = 160 \text{ kp/cm}^2$. Se pide calcular los valores y signos de las tensiones normales en el plano ABC indicado en la Figura E9.6 en los puntos A , B y C definidos por:

$$\overline{OA} = \overline{OC} = 40 \text{ cm} \quad ; \quad \overline{AB} = \overline{BC}$$

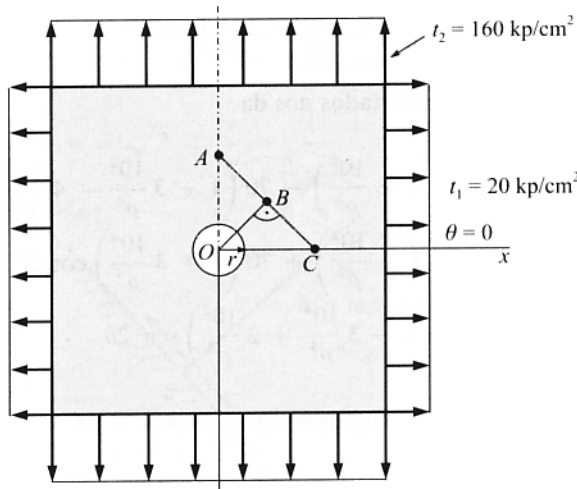


Figura E9.6.

Podemos considerar el estado tensional de la placa dada como la superposición de dos estados:

Estado 1: tracción $t_1 = 20 \text{ kp/cm}^2$ en dirección del eje x .

Estado 2: tracción $t_2 = 160 \text{ kp/cm}^2$ en dirección del eje y .

A ambos estados les es aplicable la solución de tensiones (9.8.11) de la siguiente forma:

Estado 1: Tomando como eje polar ($\theta = 0$) el eje x , se tiene

$$\sigma_{\rho 1} = \frac{t_1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right) + \frac{t_1}{2} \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} - 4 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{t_1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2} \right) - \frac{t_1}{2} \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{\rho\theta 1} = -\frac{t_1}{2} \left(1 - 3 \frac{r^4}{\rho^4} + 2 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta$$

Estado 2: Haremos $\theta_1 = \theta - \frac{\pi}{2}$ (véase Fig. 9.11)

$$\sigma_{\rho 2} = \frac{t_2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right) + \frac{t_2}{2} \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} - 4 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{t_2}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2} \right) + \frac{t_2}{2} \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{\rho\theta 2} = \frac{t_2}{2} \left(1 - 3 \frac{r^4}{\rho^4} + 2 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta$$

La superposición de ambos estados nos da

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = 90 \left(1 - \frac{10^2}{\rho^2} \right) - 70 \left(1 + 3 \frac{10^4}{\rho^4} - 4 \frac{10^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta} = 90 \left(1 + \frac{10^2}{\rho^2} \right) + 70 \left(1 + 3 \frac{10^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = 70 \left(1 - 3 \frac{10^4}{\rho^4} + 2 \frac{10^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{cases}$$

Particularizando estas ecuaciones para los puntos A , B y C respectivamente, tenemos:

Punto A $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\rho = 40 \text{ cm}$ $\frac{r}{\rho} = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = 90 \left(1 - \frac{1}{16} \right) + 70 \left(1 + 3 \frac{1}{16^2} - 4 \frac{1}{16} \right) = 137,7 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_\theta = 90 \left(1 + \frac{1}{16} \right) - 70 \left(1 + 3 \frac{1}{16^2} \right) = 24,8 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases}$$

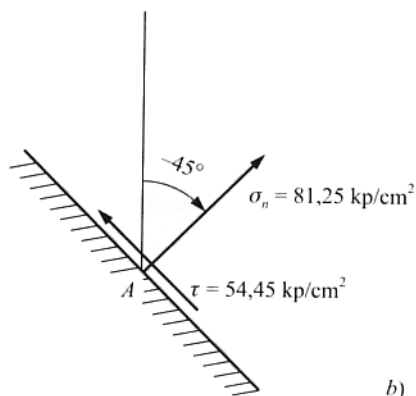
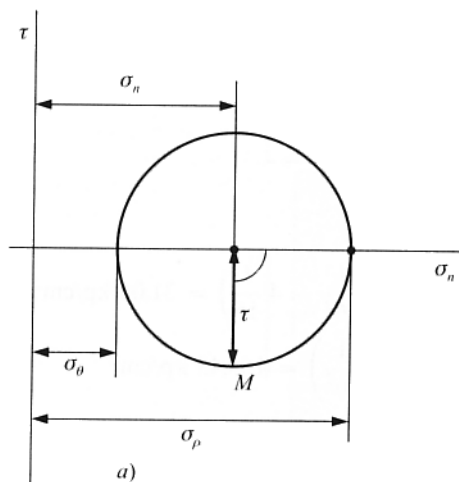


Figura E9.6a y b.

Del círculo de Mohr indicado en la Figura E9.6a, se deduce fácilmente

$$\sigma_n = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} = \frac{137,7 + 24,8}{2} = 81,25 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_n = 81,25 \text{ kp/cm}^2$$

Punto B $\theta = \frac{\pi}{4}$; $\rho = 20\sqrt{2}$; $\frac{r}{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

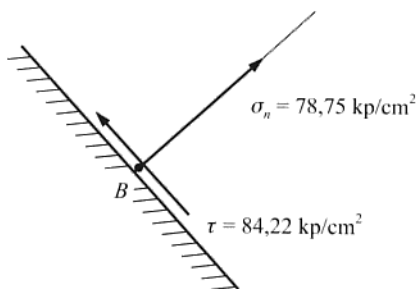


Figura E9.6c.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = 90 \left(1 - \frac{1}{8} \right) = 78,75 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_\theta = 90 \left(1 + \frac{1}{8} \right) = 101,25 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{\rho\theta} = 70 \left(1 - 3 \frac{1}{64} + 2 \frac{1}{8} \right) = 84,22 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

En este caso $\sigma_n = \sigma_\rho$, así como $\tau = \tau_{\rho\theta}$

$$\sigma_n = 78,75 \text{ kp/cm}^2$$

Punto C $\theta = 0$; $\rho = 40 \text{ cm}$; $\frac{r}{\rho} = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = 90 \left(1 - \frac{1}{16} \right) + 70 \left(1 + 3 \frac{1}{16^2} - 4 \frac{1}{16} \right) = 31,06 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_\theta = 90 \left(1 + \frac{1}{16} \right) + 70 \left(1 + 3 \frac{1}{16^2} \right) = 163,45 \text{ kp/cm}^2 \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases}$$

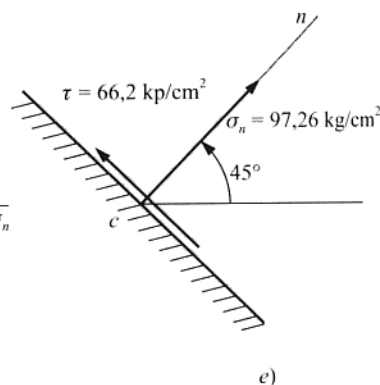
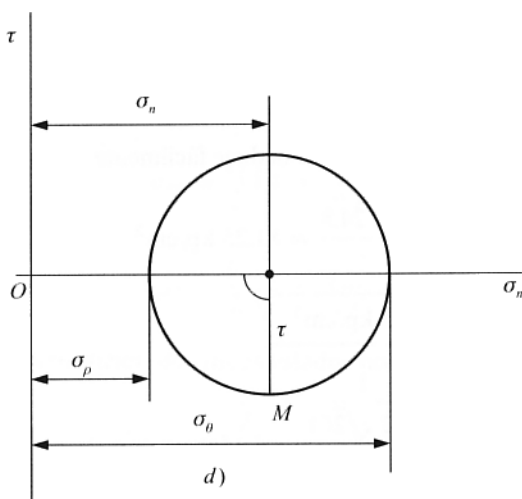


Figura E9.6d y e.

Del círculo de Mohr indicado en la Figura E9.6d, se deduce

$$\sigma_n = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} = \frac{31,06 + 163,45}{2} = 97,25 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_n = 97,26 \text{ kp/cm}^2$$

9.7. A una placa cuadrada cuyo lado mide a y que tiene espesor constante e , se le practica un taladro centrado de radio r y se le somete a esfuerzos tangenciales F , como se indica en la Figura E9.7, que se distribuyen uniformemente sobre las caras perpendiculares al plano de la placa, que lo limitan.

Conociendo el módulo de elasticidad E , el coeficiente de Poisson μ y suponiendo que son aplicables a la placa las fórmulas correspondientes al caso de dimensiones infinitas, se pide:

1.º Expresión analítica de las tensiones en un punto cualquiera de la placa, tomando como eje polar el eje de simetría paralelo a uno de los lados, indicado en la figura.

2.º Tensiones principales en los puntos de la diagonal DB .

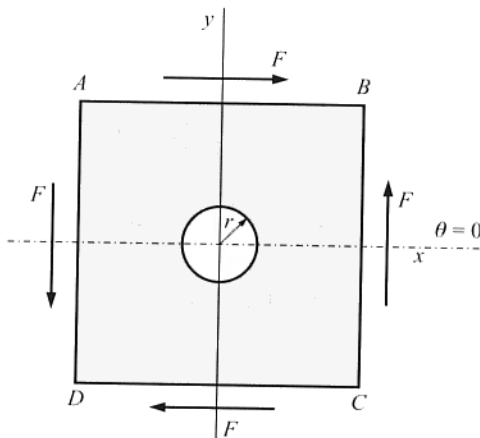


Figura E9.7.

1.º Según lo visto en el Epígrafe 9.8 podemos suponer que la placa forma parte de otra, sometida a la combinación de tensiones de tracción y compresión iguales en valor absoluto en las direcciones de las diagonales, como se indica en la Figura E9.7a, en la que

$$t = \frac{F}{ae}$$

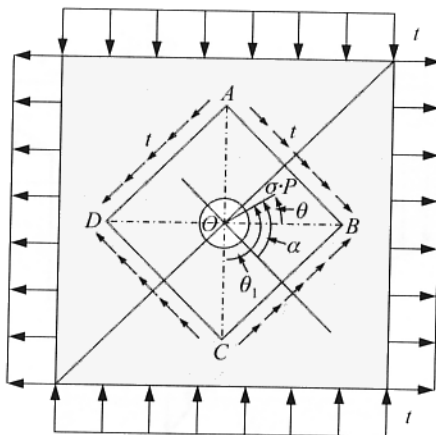


Figura E9.7a.

Se pueden aplicar las fórmulas (9.8.15)

$$\begin{cases} \sigma_\rho = t \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} - 4 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = -t \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = -t \left(1 - 3 \frac{r^4}{\rho^4} + 2 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\cos 2\theta = \cos \left[2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\theta = \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos 2\alpha$$

se pueden expresar las tensiones en cualquier punto de la placa en función de sus coordenadas polares (ρ, α)

$$\begin{cases} \sigma_\rho = t \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} - 4 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \sin 2\alpha \\ \sigma_\theta = -t \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} \right) \sin 2\alpha \\ \tau_{\rho\theta} = t \left(1 - 3 \frac{r^4}{\rho^4} + 2 \frac{r^2}{\rho^2} \right) \cos 2\alpha \end{cases}$$

2.º Las tensiones polares en los puntos de la diagonal DB se obtienen particularizando las ecuaciones anteriores para $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

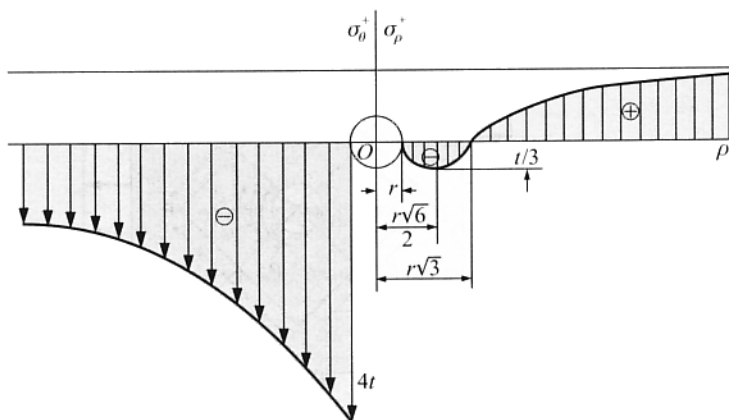


Figura E9.7b.

$$\sigma_\rho = t \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} - 4 \frac{r^2}{\rho^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = -t \left(1 + 3 \frac{r^4}{\rho^4} \right)$$

que son principales, por ser $\tau_{\rho\theta} = 0$.

En la Figura E9.7b se representa gráficamente la variación de ambas.

- 9.8. Sobre el borde que limita a una laja semi-indefinida y perpendicularmente al mismo, se aplica una compresión uniforme de 30 kp/cm^2 , en la forma indicada en la figura E9.8.

Calcular analítica y gráficamente las leyes de variación de las tensiones normales y tangenciales provocadas por la compresión en los puntos de un plano situado a una distancia $a = 6 \text{ m}$ del borde de la laja.

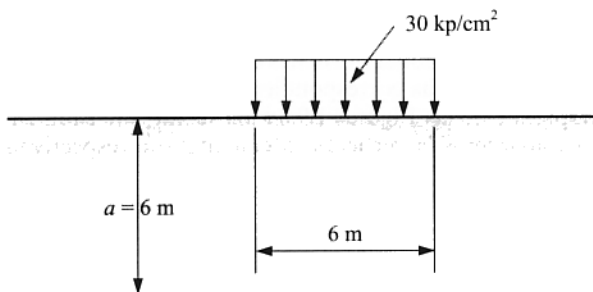


Figura E9.8.

Según se vio en el Epígrafe 9.9 el estado tensional dado se puede considerar como la superposición de los estados indicados en las Figuras E9.8a y E9.8b, cuyas funciones de tensión respectivas son:

$$\phi_1 = -A\rho_1^2\theta_1 \quad \text{y} \quad \phi_2 = A\rho_2^2\theta_2$$

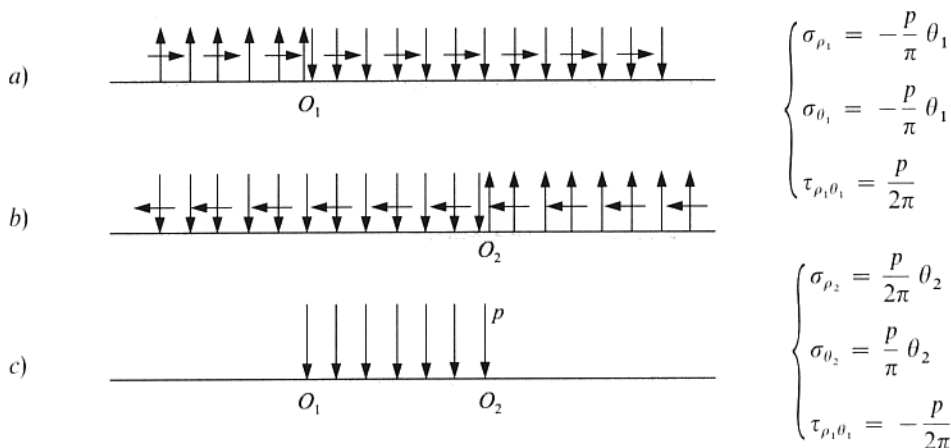


Figura E9.8a, b y c.

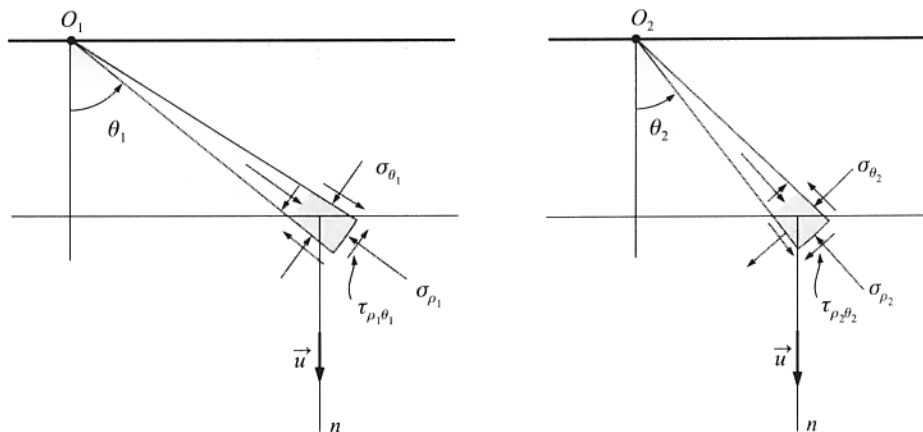


Figura E9.8d.

Para el cálculo de las tensiones normales en los puntos del plano, distante $a = 6$ m del borde de la laja, superpondremos las correspondientes a cada uno de los estados considerados.

Según se desprende de las Figuras E9.8d los vectores tensión en puntos de este plano, cuya normal exterior tomaremos la vertical descendente, son respectivamente

$$[\vec{\sigma}_1] = \begin{pmatrix} \sigma_{\rho_1} & \tau_{\rho_1\theta_1} \\ \tau_{\rho_1\theta_1} & \sigma_{\theta_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\rho_1} \cos \theta_1 - \tau_{\rho_1\theta_1} \sin \theta_1 \\ \tau_{\rho_1\theta_1} \cos \theta_1 - \sigma_{\theta_1} \sin \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{\sigma}_2] = \begin{pmatrix} \sigma_{\rho_2} & \tau_{\rho_2\theta_2} \\ \tau_{\rho_2\theta_2} & \sigma_{\theta_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\rho_2} \cos \theta_2 - \tau_{\rho_2\theta_2} \sin \theta_2 \\ \tau_{\rho_2\theta_2} \cos \theta_2 - \sigma_{\theta_2} \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

Las componentes normales de estas tensiones son:

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{u} &= \sigma_{\rho_1} \cos^2 \theta_1 - 2\tau_{\rho_1\theta_1} \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sigma_{\theta_1} \sin^2 \theta_1 = \\ &= -\frac{15}{\pi} (2\theta_1 + \sin 2\theta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n_2} = \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{u} &= \sigma_{\rho_2} \cos^2 \theta_2 - 2\tau_{\rho_2\theta_2} \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \sigma_{\theta_2} \sin^2 \theta_2 = \\ &= \frac{15}{\pi} (2\theta_2 + \sin 2\theta_2) \end{aligned}$$

A estos mismos resultados obtenidos analíticamente podríamos haber llegado mediante los círculos de Mohr (Fig. E9.8e).

La tensión normal, superposición de ambos estados será

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\frac{15}{\pi} (2\theta_1 + \sin 2\theta_1) + \frac{15}{\pi} (2\theta_2 + \sin 2\theta_2) = \\ &= -\frac{15}{\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2] \end{aligned}$$

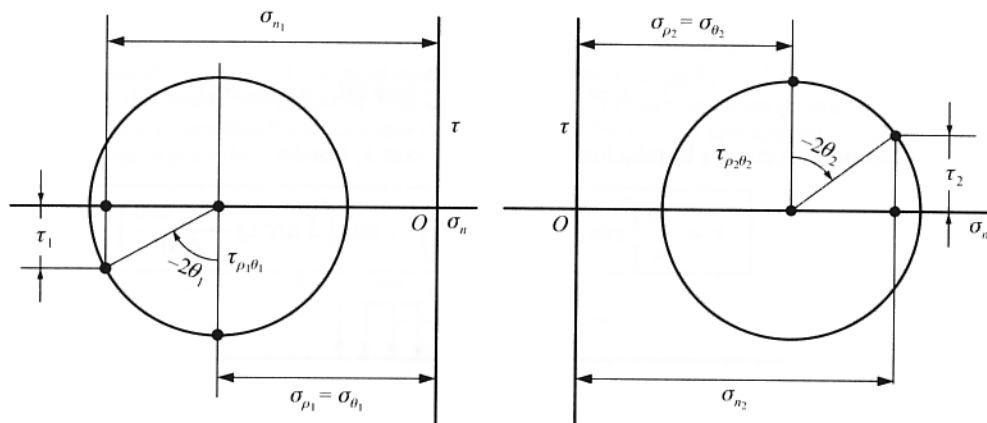


Figura E9.8e.

y como

$$\theta_1 = \arctg \frac{x}{600} \quad \text{y} \quad \theta_2 = \arctg \frac{x - 600}{600}, \quad \text{queda}$$

$$\sigma_n = -\frac{15}{\pi} \left[2 \arctg \frac{x}{600} - 2 \arctg \frac{x - 600}{600} + \sin \left(2 \arctg \frac{x}{600} \right) - \sin \left(2 \arctg \frac{x - 600}{600} \right) \right]$$

debiendo expresar x en cm, abscisa contada a partir de la vertical de O_1 .

La representación gráfica de las tensiones normales, todas de compresión como era de esperar, se hace en la Figura E9.8f.

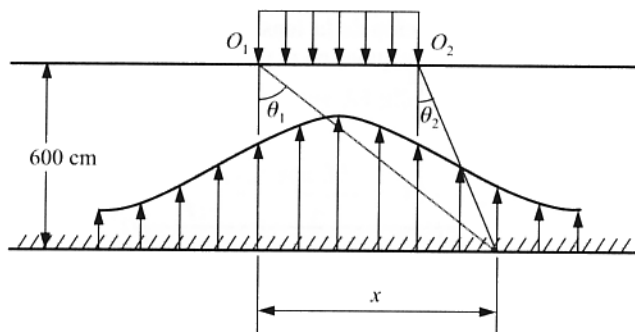


Figura E9.8f.

Para el cálculo de las tensiones tangenciales utilizaremos los círculos de Mohr (Fig. E9.8e).

$$\tau_1 = \tau_{\rho_1\theta_1} \cos 2\theta_1 = \frac{15}{\pi} \cos 2\theta_1$$

$$\tau_2 = \tau_{\rho_2\theta_2} \cos 2\theta_2 = -\frac{15}{\pi} \cos 2\theta_2$$

Por tanto, la superposición de ambas nos da

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{15}{\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)$$

y teniendo en cuenta la relación entre θ_1 y θ_2 con x , queda:

$$\tau = \frac{15}{\pi} \left[\cos \left(2 \arctg \frac{x}{600} \right) - \cos \left(2 \arctg \frac{x - 600}{600} \right) \right]$$

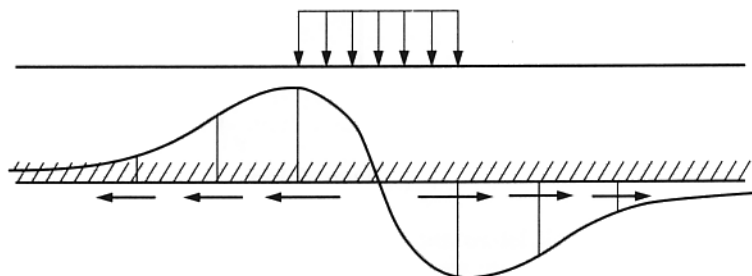


Figura E9.8g.

La representación gráfica de la tensión tangencial se hace en la Figura E9.8g.

- 9.9. Una pieza en forma de ángulo recto y espesor constante es suficientemente grande como para admitir que la forma de sustentación no influye en el entorno del vértice O que en sección está comprendido entre dos cuadrantes de circunferencias concéntricas de centro O y radio $R_1 = 0,1$ m y $R_2 = 2$ m. En la arista del vértice actúan la fuerza y momento uniformemente repartidos que se indican en la Figura E9.9. Se pide:

- 1.º Calcular la ley de variación de la tensión total en los puntos del plano AB indicado.
- 2.º Hallar las tensiones principales en el punto B , así como las direcciones correspondientes, expresando las tensiones en t/m^2 .

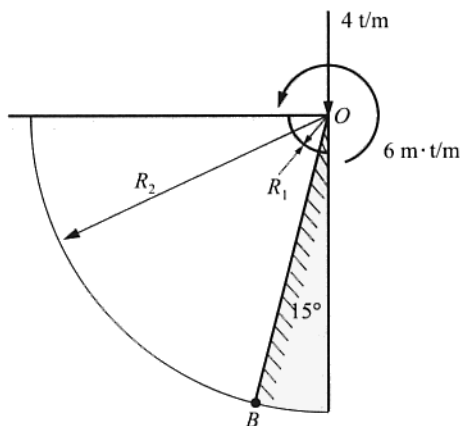


Figura E9.9.

1.º La sollicitación sobre la pieza la podemos poner en la forma que se indica en la Figura 9.9a. La solución de tensiones será la superposición de una carga $P_1 = 2\sqrt{2}$ t/m en dirección de la bisectriz, de otra P_2 de igual módulo en dirección perpendicular y un momento $M = 6$ m t/m, a las que son aplicables las soluciones de tensiones dadas por las ecuaciones (9.11.3), (9.11.6) y (9.11.8), respectivamente.

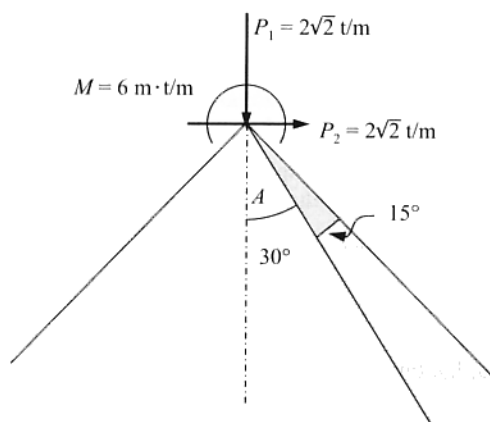


Figura E9.9a.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{2P_1}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta}{\rho} - \frac{2P_2}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{\rho} + \frac{2M}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \frac{\sin 2\theta}{\rho^2} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{M}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{\rho^2} \end{cases}$$

Sustituyendo valores, se tiene para los puntos del plano AB

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\pi}{2} + 1} \frac{\cos 30^\circ}{\rho} - \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\pi}{2} - 1} \frac{\sin 30^\circ}{\rho} + 12 \frac{\sin 60^\circ}{\rho^2} = \frac{-6,85}{\rho} + \frac{10,39}{\rho^2} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{6}{\rho^2} (\cos 60^\circ) = -\frac{3}{\rho^2} \end{cases}$$

Como $\sigma_\theta = 0$, la tensión total en los puntos del plano AB coincide con $\tau_{\rho\theta}$

$$\vec{\sigma} = \frac{3}{\rho^2} \vec{\rho}_0$$

La representación gráfica se indica en la Figura E9.9b.

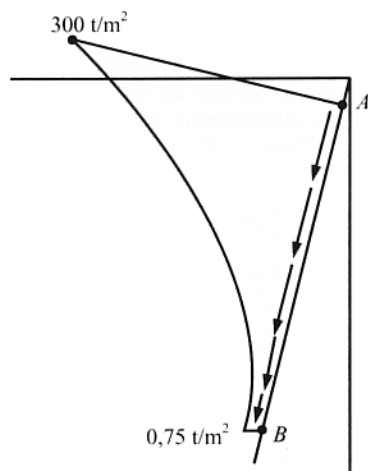


Figura E9.9b.

2.º En el punto B, las tensiones polares son:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{-6,85}{2} + \frac{10,39}{4} = -0,83 \text{ t/m}^2 \\ \sigma_0 = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{3}{4} = -0,75 \text{ t/m}^2 \end{cases}$$

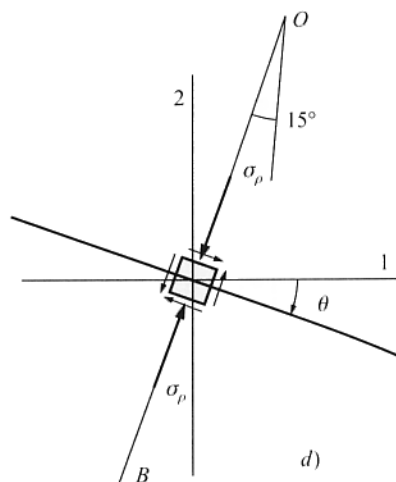
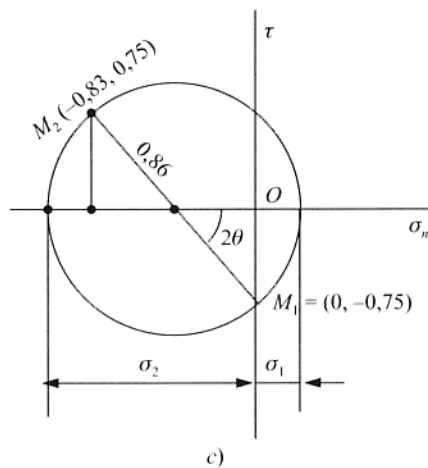


Figura E9.9c y d.

Del círculo de Mohr (Fig. E9.9c) se deducen de forma inmediata los valores de las tensiones principales

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -0,415 + 0,86 = 0,445 \text{ t/m}^2 \\ \sigma_2 &= -0,415 - 0,86 = -1,275 \text{ t/m}^2 \end{aligned}$$

Asimismo, también se obtienen las direcciones principales. En la Figura E9.9d se indican éstas, siendo el ángulo θ tal que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{0,75}{0,415} = 1,8072 \Rightarrow 2\theta = 61^\circ$$

$$\theta = 30^\circ 30'$$

9.10. Sobre la arista del diedro que forman dos planos que limitan un terreno, que se considerará como sólido elástico, actúan las cargas indicadas en la Figura E9.10a.

- 1.º Calcular las tensiones en un punto cualquiera.
- 2.º Se practica en el terreno la galería indicada en la Figura E9.10b.

¿Qué tensiones sería necesario aplicar a las paredes de la galería desde su interior para que el estado tensional sea el mismo que antes de hacerla?

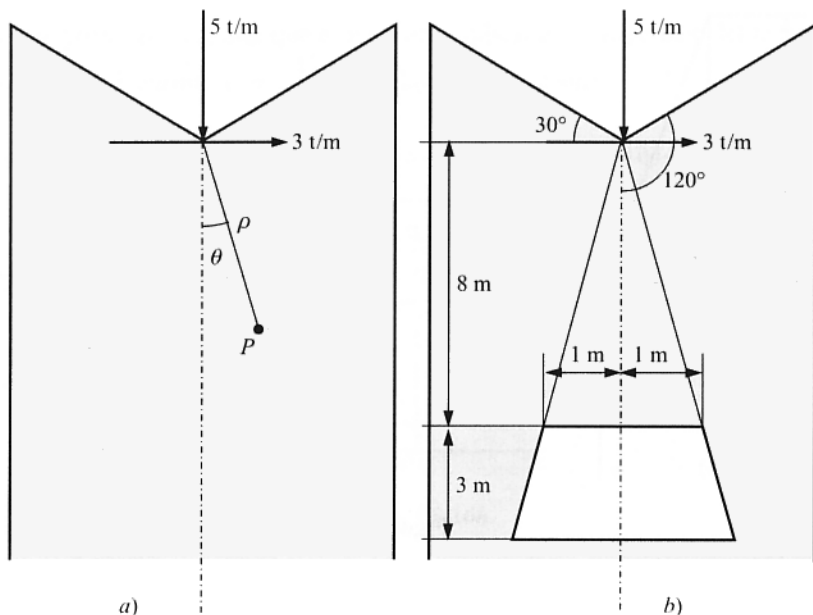


Figura E9.10a y b.

1.º Para calcular las tensiones polares debidas a la carga vertical $P_1 = 5 \text{ ton/m}$ son aplicables las fórmulas (9.11.3) y para las correspondientes a la carga horizontal $P_2 = 3 \text{ ton/m}$ las (9.11.6). A la superposición de ambas corresponderán las siguientes tensiones

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{2P_1}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta}{\rho} - \frac{2P_2}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{\rho} = -\frac{60}{8\pi - 3\sqrt{3}} \frac{\cos \theta}{\rho} - \frac{36}{8\pi + 3\sqrt{3}} \frac{\sin \theta}{\rho} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases}$$

Por tanto, expresando ρ en metros, se tiene:

$$\sigma_\rho = \frac{-3 \cos \theta - 1,18 \operatorname{sen} \theta}{\rho} \text{ ton/m}^2 \quad ; \quad \sigma_\theta = 0 \quad ; \quad \tau_{\rho\theta} = 0$$

2.º Al ser $\sigma_\theta = 0$ y $\tau_{\rho\theta} = 0$, en las paredes laterales no existen tensiones, ni antes ni después de construir la galería, por lo que no habrá que aplicar a ellas tensión alguna.

En el techo, las componentes intrínsecas del vector tensión, según se desprende de la figura E9.10c y del círculo de Mohr (Fig. E9.10d), son:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_\rho}{2} + \cos 2\theta = \sigma_\rho \cos^2 \theta$$

$$\tau = -\frac{\sigma_\rho}{2} \operatorname{sen} 2\theta = -\sigma_\rho \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

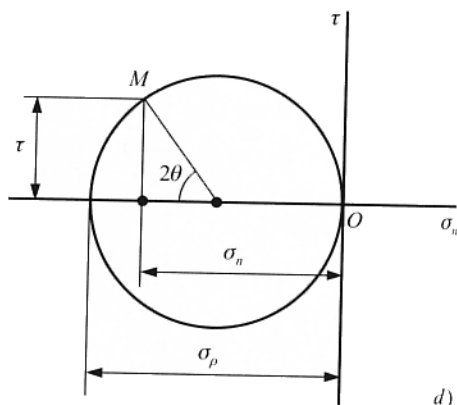
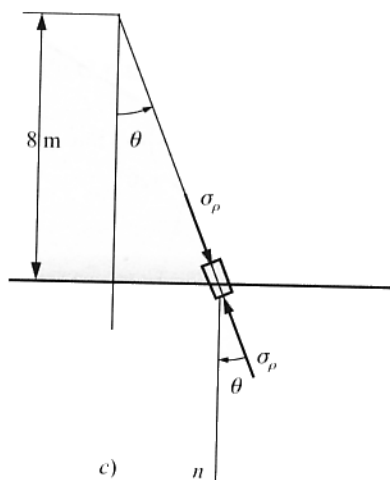


Figura E9.10c y d.

Como $\rho = \frac{8}{\cos \theta}$, teniendo en cuenta la expresión de σ_ρ obtenida anteriormente, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -0,375 \cos^4 \theta - 0,147 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta \text{ ton/m}^2 \\ \tau &= 0,375 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + 0,147 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \text{ ton/m}^2 \end{aligned}$$

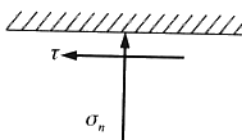


Figura E9.10e.

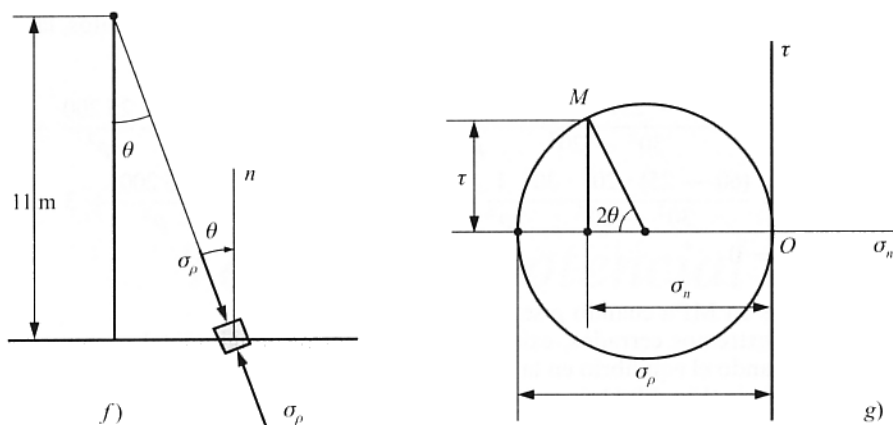


Figura E9.10f y g.

Estas son, pues, las tensiones que es necesario aplicar en la superficie del techo.

Análogamente, haciendo $\rho = \frac{11}{\cos \theta}$ tendríamos para el suelo:

$$\sigma_\rho = -\frac{3}{11} \cos^2 \theta - \frac{1,18}{\rho} \sin \theta \cos \theta = -0,272 \cos^2 \theta - 0,107 \sin \theta \cos \theta \text{ ton/m}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -0,272 \cos^4 \theta - 0,107 \sin \theta \cos^3 \theta \text{ ton/m}^2 \\ \tau &= 0,272 \sin \theta \cos^3 \theta + 0,107 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \text{ ton/m}^2 \end{aligned}$$

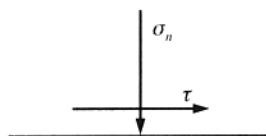


Figura E9.10h.

- 9.11. Un cilindro de pared gruesa, que tiene radio interior $R_1 = 20\text{ cm}$ y radio exterior $R_2 = 30\text{ cm}$, se somete a una presión interior $p_1 = 60\text{ MPa}$ y una presión exterior $p_2 = 25\text{ MPa}$. Calcular la matriz de tensiones en los puntos del cilindro, sabiendo que tiene sus extremos cerrados.

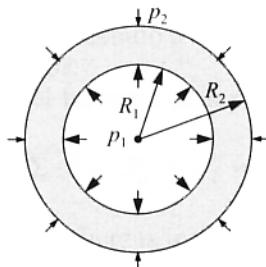


Figura E9.11.

Aplicando las ecuaciones (9.5.9), en las que las presiones son valores absolutos, las componentes σ_ρ , σ_θ y $\tau_{\rho\theta}$ de la matriz de tensiones son:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{(60 - 25) \cdot 20^2 \cdot 30^2}{30^2 - 20^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{60 \cdot 20^2 - 25 \cdot 30^2}{30^2 - 20^2} = -\frac{25\,200}{\rho^2} + 3 \\ \sigma_\theta = \frac{(60 - 25) \cdot 20^2 \cdot 30^2}{30^2 - 20^2} \frac{1}{\rho^2} + \frac{60 \cdot 20^2 - 25 \cdot 30^2}{30^2 - 20^2} = \frac{25\,200}{\rho^2} + 3 \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases}$$

que vendrán dadas en MPa cuando ρ se exprese en centímetros.

Por tener los extremos cerrados, existirá también tensión longitudinal σ_z cuyo valor se puede determinar planteando el equilibrio en la porción de cilindro que se obtiene al realizar un corte ideal perpendicular a su eje (Fig. E9.11a).

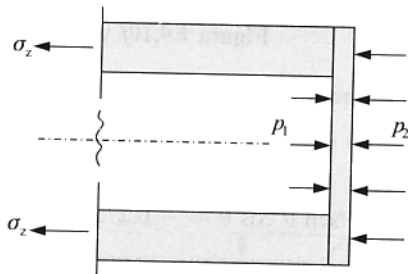


Figura E9.11a.

$$p_1 \pi R_1^2 - \sigma_z \pi (R_2^2 - R_1^2) - p_2 \pi R_2^2 = 0$$

$$\sigma_z = \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{60 \cdot 20^2 - 25 \cdot 30^2}{30^2 - 20^2} = \frac{24.000 - 22.500}{500} = 3 \text{ MPa}$$

Por tanto, la matriz de tensiones pedida, en coordenadas cilíndricas, será:

$$[T] = \begin{pmatrix} -\frac{2.500}{\rho^2} + 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2.500}{\rho^2} + 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Teoría del potencial interno

10.1. Concepto de potencial interno o energía de deformación

Son numerosos los teoremas que existen en la Mecánica de medios continuos y Estructuras que se obtienen por consideraciones de índole energética, es decir, están estrechamente relacionados con el concepto de energía.

Consideremos un prisma mecánico en estado indeformado, es decir, que las componentes de las matrices de tensiones y de deformación sean idénticamente nulas en cualquiera de sus puntos. Al aplicarle un sistema de fuerzas exteriores, el cuerpo elástico se deforma y este sistema de fuerzas realiza un trabajo que llamaremos \mathcal{T}_e .

Por el teorema de las fuerzas vivas, y de una forma general, parte de este trabajo \mathcal{T}_e se utiliza en vencer la resistencia al rozamiento de las ligaduras externas e internas, parte se transforma en energía cinética y el resto en trabajo de deformación debido a las fuerzas interiores.

Supondremos que el paso del estado inicial indeformado al final (deformado) se realiza de manera reversible, es decir, que en cualquier estado intermedio de deformación el sistema de fuerzas exteriores es equilibrado por otro sistema antagonista, lo que origina que la velocidad sea infinitamente pequeña y nula, por consiguiente, la variación de energía cinética.

Por otra parte, supondremos despreciable el trabajo originado por las fuerzas de rozamiento de los enlaces exteriores, así como el debido a las fuerzas de rozamiento interno, por tratarse de cuerpos perfectamente elásticos.

En estas condiciones, la expresión del teorema de las fuerzas vivas se reduce a

$$\Delta E_{\text{cin}} = \Sigma \mathcal{T} = \mathcal{T}_e + \mathcal{T}_i = 0 \quad (10.1.1)$$

siendo \mathcal{T}_i el trabajo de deformación de las fuerzas interiores.

Esta ecuación indica que en cualquier instante de la deformación la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores e interiores es nula.

La conservación de la energía requiere que el trabajo realizado no dependa del orden en

que se apliquen las fuerzas sino únicamente de los estados inicial y final, sin que intervengan los estados intermedios.

La función \mathcal{F}_i recibe el nombre de *potencial interno* o bien el de *energía elástica* o *energía de deformación*. Equivale a la energía mecánica que adquiere el cuerpo elástico y que es capaz de restituir al recuperar la forma que tenía en estado neutro.

La energía de deformación nos mide el trabajo realizado contra las fuerzas interiores durante el proceso de carga. Si suponemos que el sólido elástico está formado por un gran número de partículas unidas entre sí por resortes, la energía de deformación representaría el trabajo que se habría realizado en el proceso de deformación para estirar y contraer tales resortes.

El potencial interno, según (10.1.1)

$$\mathcal{F}_i = -\mathcal{F}_e \quad (10.1.2)$$

es igual y de signo contrario al trabajo de las fuerzas exteriores. Por tanto, para obtener su valor será indistinto calcular \mathcal{F}_e o \mathcal{F}_i . Por eso, en lo que sigue llamaremos \mathcal{F} al potencial interno o energía de deformación.

10.2. Relaciones entre las fuerzas exteriores y las deformaciones. Coeficientes de influencia

Si tenemos un prisma mecánico al que aplicamos un sistema de fuerzas admitiremos en lo que sigue las siguientes hipótesis:

- En ningún punto del prisma se sobrepasa el límite elástico, $\sigma < \sigma_e$.
- Las fuerzas se aplican de forma progresiva y lineal no dando lugar a vibración alguna ni a intercambio de calor con el exterior.
- En cualquier punto del cuerpo elástico cada fuerza produce una deformación que es proporcional a la misma, es decir $\Delta = k F$.
- Se verifica el principio de superposición, es decir, el efecto producido por la acción simultánea de un sistema de fuerzas en equilibrio sobre un prisma mecánico es la suma geométrica de los efectos producidos por cada una de las fuerzas del sistema, si éstas actuaran independientemente.
- La aplicación de cualquier fuerza a un cuerpo elástico no modifica las líneas de acción de las restantes aplicadas al mismo.

Por consiguiente, si i, j son dos puntos de un prisma mecánico (Fig. 10.1) el módulo del vector $\bar{\Delta}_{ij}$ del punto i al aplicar la fuerza \bar{F}_j en j , según c), es

$$\Delta_{ij} = k F_j \quad (10.2.1)$$

siendo k una constante de proporcionalidad que representa la deformación del punto i cuando en j se aplica la fuerza unidad ($F_j = 1$).

Si el punto i coincide con j , el módulo del desplazamiento de j es Δ_{jj} .

Por otra parte, si aplicamos al prisma mecánico un sistema de fuerzas en equilibrio, en

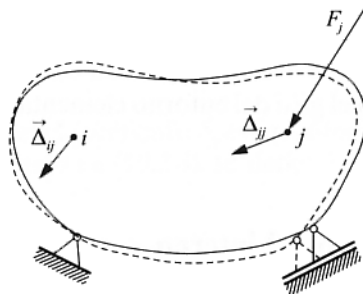


Figura 10.1.

los puntos 1, 2, ..., n , la deformación provocada por dicho sistema en un punto i del prisma es, en virtud del principio de superposición

$$\vec{\Delta}_i = \vec{\Delta}_{i1} + \vec{\Delta}_{i2} + \cdots + \vec{\Delta}_{in} = \sum_{j=1}^n \vec{\Delta}_{ij} \quad (10.2.2)$$

Consideremos ahora un prisma mecánico sometido al sistema equilibrado de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ aplicadas en los puntos 1, 2, ..., n , y designemos por δ_{ij} la proyección del corrimiento del punto i sobre la fuerza \vec{F}_i , aplicada en él, cuando solamente aplicamos en el punto j la fuerza $F_j = 1$.

Si F_j en vez de ser unidad tiene el valor F_j , el desplazamiento del punto i en la dirección de \vec{F}_i sería $\delta_{ij}F_j$.

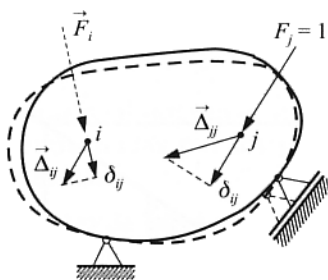


Figura 10.2.

Por el principio de superposición, la proyección del desplazamiento del punto i en la dirección de la fuerza \vec{F}_i cuando actúan simultáneamente todas las fuerzas del sistema, será

$$\delta_i = \delta_{i1} F_1 + \delta_{i2} F_2 + \cdots + \delta_{ii} F_i + \cdots + \delta_{in} F_n = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} F_k \quad (10.2.3)$$

es decir, este desplazamiento es una función lineal de los módulos de las fuerzas aplicadas. Los coeficientes δ_{ik} de esta expresión se llaman *coeficientes de influencia*, representando δ_{ik} ,

según hemos visto, la proyección del desplazamiento del punto i sobre la fuerza \vec{F}_i aplicada en él, cuando solamente se aplica en el punto k la fuerza unidad en la misma dirección y sentido que \vec{F}_k .

Si \vec{F}_i es un par, δ_i representa el giro del entorno elemental del punto de aplicación alrededor del eje del par.

10.3. Expresiones del potencial interno

Consideremos ahora un prisma mecánico al que solamente aplicamos fuerzas (o pares) concentradas \vec{F}_i , en número finito. El potencial interno es igual al trabajo desarrollado por las fuerzas \vec{F}_i para hacer pasar el sólido del estado inicial neutro al estado final.

Veamos algunas formas de expresar el potencial interno:

a) En función de las fuerzas exteriores.

Al aplicar las fuerzas de forma progresivamente creciente podemos suponer que cada una de ellas toma el valor ρF_i , variando ρ de forma continua de 0 a 1.

Si δ_i es la proyección del desplazamiento del punto i sobre la línea de acción de \vec{F}_i , el trabajo exterior realizado por el sistema de fuerzas \vec{F}_i al pasar del estado caracterizado por el valor ρ al caracterizado por el valor $\rho + d\rho$, es (Fig. 10.3).

$$d\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \rho F_i \delta_i d\rho \quad (10.3.1)$$

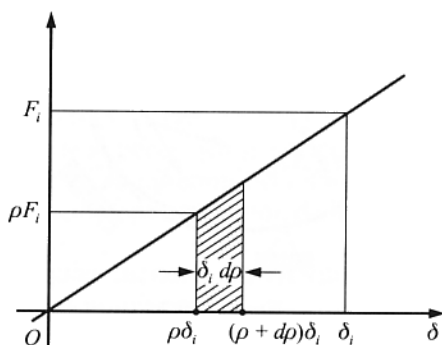


Figura 10.3.

Integrando, se obtiene

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \rho F_i \delta_i d\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (10.3.2)$$

fórmula del potencial interno, debida a *Clapeyron*, que nos indica que la expresión del potencial interno en función de las fuerzas exteriores es igual a la mitad de la suma de los productos de cada una de las fuerzas por la proyección sobre ella del desplazamiento de su punto de aplicación.

Teniendo en cuenta que el desplazamiento δ_i es una función lineal de los módulos de las fuerzas aplicadas, según se ha visto en (10.2.3), se tiene:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_1^n F_i \delta_i = \frac{1}{2} \sum_i F_i \sum_k \delta_{ik} F_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \delta_{ik} F_i F_k \quad (10.3.3)$$

El potencial interno es, por tanto, una función homogénea de segundo grado de las fuerzas aplicadas al cuerpo elástico.

b) En función de las deformaciones.

Si se conocen los coeficientes de influencia y las deformaciones δ_i , la expresión

$$\delta_i = \delta_{i1} F_1 + \delta_{i2} F_2 + \cdots + \delta_{in} F_n \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.3.4)$$

representa un sistema lineal de n ecuaciones cuya resolución nos permite obtener las fuerzas F_j en función de las deformaciones

$$F_j = b_{j1} \delta_1 + b_{j2} \delta_2 + \cdots + b_{jn} \delta_n = \sum_k b_{jk} \delta_k \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (10.3.5)$$

Sustituyendo este valor en la expresión del potencial interno, se tiene

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_j F_j \delta_j = \frac{1}{2} \sum_j \delta_j \sum_k b_{jk} \delta_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{jk} \delta_j \delta_k \quad (10.3.6)$$

Esta expresión indica que el potencial interno es una función homogénea de segundo grado de las deformaciones experimentadas por los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores en la dirección de las mismas.

c) En función de las componentes de las matrices de tensiones y de deformación.

Consideremos un sólido elástico al que aplicamos un sistema de fuerzas $\vec{f}_\Omega(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ sobre su contorno, y que está sometido también a unas fuerzas de masa por unidad de volumen $\vec{f}_v(X, Y, Z)$.

El trabajo realizado por ambos sistemas de fuerzas es, en virtud de la fórmula de *Clapeyron*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) d\Omega + \frac{1}{2} \iiint_v (Xu + Yv + Zw) dx dy dz \quad (10.3.7)$$

siendo u, v, w , las componentes del vector desplazamiento de los puntos en los que están aplicados las fuerzas exteriores y másicas; Ω es la superficie exterior que limita al sólido elástico; y v es el recinto correspondiente.

En la primera integral podemos expresar las componentes de \vec{f}_Ω en función de las componentes de la matriz de tensión según las ecuaciones de equilibrio en el contorno, quedando

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(\sigma_{nx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) \alpha + (\tau_{xy} u + \sigma_{ny} v + \tau_{yz} w) \beta + (\tau_{xz} u + \tau_{yz} v + \sigma_{nz} w) \gamma] d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \iiint_v (Xu + Yv + Zw) dV = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (P\alpha + Q\beta + R\gamma) d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \iiint_v (Xu + Yv + Zw) dV \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

en donde α, β, γ son las componentes del vector unitario normal a Ω .

La primera integral de las dos últimas es el flujo del vector de componentes (P, Q, R) a través de la superficie Ω del contorno. Por el teorema de Gauss-Ostrogradski, se verifica

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (P\alpha + Q\beta + R\gamma) d\Omega = \frac{1}{2} \iiint_v \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \quad (10.3.9)$$

Ahora bien, como

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} \cdot u + \sigma_{nx} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot v + \tau_{xy} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot w + \tau_{xz} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot u + \tau_{xy} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{ny}}{\partial y} \cdot v + \sigma_{ny} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot w + \tau_{yz} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \cdot u + \tau_{xz} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \cdot v + \tau_{yz} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{nz}}{\partial z} \cdot w + \sigma_{nz} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (10.3.10)$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio interno y las de definición de las componentes de la matriz de deformación, queda:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \iiint_v (\sigma_{nx} \varepsilon_x + \sigma_{ny} \varepsilon_y + \sigma_{nz} \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (10.3.11)$$

estando extendida la integral a todo el prisma mecánico.

Hemos llegado así a obtener la expresión del potencial interno en función de las componentes de la matriz de tensiones y de la matriz de deformación.

Hay que hacer notar que aunque aparentemente el potencial interno parece que es igual a la suma de los potenciales internos debidos a cada una de las componentes de la matriz de tensiones no es así, pues, por ejemplo, en el término $\sigma_{nx} \varepsilon_x$ intervienen las otras tensiones normales:

$$\sigma_{nx} \varepsilon_x = \frac{\sigma_{nx}}{E} [\sigma_{nx} - \mu (\sigma_{ny} + \sigma_{nz})]$$

Sin embargo, sí podemos afirmar que el potencial interno es la suma de los potenciales internos debidos a las tensiones normales, por una parte, y a las tensiones tangenciales, por otra.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{1}{2} \iiint_v (\sigma_{nx} \varepsilon_x + \sigma_{ny} \varepsilon_y + \sigma_{nz} \varepsilon_z) dV + \frac{1}{2} \iiint_v (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \\ & + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

d) En función de las componentes de la matriz de tensiones.

Si en la expresión (10-3-11) sustituimos las deformaciones en función de las tensiones, mediante las leyes de Hooke generalizadas, queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \iiint_v \left\{ \frac{1}{2E} [\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2 - 2\mu(\sigma_{nx}\sigma_{ny} + \sigma_{ny}\sigma_{nz} + \sigma_{nz}\sigma_{nx})] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right\} dx dy dz \end{aligned} \quad (10.3.13)$$

expresión del potencial interno en función de las componentes de la matriz de tensiones.

e) En función de las componentes de la matriz de deformación.

Si ahora lo que hacemos en la expresión (10.3.11) es sustituir las tensiones en función de las deformaciones aplicando las ecuaciones de Lamé, se llega a

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \iiint_v [\lambda e^2 + 2G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)] dV \quad (10.3.14)$$

En esta expresión se observa que $\mathcal{F} = 0$ para la matriz de deformación nula y, además, que siempre

$$\mathcal{F} \geq 0 \quad (10.3.15)$$

Éstas son precisamente las propiedades que definen a una función que se dice de ella que es *definida positiva*. Por tanto, el potencial interno es una función que goza de tales propiedades.

10.4. Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales se puede emplear para la resolución de determinados problemas de elasticidad. Recordemos que para el caso de un punto material, este principio establece que si el punto se encuentra en equilibrio sometido a un sistema de fuerzas, el

trabajo que realiza dicho sistema de fuerzas es nulo en todo movimiento virtual, compatible con las ligaduras. Si $\delta u, \delta v, \delta w$, son las componentes del vector desplazamiento virtual en las direcciones de los ejes coordenados y R_x, R_y, R_z son las componentes de la resultante del sistema de fuerzas que actúan sobre el punto respecto de dichos ejes, según el principio de los trabajos virtuales, se verificará

$$R_x \delta u = 0; \quad R_y \delta v = 0; \quad R_z \delta w = 0$$

ecuaciones que se satisfacen para cualquier desplazamiento virtual siempre que se verifique

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0$$

que no son sino las ecuaciones universales de equilibrio del punto material.

Si consideramos un cuerpo elástico, supondremos que un movimiento virtual es todo pequeño desplazamiento compatible con la continuidad del material que lo forma y con las ligaduras a las que pudiera estar sometido su contorno.

Consideremos un sólido elástico y supongámosle sometido a una sollicitación arbitraria formada por fuerzas de superficie \vec{f}_Ω y fuerzas de masa por unidad de volumen \vec{f}_r . Si $[T]$ es la matriz que define su estado tensional, es evidente que la condición de equilibrio del sólido exige que entre $\vec{f}_\Omega(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$, $\vec{f}_r(X, Y, Z)$ y $[T]$ se verifiquen las ecuaciones de equilibrio interno en todos los puntos del sólido y las ecuaciones de equilibrio en el contorno del mismo.

Consideremos en el mismo sólido, por otra parte, un campo de movimientos y deformaciones $\vec{\psi}$ compatible, que no tiene por qué coincidir con el campo de movimientos $\vec{\delta}$ que provoque la sollicitación exterior arbitraria que antes hemos supuesto. Que el campo de movimientos considerado sea compatible quiere decir que las componentes de la matriz de deformación que de él se derivan tienen que cumplir las condiciones de compatibilidad. Es evidente que si se obtienen a partir de las componentes de $\vec{\psi}$, de la misma forma que se obtuvieron las deformaciones según (3.7.1), las ecuaciones de compatibilidad se verificarán idénticamente.

Sean ψ_x, ψ_y, ψ_z las componentes de $\vec{\psi}$. Si multiplicamos en cada punto del sólido la primera ecuación de equilibrio por ψ_x , la segunda por ψ_y , la tercera por ψ_z , sumamos miembro a miembro, e integramos la expresión resultante en todo el volumen V del sólido elástico, tenemos:

$$\begin{aligned} & \iiint_v \left[\left(\frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \psi_x + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \psi_y + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{nz}}{\partial z} \right) \psi_z \right] dV + \iiint_v (X\psi_x + Y\psi_y + Z\psi_z) dV = 0 \quad (10.4.1) \end{aligned}$$

Cada término de la primera integral, por ejemplo $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \psi_x$, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \psi_x = \frac{\partial (\tau_{xy} \psi_x)}{\partial y} - \tau_{xy} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (10.4.2)$$

por lo que la primera integral quedaría:

$$\begin{aligned} & \iiint_v \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{nx} \psi_x + \tau_{xy} \psi_y + \tau_{xz} \psi_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \psi_x + \sigma_{ny} \psi_y + \tau_{yz} \psi_z) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} \psi_x + \tau_{yz} \psi_y + \sigma_{nz} \psi_z) \right] dV - \iiint_v \left[\sigma_{nx} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \sigma_{ny} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \sigma_{nz} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\psi + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\psi + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\psi \right] dV \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

siendo:

$$\gamma_{xy}^\psi = \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right); \quad \gamma_{xz}^\psi = \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right); \quad \gamma_{yz}^\psi = \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right)$$

A su vez, la primera de estas integrales representa la integral extendida al volumen V de la divergencia de un campo vectorial que tenga de componentes respecto a los ejes x, y, z las expresiones que respectivamente aparecen en los paréntesis. Por el teorema de Gauss-Ostrogradski, podemos igualar esta integral triple a una integral doble extendida a la superficie Ω del contorno. Si (α, β, γ) son las componentes de un vector unitario normal a dicho contorno, tenemos:

$$\begin{aligned} & \iint_\Omega [(\sigma_{nx} \psi_x + \tau_{xy} \psi_y + \tau_{xz} \psi_z) \alpha + (\tau_{xy} \psi_x + \sigma_{ny} \psi_y + \tau_{yz} \psi_z) \beta + \\ & + (\tau_{xz} \psi_x + \tau_{yz} \psi_y + \sigma_{nz} \psi_z) \gamma] d\Omega = \iint_\Omega [(\sigma_{nx} \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma) \psi_x + \\ & + (\tau_{xy} \alpha + \sigma_{ny} \beta + \tau_{yz} \gamma) \psi_y + (\tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_{nz} \gamma) \psi_z] d\Omega = \\ & = \iint_\Omega (\bar{X} \psi_x + \bar{Y} \psi_y + \bar{Z} \psi_z) d\Omega = \iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \vec{\psi} d\Omega \end{aligned} \quad (10.4.4)$$

La expresión (10.4.1) adopta, pues, la forma

$$\begin{aligned} & \iiint_v (\sigma_{nx} e_x^\psi + \sigma_{ny} e_y^\psi + \sigma_{nz} e_z^\psi + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\psi + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\psi + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\psi) dV = \\ & = \iiint_v \vec{f}_v \cdot \vec{\psi} dV + \iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \vec{\psi} d\Omega \end{aligned} \quad (10.4.5)$$

en donde el superíndice ψ en los términos de la integral del segundo miembro indica que se trata de las componentes de la matriz de deformación correspondiente al campo $\vec{\psi}$ de desplazamientos virtuales supuesto.

La expresión (10.4.5) corresponde al denominado *principio de los trabajos virtuales* enunciado por John Bernouilli en 1717. Veamos qué significado tiene cada una de las integrales que aparecen en ella. La primera,

$$\iiint_v (\sigma_{nx} \epsilon_x^\psi + \sigma_{ny} \epsilon_y^\psi + \sigma_{nz} \epsilon_z^\psi + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\psi + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\psi + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\psi) dV \quad (10.4.6)$$

no es sino el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas. La segunda

$$\iiint_v \vec{f}_v \cdot \vec{\psi} dV \quad (10.4.7)$$

representa el trabajo virtual que realizan las fuerzas de masa en el movimiento virtual; y la tercera

$$\iint_\Omega \vec{f}_\Omega \cdot \vec{\psi} d\Omega \quad (10.4.8)$$

es el trabajo virtual que desarrollan las fuerzas de superficie.

Podemos, pues, enunciar el principio de los trabajos virtuales de la siguiente forma: en todo movimiento virtual que se haga en un sólido elástico, el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas (de masa y de superficie) es igual al trabajo virtual realizado por las fuerzas internas.

La expresión del principio de los trabajos virtuales admite otra interesante interpretación si se tiene en cuenta que las fuerzas, tanto superficiales como másicas, se consideran constantes durante el desplazamiento virtual, por lo que si hacemos:

$$\begin{aligned} \psi_x = \delta u; \quad \psi_y = \delta v; \quad \psi_z = \delta w; \quad \epsilon_x^\psi = \delta \epsilon_x; \quad \epsilon_y^\psi = \delta \epsilon_y; \quad \epsilon_z^\psi = \delta \epsilon_z; \quad \gamma_{xy}^\psi = \delta \gamma_{xy}; \\ \gamma_{xz}^\psi = \delta \gamma_{xz}; \quad \gamma_{yz}^\psi = \delta \gamma_{yz}, \end{aligned}$$

la expresión (10.4.5) se puede poner en la forma

$$\begin{aligned} \iiint_v (\sigma_{nx} \delta \epsilon_x + \sigma_{ny} \delta \epsilon_y + \sigma_{nz} \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV - \\ - \iiint_v (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV - \iint_\Omega (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) d\Omega \quad (10.4.9) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el operador δ se puede sacar fuera de las integrales y llamando \mathcal{T}_0 a la energía de deformación por unidad de volumen

$$\mathcal{T}_0 = \sigma_{nx} \varepsilon_x + \sigma_{ny} \varepsilon_y + \sigma_{nz} \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad (10.4.10)$$

queda

$$\delta \left[\iiint_v \mathcal{T}_0 dV - \iiint_v (Xu + Yv + Zw) dV - \iint_{\Omega} (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) d\Omega \right] = 0 \quad (10.4.11)$$

La expresión entre corchetes representa la *energía potencial total* del sistema y la ecuación (10.4.11) es la formulación del *principio de la energía potencial total*.

Puesto de esta forma el principio de los trabajos virtuales se llega a la conclusión que los desplazamientos que realmente se producen en un sistema elástico sometido a un sistema de fuerzas exteriores dado, son aquellos que hacen nula la variación de la energía potencial total del sistema, para cualquier desplazamiento virtual que podamos suponer a partir de la posición de equilibrio. Dicho de otra forma, la energía potencial total del sistema es un máximo o un mínimo. Por mecánica sabemos que, si el equilibrio es estable, se trata de un mínimo.

Como en la deducción de la expresión (10.4.5) no se ha hecho intervenir la ley de Hooke, el principio de los trabajos virtuales se podrá aplicar a sólidos elásticos cuyos diagramas tensión-deformación sean lineales o no lo sean.

10.5. Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti

Apliquemos a un sólido elástico dos sistemas de fuerzas \vec{F}_i y $\vec{\phi}_j$; el primero aplicado en los puntos A_i y el segundo en los B_j .

Llamemos λ_i al corrimiento de los puntos A_i y μ'_j al corrimiento de los puntos B_j , en la dirección de las líneas de acción de las fuerzas respectivas, cuando aplicamos al sólido elástico solamente el sistema de fuerzas \vec{F}_i .

Sea, asimismo, μ_j el corrimiento de los puntos B_j y λ'_i el corrimiento de los puntos A_i , en la dirección de las líneas de acción de las fuerzas respectivas, cuando se aplica al sólido elástico solamente el sistema de fuerzas $\vec{\phi}_j$.

Haremos el cálculo del potencial interno debido a la acción simultánea de los dos sistemas de fuerzas, de dos formas distintas:

- 1.º Aplicando en primer lugar el sistema de fuerzas \vec{F}_i .
El potencial debido a la acción exclusiva del sistema \vec{F}_i es:

$$\mathcal{T}(F_i) = \frac{1}{2} \sum_i F_i \lambda_i \quad (10.5-1)$$

Apliquemos a continuación el sistema de fuerzas $\vec{\phi}_j$. Para evaluar el potencial final, después de la aplicación del sistema $\vec{\phi}_j$, hemos de tener en cuenta que las fuerzas \vec{F}_i , que ya están aplicadas, no varían de magnitud pero realizan el trabajo $\sum_i F_i \lambda'_i$, y que los corrimientos de las fuerzas $\vec{\phi}_j$ son los mismos, independientemente de que las fuerzas \vec{F}_i estén aplicadas o no al sólido elástico, en virtud del principio de superposición.

El potencial interno final será:

$$\mathcal{T}(F_i + \phi_j) = \frac{1}{2} \sum_i F_i \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_j \phi_j \mu_j + \sum F_i \lambda'_i \quad (10.5.2)$$

2.º Aplicando primero el sistema de fuerzas $\vec{\phi}_j$, el potencial es

$$\mathcal{T}(\phi_j) = \frac{1}{2} \sum_j \phi_j \mu_j \quad (10.5.3)$$

y a continuación el sistema de fuerzas \vec{F}_i

$$\mathcal{T}(\phi_j + F_i) = \frac{1}{2} \sum_j \phi_j \mu_j + \frac{1}{2} \sum_i F_i \lambda_i + \sum_j \phi_j \mu'_j \quad (10.5.4)$$

Al ser el potencial función de punto, las dos expresiones obtenidas han de ser iguales. Por tanto:

$$\sum_i F_i \lambda'_i = \sum_j \phi_j \mu'_j \quad (10.5.5)$$

Esta igualdad expresa el teorema de *Maxwell-Betti*: «En un sólido elástico, el trabajo realizado por un sistema de fuerzas \vec{F}_i al aplicar un sistema de fuerzas $\vec{\phi}_j$ es igual al trabajo realizado por el sistema $\vec{\phi}_j$ al aplicar el sistema \vec{F}_i ».

Una importante consecuencia del teorema de Maxwell-Betti es la igualdad de los coeficientes de influencia recíprocos.

En efecto, consideremos únicamente dos fuerzas aplicadas al sólido elástico: \vec{F}_i aplicada en A_i y $\vec{\phi}_j$ aplicada en B_j .

Si sólo aplicamos la fuerza \vec{F}_i , el corrimiento del punto B_j es:

$$\mu'_j = \delta_{ji} F_i \quad (10.5.6)$$

Si aplicamos únicamente la fuerza $\vec{\phi}_j$, el corrimiento de A_i es:

$$\lambda'_i = \delta_{ij} \phi_j \quad (10.5.7)$$

Aplicando el teorema de Maxwell-Betti:

$$F_i \delta_{ij} \phi_j = \phi_j \delta_{ji} F_i \Rightarrow \delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (10.5.8)$$

Resulta, por tanto, que los coeficientes de influencia recíprocos son iguales. Esto indica que la deformación producida en un punto i de un sólido elástico en la dirección de \vec{F}_i cuando se aplica en el punto j una fuerza unidad en la dirección de $\vec{\phi}_j$, es igual a la deformación producida en j , según $\vec{\phi}_j$, debida a una fuerza unidad aplicada en i según la dirección de \vec{F}_i .

Como ejemplo de aplicación de esta propiedad tenemos que en una viga horizontal empotrada en un extremo y libre el otro (Fig. 10.4), el corrimiento vertical de un punto 2 de ella cuando aplicamos en el extremo una carga unidad, es igual al corrimiento vertical del extremo cuando esta carga unidad se coloca en el punto 2.

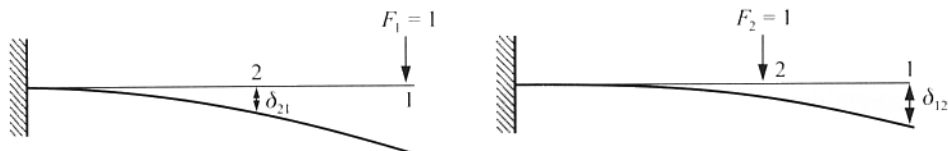


Figura 10.4.

Otro ejemplo de aplicación inmediata de este teorema sería el del cálculo del corrimiento de un determinado punto cuando se aplica una carga en otro. En efecto, supongamos conocida la deformación de la barra AB de la Figura 10.5 cuando se aplica en la sección 1 la carga vertical P_1 .

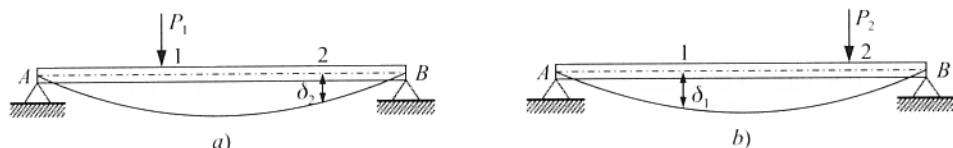


Figura 10.5.

Por el teorema de Maxwell-Betti

$$P_1 \delta_1 = P_2 \delta_2 \Rightarrow \delta_1 = \frac{P_2}{P_1} \delta_2 \quad (10.5.9)$$

en donde δ_2 es el corrimiento de la sección 2 cuando solamente aplicamos la carga P_1 en la sección 1, que es conocido, pues así lo hemos supuesto.

Este teorema es aplicable no solamente para fuerzas y corrimientos sino también para momentos y ángulos girados.

Por ejemplo, en la viga simplemente apoyada en la Figura 10.6, la aplicación del teorema de Maxwell-Betti nos permite conocer el corrimiento de una determinada sección 1 cuando en otra sección 2 aplicamos un momento M_2

$$P_1 \delta_1 = M_2 \theta_2 \Rightarrow \delta_1 = \frac{M_2}{P_1} \theta_2 \quad (10.5.10)$$

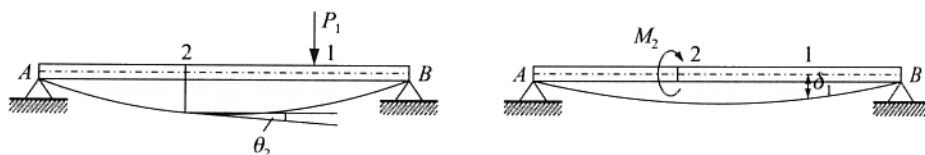


Figura 10.6.

expresión con la que calculamos δ_1 supuesta conocida la ley de giros de las secciones cuando está aplicada solamente la carga P_1 .

10.6. Teorema de Castigliano

Las expresiones del potencial interno en función de las fuerzas aplicadas (10.3.3) y en función de las deformaciones (10.3.6) sirven como punto de partida para obtener, respectivamente, los llamados primer y segundo teorema de *Castigliano*.

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \delta_{ik} F_i F_k \quad ; \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{jk} \delta_j \delta_k \quad (10.6.1)$$

En efecto, derivando la primera expresión respecto de F_i , teniendo en cuenta la igualdad de los coeficientes de influencia recíprocos, se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial F_i} = \sum_k \delta_{ik} F_k = \delta_i \quad (10.6.2)$$

ecuación que expresa el *primer teorema de Castigliano* y que podemos enunciar así:

«Si se expresa el potencial interno en función de las fuerzas aplicadas y se deriva respecto de una de ellas, se obtiene la proyección del corrimiento del punto de aplicación de esta fuerza sobre su línea de acción.»

Si consideramos ahora la segunda expresión (10.6.1) del potencial interno en función de las deformaciones y derivamos respecto de δ_j

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \delta_j} = \sum_k b_{jk} \delta_k = F_j \quad (10.6.3)$$

obtenemos la expresión del *segundo teorema de Castigliano* y cuyo enunciado sería:

«Si se expresa el potencial interno en función de los corrimientos de los puntos en los que actúan las acciones exteriores y se deriva respecto al corrimiento de un punto, se obtiene la componente de la acción que sobre dicho punto actúa en dirección de este corrimiento.»

El teorema de Castigliano es aplicable al cálculo del giro φ_i producido por un par M_i .

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial M_i} = \varphi_i \quad (10.6.4)$$

En este caso, el teorema se enunciaría así: el vector rotación de un par cualquiera, proyectado sobre el eje de este par, es igual a la derivada parcial del potencial interno respecto del momento de dicho par.

Hay que señalar que la validez de la aplicación del teorema de Castigliano está supeditada al cumplimiento de todas las condiciones que se han establecido para su demostración. Es necesario, pues, que los desplazamientos y deformaciones sean funciones lineales y homogéneas de las fuerzas exteriores y que la deformación elástica del cuerpo no influya en el sistema de fuerzas exteriores. No será aplicable, por tanto, a barras esbeltas sometidas a compresión (flexión lateral).

Tampoco es aplicable cuando los desplazamientos pueden estar influidos por causas ajenas al sistema de fuerzas exteriores, como ocurre en el caso de existir variaciones térmicas, cuando se producen asientos anelásticos de los apoyos, etc.

El teorema de Castigliano permite calcular los desplazamientos proyectados sobre las fuerzas exteriores aplicadas de los puntos de aplicación de las mismas, así como los giros experimentados por las secciones a las que se apliquen pares. Pero también permite calcular los desplazamientos de puntos del prisma mecánico sobre los cuales no actúe ninguna fuerza exterior. Para ello se emplea el método de la *carga ficticia*, que consiste en lo siguiente:

Se calcula el potencial interno \mathcal{T} del prisma mecánico sometido al sistema de fuerzas exteriores, añadiendo a éste una fuerza auxiliar ficticia P aplicada en el punto que queremos calcular el desplazamiento y de dirección aquella en que queremos medir la proyección del mismo.

Se calcula la derivada parcial de \mathcal{T} respecto de P y en la expresión resultante se hace $P = 0$, es decir

$$\delta = \left[\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial P} \right]_{P=0} \quad (10.6.5)$$

Del teorema de Castigliano se deduce un inmediato corolario: consideremos un cuadro rectangular (Fig. 10.7) al que se aplican dos fuerzas P iguales con la misma línea de acción y sentidos opuestos.

Si queremos calcular la variación relativa de la distancia entre los puntos A y B de aplicación de ambas fuerzas podemos suponer uno de ellos fijo, por ejemplo el B (Figura 10.7b).

Expresado el potencial interno del cuadro en función de P , la variación de la distancia relativa entre dichos puntos será:

$$\delta_{AB} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial P} \quad (10.6.6)$$

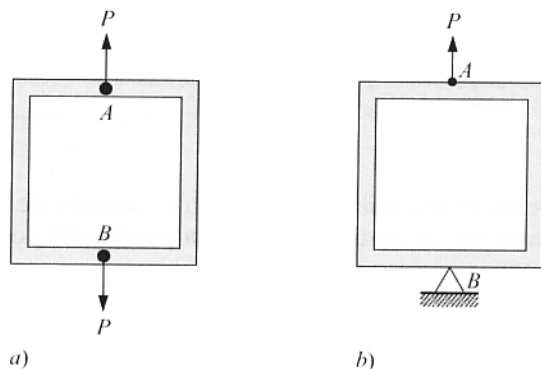


Figura 10.7.

Por tanto, podemos decir que si entre las fuerzas exteriores aplicadas al prisma mecánico hay dos con la misma línea de acción y sentidos opuestos, el desplazamiento relativo de sus puntos de aplicación, proyectado sobre la línea de acción común, es igual a la derivada del potencial interno respecto a la fuerza común.

Análogamente, si entre la sollicitación exterior hay dos pares paralelos y de sentidos opuestos, la rotación relativa de las secciones a las que están aplicados, proyectada sobre la dirección común de sus ejes, es igual a la derivada del potencial interno respecto al momento M de dichos pares.

$$\varphi_{AB} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial M} \quad (10.6.10)$$

10.7. Teorema de Menabrea

Hemos visto cómo la aplicación del teorema de Castigliano permite calcular desplazamientos de los puntos de un prisma mecánico, así como los giros de las secciones del mismo. Este cálculo no presenta mayor dificultad cuando se trata de un sistema isostático.

Cuando el sistema es hiperestático puede suceder que las incógnitas hiperestáticas sean las reacciones de las ligaduras externas (sistemas exteriormente hiperestáticos) o bien que las reacciones estén estáticamente determinadas pero no sea posible calcular los esfuerzos interiores por aplicación de las ecuaciones generales de equilibrio de la Estática (sistemas interiormente hiperestáticos).

Un ejemplo del primer tipo, es decir, de sistema exteriormente hiperestático lo tenemos en el sistema plano formado por la viga indicada en la Figura 10.8, empotrada en un extremo y con dos apoyos móviles.

El número de incógnitas de este sistema es de cinco (las dos componentes de la reacción y el momento de empotramiento en A y las reacciones verticales en los apoyos móviles B y C), por lo que, al ser tres el número de ecuaciones que nos proporciona el imponer las ecuaciones del equilibrio estático, el grado de hiperestaticidad es dos, es decir, existen dos incógnitas hiperestáticas. Podemos considerar que estas dos incógnitas hiperestáticas son,

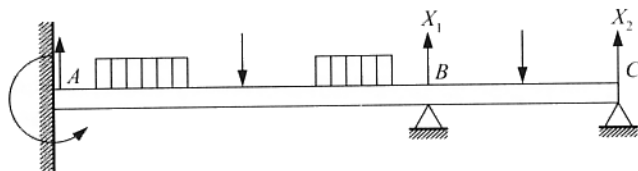


Figura 10.8.

por ejemplo, las reacciones X_1 y X_2 en los apoyos móviles B y C y calcular el potencial interno que será una función de estas dos incógnitas.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(X_1, X_2) \quad (10.7.1)$$

En estos apoyos móviles, en los que el desplazamiento es perpendicular a la dirección de la reacción, las derivadas parciales del potencial interno respecto a estas dos incógnitas, en virtud del teorema de Castigliano, deben ser iguales a cero

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_2} = 0 \quad (10.7.2)$$

Estas ecuaciones, cuyo número en el caso general es igual al de incógnitas hiperestáticas, junto a las ecuaciones de equilibrio permiten resolver la indeterminación del problema y obtener, por tanto, las reacciones hiperestáticas.

Las ecuaciones (10.7.2) indican que para los valores de las incógnitas hiperestáticas que se originan efectivamente en el sistema, la función del potencial interno toma un valor máximo o mínimo relativo. Por Mecánica sabemos que se trata de un mínimo, si el equilibrio es estable.

Podemos pues anunciar el siguiente teorema denominado de *Menabrea* o del *trabajo mínimo*: «en un sistema de sólidos elásticos los valores que toman las reacciones hiperestáticas correspondientes a los enlaces superabundantes hacen estacionario el potencial interno del sistema».

Consideremos ahora un sistema interiormente hiperestático, como puede ser, por ejemplo, el cuadro de nudos rígidos representado en la Figura 10.9. Para aplicar el teorema de Castigliano a tales sistemas se convierten en sistemas isostáticos haciendo los cortes necesarios, en los cuales se introducen las incógnitas hiperestáticas en número igual al grado de hiperestaticidad.

En nuestro cuadro, hiperestático de tercer grado, hacemos un corte y tomaremos como incógnitas hiperestáticas el esfuerzo normal N_0 , el esfuerzo cortante T_0 y el momento flector M_0 en la sección del citado corte.

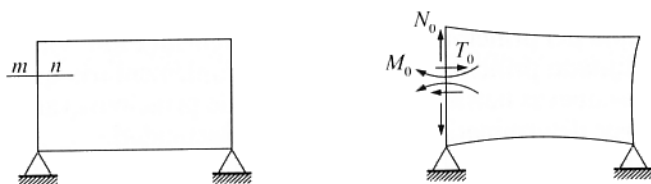


Figura 10.9.

Ahora bien, estas magnitudes en los dos extremos del corte son iguales y opuestas. Aplicando el resultado (10.6.9) deducido del teorema de Castigliano, al ser nula la rotación y los desplazamientos relativos en las direcciones longitudinal y transversal de la barra en la que hemos realizado el corte, de las secciones extremas del citado corte, se verificará

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N_0} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T_0} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M_0} = 0 \quad (10.7.2)$$

Este resultado nos permite enunciar el *teorema del trabajo mínimo*, aplicable con generalidad a los sistemas interiormente hiperestáticos: «los valores de las incógnitas hiperestáticas que se producen efectivamente en un sistema elástico interiormente hiperestático, son tales que hacen mínimo su potencial interno».

El teorema de Menabrea es también aplicable al caso de sistemas reticulados con enlaces superabundantes internos, como el indicado en la Figura 10.10.

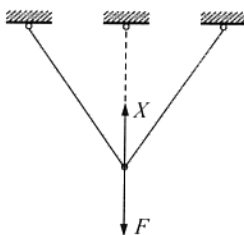


Figura 10.10.

En tales casos se suprime la barra superabundante y se sustituye por el esfuerzo desconocido X . Se calcula el potencial interno del sistema sin tener en cuenta la barra suprimida. La ecuación adicional que nos resuelve el problema es la que expresa que la variación de distancia entre las secciones extremas de la barra suprimida debe ser igual y de sentido contrario a la variación de la longitud de la misma.

El teorema del trabajo mínimo fue enunciado por el italiano *Menabrea* con anterioridad a la formulación por parte de Castigliano del teorema que hemos visto en el epígrafe anterior. De ahí que se conozca bajo su nombre. Pero fue Castigliano quien completó la demostración del mismo.

10.8. Aplicación de principios variacionales para la resolución de problemas en Elasticidad

En el Epígrafe 10.4 hemos visto cómo a partir del principio de los trabajos virtuales hemos llegado a la formulación del principio de la energía potencial total. Vamos a exponer ahora otro principio, denominado principio de la energía complementaria que, junto a aquel, nos va a permitir tener dos nuevas herramientas en forma de principios variacionales en los que vamos a poder resolver determinados problemas de elasticidad.

Este nuevo principio variacional se obtiene haciendo variar virtualmente las tensiones en vez de hacer variar los desplazamientos, como hicimos al exponer el principio de los trabajos virtuales. Procederemos de forma análoga, pero teniendo en cuenta que cuando

hacíamos variar los desplazamientos las ecuaciones de compatibilidad quedaban automáticamente satisfechas y nos teníamos que preocupar exclusivamente que se cumplieran las ecuaciones de equilibrio interno. Ahora, al hacer variar las tensiones, nuestra preocupación de que se verifiquen las ecuaciones de equilibrio interno no es suficiente, ya que se tienen que verificar también las condiciones de compatibilidad.

Consideremos un sólido elástico en equilibrio en el que $[T]$ es la matriz de tensiones. Son conocidos los sistemas de fuerzas sobre el contorno $\vec{f}_\Omega(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ y másicas $\vec{f}_v(X, Y, Z)$. Si damos una pequeña variación a las componentes de la matriz de tensiones, la matriz de este estado $[T + \delta T]$, verifica las condiciones de equilibrio pero no las de compatibilidad.

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{nx} + \delta\sigma_{nx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{ny} + \delta\sigma_{ny})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial(\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz} + \delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{nz} + \delta\sigma_{nz})}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (10.8.1)$$

Restando miembro a miembro a estas ecuaciones las que corresponden al estado tensional antes de hacer variar las tensiones. Se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial\delta\sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\sigma_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\sigma_{nz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (10.8.2)$$

Se tendrán que verificar las condiciones de contorno en el estado tensional variado

$$\begin{cases} (\sigma_{nx} + \delta\sigma_{nx}) \alpha + (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) \beta + (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz}) \gamma = \bar{X} + \delta\bar{X} \\ (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) \alpha + (\sigma_{ny} + \delta\sigma_{ny}) \beta + (\tau_{yz} + \delta\tau_{yz}) \gamma = \bar{Y} + \delta\bar{Y} \\ (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz}) \alpha + (\tau_{yz} + \delta\tau_{yz}) \beta + (\sigma_{nz} + \delta\sigma_{nz}) \gamma = \bar{Z} + \delta\bar{Z} \end{cases} \quad (10.8.3)$$

siendo α, β, γ las componentes del vector unitario normales a la superficie exterior del sólido y $\delta\vec{f}_\Omega(\delta\bar{X}, \delta\bar{Y}, \delta\bar{Z})$ las pequeñas variaciones de las fuerzas superficiales sobre el contorno.

Restando las ecuaciones de contorno correspondientes antes de la variación de las tensiones, se tiene

$$\begin{cases} \alpha\delta\sigma_{nx} + \beta\delta\tau_{xy} + \gamma\delta\tau_{xz} = \delta\bar{X} \\ \alpha\delta\tau_{xy} + \beta\delta\sigma_{ny} + \gamma\delta\tau_{yz} = \delta\bar{Y} \\ \alpha\delta\tau_{xz} + \beta\delta\tau_{yz} + \gamma\delta\sigma_{nz} = \delta\bar{Z} \end{cases} \quad (10.8.4)$$

La variación que experimenta la energía de deformación del sólido elástico será

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = \mathcal{F}(T + \delta T) - \mathcal{F}(T) = \iiint_v \left[\frac{1}{E} (\sigma_{nx} \delta \sigma_{nx} + \sigma_{ny} \delta \sigma_{ny} + \sigma_{nz} \delta \sigma_{nz} - \mu \sigma_{nx} \delta \sigma_{ny} - \mu \sigma_{nx} \delta \sigma_{nz} - \right. \\ \left. - \mu \sigma_{ny} \delta \sigma_{nx} - \mu \delta \sigma_{ny} \delta \sigma_{nz} - \mu \sigma_{nz} \delta \sigma_{nx} - \mu \sigma_{nz} \delta \sigma_{ny}) + \frac{1}{G} (\tau_{xy} \delta \tau_{xy} + \tau_{xz} \delta \tau_{xz} + \right. \\ \left. + \tau_{yz} \delta \tau_{yz}) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (10.8.5)$$

Teniendo en cuenta las leyes de Hooke generalizadas, la expresión anterior se reduce a

$$\delta \mathcal{F} = \iiint_v (e_x \delta \sigma_{nx} + e_y \delta \sigma_{ny} + e_z \delta \sigma_{nz} + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz}) dx dy dz \quad (10.8.6)$$

Ahora bien, como el estado tensional antes de la variación de las tensiones verifica las condiciones de compatibilidad, podemos sustituir los términos de la matriz de deformación que aparecen en esta expresión por sus ecuaciones de definición en función de las componentes del vector desplazamiento, y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \delta \sigma_{nx} + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \delta \tau_{xz} &= \frac{\partial(u \delta \sigma_{nx})}{\partial x} + \frac{\partial(u \delta \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(u \delta \tau_{xz})}{\partial z} - u \left(\frac{\partial \delta \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial x} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} \delta \sigma_{ny} + \frac{\partial v}{\partial z} \delta \tau_{yz} &= \frac{\partial(v \delta \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v \delta \sigma_{ny})}{\partial y} + \frac{\partial(v \delta \tau_{yz})}{\partial z} - \\ &- v \left(\frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \sigma_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (10.8.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \tau_{xz} + \frac{\partial w}{\partial y} \delta \tau_{yz} + \frac{\partial w}{\partial z} \delta \sigma_{nz} &= \left(\frac{\partial(w \delta \tau_{yz})}{\partial x} + \frac{\partial(w \delta \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w \delta \sigma_{nz})}{\partial z} \right) - \\ &- w \left(\frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \sigma_{nz}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Si sustituimos estas relaciones en la expresión de $\delta \mathcal{F}$ y tenemos en cuenta el teorema de Gauss-Ostrogradski

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = & - \iiint_v \left[u \left(\frac{\partial \delta \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \delta \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \sigma_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \right. \\ & + w \left(\frac{\partial \delta \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \sigma_{nz}}{\partial z} \right) \Big] dx dy dz + \iint_s [u(\alpha \delta \sigma_{nx} + \beta \delta \tau_{xy} + \gamma \delta \tau_{xz}) + \\ & + v(\alpha \delta \tau_{xy} + \beta \delta \sigma_{ny} + \gamma \delta \tau_{yz}) + w(\alpha \delta \tau_{xz} + \beta \delta \tau_{yz} + \gamma \delta \sigma_{nz})] s \Omega \end{aligned} \quad (10.8.8)$$

estando extendida la integral doble a la superficie S exterior del sólido elástico.

Como se verifican las ecuaciones (10.8.2) y (10.8.4), la anterior expresión se reduce a

$$\delta \mathcal{F} - \iint_s (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y} + w \delta \bar{Z}) d\Omega = 0 \quad (10.8.9)$$

o lo que es lo mismo

$$\delta [\mathcal{F} - \iint_s (u \bar{X} + v \bar{Y} + w \bar{Z}) d\Omega] = 0 \quad (10.8.10)$$

que se puede poner en la forma

$$\delta \mathcal{F}^* = \delta (\mathcal{F} - \mathcal{F}^{\bar{}}) = 0 \quad (10.8.11)$$

siendo

$$\mathcal{F}^{\bar{}} = \iint_s (u \bar{X} + v \bar{Y} + w \bar{Z}) d\Omega$$

La función $\mathcal{F}^* = \mathcal{F} - \mathcal{F}^{\bar{}}$ recibe el nombre de *energía complementaria*, mientras que la ecuación (10.8.10) expresa el llamado *principio de la energía complementaria*, que se puede enunciar así: en los cuerpos elásticos en los que en sus puntos interiores se satisfacen las ecuaciones de equilibrio interno, el estado tensional es tal que la energía complementaria es un máximo o mínimo, es decir, la energía complementaria \mathcal{F}^* toma un valor estacionario.

Conclusión de todo lo anterior es que en todo cuerpo elástico en equilibrio los desplazamientos de los puntos del cuerpo son tales que la energía potencial total es un mínimo y las componentes de las tensiones son tales que hacen que la energía complementaria sea un mínimo.

Aplicaremos el principio de la energía complementaria al caso de barras prismáticas sometidas a torsión pura. Vimos en el Capítulo 7 que el problema elástico de tales barras se resolvía calculando una función de tensiones Φ , tal que las tensiones τ_{xy} y τ_{xz} se obtenían a partir de ella

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

siendo nulas las demás componentes de la matriz $[T]$.

La variación de la función de tensiones es equivalente a la variación de las componentes de las tensiones.

En lo que sigue supondremos $G\theta = 1$, es decir, la función de tensiones Φ que queremos encontrar verifica en los puntos de cualquier sección recta del cuerpo elástico la ecuación

$$\Delta \Phi + 2 = 0 \quad (10.8.12)$$

y seguirá verificándose, evidentemente, que Φ se anula en los puntos del contorno. En este caso, la solución de tensiones vendría dada por

$$\tau_{xy} = G\theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} ; \quad \tau_{xz} = -G\theta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (10.8.13)$$

En función de Φ , la energía de deformación almacenada en una barra prismática de longitud L es

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2G} \iiint_v (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) dx dy dz = \frac{G\theta^2 L}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz \quad (10.8.14)$$

en donde Ω indica que la integral está extendida a la superficie de la sección recta de la barra.

\mathcal{F} es nula en la superficie lateral de la barra, ya que no existen en ella fuerzas superficiales. En las dos secciones extremas tenemos

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(x = 0) + \mathcal{F}(x = L)$$

Pero, según vimos en el Capítulo 7

$$v = -\theta xz ; \quad w = \theta xy$$

para: $x = 0 ; v = 0 ; w = 0$

$$x = L ; v = -\theta Lz ; w = \theta Ly$$

La expresión de \mathcal{F} en la barra se reduce a

$$\mathcal{F} = \theta L \iint_{\Omega} (-z \tau_{xy} + y \tau_{xz}) dy dz = -G\theta^2 L \iint_{\Omega} \left(z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy dz \quad (10.8.15)$$

Integrando por partes esta última integral, se tiene

$$\mathcal{F} = 2G\theta^2 L \iint_{\Omega} \Phi dy dz \quad (10.8.16)$$

habiendo tenido en cuenta que la función Φ podemos considerarla nula en el contorno.

La energía complementaria de la barra será, por consiguiente

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F} - \mathcal{F} = \frac{G\theta^2 L}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz - \frac{4G\theta^2 L}{2G} \iint_{\Omega} \Phi dy dz \quad (10.8.17)$$

es decir:

$$\mathcal{F}^* = \frac{G\theta^2 L}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - 4 \Phi \right] dy dz \quad (10.8.18)$$

10.9. Método de Rayleigh-Ritz

Con lo visto en este capítulo hemos obtenido un nuevo método de resolución del problema elástico. Se trata de buscar una función que debe hacer mínimo a un funcional determinado o, dicho de otro modo, la función debe satisfacer una ecuación variacional que hace que el funcional tome un valor estacionario.

Este método, que nos proporcionará idénticas soluciones que el método del planteamiento del problema elástico que hemos visto en el Capítulo 5, puede llevarnos a ellas con un esfuerzo de cálculo notablemente menor.

Entre los métodos variacionales destaca el denominado método de Rayleigh-Ritz. Consiste este método en poner la función de tensiones como una serie que verifique las condiciones de contorno pero en función de coeficientes indeterminados c_i , que se determinarán imponiendo la condición de ser mínima la energía potencial total o la energía complementaria, es decir, se tendrá que verificar el sistema de ecuaciones que nos proporciona imponer las condiciones de mínimo de cualquiera de las dos funciones: energía potencial total o energía complementaria. Resuelto este sistema obtenemos la función de tensiones que nos permite llegar a una solución aproximada del problema.

Para ilustrar lo que se acaba de exponer veamos cómo se aplica el método de Rayleigh-Ritz para calcular una solución aproximada del problema elástico en una barra prismática de sección recta cuadrada, de longitud de lado $2a$, sometida a torsión (Fig. 10.11).

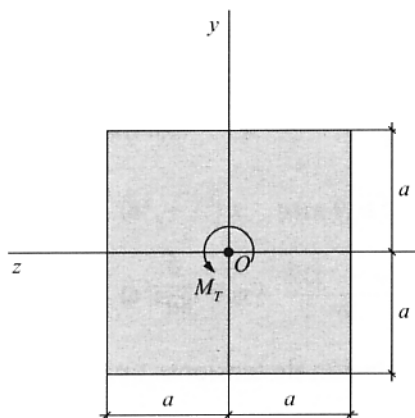


Figura 10.11.

De la función de tensiones preconizada por el método de Rayleigh-Ritz

$$\Phi = (y^2 - a^2)(z^2 - a^2)(c_1 + c_2 y^2 + c_3 z^2 + c_4 y^2 z^2 + \dots)$$

que verifica la condición de anularse en los puntos del contorno con independencia de los valores que pudieran tomar los coeficientes indeterminados c_i ($i = 1, 2, 3 \dots$), y en la que se ha tenido en cuenta la no existencia de los términos de la serie de índice impar, por razones de simetría de la sección, tomaremos como solución aproximada la siguiente

$$\Phi = c_1 (y^2 - a^2)(z^2 - a^2)$$

Como las derivadas de Φ son:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_1 (2yz^2 - 2a^2y) = 2c_1 y (z^2 - a^2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = c_1 (2zy^2 - 2a^2z) = 2c_1 z (y^2 - a^2)$$

la expresión de la energía complementaria es:

$$\mathcal{F}^* = \frac{G\theta^2 L}{2} \int_{-a}^a dy \int_{-a}^a \{4c_1^2 [y^2(z^2 - a^2)^2 + z^2(y^2 - a^2)^2] - 4c_1(y^2 - a^2)(z^2 - a^2)\} dz$$

Resolviendo la integral, se obtiene

$$\mathcal{F}^* = \frac{G\theta^2 L}{2} \frac{64}{45} (4c_1^2 a^8 - 5c_1 a^6)$$

La condición de mínimo

$$\frac{d\mathcal{F}^*}{dc_1} = \frac{G\theta^2 L}{2} \frac{64}{45} (8c_1 a^8 - 5a^6) = 0$$

nos proporciona la constante c_1

$$c_1 = \frac{5}{8a^2}$$

con la que obtenemos como función de tensiones aproximada

$$\Phi = \frac{5}{8a^2} (y^2 - a^2)(z^2 - a^2)$$

De la relación existente con el momento torsor aplicado se obtiene la inercia torsional

$$\begin{aligned}\frac{M_T}{G\theta} = J &= \iint_{\Omega} \Phi \, dy \, dz = 8c_1 \int_0^a dy \int_0^a (y^2 - a^2)(z^2 - a^2) \, dz = \frac{32}{9} c_1 a^6 = \\ &= \frac{32}{9} a^6 \frac{5}{8a^2} = \frac{20a^4}{9}\end{aligned}$$

La máxima tensión tangencial se presenta, como sabemos, en los puntos medios de los lados.

Considerando la tensión τ_{xy}

$$\tau_{xy} = G\theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{M_T}{J} \frac{10}{8a^2} (y^2 - a^2) z$$

Particularizando para $y = 0$; $z = \pm a$, se tiene:

$$\tau_{\max} = \frac{9M_T}{20a^4} \frac{10}{8a^2} a^3 = \frac{9M_T}{16a^3} = \frac{0,5625}{a^3} M_T$$

Como, según la ecuación (7.6.19), el valor exacto de la tensión tangencial máxima es

$$\frac{4,80}{8a^3} M_T = \frac{0,6}{a^3} M_T$$

el error cometido al tomar la función de tensiones aproximada es $-6,25$ por 100.

EJERCICIOS

- 10.1. La deformada de la línea media de la viga AB simplemente apoyada indicada en la Figura E10.1a viene definida por las ecuaciones

$$EI_z y = \frac{Pb}{6l} x^3 + \frac{Pb}{6l} (b^2 - l^2) x \quad \text{para } 0 \leq x \leq a$$

$$EI_z y = \frac{Pb}{6l} x^3 + \frac{Pb}{6l} (b^2 - l^2) x - \frac{P(x - a)^3}{6l} \quad \text{para } a \leq x \leq l$$

siendo E el módulo de elasticidad e I_z el momento de inercia del área de la sección respecto del eje z .

Calcular el potencial interno de esta viga expresándolo en julios, cuando se aplican a la misma dos cargas $P_1 = 0,5$ ton y $P_2 = 1$ ton, a distancias $a_1 = 2$ m y $a_2 = 3$ m, respectivamente, del extremo A .

La sección recta de la viga es rectangular de dimensiones 70×135 mm (Fig. E10.1b), su longitud $l = 6$ m y el módulo de elasticidad $E = 2,1 \cdot 10^6$ kp/cm².

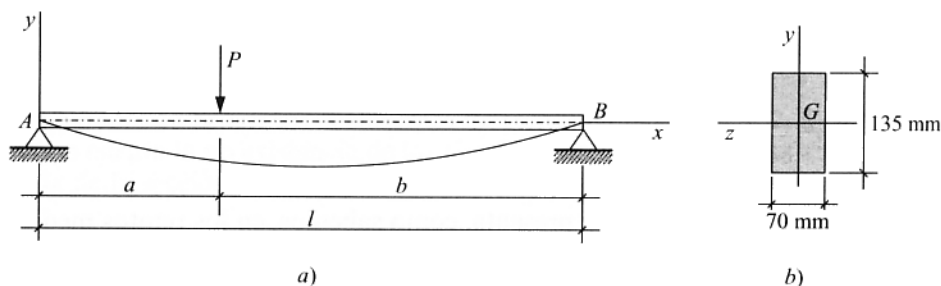


Figura E10.1.

Sean 1 y 2 los puntos en los cuales se aplican las dos cargas A y B. Calcularemos los coeficientes de influencia utilizando la ecuación de la elástica dada, haciendo $P = 1$ kp y sustituyendo I_z por su valor

$$I_z = \frac{1}{12} 7 \cdot 13,5^3 = 1.435 \text{ cm}^4$$

Tendremos en cuenta el cambio de signo, pues en este caso los δ_{ij} son positivos, mientras que las ordenadas de la elástica respecto a la referencia indicada son negativas.

$$-EI_z \delta_{11} = \frac{b_1 a_1^3}{6l} + \frac{b_1}{6l} (b_1^2 - l^2) a_1 = \frac{400 \cdot 200^3}{6 \cdot 600} - \frac{400}{6 \cdot 600} (600^2 - 400^2) 200.$$

$$-2,1 \cdot 10^6 \cdot 1.435 \delta_{11} = -\frac{128 \cdot 10^6}{36} \Rightarrow \delta_{11} = \frac{128}{36 \cdot 2,1 \cdot 1.435} = 1,180 \cdot 10^{-3} \text{ cm/kp.}$$

$$-EI_z \delta_{22} = \frac{b_2 a_2^3}{6l} + (b_2^2 - l^2) a_2 = \frac{300 \cdot 300^3}{6 \cdot 600} - \frac{300}{6 \cdot 600} (600^2 - 300^2) \cdot 300.$$

$$-2,1 \cdot 10^6 \cdot 1.435 \delta_{22} = -\frac{162 \cdot 10^6}{36} \Rightarrow \delta_{22} = \frac{162}{36 \cdot 2,1 \cdot 1.435} = 1,493 \cdot 10^{-3} \text{ cm/kp.}$$

$$-EI_z \delta_{12} = \frac{b_2 a_1^3}{6l} + \frac{b_2}{6l} (b_2^2 - l^2) a_1 = \frac{300 \cdot 200^3}{6 \cdot 600} - \frac{300}{6 \cdot 600} (600^2 - 300^2) \cdot 200.$$

$$-2,1 \cdot 10^6 \cdot 1.435 \delta_{12} = -\frac{138 \cdot 10^6}{36} \Rightarrow \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{138}{36 \cdot 2,1 \cdot 1.435} = 1,272 \cdot 10^{-3} \text{ cm/kp.}$$

El potencial interno lo obtenemos aplicando la expresión del mismo en función de las cargas aplicadas

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \delta_{ik} P_i P_k = \frac{1}{2} (\delta_{11} P_1^2 + 2 \delta_{12} P_1 P_2 + \delta_{22} P_2^2) = \frac{1}{2} (1,180 \cdot 500^2 + \\ &+ 2 \cdot 1,272 \cdot 500 \cdot 1.000 + 1,493 \cdot 1.000^2) \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{100} = 9,8 \text{ julios} = 149,94 \text{ julios} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} = 149,94 \text{ julios}$$

- 10.2. La deformada de la línea media de la viga simplemente apoyada indicada en la Figura E10.2, cuando se la somete a una carga uniformemente repartida p kp/m , es

$$y = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{pl}{12} x^3 - \frac{p}{24} x^4 - \frac{pl^3}{24} x \right)$$

siendo E el módulo de elasticidad e I_z el momento de inercia del área de la sección recta respecto del eje z .

Hallar la expresión que da el potencial de la viga en julios, cuando l se expresa en metros, E en kp/cm^2 e I_z en cm^4 .

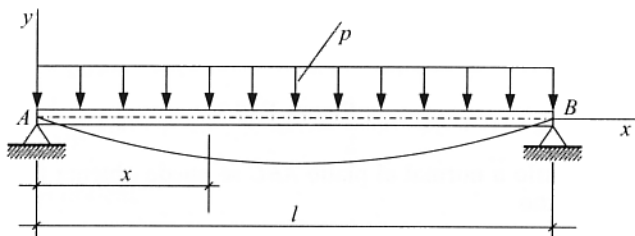


Figura E10.2.

Aplicaremos la fórmula de Clapeyron, teniendo en cuenta que se trata de un sistema continuo

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \int_0^l p \, dx \, (-y) = \frac{p}{2 EI_z} \int_0^l \left(-\frac{pl}{12} x^3 + \frac{p}{24} x^4 + \frac{pl^3}{24} x \right) dx = \\ &= \frac{p^2 l^5}{240 EI_z} \frac{\text{m}^3 \cdot \text{kp}}{\text{cm}^2} = \frac{p^2 l^5}{240 EI_z} 10^4 \cdot 9,8 \, \text{m} \cdot \text{N} = \frac{49 p^2 l^5}{12 EI_z} 10^2 \, \text{julios} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} = \frac{49 p^2 l^5}{12 EI_z} 10^2 \, \text{julios}$$

- 10.3. La Figura E10.3 representa un sólido elástico de forma tetraédrica $OABC$, referido a un sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$, cuyas caras OAB , OBC y OCA se encuentran en contacto con superficies rígidas (planos coordenados), no considerándose ningún rozamiento. Sobre la cara ABC se aplica una distribución uniforme de fuerzas de superficie de valor $\vec{f}_\Omega = -40\vec{i} - 10\vec{j} - 30\vec{k}$ (MPa). Sabiendo que en estas condiciones el estado tensional es homogéneo, se pide:

- 1.º Matriz de tensiones.
- 2.º Potencial interno acumulado en el proceso de carga de la cara ABC .

$$\left(E = 2 \cdot 10^4 \, \text{MPa}, \mu = \frac{1}{4} \right).$$

1.º Como sobre las caras en contacto con las superficies rígidas no existe rozamiento y el estado tensional es homogéneo, las tensiones tangenciales, respecto de la referencia adoptada, son nulas en todos los puntos del tetraedro. Quiere esto decir que los ejes xyz coinciden con las direcciones principales en todos sus puntos.

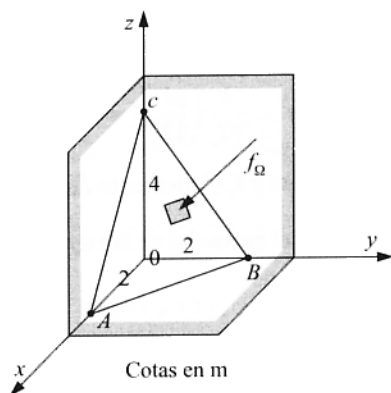


Figura E10.3.

El vector unitario \vec{u} normal al plano ABC se puede obtener fácilmente a partir de la ecuación de dicho plano

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1 \Rightarrow 2x + 2y + z = 4$$

ya que es su vector característico normalizado

$$\vec{u} \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Las ecuaciones de equilibrio en el contorno se reducen a

$$\begin{pmatrix} -40 \\ -10 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ny} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{nz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \sigma_{nx} \\ \frac{2}{3} \sigma_{ny} \\ \frac{1}{3} \sigma_{nz} \end{pmatrix}$$

de donde se obtienen las tensiones

$$-40 = \frac{2}{3} \sigma_{nx} \Rightarrow \sigma_{nx} = -60 \text{ MPa}$$

$$-10 = \frac{2}{3} \sigma_{ny} \Rightarrow \sigma_{ny} = -15 \text{ MPa}$$

$$-30 = \frac{1}{3} \sigma_{nz} \Rightarrow \sigma_{nz} = -90 \text{ MPa}$$

y, por tanto, la matriz de tensiones pedida será

$$[T] = \begin{pmatrix} -60 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -90 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

2.º Para calcular el potencial interno acumulado en el tetraedro en el proceso de carga descrito en el enunciado, podemos aplicar la expresión del potencial en función de las tensiones

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2E} \iiint_v [\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2 - 2\mu(\sigma_{nx}\sigma_{ny} + \sigma_{ny}\sigma_{nz} + \sigma_{nz}\sigma_{nx})] dV = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 10^4} [60^2 + 15^2 + 90^2 - \frac{1}{2}(60 \cdot 15 + 15 \cdot 90 \cdot 60)] \frac{8}{3} \cdot 10^6 \text{ julios} \end{aligned}$$

Operando, se obtiene

$$\mathcal{F} = 5,4 \cdot 10^5 \text{ julios}$$

- 10.4. Calcular el potencial de la barra cilíndrica de sección rectangular $b \times h$ indicada en la Figura E10.4a, cuando una sollicitación externa provoca un estado tensional en el que la única componente no nula de la matriz de tensiones es $\sigma_{nx} = ky$ (Fig. E10.4b), siendo k una constante.

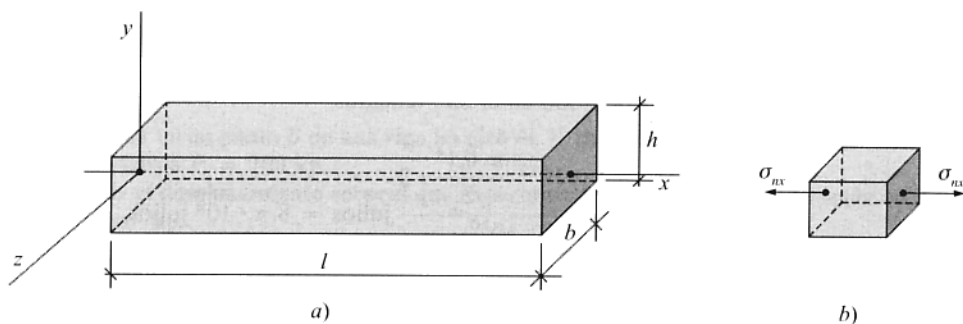


Figura E10.4.

Se puede obtener el potencial interno de la barra considerada particularizando la expresión del potencial en función de las tensiones a nuestro caso

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2E} \iiint_v \sigma_{nx}^2 dx dy dz = \frac{k^2}{2E} \int_0^l dx \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \int_{-b/2}^{b/2} dz = \frac{k^2 bh^3 l}{24 E}$$

es decir:

$$\mathcal{F} = \frac{k^2 bh^3 l}{24 E}$$

- 10.5. Una barra cilíndrica de radio R y longitud l sometida a torsión provoca un estado tensional tal que en cualquier punto P de una sección recta la única tensión que existe es de cortadura, de módulo $\tau = kr$, siendo k una constante y r la distancia del punto P al centro de gravedad G de la sección. La dirección de τ es perpendicular a la recta GP y su sentido tal que el momento de τ respecto de G tiene la dirección positiva del eje x (Fig. E10.5).

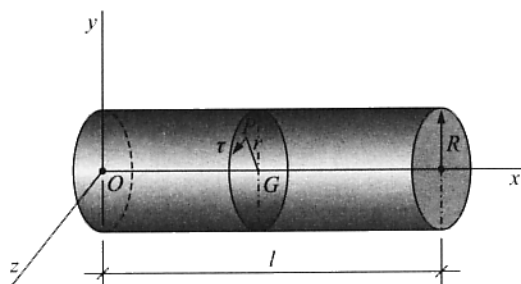


Figura E10.5.

Calcular el potencial interno de esta barra, expresado en julios, cuando la tensión de cortadura máxima es igual a $\tau_{adm} = 80$ MPa, siendo el radio de la barra $R = 0,1$ m, su longitud $l = 2$ m, el módulo de elasticidad del material $E = 2 \cdot 10^5$ MPa y coeficiente de Poisson $\mu = 0,25$.

Aplicando la ecuación (10.3.13) que expresa el potencial en función de las tensiones tenemos:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2G} \iiint_V (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) dx dy dz = \frac{1}{2G} \iiint_V \tau^2 dx dy dz = \frac{k^2}{2G} \int_0^l dx \iint_{\Omega} r^2 d\Omega = \frac{k^2 I_0}{2G} l$$

en donde I_0 es el momento de inercia polar del área de la sección recta.

Sustituyendo valores, operando en el S.I., tenemos:

$$\mathcal{F} = \frac{\left(\frac{80}{0,1}\right)^2 \cdot 10^{12} \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^4}{2} \cdot 2}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10}} \text{ julios} = 8 \pi \cdot 10^2 \text{ julios}$$

es decir:

$\mathcal{F} = 2.513,27 \text{ julios}$

- 10.6. Al aplicar una carga $P_A = 1.000$ kp en el punto A de una viga simplemente apoyada (Fig. E10.6) se producen los desplazamientos verticales $\delta_B = 3$ mm y $\delta_C = 5$ mm en los puntos B y C respectivamente.

Calcular el desplazamiento vertical del punto A cuando actúan sobre la viga las cargas $P_B = 600$ kp y $P_C = 800$ kp aplicadas en B y C , respectivamente.

Consideremos los estados 1 y 2 indicados en la Figura E10.6. El trabajo que realiza la carga P_A cuando se aplica el sistema de cargas del estado 2 es $P_A \cdot \delta_A$, mientras que el trabajo realizado por el sistema de cargas del estado 2 cuando se aplica la carga P_A del estado 1 es $P_B \cdot \delta_B + P_C \cdot \delta_C$.

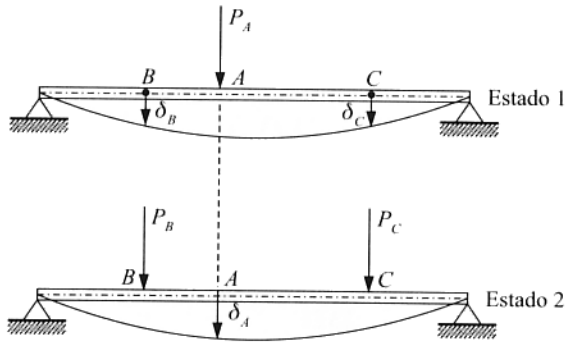


Figura E10.6.

Igualando ambos trabajos, en virtud del teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti, se tiene:

$$P_A \delta_A = P_B \cdot \delta_B + P_C \cdot \delta_C$$

Sustituyendo valores

$$1.000 \delta_A = 600 \cdot 3 + 800 \cdot 5 = 5.800 \text{ mm} \cdot \text{kp}$$

se obtiene

$\delta_A = 5,8 \text{ mm}$

- 10.7. Para provocar en un punto B de una viga un giro de 1° ha sido necesario aplicar en otro punto A de ella una carga $P = 700 \text{ kp}$.

Calcular el desplazamiento vertical que experimentará el punto A cuando actúe en B un par $M = 100 \text{ m} \cdot \text{kp}$.

Consideremos los estados 1 y 2 indicados en la Figura E10.7.

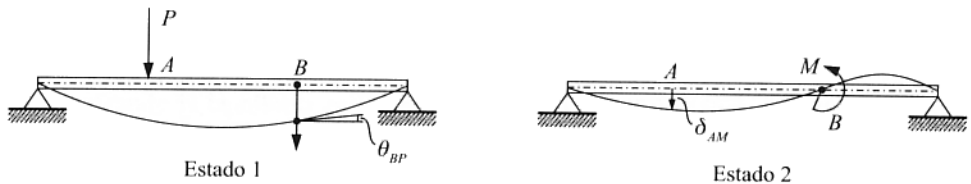


Figura E10.7.

El trabajo producido por la carga del estado 1 cuando se aplica el momento del estado 2 es $P \cdot \delta_{AM}$, mientras que el trabajo producido por el momento M del estado 2 cuando se aplica la carga P del estado 1 es $M \cdot \theta_{BP}$.

Igualando ambos, en virtud del teorema de Maxwell-Betti, tenemos

$$P \cdot \delta_{AM} = M \cdot \theta_{BP}$$

Sustituyendo valores:

$$700 \delta_{AM} = 10^4 \cdot \frac{\pi}{180}$$

obtenemos:

$$\delta_{AM} = 0,249 \text{ cm}$$

- 10.8. Cuando sobre el extremo libre de la viga en voladizo de la Figura E10.8a actúa una carga concentrada P , el desplazamiento vertical de cada punto viene dado por la expresión:

$$y = \frac{P}{2EI_z} \left(\frac{x^3}{3} - l^2 x + \frac{2}{3} l^3 \right)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material e I_z el momento de inercia del área de la sección recta respecto del eje z , ambos constantes. Se pide calcular:

- 1.º Potencial interno de la viga.
- 2.º Desplazamiento vertical del extremo libre, por aplicación del teorema de Castigliano.
- 3.º Desplazamiento vertical del mismo punto en los siguientes casos, por aplicación del teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti.

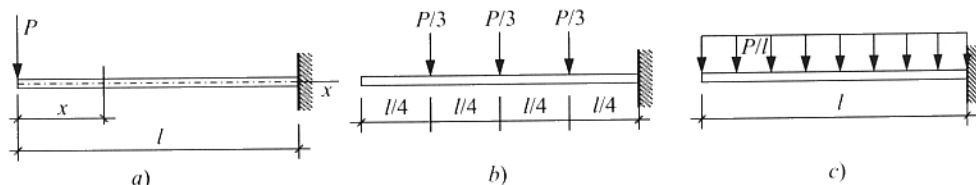


Figura E10.8.

- a) Cuando actúan tres cargas de valor $\frac{P}{3}$, como indica la Figura E10.8b.
- b) Cuando la carga P actúa uniformemente repartida (Fig. E10.8c).

1.º Dado que es conocido el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P , el potencial interno lo calcularemos aplicando la fórmula de Clapeyron.

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} P \cdot \delta = \frac{1}{2} P \cdot y(o) = \frac{P^2 l^3}{6 EI_z}$$

2.º Aplicando el teorema de Castigliano, el desplazamiento vertical del extremo libre en el que se aplica la carga P , es

$$\delta = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EI_z}$$

3.º a) Tomaremos como estado 1 el representado en la Figura E10.8a y como estado 2 el indicado en la Figura E10.8b. Si δ es el desplazamiento vertical del estado 2, por el teorema de Maxwell-Betti, tenemos

$$P \cdot \delta = \frac{P}{3} \left[y \left(\frac{l}{4} \right) + y \left(\frac{2l}{4} \right) + y \left(\frac{3l}{4} \right) \right] = \frac{27Pl^3}{128 EI_z} + \frac{5Pl^3}{48EI_z} + \frac{11Pl^3}{384EI_z} = \frac{11Pl^3}{32EI_z}$$

de donde

$$\delta = \frac{11l^3}{32EI_z}$$

b) Seguiremos tomando como estado 1 el indicado en la Figura E10.8a y tomaremos como estado 2, en este caso, el representado en la Figura E10.8c.

$$P \cdot \delta = \int_0^l \frac{P}{l} y \, dx = \frac{P^2}{2l EI_z} \int_0^l \left(\frac{x^3}{3} - l^2 x + \frac{2}{3} l^3 \right) dx = \frac{P^2 l^3}{8 EI_z}$$

de donde:

$$\delta = \frac{P l^3}{8 EI_z}$$

- 10.9. Se considera el sistema de barras articuladas indicado en la Figura E10.9. El módulo de elasticidad de las barras es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, la longitud de cada una de las barras que forman el cuadrado exterior es $a = 40$ cm y el área de la sección recta $\Omega = 4$ cm².

Se aplica en el nudo A del sistema una carga $P = 2$ ton.

Sabiendo que el potencial interno de una barra sometida a un esfuerzo normal N de tracción o compresión es:

$$\mathcal{F} = \frac{N^2}{2E\Omega} l$$

Se pide calcular, por aplicación del teorema de Castigliano:

- 1.º El descenso del nudo A.
- 2.º El acortamiento de la barra CD.

1.º Por razones de simetría, el esfuerzo normal N en las cuatro barras iguales tiene el mismo valor.

Planteando el equilibrio en los nudos A (Fig. E10.9a) y D (Fig. E10.9b) obtenemos los esfuerzos normales sobre las barras del sistema.

$$\begin{aligned} 2N \cos 45^\circ - P &= 0 \Rightarrow N = \frac{P}{\sqrt{2}} \\ N_1 - 2N \cos 45^\circ &= 0 \Rightarrow N_1 = N\sqrt{2} = P \end{aligned}$$

Las 4 barras iguales trabajan a tracción, mientras que la barra CD lo hace a compresión.

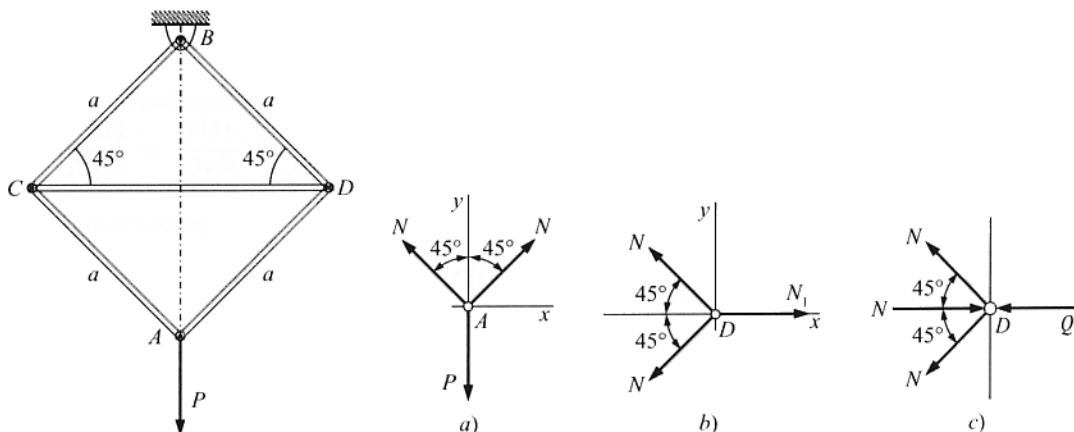


Figura E10.9.

El potencial interno del sistema será:

$$\mathcal{F} = 4 \frac{1}{2} \frac{P^2}{E\Omega} \frac{P^2}{2} a + \frac{1}{2} \frac{P^2}{E\Omega} P^2 a \sqrt{2} = \frac{aP^2}{2E\Omega} (2 + \sqrt{2})$$

El desplazamiento del nudo A, que es el punto de aplicación de la carga P , en virtud del teorema de Castigliano, será:

$$\delta_A = \frac{d\mathcal{F}}{dP} = \frac{aP}{E\Omega} (2 + \sqrt{2}) = \frac{40 \cdot 2.000}{2 \cdot 10^6 \cdot 4} (2 + \sqrt{2}) \text{ cm} = 0,034 \text{ cm}$$

$\delta_A = 0,34 \text{ mm}$

2.º Para calcular el acortamiento de la barra CD aplicamos en los nudos C y D cargas ficticias horizontales Q (Fig. E10.9c).

La ecuación de equilibrio en el nudo A es la misma que se tenía anteriormente. En el nudo D:

$$N_1 - Q - 2N \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_1 = P + Q$$

La expresión del potencial interno es, en este caso

$$\mathcal{F} = 4 \frac{1}{2} \frac{P^2}{E\Omega} \frac{P^2}{2} a + \frac{1}{2} \frac{P^2}{E\Omega} (P + Q)^2 a \sqrt{2}$$

El acortamiento de la barra CD , en virtud del teorema de Castigliano, será:

$$\delta_{CD} = \left(\frac{\partial T}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \frac{P}{E\Omega} a \sqrt{2} = \frac{2.000}{2 \cdot 10^6 \cdot 4} 40 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = 0,014 \text{ cm}$$

$\delta_C = 0,14 \text{ mm}$

- 10.10. Sabiendo que el potencial interno de una pieza prismática recta sometida a tracción o compresión tiene por expresión: $\mathcal{F} = \frac{N^2}{2E\Omega} l$; siendo N el esfuerzo normal, l la longitud, E el módulo de elasticidad y Ω el área de la sección recta. Se pide:

1.º Calcular el corrimiento del nudo A del sistema articulado indicado en la Figura E10.10 cuando se aplica la carga P .

2.º Hallar los alargamientos o acortamientos de las barras del sistema.

Las barras AB y AC son del mismo material y ambas tienen igual área de sección recta. $\Omega = 4 \text{ cm}^2$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $P = 8.000 \text{ N}$; $a = 1 \text{ m}$.

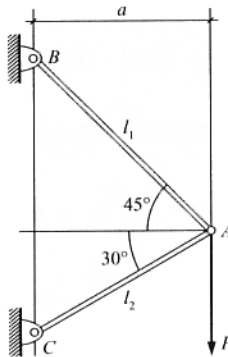


Figura E10.10.

1.º El corrimiento del nudo A tendrá dos componentes: una vertical δ_v y otra horizontal δ_H . Para obtener estas dos componentes mediante la aplicación del teorema de Castigliano consideraremos una fuerza ficticia horizontal Q (Fig. E10.10a) aplicada en el nudo A , en el que está también aplicada la carga P . Planteando el equilibrio en el nudo A tenemos:

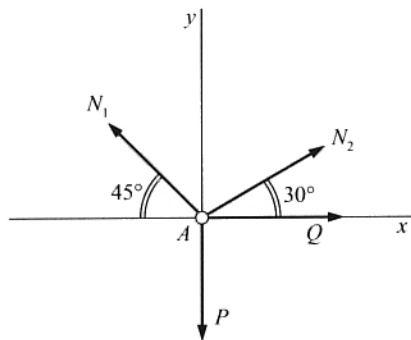


Figura E10.10a.

$$\begin{cases} Q + N_2 \cos 30^\circ - N_1 \cos 45^\circ = 0 \\ N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 30^\circ - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -N_1 \sqrt{2} + N_2 \sqrt{3} = -2Q \\ N_1 \sqrt{2} + N_2 = 2P \end{cases}$$

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es

$$N_1 = \frac{2(P\sqrt{3} + Q)}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}; \quad N_2 = \frac{2(P - Q)}{1 + \sqrt{3}}$$

es decir, obtenemos los esfuerzos normales N_1 y N_2 que actúan sobre las barras AB y AC respectivamente.

El potencial interno del sistema, en función de P y de Q , tendrá por expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{4}{2E\Omega} \frac{(P\sqrt{3} + Q)^2}{2(1 + \sqrt{3})^2} a\sqrt{2} + \frac{1}{2E\Omega} \frac{4(P - Q)^2}{(1 + \sqrt{3})^2} \frac{2\sqrt{3}a}{3} = 189,47 \cdot 10^{-3} \frac{(P\sqrt{3} + Q)^2}{E\Omega} a + \\ & + 309,4 \cdot 10^{-3} \frac{(P - Q)^2}{E\Omega} a \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Castigliano obtenemos las componentes del vector corrimiento

$$\begin{aligned} \delta_v = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P} \right)_{Q=0} &= 378,94 \cdot 10^{-3} \frac{P\sqrt{3}}{E\Omega} a + 618,8 \cdot 10^{-3} \frac{P}{E\Omega} a = 1,755,62 \cdot 10^{-3} \frac{aP}{E\Omega} \\ \delta_H = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Q} \right)_{Q=0} &= 378,94 \cdot 10^{-3} \frac{P\sqrt{3}}{E\Omega} a - 618,8 \cdot 10^{-3} \frac{P}{E\Omega} a = 37,54 \cdot 10^{-3} \frac{aP}{E\Omega} \end{aligned}$$

El signo más significa que tiene el mismo sentido al asignado a la carga ficticia, Q . Por tanto, el corrimiento pedido es (Fig. E10.10b)

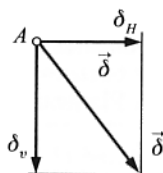


Figura E10.10b.

$$\delta_v = 1,755 \frac{aP}{E\Omega} \quad \delta_H = 0,037 \frac{aP}{E\Omega}$$

Sustituyendo valores

$$\delta_v = 1,755 \frac{1 \cdot 8.000}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} m = 1,755 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\delta_H = 0,037 \frac{1 \cdot 8.000}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} m = 0,37 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\vec{\delta} = (-0,37 \cdot 10^{-3}, -1,755 \cdot 10^{-3}) \text{ cm}$$

2.º Conocida la expresión del potencial interno de una barra sometida a tracción o compresión, el alargamiento de la misma se puede calcular aplicando el teorema de Castigliano.

$$\Delta l = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial N} = \frac{Nl}{E\Omega}$$

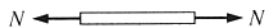


Figura E10.10c.

Aplicando esta expresión a cada una de las barras del sistema, se tiene:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E\Omega} = \frac{2 P \sqrt{3} l_1}{E\Omega \sqrt{2} (1 + \sqrt{3})} = \frac{2 Pa \sqrt{3}}{E\Omega (1 + \sqrt{3})}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E\Omega} = \frac{2 Pl_2}{E\Omega (1 + \sqrt{3})} = \frac{4 Pa}{E\Omega \sqrt{3} (1 + \sqrt{3})}$$

Sustituyendo valores:

$$\Delta l_1 = \frac{8.000 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4} (1 + \sqrt{3})} m = 1,268 \cdot 10^{-4} m = 12,68 \cdot 10^{-3} cm$$

$$\Delta l_2 = \frac{-4 \cdot 8.000}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \sqrt{3} (1 + \sqrt{3})} m = -0,845 \cdot 10^{-4} m = -8,45 \cdot 10^{-3} cm$$

$\Delta l_1 = 12,68 \cdot 10^{-3} cm$ $\Delta l_2 = -8,45 \cdot 10^{-3} cm$

- 10.11. Calcular la expresión del potencial interno de una barra rectilínea de longitud l , sección constante Ω y módulo de elasticidad E , sometida a un esfuerzo de tracción uniforme N aplicado en sus extremos.

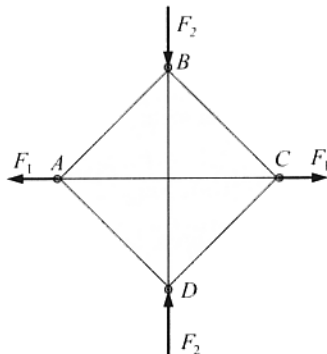


Figura E10.11.

Aplicar dicha expresión para calcular, mediante la aplicación del teorema de Menabrea, los esfuerzos a que están sometidas las seis barras del sistema plano de la Figura E10.11. Las seis

barras son del mismo material, tienen igual sección y están articuladas entre sí. La sollicitación exterior está formada por cuatro fuerzas F_1 y F_2 iguales dos a dos, aplicadas en los vértices exteriores con las direcciones y sentidos indicados.

La expresión pedida del potencial interno de una barra sometida a tracción se obtiene fácilmente particularizando la expresión correspondiente en función de las componentes de la matriz de tensiones, teniendo en cuenta que $\sigma_{nx} = \frac{N}{\Omega}$

$$\boxed{\mathcal{T}} = \frac{1}{2E} \iiint_V \sigma_{nx}^2 dV = \frac{1}{2E} \frac{N^2}{\Omega^2} \Omega l = \boxed{\frac{N^2 l}{2E\Omega}}$$

El sistema dado es hiperestático de primer grado. Por razón de simetría se deduce que los esfuerzos normales N de las cuatro barras del contorno son iguales.

De la Figura E10.11a, planteando el equilibrio en los nudos A y B , se obtienen los esfuerzos normales N_1 y N_2 en las barras diagonales en función de N .

$$F_1 - N_2 - 2N \cos 45^\circ = 0$$

$$F_2 - N_1 + 2N \cos 45^\circ = 0$$

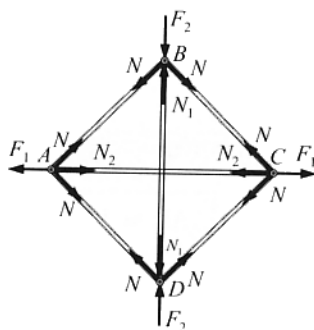


Figura E10.11a.

De este sistema de ecuaciones se obtienen

$$N_1 = F_2 + N\sqrt{2} \quad ; \quad N_2 = F_1 - N\sqrt{2}$$

El potencial interno del sistema será:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2E\Omega} (4N^2 l + N_1^2 l_1 + N_2^2 l_1) = \frac{l}{2E\Omega} [4N^2 + (F_1 - N\sqrt{2})^2 \sqrt{2} + (F_2 + N\sqrt{2})^2 \sqrt{2}]$$

Aplicando el teorema de Menabrea, la ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial N} = 0 \Rightarrow 4N + \sqrt{2} (F_1 - N\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + \sqrt{2} (F_2 + N\sqrt{2})\sqrt{2} = 0$$

nos permite calcular la incógnita hiperestática del sistema considerado

$$\boxed{N = \frac{F_1 - F_2}{2(1 + \sqrt{2})} \quad ; \quad N_1 = \frac{F_1 + F_2(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} \quad ; \quad N_2 = \frac{F_1(1 + \sqrt{2}) + F_2}{2 + \sqrt{2}}}$$

Teorías acerca del comienzo de deformaciones no elásticas

11.1. Deformación plástica de los materiales. Criterios de plastificación

Cuando se aplica un sistema de cargas a una pieza de determinado material elástico se crea un estado de deformación que da origen a un estado tensional, relacionados ambos estados por las leyes de comportamiento que se han visto en el Capítulo 4. Si incrementamos los valores de las cargas que constituyen la sollicitación, experimentalmente se comprueba que el material llega un momento en que abandona el comportamiento elástico.

Por otra parte, toda deformación producida en el material por el sistema de cargas produce un estado de mayor potencial interno y, por consiguiente, menos estable, ya que la configuración que adopta la estructura interna de cada material corresponde a la agrupación de mínima energía de sus átomos. Puede suceder que al desaparecer la carga como causa de la alteración de la pieza desaparezca también el efecto, es decir, la deformación, y al volver a su energía mínima los átomos vuelvan a ocupar sus posiciones iniciales. Una deformación de este tipo es la que hemos llamado *deformación elástica*, que existirá mientras subsista la carga y desaparecerá cuando cese ésta.

Durante el proceso de carga, fuerzas aplicadas y deformaciones se rigen por las leyes de Hooke. Pero es evidente que al aumentar la carga también aumentarán los valores característicos del estado tensional y, en consecuencia, la variación de las distancias entre los átomos, hasta llegar a romperse los enlaces atómicos de la estructura interna del material.

Llegado a este punto puede suceder que se mantenga la cohesión con la formación de nuevos enlaces que sustituyan a los primitivos o que no se mantenga y entonces la rotura de los enlaces es definitiva. En el primer caso tenemos la *deformación plástica* que se caracterizará, al haberse roto enlaces interatómicos, por deformaciones de tipo permanente y en el segundo se producirá la *rotura*.

La iniciación de deformaciones plásticas ya se comprende que va a producir variaciones cualitativas de las propiedades del material y no digamos la rotura de la pieza, que puede producir la ruina de la estructura de la que forma parte. Por eso es de gran importancia

averiguar cómo se producen y cuáles son las causas determinantes del comienzo de las deformaciones anelásticas. Muchos han sido los especialistas que han investigado estas cuestiones. El objetivo que nos proponemos en este capítulo es exponer las diversas teorías o criterios con los cuales se ha tratado de determinar la combinación de tensiones y sus correspondientes deformaciones que agota el régimen elástico del material.

Ya se comprende que en un estado tensional simple el problema se resuelve muy fácilmente: se hace el ensayo del material a tracción y se obtiene en el diagrama de tracción el punto característico correspondiente a la tensión límite para este material. Tomaremos como tal el *límite elástico o tensión de fluencia* σ_e en caso de materiales dúctiles y la tensión de rotura σ_r si se trata de materiales frágiles.

En lo que sigue y cuando nos refiramos a *materiales dúctiles* consideraremos como diagrama elasto-plástico ideal el representado en la Figura 11.1, que no es sino la simplificación al diagrama tensión-deformación visto en el Capítulo 4 (Fig. 4.2) para el acero dulce, en el que se ha despreziado la falta de linealidad entre σ_p y σ_e , se ha confundido σ_e con σ_f y se ha supuesto que alcanzada la fluencia el material se plastifica a tensión constante.

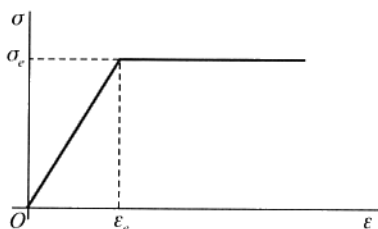


Figura 11.1.

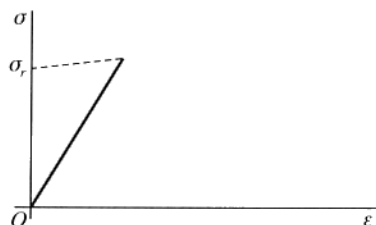


Figura 11.2.

Si se trata de *materiales frágiles* el diagrama tensión-deformación es del tipo indicado en la Figura 11.2, que nos indica que se produce la rotura de forma brusca antes de alcanzar la fluencia.

Puesto que el objetivo que nos hemos propuesto es el de exponer las diversas teorías o criterios que explican el comienzo de las deformaciones plásticas en un sólido elástico sometido a un estado tensional triple, hagamos algunas consideraciones generales sobre los criterios de plastificación.

Dado que el estado tensional en los puntos del sólido viene definido por la matriz de tensiones $[T]$, un *criterio de plastificación* será una ley que defina el límite del comportamiento elástico del material, es decir, una ley cuya expresión matemática traduzca que una determinada función de la matriz de tensiones alcance un valor crítico C .

$$f([T]) = C \quad (11.1.1)$$

Si el valor de esta función en cualquier punto es menor que el valor crítico

$$f([T]) < C \quad (11.1.2)$$

el material se comporta elásticamente, sin que se haya producido en ningún punto plastificación alguna.

Si, por el contrario, existen puntos en los que se verifica

$$f([T]) \geq C \quad (11.1.3)$$

se habrán producido en esos puntos deformaciones plásticas.

Ahora bien, como estamos considerando materiales isótropos, es evidente que la plastificación no depende del sistema de referencia de la matriz de tensiones. Por tanto, podemos, sin pérdida de generalidad, considerar en cada punto un sistema de referencia cuyos ejes sean coincidentes con las direcciones principales. De esta forma, el criterio de plasticidad expresado por (11.1.1), es claro que se puede expresar en función de las tensiones principales de la siguiente forma:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C \quad (11.1.4)$$

Por otra parte, según vimos en 2.10, la matriz de tensiones se puede descomponer en suma de otras dos

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{pmatrix} \quad (11.1.5)$$

siendo σ_m la tensión normal media.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\Theta}{3} \quad (11.1.6)$$

Pues bien, se ha comprobado experimentalmente por Bridgman, entre otros investigadores, que la plastificación de los materiales es independiente de la tensión normal media, por lo que la matriz esférica, primera matriz de la descomposición (11.1-5), no interviene en el proceso de plastificación. Esta matriz produce cambio de volumen, pero no de forma.

Por el contrario, la matriz desviadora produce cambio de forma y no de volumen, ya que su primer invariante es nulo.

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3 \sigma_m = 0 \quad (11.1.7)$$

y es nula también la dilatación cúbica unitaria

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E} \Theta \quad (11.1.8)$$

Esta distorsión o cambio de forma es la causante de la plastificación del material.

Estas consideraciones nos conducen a una interesante representación geométrica del fenómeno de la plastificación. En efecto, si consideramos un punto de un sólido elástico en el que exista un estado tensional cuyas tensiones principales sean σ_1 , σ_2 y σ_3 , el punto representativo en el espacio de tensiones principales es $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (Fig. 11.3).

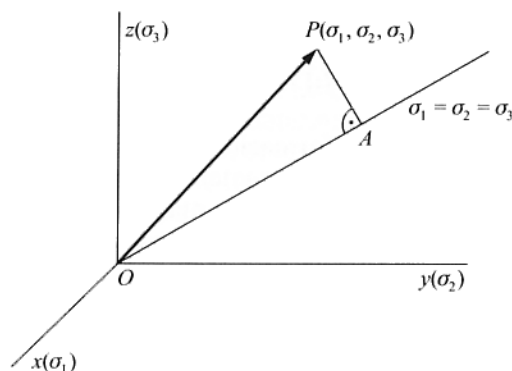


Figura 11.3.

El vector \overrightarrow{OP} se puede considerar como suma de otros dos.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

siendo A la proyección ortogonal de P sobre la trisectriz o línea hidrostática $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Es fácil ver que las coordenadas de A son iguales a la tensión media σ_m , ya que el plano que es perpendicular a la trisectriz y pasa por P tiene por ecuación

$$(x - \sigma_1) + (y - \sigma_2) + (z - \sigma_3) = 0$$

Las coordenadas de A se obtienen cortando este plano por la trisectriz.

$$3 x_A - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0 \Rightarrow x_A = y_A = z_A = \sigma_m$$

Como la plastificación, según se ha dicho antes, es independiente de la tensión normal media, ésta no dependerá de la componente \overrightarrow{OA} , sino solamente de la componente desviadora \overrightarrow{AP} , es decir, la plastificación se iniciará cuando el módulo del vector \overrightarrow{AP} alcance un valor crítico, independientemente del valor que pueda alcanzar el módulo de \overrightarrow{OA} . Por tanto, la expresión matemática (11.1.4) que traduzca un criterio de plasticidad vendrá representado en el espacio de tensiones principales por una superficie que llamaremos *superficie de plastificación*. Esta superficie será un cilindro de generatrices paralelas a la trisectriz y es tal que si el punto P representativo del estado tensional de un determinado punto del sólido elástico es interior a él, el sólido está trabajando en ese punto en régimen elástico. Si por el contrario, el punto P está sobre la superficie del cilindro o es exterior a él, existirán en el punto considerado deformaciones plásticas.

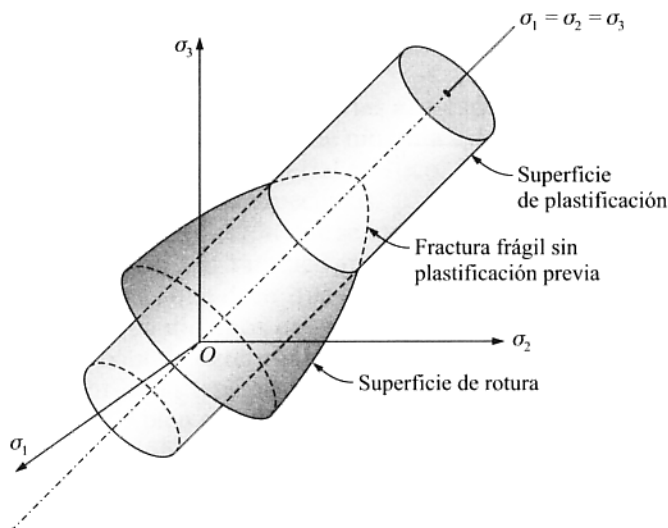


Figura 11.4.

En la Figura 11-4 se representa la superficie de plastificación, así como la *superficie de rotura* que se obtiene experimentalmente. En esta última se distinguen dos zonas: una, interior a la superficie de plastificación en la cual se produce la fractura frágil sin que se haya producido previamente plastificación alguna; y otra exterior, en la que la mayor distancia de sus puntos a la trisectriz, respecto de la superficie de plastificación, se explica por la etapa de fortalecimiento que existe en los materiales elásticos reales, que se considera despreciable en el diagrama elasto-plástico ideal, supuesto anteriormente.

La zona de fractura frágil sin plastificación previa refleja el comportamiento de los materiales frágiles, mientras que la zona de la superficie de rotura exterior a la superficie de plastificación explica el comportamiento de los materiales dúctiles.

11.2. Ensayo a tracción de un material

Sometiendo a una probeta de material dúctil a un esfuerzo de tracción se crea en el material un estado tensional simple. Si la carga aplicada a la probeta es gradualmente creciente, alcanzará un determinado valor para el cual el material comienza a experimentar deformaciones plásticas. Se dice que el material empieza a fluir.

En un ensayo a tracción de un material dúctil realizado en el laboratorio hay seis magnitudes que cuando empieza la fluencia se alcanzan simultáneamente, tomando cada una de ellas los siguientes valores.

1. La *tensión principal* alcanza el límite de fluencia a tracción del material σ_e . Esta tensión principal es máxima pues las otras dos son nulas

$$\sigma_1 = \sigma_e \quad (11.2.1)$$

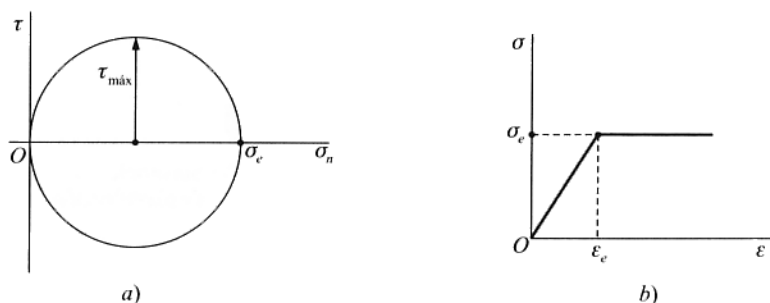


Figura 11.5.

2. La *tensión tangencial máxima* toma el valor

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_e}{2} \quad (11.2.2)$$

3. La *deformación longitudinal unitaria máxima* alcanza el valor

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} \quad (11.2.3)$$

4. La *energía de deformación* absorbida por unidad de volumen vale

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sigma_e \cdot \varepsilon_e = \frac{\sigma_e^2}{2E} \quad (11.2.4)$$

5. La *energía de distorsión* \mathcal{T}_d , esto es, la energía debida al cambio de la forma, absorbida por unidad de volumen, es:

$$\mathcal{T}_d = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_e^2 \quad (11.2.5)$$

6. La *tensión tangencial octaédrica* alcanza el valor

$$\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_e = 0,47 \sigma_e \quad (11.2.6)$$

Estas seis magnitudes alcanzan los valores indicados simultáneamente en el ensayo a tracción que origina en el material un estado tensional simple. Pero si el estado tensional es doble o triple, estos seis valores no se alcanzarán simultáneamente. Surje entonces la necesidad de establecer si alguna de estas magnitudes puede considerarse limitativa de las cargas que actúan sobre una pieza de material elástico para que no se produzcan en la misma deformaciones plásticas.

Cada uno de los valores indicados que se obtienen en el ensayo a tracción han sugerido otras tantas teorías o criterios para predecir cuando el estado tensional no es simple, el comienzo de la acción anelástica.

Conviene hacer algunas observaciones previas al estudio de cada uno de estos criterios. En primer lugar, que en la actualidad no existe ninguna teoría que se adapte completamente al comportamiento real de cualquier material elástico. Sin embargo, sí existen teorías que son aplicables a grupos de materiales específicos.

Por otra parte, en el ensayo a tracción que se ha descrito anteriormente, se ha considerado un material dúctil, pero existen también materiales frágiles cuya tensión límite es la tensión de rotura. Por eso, más que decir que el material comienza un comportamiento no elástico, tiene más sentido que digamos que el material alcanza un estado límite.

Si sometemos una probeta de determinado material a un ensayo de tracción, podemos obtener fácilmente el valor de la tensión última σ_u , bien por plastificación o fluencia si se trata de un material dúctil, o bien por fractura si el material es frágil. Si en el mismo material, estando sometido a tracción uniaxial, la tensión es σ , es evidente que la relación entre σ_u y σ nos indicará el grado de seguridad de su estado terminal. De ahí que definamos como *coeficiente de seguridad* n en la relación

$$n = \frac{\sigma_u}{\sigma} \quad (11.2.7)$$

Vemos que el coeficiente de seguridad, que siempre será ≥ 1 , es el factor que multiplicado por la tensión σ que existe en el material de la pieza sometida a tracción, nos da la tensión última σ_u .

Nos interesa poder reducir cualquier estado tensional triple o doble a uno simple que nos sirva de comparación. Si tenemos un estado tensional triple en el que las tensiones principales son σ_1 , σ_2 y σ_3 , supongamos que multiplicamos todas las cargas que produce el estado tensional por un mismo número n , que vamos aumentando hasta que las tensiones principales en el punto que se considera, que serán $n\sigma_1$, $n\sigma_2$ y $n\sigma_3$, respectivamente, produzcan un estado límite. Es evidente que n es el coeficiente de seguridad que antes hemos definido para un estado tensional simple y ahora lo es para un estado triple.

Pues bien, definamos como *tensión equivalente*, σ_{equiv} , la que existiría en una probeta de ese material sometido a tracción, tal que el coeficiente de seguridad del estado tensional dado y el de la probeta a tracción fuera el mismo (Fig. 11.6).

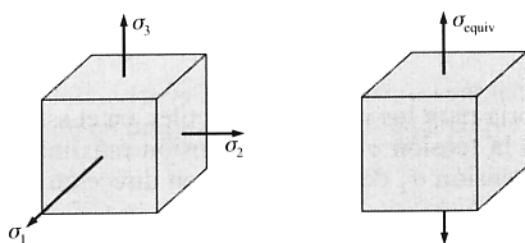


Figura 11.6.

De esta forma, cuando el material alcanza su estado límite la tensión equivalente coincide con la tensión última σ_u , y ésta será igual al límite elástico σ_e en el caso de materiales dúctiles, o igual a la tensión de rotura σ_r si se trata de materiales frágiles.

11.3. Teoría de la tensión principal máxima

La teoría de la *tensión principal máxima*, atribuida a Rankine*, expresa que el estado límite en un punto de un material en el que existe un estado tensional cualquiera comienza cuando una de las tensiones principales extremas en dicho punto alcanza un valor igual a la tensión límite a tracción o compresión, deducido de ensayos a tracción o compresión simples.

La formulación de este criterio sería la siguiente

$$\sigma_1 = \sigma_{ut} \quad ; \quad |\sigma_3| = |\sigma_{uc}| \quad (11.3.1)$$

siendo σ_{ut} y σ_{uc} las tensiones últimas a tracción y a compresión, respectivamente.

En el espacio de tensiones principales, si $\sigma_{ut} = |\sigma_{uc}|$, la superficie de plastificación sería un cubo cuyo centro coincidiría con el origen de coordenadas (Fig. 11.7a). Como generalmente $|\sigma_{uc}| > \sigma_{ut}$, la superficie de plastificación sería un cubo, pero el origen no coincide con su centro (Fig. 11.7b)

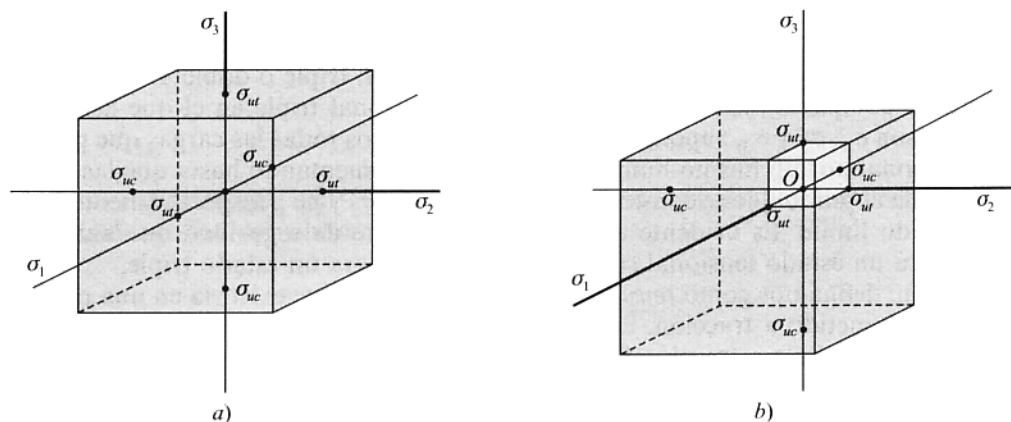


Figura 11.7.

De aceptarse esta teoría para los materiales dúctiles, en el estado tensional indicado en la Figura 11.8 en el que la tensión $\sigma_1 = \sigma_e$, la tensión máxima seguirá siendo la misma cuando se superpone la tensión σ_2 de compresión, en dirección normal a σ_1 .

* W. J. M. Rankine (1820-1872), eminente científico inglés del siglo XIX.

Si $\sigma_2 = -\sigma_1$, la tensión tangencial máxima, que se presenta en planos que forman 45° con la dirección de la tensión σ_1 , toma el valor de σ_1 , como ocurre en una pieza cilíndrica sometida a torsión. De lo anterior se deduciría, de ser cierta esta teoría para cualquier estado tensional, que la tensión de fluencia del material a cortadura pura tendría que ser al menos igual a la tensión de fluencia a tracción.

Como para todos los metales dúctiles la tensión de fluencia que se obtiene en el ensayo a torsión es menor que la que se obtiene a tracción, se infiere que la existencia de tensiones tangenciales relativamente grandes en un punto invalida esta teoría.

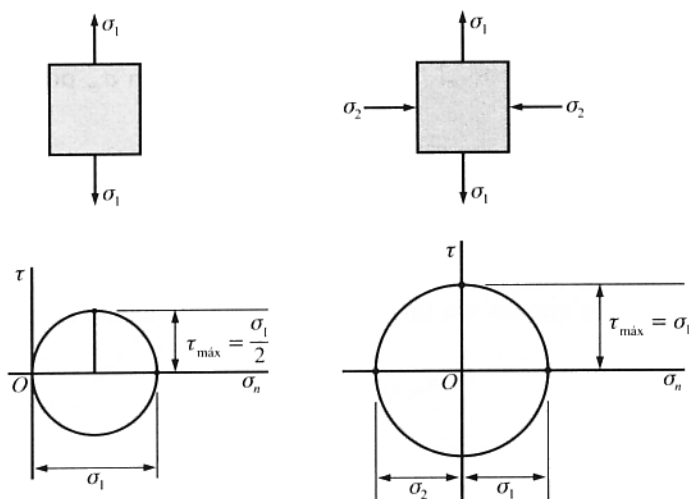


Figura 11.8.

Esta teoría se aplica razonablemente a materiales frágiles, tal como el hierro fundido*. No obstante, tampoco es admisible su aplicación con generalidad a estos materiales, ya que de ser cierta se produciría la rotura por equicompresión cuando se verificase $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$, siendo σ_c la tensión de rotura a compresión simple, lo que está en desacuerdo con los resultados experimentales.

11.4. Teoría de la tensión tangencial máxima

Denominada frecuentemente *criterio de Tresca-Guest*, o simplemente *criterio de Tresca***; expresa que el estado límite en un punto de un cuerpo en el que existe un estado tensional

* Véase Egor P. Popov. *Mecánica de materiales*. Limusa, 1982, pág. 340.

** En 1868, Tresca presentó a la Academia Francesa dos notas que versaban sobre la fluencia de metales bajo grandes presiones.

cualquiera comienza cuando la tensión tangencial máxima (que se presenta, como sabemos, en dos planos de la radiación de vértice el punto) alcanza un valor igual al alcanzado en el ensayo a tracción cuando se llega a la tensión límite, es decir, cuando

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_u}{2}$$

o bien

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_u \quad (11.4.1)$$

Esta teoría es razonablemente aceptable para materiales dúctiles sometidos a estados de tensión en los que se presentan tensiones tangenciales relativamente grandes. Quiere decir que la tensión límite coincide con el límite elástico a tracción σ_e , por lo que la expresión (11.4.1) sería

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_e \quad (11.4.2)$$

Esto equivale a decir que la tensión de fluencia a cortadura no debe exceder a la mitad del valor de la tensión de fluencia a tracción.

Para un estado triple que no sea límite, la tensión equivalente será

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (11.4.3)$$

En ensayos a torsión se obtiene como valor medio aproximado de la tensión de fluencia a cortadura $\tau_e = 0,57 \sigma_e$, lo que nos indica que para tal estado tensional la teoría de *Tresca-Guest* acusa un error de un 15 por 100 aproximadamente en sentido favorable a la seguridad.

Podemos representar gráficamente la condición (11.4.2) en el espacio de tensiones principales, es decir, respecto a unos ejes cartesianos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ cuyas coordenadas midan las tensiones principales en los puntos del material, sin prejuzgar el orden que siempre hemos supuesto.

El criterio de Tresca-Guest se expresará mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_e \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_e \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm \sigma_e \end{aligned} \quad (11.4.4)$$

o bien mediante la ecuación única que las comprende

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_e^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_e^2][(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_e^2] = 0 \quad (11.4.5)$$

que no es otra cosa que la ecuación de la superficie de plastificación, formada por seis planos, paralelos dos a dos y paralelos todos ellos a la trisectriz o línea hidrostática $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (Fig. 11.9).

Estos seis planos se cortan formando un prisma de eje la trisectriz del octante positivo, cuya sección recta es un hexágono regular. Si el punto representativo del estado tensional de un punto interior del sólido es interior a este prisma, indica que el sólido trabaja en régimen elástico en el punto que se considera. Si por el contrario, el punto representativo está contenido en alguna de las caras del prisma esto significa que en el punto del sólido se producen deformaciones plásticas.

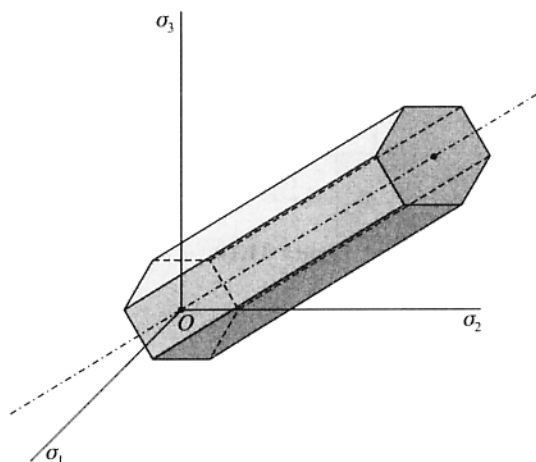


Figura 11.9.

Si las tres tensiones principales tienen valores aproximadamente iguales, las tensiones tangenciales serán muy pequeñas, según se desprende del círculo de Mohr. Se producirá la fractura frágil antes de que el material empieza a fluir, por lo que no será aplicable en este caso la teoría de la tensión tangencial máxima.

Para los estados tensionales planos, la expresión (11.4.5) se reduce a

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_e^2] (\sigma_2^2 - \sigma_e^2) (\sigma_1^2 - \sigma_e^2) = 0 \quad (11.4.6)$$

Si representamos esta ecuación en el plano σ_1, σ_2 obtenemos el hexágono (Fig. 11.10) cuyos lados vienen definidos por las ecuaciones

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_e \\ \sigma_2 = \pm \sigma_e \\ \sigma_1 = \pm \sigma_e \end{cases} \quad (11.4.7)$$

Este hexágono no es sino la intersección de la superficie de plastificación con el plano coordenado $\sigma_3 = 0$ en el espacio de las tensiones principales. Si el punto representativo del estado tensional plano en un determinado punto del sólido elástico es interior al hexágono, el sólido trabaja en ese punto en régimen elástico. Si, por el contrario, el punto representativo se encuentra sobre el contorno del hexágono, significa que en el punto considerado del sólido elástico se producen deformaciones plásticas.

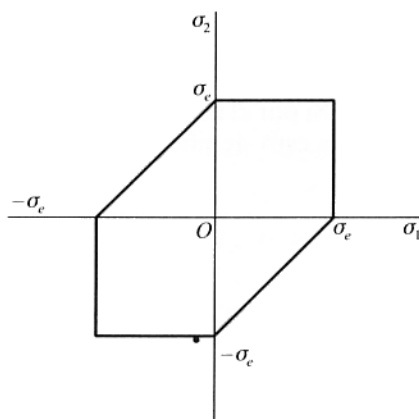


Figura 11.10.

11.5. Teoría de la deformación longitudinal unitaria máxima

Esta teoría conocida con el nombre de *teoría de Saint-Venant** expresa que el estado límite en un punto de un cuerpo en el que existe un estado tensional cualquiera comienza cuando la deformación longitudinal unitaria máxima es igual al valor ϵ_u obtenido en el ensayo a tracción cuando el material alcanza la tensión última.

$$\epsilon_u = \frac{\sigma_u}{E} \quad (11.5.1)$$

Como la expresión de la deformación longitudinal máxima es

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_u}{E} \quad (11.5.2)$$

la tensión equivalente será

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (11.5.3)$$

De ser acertada esta teoría para materiales dúctiles, en un punto interior al sólido elástico, en el que existiera un estado tensional simple tal como el indicado en la Figura 11.11a,

* B. de Saint-Venant (1797-1886), científico francés al que se debe el método semi-inverso que aplicó a la resolución del problema elástico en barras de sección no circular sometidas a torsión.

empezaría la fluencia cuando la tensión principal σ_1 es igual a σ_e , en virtud de (11.5.1), pero si el estado tensional fuera el indicado en la Figura 11.11b, como la expresión de la deformación longitudinal unitaria en la dirección de σ_1 es:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \quad (11.5.4)$$

la fluencia no se iniciará sino para un valor de σ_1 superior a σ_e .

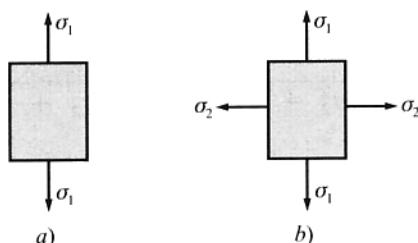


Figura 11.11.

Pero si la tensión σ_2 es de compresión, la deformación longitudinal unitaria sería ahora

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} + \mu \frac{\sigma_2}{E} \quad (11.5.5)$$

y la fluencia se iniciaría para un valor de σ_1 inferior a σ_e .

Esta teoría, igualmente a lo que ocurre con la de la tensión principal máxima, es aceptable cuando el material rompe por fractura frágil, pero no lo es cuando la acción anelástica se produce por fluencia.

11.6. Teoría de la energía de deformación

Expresa esta teoría, propuesta por *Beltrami* y por *Haigh*, que el estado limite en un punto de un cuerpo en el que existe un estado tensional cualquiera comienza cuando la energía de deformación absorbida por unidad de volumen de un entorno de dicho punto es igual a la energía de deformación absorbida por unidad de volumen cuando el material alcanza la tensión última en el ensayo a tracción.

Esta teoría difiere de todas las que se han expuesto anteriormente, ya que en aquéllas se comparaban valores de tensiones o deformaciones en el estado triple y en el caso que el material se sometiera a un ensayo a tracción, mientras que en éste se comparan los valores que toma una magnitud escalar, como es la energía de deformación o potencial interno, en el estado triple y en el estado simple equivalente.

La formulación de este criterio se hace de forma inmediata teniendo en cuenta la expresión de la energía de deformación por unidad de volumen que se ha visto en el capítulo

anterior, particularizada para el caso que los ejes del sistema de referencia sean coincidentes con los ejes principales.

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = \frac{\sigma_u^2}{2E}$$

o bien:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = \sigma_u^2 \quad (11.6.1)$$

La tensión equivalente en este criterio es

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \quad (11.6.2)$$

De aceptar esta teoría para materiales dúctiles, el valor dado por \mathcal{F} en la expresión anterior no puede exceder el valor $\frac{\sigma_e^2}{2E}$ sin que comience a fluir el material, ya que para estos materiales $\sigma_u = \sigma_e$.

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = \sigma_e^2 \quad (11.6.3)$$

En el ensayo a torsión, en el que $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$; $\sigma_2 = 0$, según este criterio, la plastificación comenzaría cuando la tensión tangencial máxima verificara

$$\tau^2 + \tau^2 + 2\mu\tau^2 = 2(1 + \mu)\tau^2 = \sigma_e^2$$

Tomando como valor del coeficiente de Poisson $\mu = 0,25$, la tensión tangencial de fluencia sería

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{2(1 + \mu)}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{2,5}} = 0,63 \sigma_e$$

valor que es superior al obtenido en los ensayos experimentales, $\tau_e = 0,577 \tau_e$.

Si representamos este criterio de Beltrami y Haigh en el espacio de tensiones principales, la superficie de plastificación viene dada por la ecuación

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) - \sigma_e^2 = 0 \quad (11.6.4)$$

que corresponde a un elipsoide de revolución cuyo eje coincide con la trisectriz (Fig. 11.12).

El radio de la circunferencia máxima, intersección del elipsoide con el plano $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ perpendicular a la trisectriz es

$$r = \frac{\sigma_e}{\sqrt{1 + \mu}} \quad (11.6.5)$$

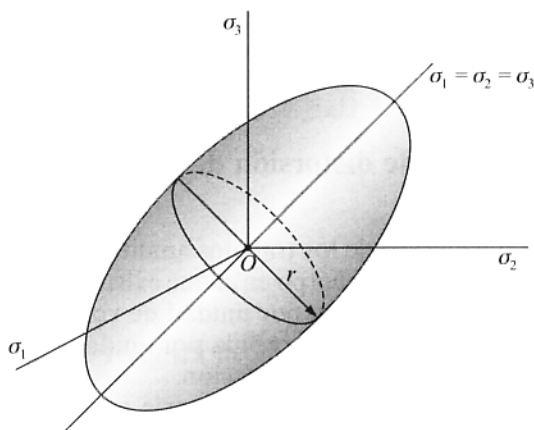


Figura 11.12.

En un estado tensional doble, la expresión de este criterio se reduce a

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_e^2 \quad (11.6.6)$$

que es una elipse intersección del elipsoide de revolución con el plano $\sigma_3 = 0$ (Fig. 11.13) cuyas longitudes de los semiejes son

$$a = \frac{\sigma_e}{\sqrt{1 - \mu}} ; \quad b = \frac{\sigma_e}{\sqrt{1 + \mu}} \quad (11.6.7)$$

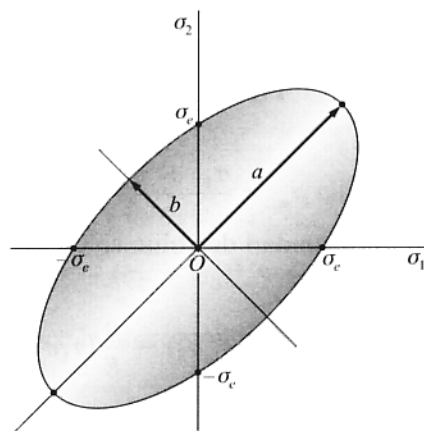


Figura 11.13.

La falta de coincidencia de los resultados de aplicar este criterio, con los obtenidos en los ensayos experimentales, estriba en que el criterio de Beltrami y Haigh vincula toda la

energía de deformación al proceso de plastificación y, como veremos en el epígrafe siguiente, sólo se vincula una parte de la energía de deformación a la plastificación del material.

11.7. Teoría de la energía de distorsión de von Mises

Propuesta por *von Mises* fue el fruto de los trabajos analíticos de *Huber* y *Hencky* y expresa que el estado límite en un punto de un cuerpo en el que existe un estado tensional cualquiera comienza cuando la energía de distorsión por unidad de volumen en un entorno de dicho punto es igual a la energía de distorsión absorbida por unidad de volumen cuando el material alcanza la tensión límite en el ensayo a tracción.

Para llegar a la formulación analítica de esta teoría veamos cuál es la expresión de la energía de distorsión en un estado tensional triple, en el que las tensiones principales son σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Nos apoyaremos en la propiedad de que la energía de deformación por unidad de volumen se puede descomponer en dos partes, una de ellas \mathcal{T}_v debida al cambio de volumen y otra \mathcal{T}_d vinculada a la distorsión o cambio de forma a volumen constante de dicho volumen unitario, como esquemáticamente se indica en la Figura 11.14.

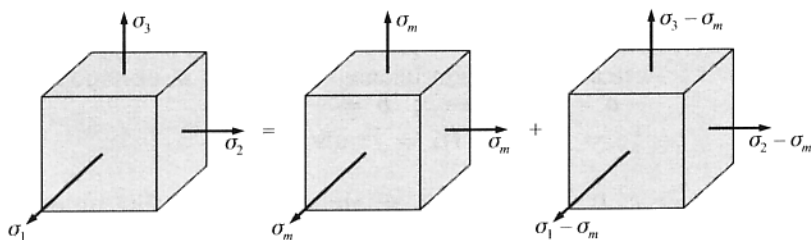


Figura 11.14.

en donde σ_m es la equitensión media $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$.

La energía de deformación por unidad de volumen es:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_v + \mathcal{T}_d = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \quad (11.7.1)$$

La debida al cambio de volumen es:

$$\mathcal{T}_v = 3 \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m$$

y como por la ley de Hooke

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} [\sigma_m - \mu (\sigma_m + \sigma_m)] = \frac{\sigma_m}{E} (1 - 2\mu)$$

queda:

$$\mathcal{T}_v = \frac{3}{2E} \sigma_m^2 (1 - 2\mu) = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{6E} (1 - 2\mu) \quad (11.7.2)$$

La energía por unidad de volumen debida al cambio de forma se puede obtener como diferencia entre \mathcal{T} y \mathcal{T}_v

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T} - \mathcal{T}_v = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{6E} (1 - 2\mu)$$

Simplificando, se obtiene:

$$\mathcal{T}_d = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (11.7.3)$$

Esta cuestión, particularizada para un estado tensional simple, nos da:

$$\mathcal{T}_d = \frac{1 + \mu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_1^2) = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_1^2 \quad (11.7.4)$$

Por tanto, según esta teoría para materiales dúctiles no aparecerán deformaciones plásticas hasta que se verifique:

$$\frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_e^2 \quad (11.7.5)$$

es decir:

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 2 \sigma_e^2 \quad (11.7.6)$$

De esta expresión se deduce la correspondiente a la tensión equivalente

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (11.7.7)$$

La expresión obtenida del criterio de von Mises nos indica que la superficie de plastificación es un cilindro de revolución cuyo eje es la trisectriz $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (Fig. 11.15).

Según vemos, la diferencia entre esta teoría y la expuesta en el epígrafe de la energía de

deformación estriba en que en aquélla todo el potencial interno está vinculado al comienzo de la acción anelástica, mientras que en la de la energía de distorsión el potencial interno que determina la aparición de deformación plástica es solamente la parte debida al cambio de forma.

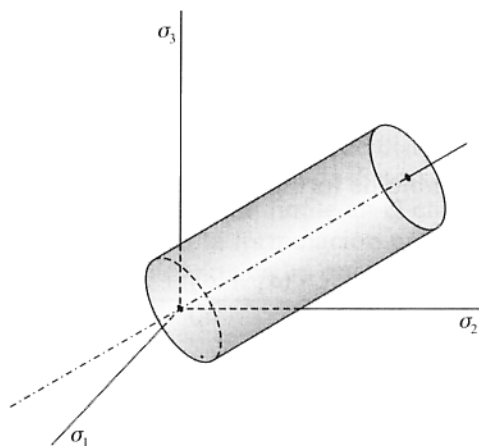


Figura 11.15.

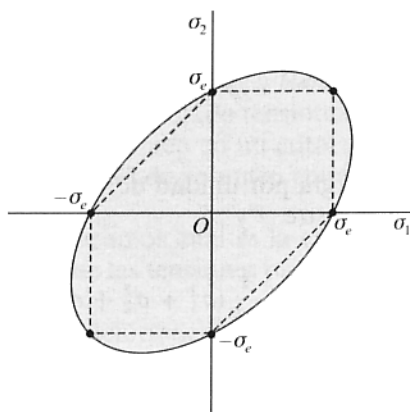


Figura 11.16.

En el caso de estados tensionales planos, la expresión del criterio de *von Mises* se reduce a

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 = 2 \sigma_e^2$$

o bien

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_e^2 \quad (11.7.8)$$

ecuación de una elipse que se representa en la Figura 11.16. En la misma figura se ha dibujado a trazos el hexágono que para los estados tensionales planos se ha obtenido con el criterio de *Tresca*. De su observación se deduce que la superficie de plasticación del criterio de *Tresca*, el prisma que hemos visto de sección recta hexagonal regular, está inscrito en el cilindro de plasticación del criterio de *von Mises*.

En un estado de cortadura pura, tal como el que se presenta en un prisma de revolución sometido a torsión (Fig. 11.17), se verifica

$$\sigma_1 = \sigma; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\sigma$$

La energía correspondiente al cambio de volumen es nula, por ser $\sigma_m = 0$.

La energía de distorsión, según (11.7.4), sería:

$$\mathcal{T}_d = \frac{1 + \mu}{6E} (\tau^2 + \tau^2 + 4 \tau^2) = \frac{1 + \mu}{E} \tau^2 \quad (11.7.9)$$

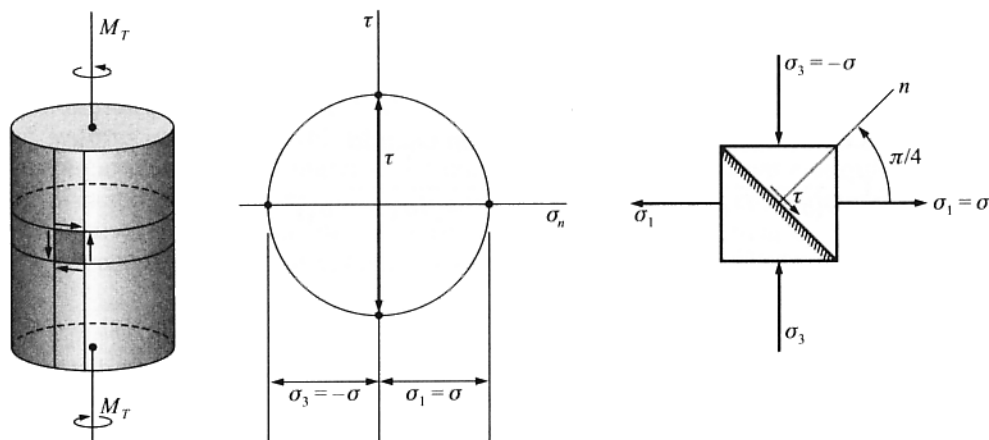


Figura 11.17.

Según la teoría de la energía de distorsión, la fluencia comenzaría para un valor de τ_e , tal que

$$\frac{1 + \mu}{E} \tau_e^2 = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_e^2$$

de donde:

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_e \quad (11.7.10)$$

que es totalmente acorde con los resultados experimentales obtenidos con materiales dúctiles.

11.8. Teoría de la tensión tangencial octaédrica

Algunos autores dan otra interpretación física al criterio de la energía de distorsión considerando las tensiones octaédricas que se definieron en 2.11.

Según (2.11.3), la tensión tangencial octaédrica en función de las tensiones principales tiene por expresión

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (11.8.1)$$

En un ensayo a tracción, cuando se alcanza la tensión de fluencia, la tensión tangencial octaédrica toma el valor:

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{2} \sigma_e^2 = 0,47 \sigma_e \quad (11.8.2)$$

La teoría de la tensión tangencial octaédrica toma como base ésta y se puede enunciar de la forma siguiente: la acción anelástica en un punto de un cuerpo en el que existe un estado tensional cualquiera comienza cuando la tensión tangencial octaédrica τ_0 se hace igual a $0,47 \sigma_e$.

Es decir, las deformaciones plásticas aparecen cuando

$$\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{2} \sigma_e^2$$

o lo que es lo mismo:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_e^2 \quad (11.8.3)$$

Esta teoría, en términos de tensiones, es equivalente a la de la energía de distorsión de *von Mises*, por lo que será indistinto utilizar una u otra.

Numerosas experiencias realizadas con materiales dúctiles han puesto en evidencia que la teoría de *von Mises*, o su equivalente de la tensión tangencial octaédrica, son las que explican de un modo más satisfactorio el comienzo de deformaciones plásticas en estos materiales sometidos a cargas estáticas.

11.9. Teoría de Mohr

Las teorías acerca del comienzo de las deformaciones anelásticas expuestas en los epígrafes precedentes, y de forma especial la de la tensión tangencial máxima, han servido de base para la llamada *teoría de los estados límites de Mohr* que es quizá la más aceptada hoy día. Una versión de esta teoría es la propuesta por A. Caquot en 1935 y que se conoce con el nombre de *teoría de la curva intrínseca*.

Dado un estado tensional arbitrario supongamos que multiplicamos todas sus componentes por un mismo número n , lo que equivale a decir que obtenemos un estado tensional homotético al dado de razón de homotecia n . Si vamos aumentando el valor de n llegará un momento en que el estado de tensión en el cuerpo es límite, es decir, o se produce la rotura o aparecerán deformaciones plásticas. Dibujemos para este estado tensional límite el mayor de los círculos de Mohr (Fig. 11.18).

Procedamos con el mismo material de la operación anterior a variar homotéticamente diferentes estados de tensión en sus puntos hasta alcanzar el estado límite. Para cada uno de ellos dibujamos el mayor círculo de Mohr correspondiente. La teoría de Mohr admite la unicidad de la curva envolvente de los círculos de Mohr para los estados límites y su independencia de los valores que toman las tensiones principales intermedias. La forma de esta envolvente, llamada *curva intrínseca*, es una característica mecánica del material que depende de las propiedades físicas del mismo.

Si se conoce la curva intrínseca de un material, la determinación del coeficiente de seguridad de un estado tensional dado es inmediata: dibujaríamos el círculo homotético al de Mohr correspondiente al estado tensional dado, que sea tangente a la curva intrínseca. La razón de homotecia es precisamente el coeficiente de seguridad, ya que éste se define como el número por el que hay que multiplicar la matriz de tensiones para obtener la correspondiente a un estado tensional que fuera límite.

Ya se comprende la dificultad de obtener con exactitud la curva intrínseca de cada

material, por lo que nos contentaremos con la solución aproximada de considerar como curva intrínseca las tangentes comunes a los círculos límites correspondientes a los ensayos de tracción y compresión simples (Fig. 11.19).

Denominaremos σ_{et} y σ_{ec} las tensiones de fluencia a tracción y a compresión respectivamente, valores que, en general, para los diversos materiales, son distintos.

Supongamos ahora un material sometido a un estado tensional cualquiera, cuyas tensiones principales son σ_1 , σ_2 , σ_3 . La teoría de Mohr se basa en la determinación de la tensión equivalente para su comparación con la tensión de fluencia σ_{et} que es la que en el ensayo a tracción determina el comienzo de las deformaciones plásticas en el material.

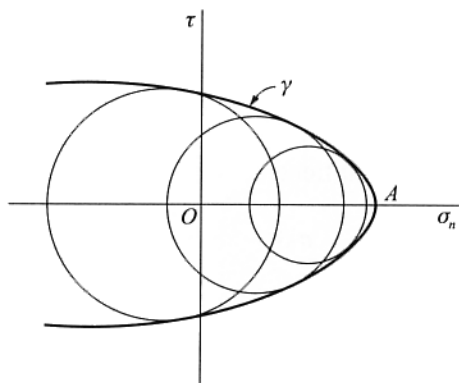


Figura 11.18.

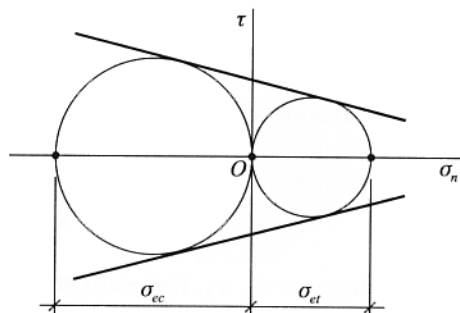


Figura 11.19.

Calcularemos, pues, el valor de σ_{equiv} en el supuesto de que la curva intrínseca esté formada por las tangentes a los círculos de Mohr límites a tracción y a compresión. Para un cierto estado tensional, cuyas tensiones principales extremas son σ_1 y σ_3 , apliquemos una homotecia de razón n para que el estado dado se convierta en un estado límite. Geométricamente, equivale a encontrar un círculo de diámetro $\sigma'_1 - \sigma'_3$ que sea tangente a la curva intrínseca, homotético al de diámetro $\sigma_1 - \sigma_3$, con centro de homotecia el origen O , tal que $\sigma'_1 = n \sigma_1$; $\sigma'_3 = n \sigma_3$.

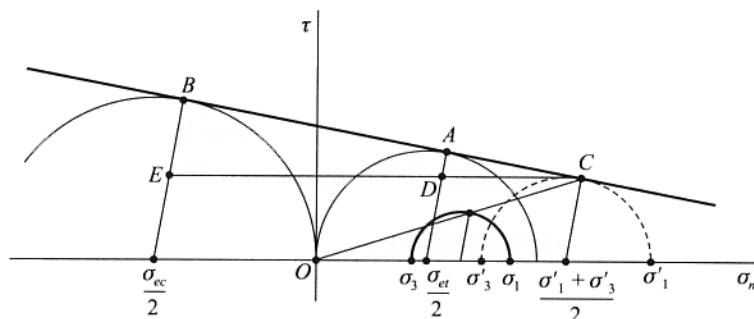


Figura 11.20.

Si C es el punto de tangencia de este círculo con la curva intrínseca y trazamos por C una paralela al eje de abscisas, que corta a los radios de los círculos límites a tracción y compresión, perpendiculares a la curva intrínseca, en los puntos D y E respectivamente, de la Figura 11.20 se deduce:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$$

$$\overline{AD} = \frac{\sigma_{et}}{2} - \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}; \quad \overline{DC} = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} - \frac{\sigma_{et}}{2}$$

$$\overline{BE} = \frac{\sigma_{ec}}{2} - \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}; \quad \overline{EC} = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} - \frac{\sigma_{ec}}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la anterior proporción, se tiene:

$$\frac{\sigma_{et} - (\sigma'_1 - \sigma'_3)}{\sigma'_1 + \sigma'_3 - \sigma_{et}} = \frac{\sigma_{et} - (\sigma'_1 - \sigma'_3)}{\sigma'_1 + \sigma'_3 + \sigma_{ec}} \quad (11.9.1)$$

Eliminemos σ'_1 , σ'_3 , teniendo en cuenta que $\sigma'_1 = n \sigma_1$, $\sigma'_3 = n \sigma_3$ y despejemos el valor del coeficiente de seguridad

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}} \sigma_3} \quad (11.9.2)$$

Para el estado tensional en la probeta a tracción el grado de seguridad es

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{equiv}} \quad (11.9.3)$$

De la condición de ser ambos valores iguales, según se desprende de la definición de tensión equivalente, resulta

$$\sigma_{equiv} = \sigma_1 - k \sigma_3 \quad (11.9.4)$$

siendo k el cociente entre las tensiones que corresponden al límite elástico a tracción y a compresión.

El criterio de *Mohr* se podría enunciar así: la acción anelástica en un punto de un cuerpo en el que existe un estado tensional cualquiera comienza cuando entre las tensiones extremas σ_1 y σ_3 se verifique

$$\sigma_1 - k \sigma_3 = \sigma_e \quad (11.9.5)$$

siendo k el cociente de los valores absolutos de los límites elásticos a tracción y a compresión del material.

EJERCICIOS

- 11.1. En un material, cuyas tensiones de fluencia a tracción y a compresión simples tienen el mismo valor absoluto, se dan los tres estados de tensión indicados en la Figura E11.1, estando expresadas las tensiones en kp/cm^2 . Averiguar cuál de los tres estados tiene menor coeficiente de seguridad aplicando los diversos criterios de plasticidad.

El coeficiente de Poisson es $\mu = 0,25$.

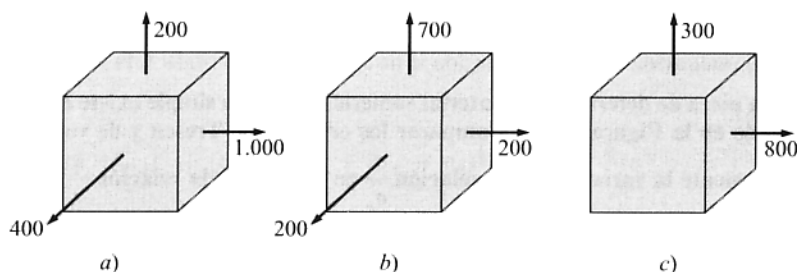


Figura E11.1.

1. Criterio de la tensión principal máxima.

El coeficiente de seguridad menor será el del estado cuya tensión principal máxima sea mayor, es decir, el estado (a).

2. Criterios de Tresca y de Mohr.

Como $k = 1$, al ser iguales en valor absoluto las tensiones de fluencia del material a tracción y a compresión simples, estos dos criterios son coincidentes. Calculemos la tensión equivalente $\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - \sigma_3$ en cada caso:

- a) $\sigma_{\text{equiv}} = 1.000 - 200 = 800 \text{ kp/cm}^2$.
- b) $\sigma_{\text{equiv}} = 700 - (-200) = 900 \text{ kp/cm}^2$.
- c) $\sigma_{\text{equiv}} = 800 - 0 = 800 \text{ kp/cm}^2$.

Por tanto, el estado de menor coeficiente de seguridad, según los criterios indicados, es el (b). Los otros dos estados, desde el punto de vista de la seguridad, son equivalentes.

3. Criterio de la deformación longitudinal unitaria máxima.

La tensión equivalente, $\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$, en cada uno de los tres estados es

- a) $\sigma_{\text{equiv}} = 1.000 - 0,25(400 + 200) = 850$.
- b) $\sigma_{\text{equiv}} = 700 - 0,25(200 - 200) = 700$.
- c) $\sigma_{\text{equiv}} = 800 - 0,25 \cdot 300 = 725$.

Según este criterio, el estado que estaría más cercano a la fluencia sería el (a), es decir, éste sería el estado que tiene menor coeficiente de seguridad.

4. Criterio de von Mises o su equivalente de la tensión tangencial octaédrica.

Si se aplican estos criterios, la tensión equivalente, $\sigma_{\text{equiv}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$, en cada uno de los estados que se consideran, toma los siguientes valores:

$$a) \quad \sigma_{\text{equiv}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(1.000 - 400)^2 + (400 - 200)^2 + (200 - 1.000)^2]} = 10^2 \sqrt{52}.$$

$$b) \quad \sigma_{\text{equiv}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(700 - 200)^2 + (200 + 200)^2 + (-200 - 700)^2]} = 10^2 \sqrt{61}.$$

$$c) \quad \sigma_{\text{equiv}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(800 - 300)^2 + (300 - 0)^2 + (0 - 800)^2]} = 10^2 \sqrt{49}.$$

Se observa que de los tres estados que se consideran el de menor coeficiente de seguridad es el (b).

- 11.2. En una pieza de determinado material sometida a flexión simple existe el estado tensional plano indicado en la Figura E11.2. Comparar los criterios de Tresca y de von Mises, representando gráficamente la variación de la relación $\frac{\tau}{\sigma_e}$ en función de la relación $\frac{\sigma}{\sigma_e}$.

Aplicar los resultados obtenidos para determinar la tensión normal σ en una pieza de acero sometida a flexión simple cuando se inicie la fluencia, sabiendo que $\sigma_e = 4.200 \text{ kp/cm}^2$ y $\tau = 2.100 \text{ kp/cm}^2$.

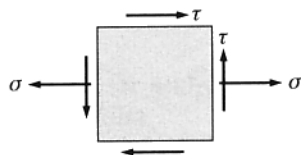


Figura E11.2.

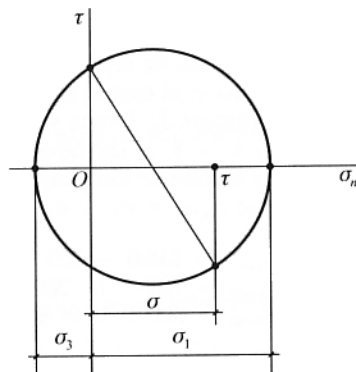


Figura E11.2a.

- De acuerdo con el criterio de Tresca.
- De acuerdo con la teoría de von Mises o su equivalente de la tensión tangencial octaédrica.

Determinemos las tensiones principales del estado tensional dado utilizando el círculo de Mohr (Fig. E11.2a).

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2} \end{cases}$$

a) Según el criterio de Tresca, la plastificación comienza cuando:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2} = \sigma_e$$

es decir:

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau}{\sigma_e}\right)^2 = 1$$

b) Si aplicamos el criterio de von Mises, en el comienzo de las deformaciones plásticas se verifica:

$$\mathcal{F}_d = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma^2 + 3\tau^2) = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_e^2$$

es decir

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau}{\sigma_e}\right)^2 = 1$$

Las dos funciones analíticas que relacionan $\frac{\tau}{\sigma_e}$ y $\frac{\sigma}{\sigma_e}$ corresponden a sendas elipses, cuya representación gráfica se indica en la Figura E11.2b.

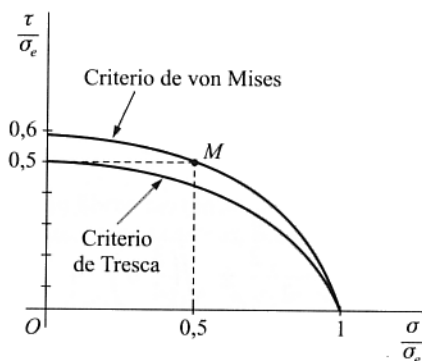


Figura E11.2b.

Si $\sigma_e = 4.200 \text{ kp/cm}^2$ y $\tau = 2.100 \text{ kp/cm}^2$ al iniciarse la fluencia, el cociente $\frac{\tau}{\sigma_e} = 0.5$.

Según se desprende de la figura, aplicando el criterio de Tresca el punto correspondiente está situado en el eje de ordenadas, es decir $\frac{\sigma}{\sigma_e} = 0$, de donde:

$$\sigma = 0$$

Si aplicamos el criterio de von Mises, el punto en la gráfica será ahora el M , que corresponde a $\frac{\sigma}{\sigma_e} = 0,5$, es decir

$$\sigma = 2.100 \text{ kp/cm}^2$$

- 11.3. Obtener el coeficiente de seguridad correspondiente al estado plano de tensión que se indica en la Figura E11.3 utilizando los criterios de Rankine, Tresca y von Mises. Se conoce la tensión de fluencia del material a tracción σ_e .

Mediante la construcción del círculo de Mohr (Fig. E11.3a) se obtienen los valores de las tensiones principales.

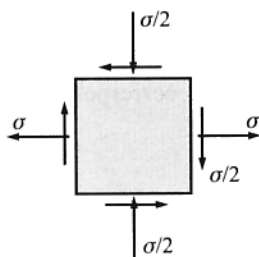


Figura E11.3.

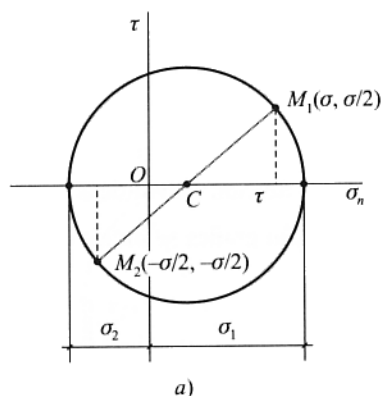


Figura E11.3a.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2} = \frac{\sigma}{4}(1 \pm \sqrt{3})$$

Por tanto, las tensiones principales en el punto considerado son:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{4}(1 + \sqrt{3}); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{4}(1 - \sqrt{3})$$

y el coeficiente de seguridad pedido será:

a) Criterio de Rankine:

$$n = \frac{\sigma_e}{\sigma_1} = \frac{\sigma_e}{1,15 \sigma} \Rightarrow \boxed{n = \frac{\sigma_e}{1,15 \sigma}}$$

b) Criterio de Tresca:

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma \sqrt{13}}{2} = 1,8 \sigma \Rightarrow \boxed{n = \frac{\sigma_e}{1,8 \sigma}}$$

c) Criterio de von Mises:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{equiv}} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} = \\ &= \frac{\sigma \sqrt{10}}{8} = 0,4 \sigma \Rightarrow \boxed{n = \frac{\sigma_e}{0,4 \sigma}} \end{aligned}$$

11.4. Un bloque de determinado material, cuyas caras laterales están libres, está sometido a una compresión uniforme σ (Fig. E11.4a). Este mismo bloque se introduce en un hueco de paredes rígidas de exactamente sus mismas dimensiones y se aplica la compresión uniforme σ , como se indica en la Figura E11.4b. Estudiar el efecto que produce la limitación de las deformaciones laterales en el caso (b) de acuerdo con la teoría de Mohr.

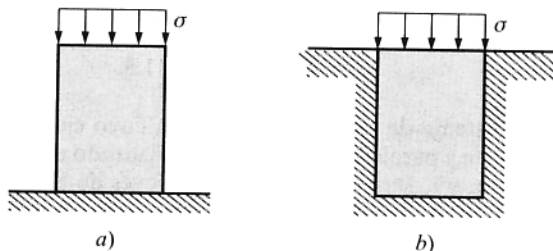


Figura E11.4.

a) Si las caras laterales están libres, las tensiones principales son: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$, por lo que la tensión equivalente en este caso es, según la teoría de Mohr

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - k \sigma_3 = k \sigma$$

siendo k el cociente entre los límites elásticos a tracción y a compresión del material.

b) De la condición de ser nulas las deformaciones transversales se obtiene el valor de la tensión normal a las caras laterales del bloque en el caso de estar introducido éste en el hueco.

$$\varepsilon_{\text{lat}} = \frac{1}{E} [\sigma' - \mu (\sigma + \sigma')] = 0 \Rightarrow \sigma' = -\frac{\mu}{1 - \mu} \sigma$$

Las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{\mu}{1-\mu} \sigma ; \sigma_3 = -\sigma$$

de las que se deduce la tensión equivalente correspondiente

$$\sigma_{\text{equiv}} = -\frac{\mu}{1-\mu} \sigma + k \sigma = \left(k - \frac{\mu}{1-\mu} \right) \sigma$$

De las expresiones obtenidas para σ_{equiv} en cada caso, se observa que la limitación de las deformaciones laterales hace disminuir el valor de la tensión equivalente.

- 11.5. Un prisma de fundición de tensiones $\sigma_{et} = 100 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{ec} = 200 \text{ N/mm}^2$; coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$, de base cuadrada cuya longitud del lado es $a = 50 \text{ mm}$, está introducido en un hueco de las mismas dimensiones, cuyas paredes se considerarán perfectamente rígidas. Se somete al prisma a un esfuerzo de compresión de $F = 25 \cdot 10^4 \text{ N}$, que se reparte uniformemente sobre su base superior. Se pide calcular el coeficiente de seguridad.

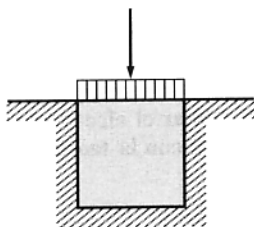


Figura E11.5.

Tomando un sistema de referencia cartesiana cuyo eje z sea coincidente con la línea de acción de F , y ejes x e y paralelos a los lados del cuadrado de su sección recta, las deformaciones longitudinales ε_x y ε_y serán, en virtud de las leyes de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{nx} - \mu (\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{ny} - \mu (\sigma_{nx} + \sigma_{nz})] = 0$$

que son nulas, por ser las paredes del hueco perfectamente rígidas. Como por razón de simetría $\sigma_{nx} = \sigma_{ny}$, de estas ecuaciones se deduce

$$\sigma_{nx} \cdot (1 - \mu) = \mu \sigma_{nz}$$

Ahora bien, como

$$\sigma_{nz} = \frac{F}{a^2} = -\frac{25 \cdot 10^4}{25 \cdot 10^2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -100 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = \frac{\mu \sigma_{nz}}{1 - \mu} = -\frac{0,3 \cdot 100}{0,7} = -42,86 \text{ N/mm}^2$$

las tensiones principales, ya ordenadas, serán:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -42,86 \text{ N/mm}^2; \sigma_3 = -100 \text{ N/mm}^2$$

La tensión equivalente, según la teoría de Mohr, es:

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - k \sigma_3 = -42,86 + \frac{1}{2} 100 = 7,14 \text{ N/mm}^2$$

y, por consiguiente, el valor del coeficiente de seguridad será:

$$n = \frac{\sigma_e}{\sigma_{\text{equiv}}} = \frac{100}{7,14} = 14$$

- 11.6. En una pieza de porcelana, cuyas tensiones de fluencia a tracción y a compresión simples son respectivamente: $\sigma_{et} = 30 \text{ kp/cm}^2$ y $\sigma_{ec} = 120 \text{ kp/cm}^2$, el estado tensional más desfavorable es el indicado en la Figura E11.6.

Calcular el coeficiente de seguridad, aplicando

- La teoría de Mohr.
- El criterio de Tresca.
- El criterio de Rankine.
- El criterio de von Mises.

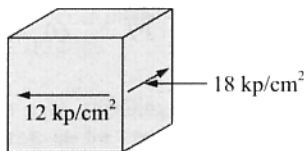


Figura E11.6.

Dibujamos los círculos de Mohr correspondientes a los estados límites de tracción y compresión simples. Tomaremos como curva intrínseca las tangentes a ambos (Fig. E11.6a).

Construimos el círculo de Mohr del estado dado: el centro C es el punto medio de $MA:M$ ($-18, -12$); A ($0, 12$) y radio CA .

Observamos que el ángulo 2α que forma el radio \overline{CA} con el eje de abscisas

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

es el mismo que forma con el eje de abscisas el radio \overline{PF} que une el centro del círculo de compresión con el punto F de tangencia de este círculo con la curva intrínseca.

En efecto, tracemos por el centro T del círculo límite a tracción una paralela a la curva intrínseca y sea N el punto de intersección de esta recta con PF (Fig. E11.6a).

b) Aplicando el criterio de Tresca

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{30}{6 + 24} = \boxed{1}$$

c) Aplicando el criterio de la tensión principal máxima o de Rankine

$$n = \frac{\sigma_{et}}{OB} = \frac{30}{6} = \boxed{5}$$

d) Aplicando el criterio de la energía de distorsión de von Mises

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}} = \frac{30}{\sqrt{\frac{1}{2} (6^2 + 24^2 + 30^2)}} = \frac{30}{27,5} = \boxed{1,09}$$

Los resultados obtenidos nos indican que según el criterio de von Mises el material de la pieza de porcelana, en el punto que se considera, estaría en régimen elástico, pero cercano al régimen plástico. El criterio de Tresca nos indica que el material se encontraría en el límite del comportamiento elástico y estarían comenzando deformaciones plásticas. Por el contrario, la aplicación de los criterios de Mohr y de Rankine nos dice que el material está en régimen elástico y lejano de que comiencen las deformaciones plásticas; doblemente lejano según el segundo criterio respecto del primero.

No debe extrañar esta disparidad en los coeficientes de seguridad obtenidos, ya que la porcelana es un material frágil al que no son aplicables los criterios de Tresca y de von Mises, que explican bien, como sabemos, el comportamiento de los materiales dúctiles pero no el comportamiento de los materiales frágiles.

11.7. Sometiendo cilindros de hormigón a la combinación de una compresión axial y compresión hidráulica sobre la superficie lateral, se ha encontrado experimentalmente que la tensión de compresión axial σ'_p que determina el comienzo de deformaciones plásticas cuando la presión hidráulica lateral es p , viene dada por la ley

$$\sigma'_p = \sigma_{ec} + 4,1 p$$

siendo σ_{ec} la tensión de fluencia en el material a compresión simple. Determinar la ecuación de la curva intrínseca.

Obtendremos la ecuación de la curva intrínseca hallando la envolvente de los círculos de Mohr límites.

La ecuación de uno de estos círculos para la presión hidrostática lateral p es, según se deduce fácilmente del círculo de Mohr de la Figura E11.7.

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma'_p + p}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma'_p - p}{2} \right)^2$$

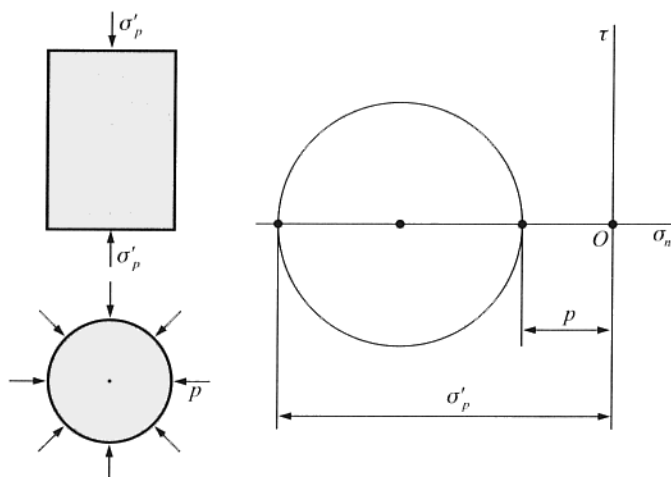


Figura E11.7.

Sustituyendo en esta ecuación la ley dada de σ'_p , se obtiene:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_{ec}}{2} - 2,55 p\right)^2 + \tau^2 - \left(\frac{\sigma_{ec}}{2} + 1,55 p\right)^2 = 0 \quad (1)$$

que representa una familia de circunferencias —una para cada valor de p — cuya envolvente podemos calcular eliminando el parámetro p entre la ecuación $f(\sigma_n, \tau, p) = 0$ y su derivada con relación al parámetro $\partial f / \partial p = 0$

$$-2 \cdot 2,55 \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{ec}}{2} - 2,55 p\right) - 2 \cdot 1,55 \left(\frac{\sigma_{ec}}{2} + 1,55 p\right) = 0 \quad (2)$$

de donde:

$$\sigma_n - \frac{\sigma_{ec}}{2} - 2,55 p = \frac{31}{51} \left(\frac{\sigma_{ec}}{2} + 1,55 p\right)$$

Despejando de esta ecuación el valor de p

$$p = 0,6220 \sigma_n - 0,1219 \sigma_{ec}$$

y sustituyendo en la ecuación (1), se tiene:

$$\left(\frac{\sigma_{ec}}{2} + 1,55 p\right)^2 \left(\frac{31^2}{51^2} - 1\right) + \tau^2 = 0$$

$$\tau = \pm \sqrt{\frac{51^2 - 31^2}{51^2}} [0,5 \sigma_{ec} + 1,55 (0,6220 \sigma_n - 0,1219 \sigma_{ec})]$$

Operando, se obtiene finalmente

$$\tau = \pm (0,2470 \sigma_{ec} + 0,7655 \sigma_n)$$

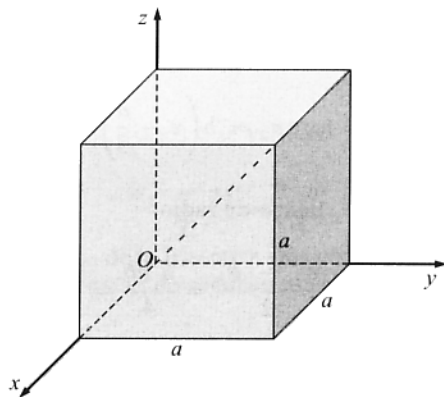
ecuación de dos rectas simétricas respecto del eje de abscisas.

- 11.8. En los puntos de un cubo elástico de arista $a = 1$ m, la matriz de tensiones respecto de un sistema de referencia cartesiano ortogonal $Oxyz$, viene definida por:

$$[T] = \begin{bmatrix} bx & 0 & 0 \\ 0 & b\left(y - \frac{a}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & b\left(z - \frac{3a}{2}\right) \end{bmatrix}$$

siendo b una constante, $b = 10^6$ kp/m³. El cubo elástico es de un material con tensiones de fluencia a tracción y compresión respectivamente.

$$\sigma_{et} = ba ; \sigma_{ec} = -2 ba.$$



Se pide:

- 1.º Comprobar si el estado de tensiones dado es físicamente posible.
- 2.º Aplicando el criterio de von Mises, expresar si el punto de coordenadas $(0, 0, 0)$ se comporta elásticamente.
- 3.º Particularizar la matriz $[T]$ para los puntos del cubo pertenecientes a la trisectriz del primer cuadrante. Dibujar la envolvente de los círculos de Mohr C_2 , correspondientes a dichos puntos.
- 4.º Aplicando la teoría simplificada de Mohr, determinar el punto de la trisectriz que presenta un estado tensional límite. Indicar qué zona de dicha trisectriz se encuentra en régimen elástico y qué zona en anelástico.

5.º Igual que el apartado anterior pero aplicando el criterio de Tresca-Guest.

1.º A la vista de la forma que tiene la matriz de tensiones, cuyas componentes son funciones lineales, se deduce que la matriz de deformación tiene componentes lineales también. Como las ecuaciones de compatibilidad son ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden entre las deformaciones, se verificarán idénticamente. Por consiguiente, queda comprobado que el estado tensional dado es físicamente posible.

2.º Las tensiones principales en el origen de coordenadas son:

$$\sigma_1 = 0 \quad ; \quad \sigma_2 = -\frac{ab}{3} \quad ; \quad \sigma_3 = -\frac{3ab}{2}$$

Según el criterio de von Mises, en ese punto el comportamiento es elástico si se verifica

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 < 2 \sigma_e^2 = 2a^2 b^2$$

y el comportamiento es anelástico en caso contrario.

Como sustituyendo valores se tiene:

$$\frac{a^2 b^2}{9} + \frac{49 a^2 b^2}{36} + \frac{9 a^2 b^2}{4} = \frac{67}{18} a^2 b^2 > 2 a^2 b^2$$

el comportamiento del origen de coordenadas es anelástico.

3.º En los puntos de la trisectriz $x = y = z$, las tensiones principales, según se desprende de la matriz de tensiones, son:

$$\sigma_1 = bx \quad ; \quad \sigma_2 = b \left(x - \frac{a}{3} \right) \quad ; \quad \sigma_3 = b \left(x - \frac{3a}{2} \right)$$

Los círculos de Mohr C_2 tienen de radio

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3 ab}{4} = 75 \text{ kp/cm}^2$$

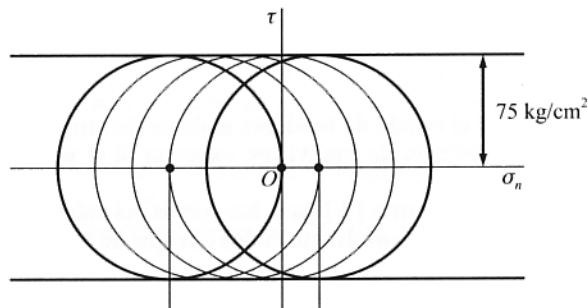


Figura E11.8a.

que es constante e independiente del punto sobre la trisectriz. Las envolventes de estos círculos son las rectas

$$\tau = \pm \frac{3}{4} \frac{ab}{4} = \pm 75 \text{ kp/cm}^2$$

que se dibujan en la Figura E11.8a.

4.º La tensión equivalente, según la teoría simplificada de Mohr, es:

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - k \sigma_3 = bx - \frac{1}{2} b \left(x - \frac{3a}{2} \right) = \frac{bx}{2} + \frac{3}{4} \frac{ab}{4}$$

De esta expresión se deduce que en los puntos en los que el comportamiento es elástico se verificará

$$\frac{bx}{2} + \frac{3}{4} \frac{ab}{4} < \sigma_{et} = ab \Rightarrow \frac{bx}{2} < \frac{ab}{4} \Rightarrow x < \frac{a}{2}$$

Por tanto, los puntos de la diagonal del cubo comprendidos entre el origen de coordenadas y el centro del mismo $\left(x < \frac{a}{2} \right)$ se encuentran en régimen elástico, mientras que para los restantes $\left(x > \frac{a}{2} \right)$ el comportamiento es anelástico.

5.º La fluencia, según el criterio de Tresca, comienza cuando

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{et}}{2} = \frac{ab}{2}$$

Como para los puntos de la trisectriz se verifica:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3}{4} \frac{ab}{4} > \frac{ab}{2}$$

se deduce que todos los puntos de la trisectriz, que coinciden con los de la diagonal del cubo elástico considerado, se encuentran en régimen anelástico.

- 11.9. La placa de la Figura E11.9 se encuentra sometida a un estado plano de tensión, siendo las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en el contorno las indicadas. Las tensiones se expresan en kp/cm^2 cuando las coordenadas se expresan en dm.

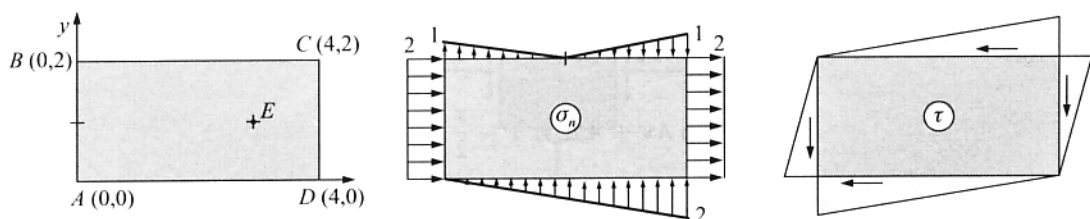


Figura E11.9.

Se pide:

- 1.º Expresiones de las tensiones en un punto cualquiera de la placa.
- 2.º Determinar el estado tensional en el punto $E(3,1)$ para un elemento cuyos ejes forman 45º con los ejes x e y .
- 3.º Valor de la tensión de fluencia del material para que en el punto E , y en las condiciones citadas, se inicien las deformaciones plásticas, aplicando el criterio de von Mises.

1.º Ensayaremos una función de Airy polinómica de 3.º grado.

$$\phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2$$

que por ser de 3.º grado verifica la condición de biarmonicidad.

La solución de tensiones que de ella se deriva es:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 Cx + 6 Dy + 2 G \\ \sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6 Ax + 2 By + 2 E \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2 Bx - 2 Cy - F \end{cases}$$

Las constantes las determinaremos imponiendo las condiciones de contorno.

- Para $x = 0$; $\sigma_{nx} = -2$

$$6 Dy + 2 G = -2 \Rightarrow D = 0 \quad G = -1$$

- Para $x = 4$; $\sigma_{nx} = 2$

$$8 C + 2 G = 2 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

- Para $y = 0$; $\sigma_{ny} = -\frac{x}{2}$

$$6 Ax + 2 E = -\frac{x}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{12}; E = 0$$

- Para $y = 2$; $\sigma_{ny} = 1 - \frac{x}{2}$

$$6 Ax + 4 B = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

- Para $x = 4$; $\tau_{xy} = -y$

$$-8 B - 2 Cy - F = -y \Rightarrow -8 B - F = 0 \Rightarrow F = -2$$

- Para $x = 0$; $\tau_{xy} = 2 - y$

$$-2 Cy - F = 2 - y$$

- Para $y = 0$; $\tau_{xy} = 2 - \frac{x}{2}$

$$-\frac{x}{2} + 2 = 2 - \frac{x}{2}$$

- Para $y = 2$; $\tau_{xy} = -\frac{x}{2}$

$$-2 Bx - 4 C - F = -\frac{x}{2}$$

La función de Airy es:

$$\phi = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - 2xy - y^2$$

de donde se deduce la solución de tensiones, válida para cualquier punto de la placa.

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = x - 2 \\ \sigma_{ny} = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ \tau_{xy} = -\frac{x}{2} - y + 2 \end{cases}$$

2.º En el punto $E(3,1)$ las tensiones, de acuerdo con las ecuaciones obtenidas anteriormente, son:

$$\sigma_{nx} = 1 \text{ kp/mm}^2; \sigma_{ny} = -1 \text{ kp/mm}^2; \tau_{xy} = -\frac{1}{2} \text{ kp/mm}^2$$

y se representan en a Figura E11.9a.

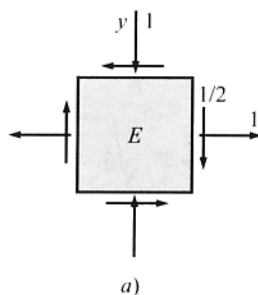


Figura E11.9a.

Con estos valores podemos construir el círculo de Mohr (Fig. E11.9b) y deducir las tensiones para el entorno de E cuyos ejes formen 45° con los ejes x e y (Fig. E11.9c).

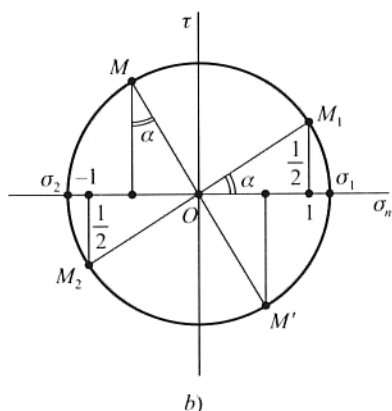


Figura E11.9b.

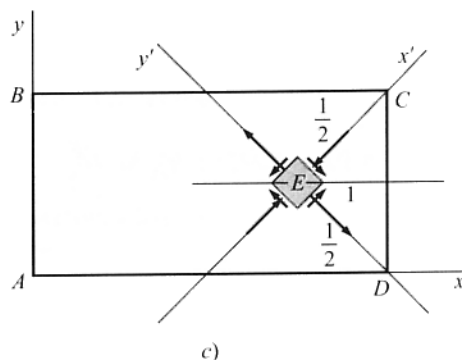


Figura E11.9c.

Los puntos representativos de las caras del entorno del punto E , cuyas normales coinciden con los ejes x' e y' son M y M' , respectivamente. El punto M es tal que $\widehat{M'OM} = 90^\circ$ y el punto M' es el diametralmente opuesto a M en el círculo de Mohr (Fig. E11.9b). Estos puntos tienen de coordenadas:

$$M\left(-\frac{1}{2}, 1\right); \quad M'\left(\frac{1}{2}, -1\right),$$

por lo que las tensiones pedidas en el entorno de E , girado 45° en sentido antihorario, serán

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= -\frac{1}{2} \text{ kp/mm}^2 \\ \sigma_{ny} &= \frac{1}{2} \text{ kp/mm}^2 \\ \tau_{x,y} &= -1 \text{ kp/mm}^2 \end{aligned}$$

3.º Según el criterio de von Mises, la fluencia se inicia cuando

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_e^2$$

y como

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

queda:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 &= \sigma_e^2 \\ \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} &= \sigma_e^2 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

de donde

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{15}}{2} = 1,9 \text{ kp/mm}^2$$

- 11.10. Una tubería de pared gruesa de radio interior $R_1 = 30 \text{ cm}$ y radio exterior $R_2 = 40 \text{ cm}$, está hecha de una aleación de aluminio, cuya tensión de fluencia es $\sigma_e = 2.100 \text{ kp/cm}^2$.

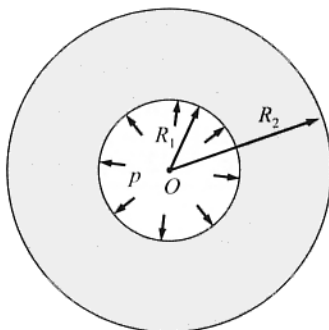


Figura E11.10.

Si la presión exterior es nula, calcular el valor de la presión interior p que determinaría el comienzo de deformaciones plásticas de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión o su equivalente de la tensión tangencial octaédrica.

Se considerará en la tubería un estado de deformación plana y se supondrá el material incompresible cuando inicia la fluencia.

En el Epígrafe 9.5 en el que se analizó el estado elástico de una tubería de pared gruesa sometida a presión, se obtuvo para el caso de deformación plana la siguiente solución de tensiones:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_\theta = -\frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 4\mu C \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

siendo A y C constantes de integración que determinaremos en nuestro caso imponiendo las condiciones de contorno:

$$(\sigma_\rho)_{\rho=R_1} = -p; \quad (\sigma_\rho)_{\rho=R_2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{R_1^2} + 2C &= -p \\ \frac{A}{R_2^2} + 2C &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -\frac{p R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}; \quad 2C = \frac{p R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

La solución de tensiones en los puntos de la tubería que se considera, será:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{p R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{\rho^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{p R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{\rho^2} \right) \\ \sigma_z &= 2 \mu p \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\theta z} = \tau_{\rho z} = 0 \end{aligned} \right.$$

Según vimos, la mayor tensión en régimen elástico la presenta σ_θ para $\rho = R_1$. Podemos afirmar que serán los puntos del contorno interior los primeros que se plastifiquen, pero como el estado tensional es triple la condición $\sigma_\theta = \sigma_e$ no es suficiente para que aparezcan las primeras deformaciones plásticas.

En función de p , las tensiones principales en los puntos del contorno interior serán:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_\rho &= -p \\ \sigma_\theta &= p \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ \sigma_z &= 2p \mu \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned} \right.$$

Aplicando el criterio de von Mises, la presión p que provoca el comienzo de deformaciones plásticas verificará:

$$\frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2] = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_e^2$$

Sustituyendo valores, teniendo en cuenta que el material es incompresible cuando comienza a fluir, lo que equivale a decir que $\mu = 1/2$ según se deduce de la expresión de la deformación cúbica unitaria

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z) = 0 \Rightarrow \mu = 1/2$$

se tiene:

$$p^2 \left(1 + \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)^2 + p^2 \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)^2 + p^2 \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + 1 \right)^2 = 2 \sigma_e^2$$

Simplificando y despejando p , se obtiene

$$p = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)$$

Para los valores dados, la presión interior que determina que aparezcan en el contorno interior de la tubería de deformaciones plásticas, es

$$p = \frac{2.100}{1,732} \left(1 - \frac{9}{16} \right) = 530 \text{ kp/cm}^2$$

- 11.11. La matriz de tensiones en los puntos del prisma elástico representado en la Figura E11.11, respecto del sistema de referencia $Oxyz$ indicado, es:

$$[T] = K \begin{pmatrix} 0 & 2x & 0 \\ 2x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{pmatrix}$$

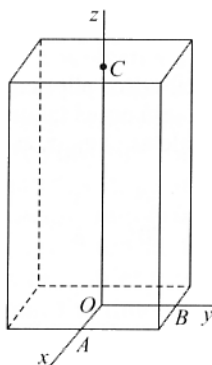


Figura E11.11.

siendo K un factor positivo de carga y viniendo dadas las tensiones en MPa cuando las coordenadas se expresan en m.

Sabiendo que el límite elástico del material es $\sigma_e = 140$ MPa, se pide:

- 1.º Calcular el coeficiente de seguridad en un punto $P(x, y, z)$ del sólido, en función de K , según el criterio de Tresca.
- 2.º Hallar el menor valor de K para que se produzcan deformaciones plásticas señalando en qué puntos se presentan éstas, según el mismo criterio de Tresca.

$$\text{Datos: } \overline{OA} = 20 \text{ cm} ; \quad \overline{OB} = 40 \text{ cm} ; \quad \overline{OC} = 200 \text{ cm}$$

1.º De la ecuación característica de la matriz de tensiones

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 2x & 0 \\ 2x & -2y-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -y-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(y + \sigma)(-\sigma^2 - 2y\sigma + 4x^2) = 0$$

se obtienen las tensiones principales

$$\sigma_1 = (-y + \sqrt{y^2 + 4x^2})K ; \quad \sigma_2 = -yK ; \quad \sigma_3 = (-y - \sqrt{y^2 + 4x^2})K$$

La tensión equivalente es, según el criterio de Tresca $\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2K\sqrt{y^2 + 4x^2}$

Por tanto, el coeficiente de seguridad será

$$n = \frac{\sigma_e}{2K\sqrt{y^2 + 4x^2}}$$

2.º Las deformaciones plásticas, según el criterio de Tresca, comienzan cuando $2K\sqrt{y^2 + 4x^2} = \sigma_e$, o lo que es lo mismo:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sigma_e}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sigma_e}{2}\right)^2} = \frac{1}{K}$$

que representa una familia de cilindros elípticos de eje z y parámetro K .

El menor valor de K pedido será aquel tal que el cilindro elíptico correspondiente contenga a las aristas del prisma, paralelas al eje z , es decir, el valor de K que verifique

$$\frac{x^2}{35^2} + \frac{y^2}{70^2} = \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{0,2^2}{35^2} + \frac{0,4^2}{70^2} = \frac{1}{K}$$

Operando, se obtiene

$$K = 15.312,5 \frac{\text{MPa}^2}{\text{m}^2}$$

Métodos experimentales en Elasticidad

12.1. Introducción

En los capítulos anteriores, y especialmente en el Capítulo 5 que hemos dedicado al planteamiento general del problema elástico, hemos podido apreciar la dificultad que presenta la resolución analítica para recintos de forma arbitraria sometidos a condiciones de contorno cualesquiera. De ahí la importancia que adquieren en Elasticidad los métodos experimentales, como alternativa entre los métodos que existen para encontrar la solución del problema elástico en casos complejos.

Tradicionalmente, han sido los métodos experimentales los que nos han permitido conocer la distribución de tensiones en los sólidos elásticos sometidos a sollicitaciones exteriores arbitrarias. En los últimos años se han desarrollado métodos numéricos para resolver estos problemas, pero lo que entonces parecía como un método que iba a desplazar totalmente a los métodos experimentales, aparece hoy día como un método que tiene importantes limitaciones y que obliga a los especialistas de la materia a la búsqueda de métodos híbridos que hagan que ambos, experimentales y numéricos, se complementen mutuamente.

En lo que sigue, haremos una breve exposición de los métodos extensométricos y los métodos fotoelásticos bidimensionales, sin pretender ir más allá de lo que se pudiera considerar como una breve introducción al tema. Finalmente, nos referiremos a otros métodos especiales, de los que haremos una muy ligera descripción.

12.2. Finalidad del método extensométrico

El objetivo que se persigue con los métodos experimentales es el conocimiento de la distribución de tensiones en un sólido elástico. Con los métodos extensométricos se llega al conocimiento del estado tensional mediante la obtención experimental de los desplazamientos, dada la relación lineal existente entre tensiones y deformaciones.

Supongamos, por ejemplo, el sólido representado en la Figura 12.1a y consideremos un punto M , en el que deseamos conocer el valor de la deformación longitudinal unitaria en la

dirección del eje x . Si procedemos experimentalmente marcaríamos los puntos A y B que determinan un segmento en la dirección del eje x y tales que M es el punto medio. Al cargar el sólido y deformarse, la distancia $AB = l_0$ ha experimentado una variación de longitud Δl_0 por lo que la deformación longitudinal unitaria en M , en la dirección del eje x será:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_0}{l_0} \quad (12.2.1)$$

Pero el valor de ε_x obtenido operando de la forma indicada no es exacto, salvo en el caso que sea una función lineal de la abscisa x . Se habrá cometido un error, que depende del gradiente de deformaciones y de la longitud l_0 del segmento.

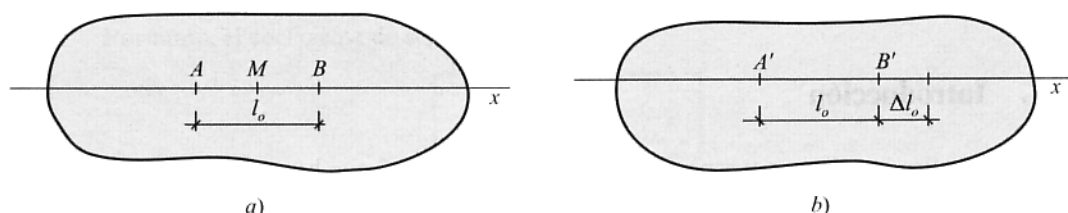


Figura 12.1.

Vemos, pues, una primera particularidad que se presenta en los métodos extensométricos: la dificultad de calcular con exactitud la matriz de deformación en un determinado punto del sólido elástico.

Históricamente, los métodos extensométricos han ido evolucionando. Los primeros aparatos que se emplearon para la medida de deformaciones eran instrumentos mecánicos que se aplicaban directamente sobre la zona a estudiar, como es el caso del extensómetro de *Huggenberger*, cuyo esquema se indica en la Figura 12.2.

Es fácil obtener la relación entre el desplazamiento $\Delta l'$ de la aguja y el alargamiento de la pieza en la que se está midiendo la deformación.

Como tenemos

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta l'}{\Delta s} &= \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{\Delta s}{\Delta l} &= \frac{b_2}{b_1} \end{aligned} \right\} \Delta l' = \frac{a_2 \cdot b_2}{a_1 \cdot b_1} \Delta l \quad (12.2.2)$$

el factor de amplificación de la deformación es $\frac{a_2 \cdot b_2}{a_1 \cdot b_1}$.

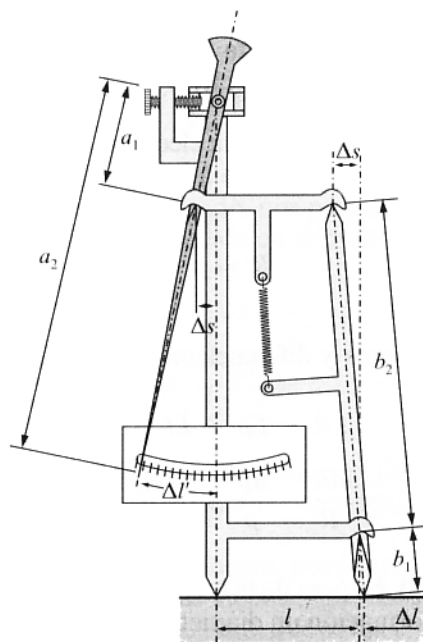


Figura 12.2.

Posteriormente se han desarrollado sistemas de extensometría basados en principios ópticos, eléctricos, o, incluso, acústicos. El uso más generalizado hoy día son los extensómetros de resistencia eléctrica que han relegado la utilización de los restantes a aplicaciones especiales.

12.3. Galgas extensométricas eléctricas

Fueron introducidas en 1939 por *Runge y Simmons*. Una galga extensométrica de resistencia eléctrica está constituida por un hilo metálico muy fino y dispuesto formando una rejilla continua, como se indica en la Figura 12.3, es decir, que la mayor parte de su longitud está distribuida paralelamente a una dirección fija, y está adherido a una base muy delgada no conductora. Los extremos del hilo, más gruesos, sirven para soldar los terminales a los cables de conexión de los instrumentos de medida.



Figura 12.3.

Se puede admitir, en primera aproximación, que el hilo experimenta las mismas deformaciones que la superficie sobre la cual está encolada.

Lord Kelvin observó que la resistencia eléctrica de un alambre aumenta cuando se alarga y disminuye en caso contrario.

Como la ecuación que nos da la resistencia eléctrica R de un alambre metálico de resistividad ρ , longitud l y área de la sección A , es

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (12.3.1)$$

si tomamos logaritmos neperianos y diferenciamos, tenemos:

$$LR = L\rho + Ll - LA \quad (12.3.2)$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A} \quad (12.3.3)$$

Ahora bien, la variación dA del área de la sección recta es debida a la contracción lateral. Si el hilo tiene antes de la deformación un diámetro d_0 , el diámetro d después de la deformación tendrá por expresión:

$$d = d_0 \left(1 - \mu \frac{dl}{l} \right) \quad (12.3.4)$$

y el tercer sumando del segundo miembro de (12.3.3) se podrá poner en la forma

$$\frac{dA}{A} = \frac{\pi d_0^2 \left(1 - \mu \frac{dl}{l} \right)^2 - \pi d_0^2}{\pi d_0^2} \simeq -2\mu \frac{dl}{l} \quad (12.3.5)$$

habiendo despreciado el término de segundo grado.

Por otra parte, la *ley de Bridgman* establece que la variación relativa de la resistividad es proporcional a la variación relativa del volumen del conductor

$$\frac{d\rho}{\rho} = C \frac{dV}{V} \quad (12.3.6)$$

siendo C la llamada *constante de Bridgman*.

Como

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA \cdot l}{A \cdot l} + \frac{A \cdot dl}{A \cdot l} = -2\mu \frac{dl}{l} + \frac{dl}{l} = (1 - 2\mu) \frac{dl}{l} \quad (12.3.7)$$

la expresión (12.3.3) queda

$$\frac{dR}{R} = [C(1 - 2\mu) + (1 - 2\mu)] \frac{dl}{l} = K \frac{dl}{l} \quad (12.3.8)$$

Esta ecuación nos indica que la medición de la variación de la resistencia eléctrica de la galga, con un equipo adecuadamente calibrado, nos permite obtener una lectura directa de la deformación longitudinal unitaria producida en el punto de la superficie en el que se ha adherido la galga.

La constante K

$$K = \frac{dR/R}{\varepsilon} \quad (12.3.9)$$

que depende, como vemos, del cambio de dimensiones del conductor y de la variación de la resistividad se denomina *factor de sensibilidad* de la galga, y es un valor que siempre lo proporciona el fabricante.

El factor de sensibilidad de la galga es función, por tanto, de la aleación empleada para fabricar el conductor y de sus características metalúrgicas. Los valores de K para la mayoría de las galgas varían entre 2 y 4, circunstancia ésta que se fija con objeto de facilitar la lectura directa de la deformación. Se utilizan aleaciones que verifiquen esta acotación, ya que los valores de K para los metales puros caen fuera de este intervalo.

Los instrumentos para medir la variación de resistencia eléctrica de la galga extensométrica están basados en los fundamentos del puente de *Wheatstone*.

Sean R_1, R_2, R_3, R_4 , las resistencias situadas en las distintas ramas del puente (Fig. 12.4); V_{MN} , la diferencia de potencial entre los puntos M y N del circuito; e I_1, I_2 , las intensidades por las ramas superior e inferior, respectivamente.

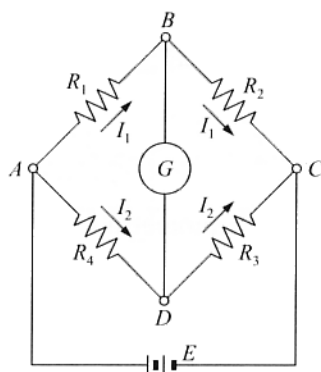


Figura 12.4.

Entre las intensidades existirá la relación que se desprende al igualar la diferencia de potencial entre los puntos A y C , al considerar las ramas superior o inferior.

$$V_{AC} = I_1(R_1 + R_2) = I_2(R_3 + R_4) \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2} \quad (12.3.10)$$

Cuando la lectura del galvanómetro es nula indica que los puntos B y D están al mismo potencial y, por tanto:

$$\begin{aligned} V_{AB} &= I_1 R_1 \left\{ \frac{V_{AB}}{V_{AD}} = \frac{I_1 R_1}{I_2 R_4} = \frac{(R_3 + R_4) R_1}{(R_1 + R_2) R_4} = 1 \right. \\ V_{AD} &= I_2 R_4 \end{aligned} \quad (12.3.11)$$

se verifica, cuando tal circunstancia ocurre, que

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4 \quad (12.3.12)$$

Esta relación indica que un cambio experimentado por las resistencias de un lado del puente puede ser equilibrado ajustando adecuadamente los valores de la resistencia del otro lado del puente.

En el mismo circuito indicado en la Figura 12.4 supongamos el caso ideal en que todas las resistencias, incluso las correspondientes a la galga activa que supondremos es R_1 , son iguales, de valor R .

Si se carga el cuerpo en el cual está adherida la galga, el puente se desequilibra como consecuencia de la variación ΔR de la resistencia de la misma cantidad por la deformación. Veamos cuál sería la lectura en el galvanómetro que, como es sabido, se supone de resistencia infinita.

Supondremos también que la pila tiene resistencia interna nula, por lo que el voltaje de excitación entre los puntos A y C será igual a la fuerza electromotriz E de la pila.

Se verificará

$$V_{AB} = I_1 \cdot (R + \Delta R) = \frac{E}{2R + \Delta R} (R + \Delta R) = \frac{ER + E\Delta R}{2R + \Delta R} \quad (12.3.13)$$

$$V_{AD} = I_2 \cdot R = \frac{E}{2R} \cdot R = \frac{E}{2} \quad (12.3.14)$$

por lo que la lectura V dada por el galvanómetro será:

$$V = V_{DB} = V_{AB} - V_{AD} = \frac{ER + E\Delta R}{2R + \Delta R} - \frac{E}{2} = \frac{E \Delta R}{2(2R + \Delta R)} \quad (12.3.15)$$

Como $\Delta R \ll 2R$, la anterior expresión se reduce a

$$V = \frac{E \Delta R}{4 R} \quad (12.3.16)$$

y teniendo en cuenta (12.3.9), despejando ε , se obtiene

$$\varepsilon = \frac{4}{EK} V \quad (12.3.17)$$

Esta expresión relaciona la deformación que se ha producido en el cuerpo sobre el que se ha adherido la galga extensométrica con la lectura del galvanómetro, es decir, nos indica que conocido el voltaje de excitación E y el factor de sensibilidad K de la galga basta medir el voltaje en el galvanómetro para obtener la deformación.

Pero la deformación dada por la expresión (12.3.17) puede haber sido producida por otros factores que afecten a la resistencia de la galga que no sea la carga aplicada al sólido. El principal factor que influye en la lectura de la deformación es la variación de temperatura, hasta el punto que una variación térmica en la galga de pocos grados puede falsear completamente el resultado. Es necesario, por ello, tener en cuenta esta circunstancia y aplicar algún método de compensación que contrarreste el posible efecto de la variación térmica. Existen varios de estos métodos. El más empleado, quizás sea el representado esquemáticamente en la Figura 12.5. Consiste en utilizar una falsa galga, idéntica a la galga activa medida, que no va a estar cargada, pero lo suficientemente cercana una de otra para que ambas experimenten la misma variación de temperatura. Esta galga de compensación debe montarse en una de las ramas del puente adyacente a la que esté montada la galga activa. Es evidente que con esta disposición se consigue que si las dos galgas incrementan su temperatura un mismo número de grados, la lectura del galvanómetro G se verá afectada por la variación térmica, y sólo influirá en ella la variación de resistencia producida por la deformación mecánica que se desea medir.

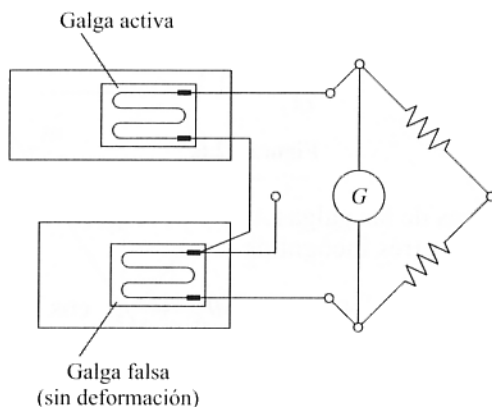


Figura 12.5.

Cuando no existen garantías de que la variación de temperatura en ambas galgas va a ser la misma, es necesario aplicar un método distinto del descrito anteriormente. Puede ser el que consiste en la utilización de unas galgas especiales llamadas *extensómetros con auto-compensación de temperatura*, construidas con un material al que se ha sometido a procesos

metalúrgicos singulares y que tienen la particularidad de presentar una respuesta de variación térmica nula cuando en el exterior se produce un cambio de temperatura comprendido dentro de un determinado intervalo.

12.4. Análisis de los datos obtenidos con galgas extensométricas

Las galgas eléctricas se adhieren normalmente a la superficie libre de un sólido elástico, sobre el punto en el que queramos calcular su estado tensional. Si tomamos un sistema de ejes x e y con origen en dicho punto, dado que las galgas miden las deformaciones longitudinales unitarias y la expresión de ε_n para una determinada dirección en el plano, definida por $u(\alpha, \beta)$, viene dada por:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \gamma_{xy} \alpha \beta \quad (12.4.1)$$

es evidente que tendremos que hacer tres medidas, es decir, colocar tres galgas para determinar ε_x , ε_y y γ_{xy} .

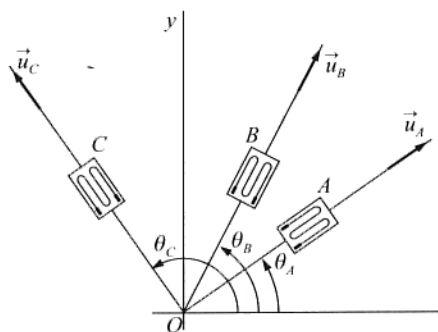


Figura 12.6.

Si ε_A , ε_B , ε_C son las lecturas de las galgas A, B y C, respectivamente, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} \varepsilon_A = \varepsilon_x \cos^2 \theta_A + \varepsilon_y \sin^2 \theta_A + \gamma_{xy} \cos \theta_A \cdot \sin \theta_A \\ \varepsilon_B = \varepsilon_x \cos^2 \theta_B + \varepsilon_y \sin^2 \theta_B + \gamma_{xy} \cos \theta_B \cdot \sin \theta_B \\ \varepsilon_C = \varepsilon_x \cos^2 \theta_C + \varepsilon_y \sin^2 \theta_C + \gamma_{xy} \cos \theta_C \cdot \sin \theta_C \end{cases} \quad (12.4.2)$$

cuyas soluciones son las componentes de la matriz de deformación en el punto considerado. Conocida ésta queda perfectamente determinado el estado de deformación en dicho punto.

Las tres galgas suelen venir montadas en rosetas, como indica la Figura 12.7a. En casos particulares es posible la determinación de las tensiones mediante rosetas de menos de tres elementos, como ocurriría en el caso de una pieza sometida a tracción o compresión axial, en el que bastaría colocar una sola galga; o en el caso de un estado tensional isotrópico:

$\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = \sigma_1 = \sigma_2$ y $\tau_{xy} = 0$ en el que la lectura ε de una sola galga en una dirección cualquiera nos da la tensión en cualquier dirección

$$\sigma = \frac{E}{1 - \mu} \varepsilon \quad (12.4.3)$$

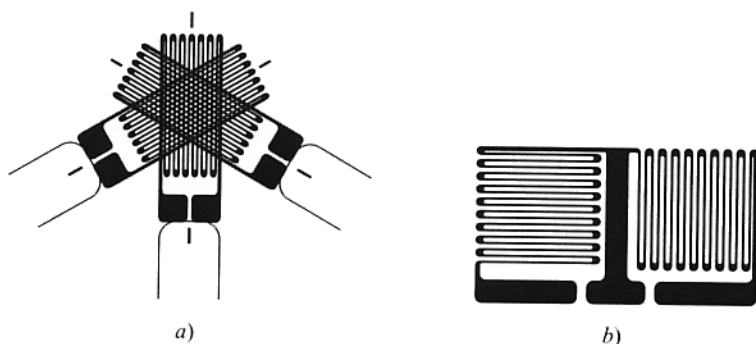


Figura 12.7.

Si fueran necesarias dos galgas, una disposición de las galgas en direcciones ortogonales es la indicada en la Figura 12.7b.

A partir de las componentes de la matriz de deformación obtenidas del sistema (12.4.2) se pueden calcular las deformaciones principales mediante el círculo de Mohr, como queda indicado en la Figura 12.8a.

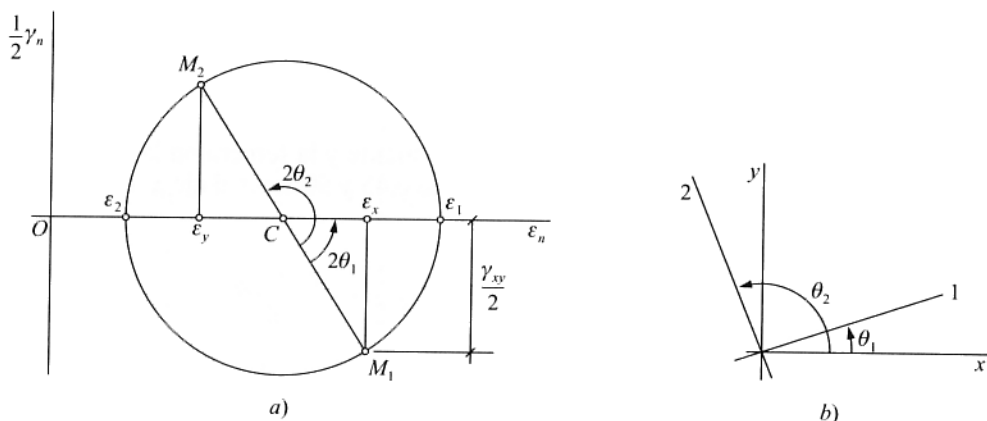


Figura 12.8.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

y las direcciones principales

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (12.4.5)$$

De esta ecuación se obtienen los valores θ_1 y $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$.

En la construcción del círculo de Mohr se ha supuesto que $\gamma_{xy} > 0 \Rightarrow \tau_{xy} > 0$, por lo que el punto representativo M_1 de la dirección coincidente con el eje x tendrá ordenada negativa. Las direcciones principales se dibujan en la Figura 12.8b.

La forma más simple de obtener las tensiones principales es despejarlas de las leyes de Hooke.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) \\ \sigma_1 &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

A modo de ejemplo, estudiemos los casos de las siguientes rosetas:

- a) Roseta rectangular de tres elementos.
- b) Roseta en delta.

calculando en cada caso los valores principales de tensiones y deformaciones, así como las direcciones correspondientes.

a) Roseta rectangular de tres elementos

En esta roseta dos galgas están colocadas ortogonalmente y la tercera en la bisectriz de las otras dos, es decir, las tres galgas forman ángulos de $0,45^\circ$ y 90° con el eje x , como se indica en la Figura 12.9.

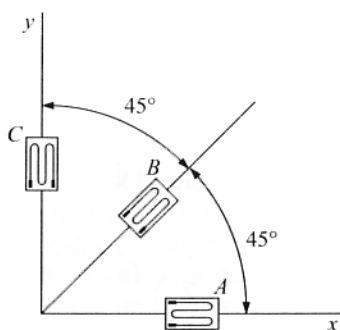


Figura 12.9.

El sistema (12.4-2) aplicado a este caso se reduce a

$$\begin{cases} \varepsilon_A = \varepsilon_x \\ \varepsilon_B = \varepsilon_x \frac{1}{2} + \varepsilon_y \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \frac{1}{2} \\ \varepsilon_C = \varepsilon_y \end{cases} \quad (12.4.7)$$

cuyas soluciones son inmediatas:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A; \varepsilon_y = \varepsilon_C; \gamma_{xy} = 2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C \quad (12.4.8)$$

Con estos valores podemos construir el círculo de Mohr (Fig. 12.10) y a partir de él calcular las deformaciones principales

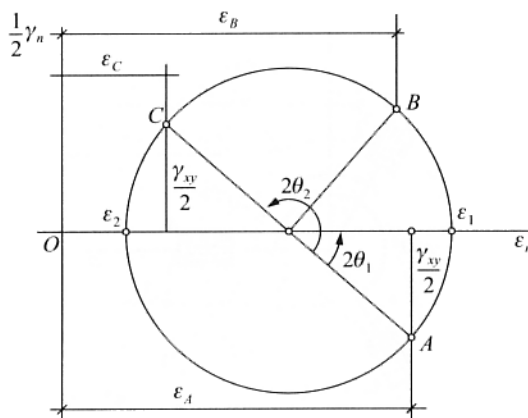


Figura 12.10.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \end{aligned} \quad (12.4.9)$$

y las direcciones principales

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C}{\varepsilon_A - \varepsilon_C} \quad (12.4.10)$$

En la figura se ha supuesto que se verifica $\gamma_{xy} > 0$, es decir $\varepsilon_B > \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C)$, por lo que los ángulos θ_1 y $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$ que determinan las direcciones principales habrá que contarlos, a partir del eje x , en sentido antihorario, según se deduce del círculo de Mohr.

Las tensiones principales, en virtud de (12.4.6), tendrán por expresiones

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2(1 - \mu)} + \frac{1}{2(1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \right] \\ \sigma_2 &= E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2(1 - \mu)} - \frac{1}{2(1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \right]\end{aligned}\quad (12.4.11)$$

b) Roseta en delta

En esta roseta los ejes de las tres galgas forman ángulos $\theta_A = 0^\circ$; $\theta_B = 120^\circ$; $\theta_C = 240^\circ$, con el eje x (Fig. 12.11).

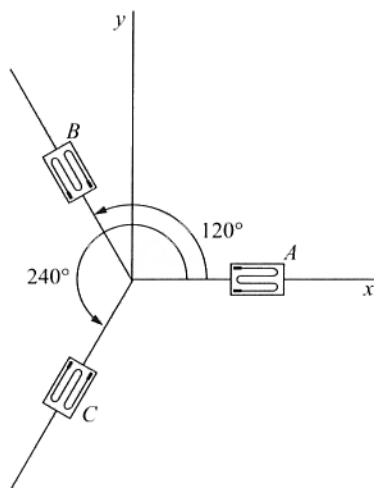


Figura 12.11.

Las componentes de la matriz de deformación en el punto en el que se ha colocado la roseta serán las soluciones del sistema de ecuaciones (12.4.2) aplicado a este caso

$$\begin{cases} \varepsilon_A = \varepsilon_x \\ \varepsilon_B = \varepsilon_x \frac{1}{4} + \varepsilon_y \frac{3}{4} - \gamma_{xy} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \varepsilon_C = \varepsilon_x \frac{1}{4} + \varepsilon_y \frac{3}{4} + \gamma_{xy} \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad (12.4.12)$$

es decir

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A; \varepsilon_y = \frac{1}{3} [2(\varepsilon_B + \varepsilon_C) - \varepsilon_A]; \gamma_{xy} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\varepsilon_C - \varepsilon_B) \quad (12.4.13)$$

Con estos valores podemos construir el círculo de Mohr (Fig. 12.12) y a partir de él calcular las deformaciones principales

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) + \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2} \quad (12.4.14)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3}(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}$$

y las direcciones principales

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)}{\varepsilon_A - \frac{1}{3}(2\varepsilon_B + 2\varepsilon_C - \varepsilon_A)} = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)}{2\varepsilon_A - \varepsilon_B - \varepsilon_C} \quad (12.4.15)$$

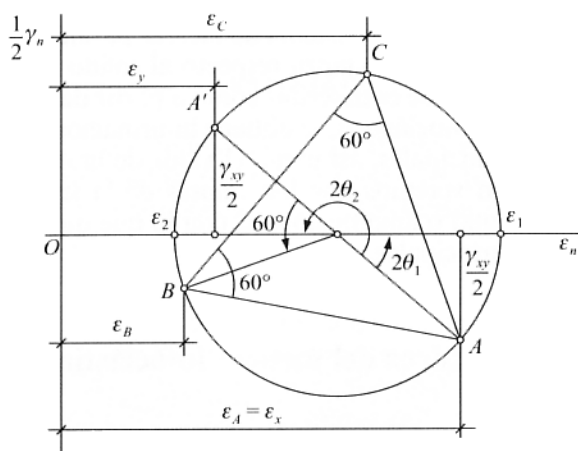


Figura 12.12.

En la figura se ha supuesto que se verifica $\gamma_{xy} > 0$, es decir $\varepsilon_C > \varepsilon_B$ por lo que los ángulos θ_1 y $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$ que determinan las direcciones principales habrá que contarlos, a partir del eje x , en sentido antihorario, según se deduce del círculo de Mohr.

Finalmente, las tensiones principales las obtendremos aplicando las ecuaciones (12.4.6)

$$\sigma_1 = E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{3(1 - \mu)} + \frac{\sqrt{2}}{3(1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2} \right] \quad (12.4.16)$$

$$\sigma_2 = E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{3(1 - \mu)} - \frac{\sqrt{2}}{3(1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2} \right]$$

12.5. Fundamentos y finalidad del método fotoelástico

En el planteamiento analítico del problema elástico que hemos hecho en el Capítulo 6 en los casos de estados elásticos bidimensionales se llegó, cuando las fuerzas de masa son constantes o nulas, a la misma ecuación:

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (12.5.1)$$

lo que indica que la solución de tensiones es independiente del material.

Esta circunstancia y la propiedad de birrefringencia accidental, descubierta por *David Brewster* en 1816, que presentan ciertos materiales transparentes y elásticos sometidos a tensión al paso de luz polarizada, son los fundamentos de la ciencia conocida bajo el nombre de *Fotoelasticidad*.

Para el análisis de las tensiones en un sólido real, el método fotoelástico utiliza un modelo transparente de caras planas paralelas entre sí que reproduce el cuerpo en estudio o uno a escala, sometiéndole en su contorno a un sistema de fuerzas paralelas a las caras planas del modelo, que se rige por las leyes de semejanza respecto al sólido real.

Nuestro propósito en lo que sigue es describir cómo a partir de este modelo, colocándolo adecuadamente en un banco fotoelástico, se obtiene información suficiente para la determinación de las direcciones principales, así como el valor de la diferencia $\sigma_1 - \sigma_2$ de las tensiones principales. También veremos que los valores de la suma $\sigma_1 + \sigma_2$ se pueden determinar también experimental o analíticamente, con lo que quedará resuelto el problema de calcular las tensiones principales.

12.6. Conceptos ópticos básicos del método fotoelástico. Leyes de Maxwell

La *teoría ondulatoria de la luz de Huygens* desplazó la teoría corpuscular de *Newton* que pretendía explicar el comportamiento y naturaleza de la luz. *Huygens* supuso la existencia de un fluido, el éter, que tiene las características de un material elástico y en el que la luz se propaga mediante ondas transversales, vibrando las partículas del éter de forma aleatoriamente irregular en un plano normal al rayo luminoso, es decir, en un plano normal a la dirección de propagación de la luz. Hoy día se acepta la teoría de Huygens pero se considera innecesaria la existencia del éter: la luz es de la misma naturaleza que las ondas electromagnéticas, diferenciándose de las de radio o de los rayos X en la longitud de onda.

Cuando todas las vibraciones de la luz en los puntos geométricos del rayo tienen lugar en un plano, se dice que la luz está *polarizada en un plano*. Algunos materiales llamados *polarizadores*, como pueden ser el prisma de Nicol o un filtro Polaroid, tienen la propiedad de eliminar parte de luz incidente, de tal forma que el haz emergente vibra en un plano determinado que se llama *plano de polarización* (Fig. 12.13).

Cuando un rayo luminoso de luz monocromática incide sobre la cara de un material transparente se produce el fenómeno de la refracción: el rayo cambia de dirección y varía la velocidad de propagación. Si v es la velocidad de propagación en el medio transparente y

$c = 3 \cdot 10^8$ m/seg es la velocidad de la luz en el vacío, se define el *índice de refracción* n como el cociente

$$n = \frac{c}{v} \quad (12.6.1)$$

y es una característica del medio.

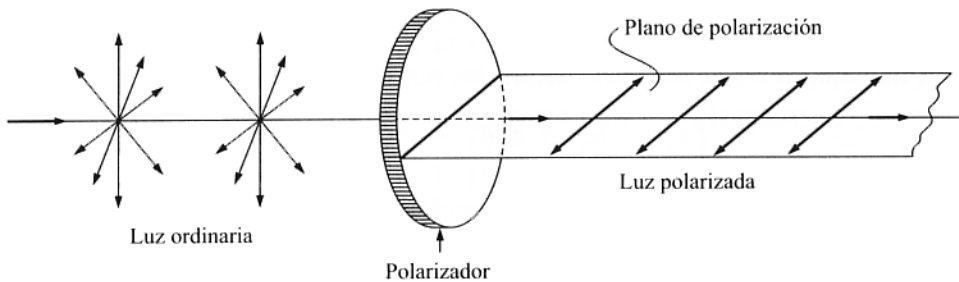


Figura 12.13.

Ciertos cristales, como el espato flúor (Fig. 12.14), transmiten dos rayos diferentes (ordinario y extraordinario), polarizados en planos ortogonales, propagándose cada uno de ellos en el cristal con velocidades diferentes, es decir, el material presenta índices de refracción distintos para los dos rayos.

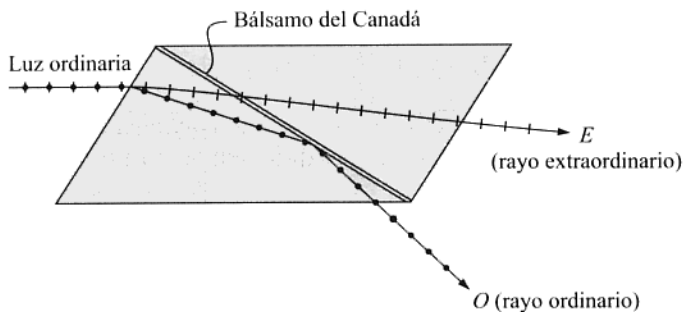


Figura 12.14.

Existen muchos materiales transparentes no cristalinos que ordinariamente son ópticamente isótropos, pero se convierten en anisótropos y presentan características similares a los cristales cuando se crea en ellos un estado tensional. Este fenómeno recibe el nombre de *doble refracción temporal* o *birrefringencia accidental* que hemos aludido anteriormente. Los materiales más usuales que presentan esta propiedad son la baquelita, celuloide, gelatina, resinas sintéticas, vidrio, plásticos, etc. La propiedad de birrefringencia accidental fue observada por primera vez por Sir David Brewster en el año 1816. El método fotoelástico está basado en esta propiedad física que presentan los materiales transparentes no cristalinos.

Las propiedades ópticas en cada punto del material pueden ser representadas por un elipsoide cuyos ejes son coincidentes con las direcciones principales de la matriz de tensiones en ese punto. Las longitudes de los semiejes son n_1, n_2, n_3 , valores de los índices de refracción para ondas que vibran paralelamente a las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ respectivamente.

Si n_0 es el índice de refracción del material cuando no se le somete a carga alguna, es decir, cuando la matriz de tensiones es idénticamente nula en todos los puntos, el elipsoide de índices de refracción será una esfera de radio n_0 .

Los valores de las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y los índices de refracción n_1, n_2, n_3 para ondas que vibran paralelamente a ellas, y el valor n_0 están relacionados entre sí mediante las llamadas *leyes de Maxwell*, deducidas por éste en 1852

$$\begin{cases} n_1 - n_0 = a \sigma_1 + b(\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2 - n_0 = a \sigma_2 + b(\sigma_3 + \sigma_1) \\ n_3 - n_0 = a \sigma_3 + b(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (12.6.2)$$

en donde a y b son constantes que dependen del material, denominadas *coeficientes ópticos de tensiones*.

A partir de ellas, restando, se obtiene:

$$n_1 - n_2 = a(\sigma_1 - \sigma_2) + b(\sigma_2 - \sigma_1) = (a - b)(\sigma_1 - \sigma_2)$$

es decir:

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = K(\sigma_1 - \sigma_2) \\ n_2 - n_3 = K(\sigma_2 - \sigma_3) \\ n_1 - n_3 = K(\sigma_1 - \sigma_3) \end{cases} \quad (12.6.3)$$

en donde la constante $K = a - b$ recibe el nombre de *coeficiente óptico relativo*.

Este coeficiente se mide en brewsters, cuya equivalencia en unidades del sistema c.g.s y S.I. es

$$1 \text{ brewster} = 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn} = 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}.$$

Las ecuaciones (12.6.3) indican que el estado tensional en un determinado punto de un sólido elástico se puede determinar midiendo los tres índices de refracción que corresponden a las direcciones de los tres ejes ópticos principales. Estas medidas presentan grandes dificultades en el caso de fotoelasticidad tridimensional.

En una pieza plana sometida a un estado tensional bidimensional, de tensiones principales σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \neq \sigma_2$) y $\sigma_3 = 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = K(\sigma_1 - \sigma_2) \\ n_2 - n_3 = K \sigma_2 \\ n_1 - n_3 = K \sigma_1 \end{cases} \quad (12.6.4)$$

La primera de ellas

$$n_1 - n_2 = K(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (12.6.5)$$

llamada por algunos autores *Ley de Brewster* o *ley óptico-tensional*, permite determinar ópticamente las diferencias de las tensiones principales en un estado elástico bidimensional midiendo la diferencia de índices de refracción respectivos.

12.7. Aparatos fotoelásticos. Polariscopios plano y circular

La parte experimental del método fotoelástico se lleva a cabo en un *banco fotoelástico* que consta de un instrumento para la producción y detección de luz polarizada llamado *polariscopio* y un equipo cargador para proporcionar las cargas al modelo.

Atendiendo al tipo de luz empleada, los polariscopios más usuales son los llamados de *transmisión* y de *luz difusa*, cuyos esquemas respectivos se indican en la Figura 12.15.

La diferencia entre estos dos tipos es que el de luz difusa no tiene lentes y además al foco luminoso se le coloca un vidrio difusor.

La disposición indicada es la correspondiente a un *polariscopio plano*, que se distingue del llamado *polariscopio circular* obtenido colocando, en la forma que más adelante se dirá, dos láminas *cuarto de onda*.

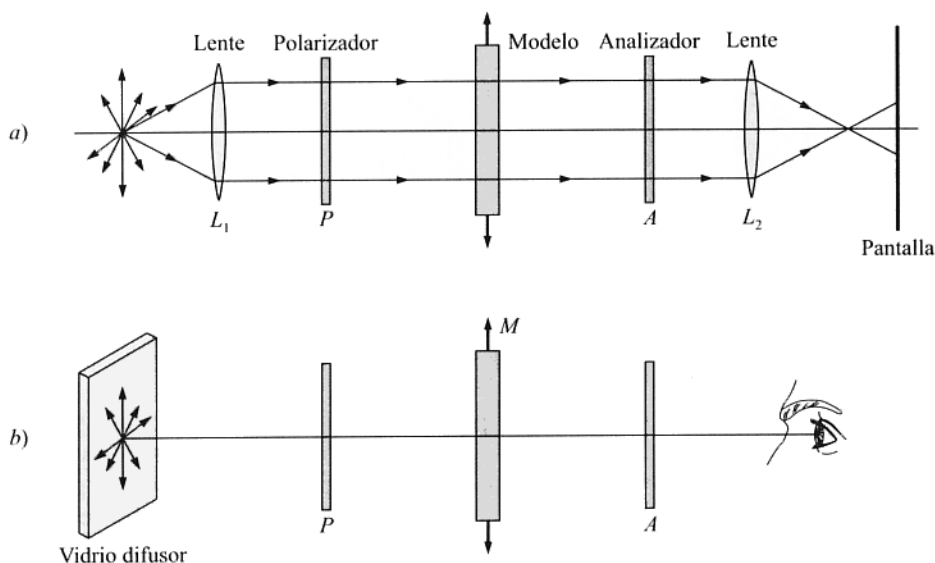


Figura 12.15.

Así pues, un *polariscopio plano* está formado por:

1. Lente colimadora

Está colocada de tal manera que la fuente luminosa esté exactamente en uno de sus focos con objeto de obtener un haz de rayos paralelos.

2. Polarizador

Consiste generalmente en una lámina delgada de alcohol polivinílico calentada y estirada antes de fijarla a una lámina soporte de acetato de celulosa, coloreándose la cara de polivinilo con un líquido que contenga yodo. Al llegar el rayo incidente al polarizador se descompone en dos que vibran en planos perpendiculares, uno de los cuales se absorbe. Por eso se dice que la luz emergente del polarizador vibra en un solo plano.

3. Analizador

Es análogo al polarizador, de tal forma que si se colocan *cruzados*, es decir, con sus planos de polarización ortogonales entre sí, un observador situado a la derecha del analizador no verá luz alguna. Por el contrario, cuando polarizador y analizador se colocan *paralelos*, esto es, cuando los planos de polarización de ambos son coincidentes la luz se transmitirá a través de ellos (Fig. 12.16).

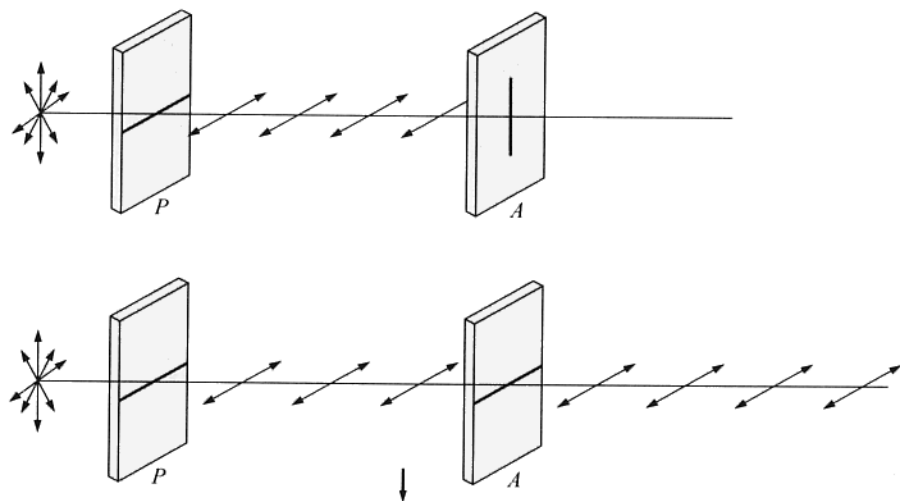


Figura 12.16.

Si colocamos el modelo cargado entre polarizador y analizador, la luz polarizada se descompone en sus componentes según las direcciones principales del estado tensional plano creado en éste por la carga. Las dos vibraciones emergentes del modelo experimentarán un cierto desfase por ser los índices de refracción distintos según las direcciones principales. A través del analizador las vibraciones emergentes son las componentes de las dos ondas que salen del modelo. Como estas dos ondas están polarizadas en un mismo plano, la función que hace el analizador es hacer cumplir a éstas la condición necesaria de coherencia

para que puedan producir interferencia óptica. En la Figura 12.17 se indica gráficamente el proceso expuesto, cuyo tratamiento analítico se hará en el epígrafe siguiente.

Cuando se añaden al polariscopio plano descrito dos láminas cuarto de onda entre polarizador y modelo y entre modelo y analizador tenemos un *polariscopio circular* (Figura

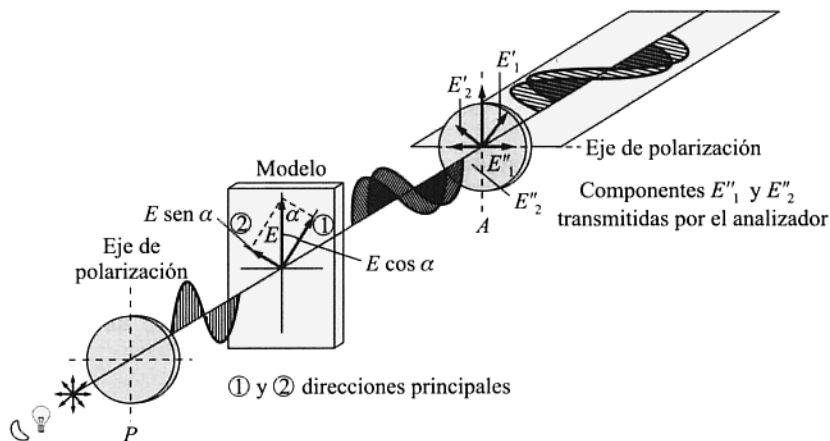


Figura 12.17.

ra 12-18). Estas láminas, que son birrefringentes, están formadas generalmente por una capa delgada de alcohol polivinílico laminada entre dos hojas de acetato de celulosa. Se denominan de cuarto de onda porque se dimensionan de tal forma que el retardo de los dos rayos emergentes sea de $\lambda/4$. La primera se sitúa de tal forma que sus dos planos de polarización ortogonales entre sí, formen 45° con el plano de polarización del polarizador. La segunda se sitúa con los planos de polarización cruzados respecto a los de la primera.

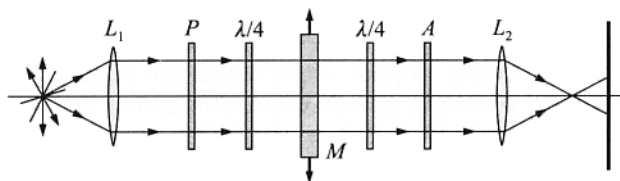


Figura 12.18.

12.8. Efectos de un modelo cargado en un polariscopio plano

Consideremos un modelo de material birrefringente sometido a un estado tensional plano de tensiones principales σ_1 y σ_2 . Hagamos incidir normalmente a una de sus dos caras un haz de luz monocromática polarizada en un plano, obtenida, por ejemplo, haciendo pasar

un haz de luz a través de un filtro Polaroid, utilizado como polarizador en un banco foto-elástico.

Supongamos que el plano de polarización es vertical y forma un ángulo α con la dirección principal correspondiente a σ_1 (Fig. 12.19).

La ecuación de la vibración de la luz en el plano de polarización es:

$$E = a \cos pt \quad (12.8.1)$$

en donde a es la amplitud, $p = 2\pi f$ la pulsación de la vibración, f su frecuencia y t la variable tiempo.

Podemos descomponer esta vibración en dos componentes polarizadas en los planos principales, cuyas elongaciones valen:

$$\begin{aligned} E_1 &= E \cos \alpha = a \cos pt \cos \alpha \\ E_2 &= E \sin \alpha = a \cos pt \sin \alpha \end{aligned} \quad (12.8.2)$$

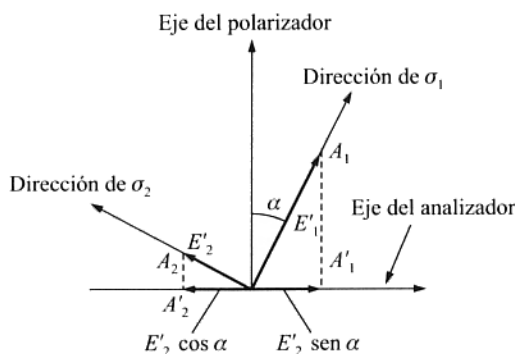


Figura 12.19.

Estas dos vibraciones, al incidir sobre el modelo están en fase, pero como las velocidades de propagación de las vibraciones en planos que contienen a las tensiones principales son distintas, el tiempo tardado por cada una de estas vibraciones es

$$t_1 = \frac{e}{v_1}; \quad t_2 = \frac{e}{v_2}$$

siendo e el espesor del modelo.

Las ecuaciones horarias de estas vibraciones a la salida del modelo serán:

$$\begin{aligned} E'_1 &= a \cos p(t - t_1) \cos \alpha \\ E'_2 &= a \cos p(t - t_2) \sin \alpha \end{aligned} \quad (12.8.3)$$

que, como vemos, presentan un desfase $t_1 - t_2$.

Si colocamos el analizador con su plano de polarización ortogonal con relación al del polarizador, o sea, el plano de polarización en posición horizontal, a través del analizador no pasarán nada más que las componentes horizontales de las anteriores vibraciones

$$E''_1 = E'_1 \sin \alpha = \frac{a}{2} \cos p(t - t_1) \cdot \sin 2\alpha \quad (12.8.4)$$

$$E''_2 = E'_2 \cos \alpha = \frac{a}{2} \cos p(t - t_2) \cdot \sin 2\alpha$$

De estas expresiones y de la Figura 12.19 se desprende que estas dos vibraciones tienen la misma amplitud de valor $\frac{a}{2} \sin 2\alpha$, pero de sentidos opuestos.

La composición de estas dos vibraciones nos da la ecuación horaria del movimiento resultante a la salida del rayo a través del analizador

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} \sin 2\alpha [\cos p(t - t_1) - \cos p(t - t_2)] = \\ & = a \sin 2\alpha \cdot \sin \left(p \frac{t_1 - t_2}{2} \right) \sin p \left(t - \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (12.8.5)$$

que representa una vibración de la misma pulsación p del rayo incidente y amplitud a'

$$a' = a \sin 2\alpha \cdot \sin \left(p \frac{t_1 - t_2}{2} \right) \quad (12.8.6)$$

que depende de la diferencia de fase originada por ser distintas las velocidades de propagación de las ondas que vibran en planos paralelos a las dos tensiones principales.

Los valores de la diferencia de fase que hacen esta amplitud máxima verificarán

$$p \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{2n + 1}{2} \pi \quad (12.8.7)$$

siendo n un número entero y el modelo se verá brillante.

Por el contrario, la amplitud a' de la vibración emergente del analizador será nula, por lo que el modelo parecerá negro, si

$$p \frac{t_1 - t_2}{2} = n \pi \quad (12.8.8)$$

siendo n un número entero.

Expresemos los primeros miembros de (12.8.7) y (12.8.8) en función del espesor e del modelo y de los índices de refracción n_1 y n_2

$$p \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{p}{2} \left(\frac{e}{v_1} - \frac{e}{v_2} \right) = \frac{pe}{2} \left(\frac{n_1}{c} - \frac{n_2}{c} \right) = \frac{pe}{2c} (n_1 - n_2) \quad (12.8.9)$$

Pero como $\frac{p}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ siendo λ la longitud de onda de la luz monocromática empleada y $n_1 - n_2 = K(\sigma_1 - \sigma_2)$ en virtud de la ley de Brewster, la expresión (12.8.9) queda:

$$\frac{p(t_1 - t_2)}{2} = \frac{\pi e}{\lambda} K(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (12.8.10)$$

que permite expresar la condición de máximo o de nulidad de la amplitud a' de la luz emergente del analizador en función de la diferencia de las tensiones principales.

Por tanto, la amplitud a' de la luz a la salida del analizador es máxima cuando

$$\frac{\pi e K}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2n + 1}{2} \pi \Rightarrow \frac{e K}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2n + 1}{2} \quad (12.8.11)$$

y nula cuando

$$\frac{\pi e K}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = n \pi \Rightarrow \frac{e K}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) = n \quad (12.8.12)$$

siendo n en ambas expresiones un número entero.

Introduciendo una nueva constante F llamada *valor de franja*.

$$F = \frac{\lambda}{K} \quad (12.8.13)$$

que depende, como vemos, del material del modelo utilizado y de la luz monocromática empleada, la condición (12.8.12) de nulidad de la luz saliente del analizador, es decir, cuando se produce oscuridad, se puede expresar así

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n F}{e} \quad (12.8.14)$$

ecuación que algunos autores denominan *fórmula fundamental de la fotoelasticidad*.

En nuestro razonamiento hemos supuesto que el estado de tensión era homogéneo, es decir, en todos los puntos del modelo las direcciones principales eran las mismas, así como los valores de las tensiones σ_1 y σ_2 correspondientes. La teoría expuesta es válida para el caso de un estado tensional plano cualquiera, pero tendremos que aplicarla al entorno de cada punto del modelo.

El valor de n de la fórmula fundamental en un determinado punto se puede obtener contando el número de extinciones sucesivas que se producen en ese punto al cargar el

modelo lentamente desde el estado tensional cuya matriz de tensiones es la matriz nula. Conocido n , la citada fórmula fundamental nos proporcionaría el valor de la diferencia de las tensiones principales.

Resumiendo, creado en el modelo un estado tensional plano mediante la aplicación de determinada carga, si ponemos una pantalla a continuación del analizador obtenemos sobre ella una especie de fotografía del modelo con zonas claras y oscuras alternadamente. Las zonas oscuras corresponden a los puntos del modelo en los que la expresión $\frac{e(\sigma_1 - \sigma_2)}{F}$ toma el valor de un número entero, y las claras, de mayor intensidad luminosa, a los puntos del modelo, en los que este valor es un número semientero.

Hemos supuesto también que la luz utilizada era luz monocromática. Si en vez de utilizar ésta utilizamos luz blanca que es una mezcla de luces de los colores del arco iris, las franjas que se obtienen en la pantalla son coloreadas, cada una de las cuales son de un determinado color. De ahí que a estas líneas, lugares geométricos de los puntos del modelo en los que la diferencia de tensiones principales toma un valor constante, se hayan denominado *líneas isocromáticas*.

Para la determinación del valor de franja F el método más simple es el de someter a tracción una barra calibrada de material fotoelástico de sección Ω y medir la fuerza P que es necesario aplicar para producir la n -ésima extinción.

De la ecuación (12.8.6) que nos da la amplitud del rayo emergente del analizador se deduce que esta amplitud se anula también para $\sin 2\alpha = 0$, es decir, todo punto del modelo en que $\alpha = n \frac{\pi}{2}$, siendo n un número entero, aparecerá negro. Esto ocurre en un punto del modelo cuando las direcciones principales en él son coincidentes con los ejes de polarización del polarizador y analizador. Todos aquellos puntos cuyas direcciones principales son paralelas a los ejes de los elementos polarizadores son puntos del modelo en los que las tensiones principales forman ángulo constante con una dirección fija. Forman una línea continua que se denomina *isoclina*.

Si tomamos la vertical como origen de ángulos, la isoclina que se obtiene para la posición vertical del eje de polarización del polarizador es la isoclina de valor 0° . Si a partir de esta posición giramos simultáneamente el polarizador y analizador un ángulo α alrededor del eje longitudinal del polariscopio aparecerán negros ahora todos los puntos en los que una de las direcciones principales forma un ángulo α con la vertical. Se tiene así la isoclina de valor α° .

De esta forma podemos obtener la familia de isoclinas tomando fotografías sucesivas del modelo para $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$. Obtenidas las isoclinas se pueden construir las isostáticas de la forma gráfica expuesta en el Capítulo 6.

La posible confusión entre las isoclinas y las isocromáticas puede evitarse utilizando luz blanca, puesto que las isoclinas aparecerán en negro, en contraste con las isocromáticas que, a excepción de la franja de orden cero, aparecerán coloreadas.

Posibles errores en la construcción de las isoclinas pueden evitarse teniendo en cuenta las siguientes propiedades.

- 1.^a Las isoclinas deben pasar por puntos de cargas concentradas y por puntos isotropos.
- 2.^a Con cada eje de simetría debe coincidir una isoclina.

3.^a El parámetro de una isoclina que corte a un contorno libre de carga es igual al ángulo que forma con la vertical la tangente al contorno en dicho punto.

Para las medidas que se suelen hacer en fotoelasticidad, en las cuales se busca la determinación de las tensiones principales a lo largo de los bordes, las líneas isoclinas pueden confundir, por lo que, generalmente, se las hace desaparecer mediante la colocación de dos láminas cuarto de onda orientadas de forma adecuada.

12.9. Efectos de un modelo cargado en un polariscopio circular

Ya hemos indicado que si en un polariscopio plano introducimos sendas láminas cuarto de onda, tenemos lo que se denomina *polariscopio circular*. Colocaremos las láminas cuarto de onda de tal forma que la bisectriz de las direcciones de vibración en cada una de ellas de los rayos ordinario y extraordinario, sea paralelo al eje del polarizador (Fig. 12.20).

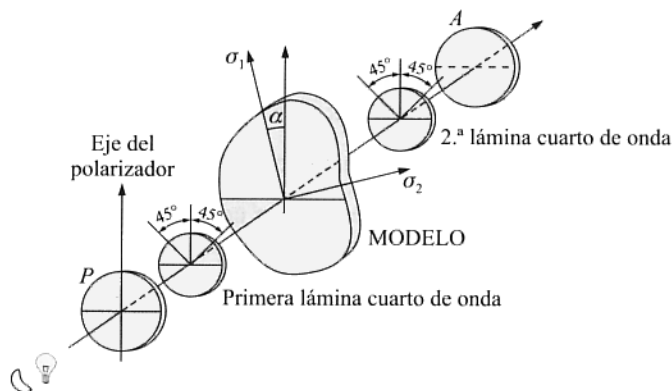


Figura 12.20.

Si la luz emergente del polarizador (no indicado en la figura) está definida por

$$E = a \cos pt \quad (12.9.1)$$

siendo a su amplitud, $p = 2\pi f$ la pulsación, f la frecuencia y t el tiempo, sus componentes según los ejes de polarización de la lámina cuarto de onda son

$$E' = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos pt \quad (12.9.2)$$

De estas dos componentes, una emerge de la lámina cuarto de onda con un retraso $\lambda/4$ respecto a la otra, es decir, con un retraso temporal

$$\Delta t = \frac{\lambda}{4v} = \frac{vT}{4v} = \frac{2\pi}{4 \cdot 2\pi f} = \frac{\pi}{2p} \quad (12.9.3)$$

Las ecuaciones de las dos oscilaciones emergentes de la primera lámina cuarto de onda serán

$$E_{1R} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos pt \quad (12.9.4)$$

$$E_{1L} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos p\left(t - \frac{\pi}{2p}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin pt \quad (12.9.5)$$

sobre los *ejes rápido y lento* de polarización, respectivamente.

Es fácil ver que la resultante de estas oscilaciones tiene módulo constante $a_1 = a\sqrt{2}/2$ y forma un ángulo β con el eje vertical (Fig. 12.21), tal que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_{1L}}{E_{1R}} = \operatorname{tg} pt \Rightarrow \beta = pt$$

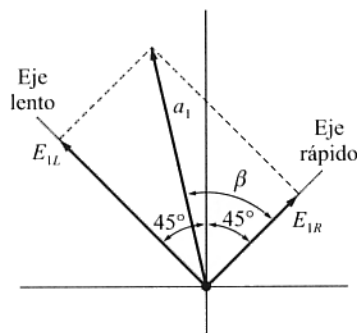


Figura 12.21.

Por tanto, la luz emergente de la primera lámina cuarto de onda vibra en dos planos perpendiculares entre sí. El vector luminoso resultante que tiene módulo constante gira alrededor del eje del polariscopio con velocidad angular p . Su extremo describirá una hélice cilíndrica de eje la dirección del rayo.

Por esta razón se dice que la luz emergente de la lámina cuarta de onda está polarizada circularmente.

Esta luz atraviesa el modelo cargado y emergerá de él vibrando en planos paralelos a las direcciones principales, en virtud de la propiedad de birrefringencia accidental que adquiere éste cuando se le somete a un estado tensional. Las ecuaciones de las componentes incidentes que atraviesan el modelo serán:

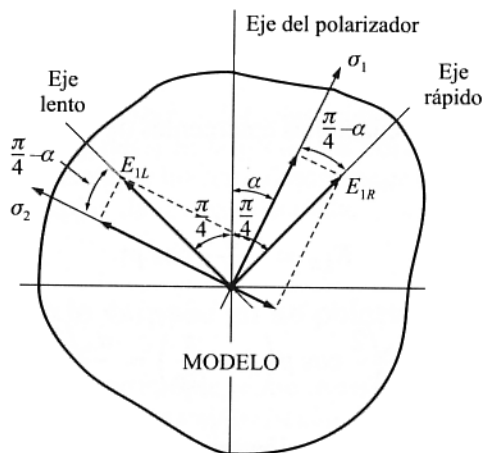


Figura 12.22.

$$E_1 = E_{1R} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + E_{1L} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \left[\cos pt \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \right. \\ \left. + \sin pt \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \quad (12.9.6)$$

$$E_2 = E_{1L} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - E_{1R} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \left[\sin pt \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \right. \\ \left. - \cos pt \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \quad (12.9.7)$$

siendo α el ángulo que forma la tensión principal σ_1 con el eje del polarizador.

Pero estas dos componentes se propagan a través del modelo con diferentes velocidades, por lo que presentarán un retardo relativo Δ , que podemos expresar de la siguiente forma, teniendo en cuenta la ecuación (12.6.1) y la ley de Brewster (12.6.5).

$$\Delta = p \left(\frac{e}{v_2} - \frac{e}{v_1} \right) = \frac{2\pi fe}{c} (n_2 - n_1) = \frac{2\pi eK}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (12.9.8)$$

Las ondas emergentes del módulo vibran en los planos paralelos a las tensiones principales y tendrán de ecuaciones:

$$E'_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \quad (12.9.9)$$

$$E'_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \quad (12.9.10)$$

Esta luz polarizada a la salida del modelo la hacemos incidir sobre una segunda lámina cuarto de onda, con los planos de polarización cruzados respecto de la primera (Fig. 12.23).

Las componentes correspondientes a los ejes rápido y lento de esta segunda lámina de cuarto de onda serán:

$$E_{2R} = E'_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + E'_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \quad (12.9.11)$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right]$$

$$E_{2L} = E'_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - E'_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \quad (12.9.12)$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right]$$

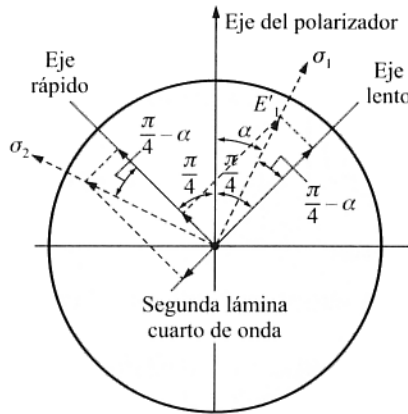


Figura 12.23.

Las ondas emergentes de esta segunda lámina vibran en los planos que contienen a sus ejes de polarización. La componente E_{2L} presentará un desfase angular de $\pi/2$ respecto de E_{2R} , por lo que las ecuaciones de las ondas emergentes serán:

$$E_{2R} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \quad (12.9.13)$$

$$E_{2L} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \left[\sin\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \quad (12.9.14)$$

Evidentemente, la observación a través del analizador va a depender de la posición del eje de polarización de éste. Distinguiremos pues las dos posiciones siguientes:

Posición A: Los ejes de polarización del polarizador y del analizador son ortogonales.

Posición B: Los ejes de polarización del polarizador y del analizador son paralelos.

Si consideramos la posición A, la ecuación de la onda emergente del analizador (Figura 12.24) tendrá por ecuación:

$$\begin{aligned} E &= E_{2L} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - E_{2R} \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (E_{2L} - E_{2R}) = \\ &= \frac{a}{2} \left[\sin\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] = \\ &= \frac{a}{2} \left[-\cos(pt + 2\alpha) + \cos(pt + 2\alpha - \Delta) \right] = \\ &= a \cdot \sin \frac{\Delta}{2} \cdot \sin\left(pt + 2\alpha - \frac{\Delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (12.9.15)$$

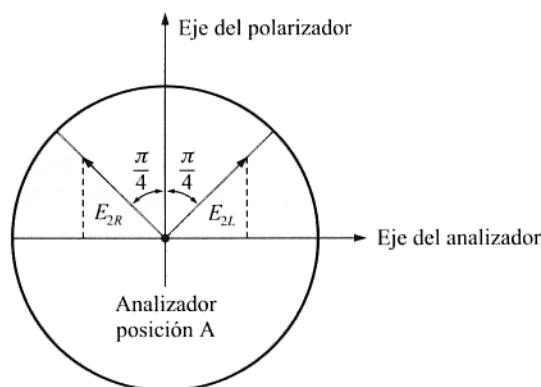


Figura 12.24.

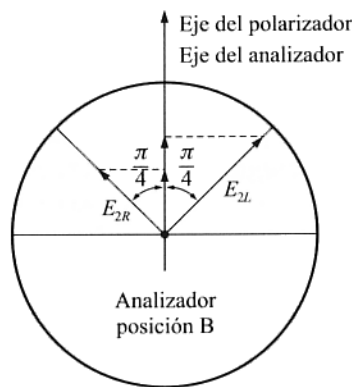


Figura 12.25.

La ecuación (12.9.15) nos indica que aparecerán franjas oscuras cuando $\sin \frac{\Delta}{2} = 0$, es decir, para

$$\frac{\Delta}{2} = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.9.16)$$

Como, según (12.9.8), Δ es proporcional a la diferencia de las tensiones principales, estas franjas oscuras corresponderán a las isocromáticas, igual a como ocurría utilizando un polariscopio plano. Sin embargo, existe una diferencia fundamental entre utilizar un polariscopio plano o circular: con el polariscopio circular se han eliminado las isoclinas.

Si consideramos la posición B, es decir, cuando el eje de polarización del analizador es paralelo al del polarizador (Fig. 12.25), la ecuación de la onda emergente del analizador tendrá por ecuación:

$$\begin{aligned} E &= E_{2L} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + E_{2R} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (E_{2L} + E_{2R}) = \\ &= \frac{a}{2} \left[\sin \left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \cos \left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \right. \\ &+ \left. \cos \left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \sin \left(pt + \alpha - \frac{\pi}{4} - \Delta \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right] = \\ &= \frac{a}{2} \left[\sin pt + \sin \left(pt - \Delta \right) \right] = a \cos \frac{\Delta}{2} \cdot \sin \left(pt - \frac{\Delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (12.9.17)$$

En este caso, se observarán franjas oscuras cuando

$$\frac{\Delta}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} ; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.9.18)$$

12.10. Métodos de separación de las tensiones principales

Mediante la utilización del banco fotoelástico descrito anteriormente podemos obtener en un punto las direcciones principales, pero la solución proporcionada para el cálculo de las tensiones principales sólo es parcial, ya que se obtiene el valor de su diferencia. Solamente en determinados puntos la fórmula (12.8.14) permite calcular las tensiones principales. En efecto, cuando una de ella es nula, como ocurre en los puntos del contorno sobre los que no actúe ninguna carga, la otra tensión principal, según la citada ecuación (12.8.14), será

$$\sigma = \frac{nF}{e} \quad (12.10.1)$$

También, en los puntos del contorno en los que haya aplicada una carga normal conocida, la tensión correspondiente a esta carga es una tensión principal. Para estos puntos la información obtenida del banco fotoelástico es suficiente para calcular la otra.

Para separar en cualquier otro punto del modelo las tensiones principales, es decir, para

calcular cada una de ellas, es necesario recurrir a otros métodos, bien analíticos o bien experimentales, que nos proporcionen el valor de la suma $\sigma_1 + \sigma_2$. Los métodos de separación de tensiones comunmente utilizados pueden clasificarse en cuatro grupos:

1. Métodos basados en las ecuaciones de equilibrio

1.1. Método de la diferencia de tensiones tangenciales

Consiste en una integración gráfica de las ecuaciones de equilibrio interno que, en el caso de tensión plana con fuerzas de masa nulas, se reducen a:

$$\frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \sigma_{ny}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (12.10.2)$$

1.2. Método de Filón

Consiste en una integración gráfica de las ecuaciones de *Lamé-Maxwell* (ecuaciones de equilibrio de un pequeño rectángulo curvilíneo limitado por cuatro isostáticas)

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} \quad ; \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} = - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} \quad (12.10.3)$$

Ambos métodos, dado que se basan en técnicas de integración gráfica, están limitados por la acumulación de errores que se producen al avanzar el proceso de integración. Por tanto, para conseguir un alto grado de exactitud debe procederse con extremo cuidado al tratar los datos experimentales (isocromáticas e isoclinas).

2. Métodos basados en las ecuaciones de compatibilidad

Para placas delgadas sometidas a tensión plana con fuerzas de volumen nulas o constantes las condiciones de compatibilidad en coordenadas cartesianas se reducen, según se vio, a la conocida ecuación de Laplace

$$\Delta \phi = 0, \text{ siendo } \phi = \sigma_{nx} + \sigma_{ny} = \sigma_1 + \sigma_2$$

El interés de esta ecuación en Fotoelasticidad proviene de que el valor de la función está unívocamente determinado en todos los puntos interiores de una región si los valores en el contorno son conocidos.

El espectro de isocromáticas proporciona un medio muy aproximado de determinar la diferencia de tensiones principales en todos los puntos interiores de un modelo bidimensional y, en muchos casos, suministra una información completa de las tensiones en el contorno. Conocida la diferencia de tensiones principales, la determinación de la suma de las mismas supone un medio efectivo de evaluar las tensiones principales individuales.

2.1. Método de separación analítica

Consiste en resolver analíticamente la ecuación de Laplace por separación de variables. Se obtiene un desarrollo en serie de funciones armónicas.

2.2. Método de los cuatro puntos de influencia

Los métodos numéricos pueden utilizarse para resolver con mucha exactitud la ecuación de Laplace. El que se va a describir consiste en un procedimiento iterativo por el cual los valores estimados de la función armónica en los puntos de interés de una malla son sistemáticamente mejorados basándose en el hecho de que el valor de la función en cualquier punto depende de los valores de la misma en los puntos cercanos. Partiendo de la condición de compatibilidad y tomando ecuaciones en diferencias finitas se obtiene la siguiente relación básica entre los valores de la función en diferentes puntos:

$$\phi_0 = C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 + C_3 \phi_3 + C_4 \phi_4 \quad (12.10.4)$$

siendo C_1 , C_2 , C_3 y C_4 constantes.

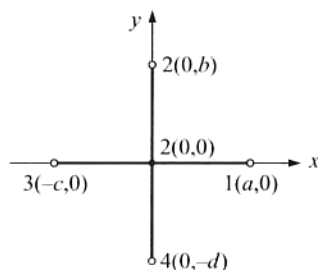


Figura 12.26.

Esta ecuación se conoce como la de los cuatro puntos de influencia. Las constantes tienen los valores:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{bcd}{(bd + ac)(a + c)} ; & C_2 &= \frac{acd}{(bd + ac)(b + d)} \\ C_3 &= \frac{abd}{(bd + ac)(c + a)} ; & C_4 &= \frac{abc}{(bd + ac)(d + b)} \end{aligned} \quad (12.10.5)$$

Una vez que se ha establecido la malla y se han evaluado las constantes asociadas a cada punto, los valores del contorno conocidos pueden asignarse a todos los puntos de intersección de la malla con el contorno.

Asimismo, se asignan los valores estimados o conocidos correspondientes a puntos del interior. Recorriendo la malla según una secuencia definida y utilizando la ecuación (12.10.4) se aproxima el valor en cada punto interior a la solución real. El proceso continúa hasta que los valores se hacen estacionarios o hasta que las correcciones no los alteran más de una cantidad predeterminada. A partir de ahí puede obtenerse una mayor aproximación utilizando una malla más fina.

2.3. Método eléctrico-analógico

Está basado en el hecho de que la distribución de potencial electrostático en una región de conductividad uniforme limitada por contornos de potencial conocido, está regida por la ecuación de Laplace de análoga forma a como lo está la suma de tensiones principales en un estado de tensión plana.

3. Métodos basados en la deformación transversal

La deformación en una dirección perpendicular a la superficie de un modelo sometido a tensión plana puede expresarse por:

$$v_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (12.10.6)$$

Por tanto, puede obtenerse la suma de tensiones principales si el cambio de espesor del modelo, como consecuencia de las cargas aplicadas, puede medirse con exactitud en el punto de interés. El procedimiento requiere un útil de gran sensibilidad, dado que los cambios de espesor raramente superan unas pocas centésimas de milímetro.

3.1. Extensómetro lateral

Es un micrómetro o capilar extremadamente sensible. Es difícil de posicionar y de utilizar si la geometría del modelo es complicada. Sólo es recomendable en situaciones especiales en que se precisan datos de un punto específico.

3.2. Interferómetros ópticos

Se obtienen con ellos las franjas de interferencia óptica entre los rayos de luz reflejada de la superficie del modelo y los de un plano óptico auxiliar cercano a la superficie del modelo.

Dichas franjas de interferencia son el lugar geométrico de los puntos de espesor constante y, en consecuencia, pueden utilizarse para determinar la suma de tensiones principales. Este método requiere medios adecuados para localizar y fijar la posición del plano óptico respecto del modelo, así como una superficie del modelo ópticamente uniforme para evitar la aparición de espectros de franjas iniciales.

3.2. Método de la incidencia oblicua

Al girar el modelo dentro del polariscopio de forma que la luz pase con un determinado ángulo, se obtiene un espectro de isocromáticas de incidencia oblicua. Este espectro de incidencia oblicua suministra datos adicionales que pueden ser empleados para separar las tensiones principales.

12.11. Otros métodos experimentales

Como hemos visto anteriormente la información suministrada por el banco fotoelástico es insuficiente para calcular las tensiones principales en cualquier punto del modelo. Además

de los métodos complementarios para separar éstas, descritos en el epígrafe anterior, se utilizan métodos especiales entre los que cabrían destacar los del método del Moiré, de fotoelasticidad tridimensional, de recubrimientos fotoelásticos, de lacas y barnices frágiles y, finalmente, los métodos interferométricos. De todos ellos haremos una muy breve descripción, remitiendo al lector interesado en el conocimiento de ellos, a obras especializadas.

1. Método del Moiré

Cuando se superponen dos conjuntos de líneas muy próximas y se observan con luz transmitida o reflejada se produce un fenómeno óptico denominado *efecto moiré*.

El fundamento se pone de manifiesto en la Figura 12.27: una de las redes de líneas (red del modelo) se coloca sobre la superficie del modelo, mientras otra *red de referencia*, generalmente del mismo número de líneas por unidad de longitud, se coloca paralela y próxima a la del modelo.

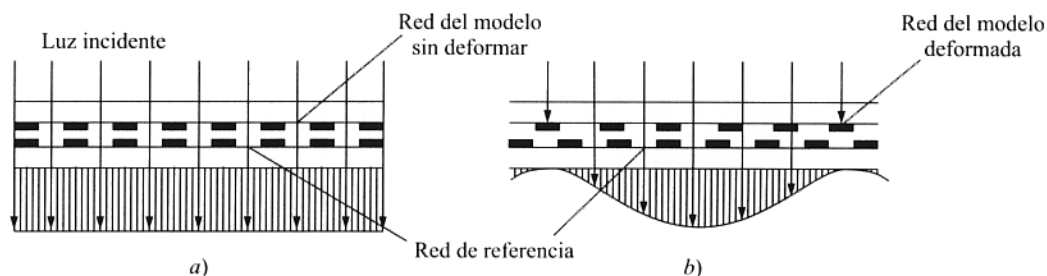


Figura 12.27.

Sin cargar el modelo, la luz que atraviesa las dos redes es constante en toda la superficie (Fig. 12.27a).

Cuando se carga el modelo (Fig. 12.27b), la red de líneas adheridas al mismo experimenta las mismas deformaciones que éste. Como la red de referencia no cambia, la variación relativa de ambas redes hará que se produzcan unas franjas de interferencia denominadas *moiré*, cuando se transmite luz entre las dos redes de líneas. La deformación longitudinal será:

$$\varepsilon_x = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{p}{d_x} \quad (12.11.1)$$

es decir, la deformación unitaria se calcula midiendo el ancho de la franja de *moiré* d_x , pues p es la distancia entre los ejes de dos líneas de la red de referencia, que es conocida.

2. Fotoelasticidad tridimensional

La aplicación de la fotoelasticidad al estudio de los estados tensionales tridimensionales se hace mediante el método de las «tensiones congeladas». Está basado este método en la propiedad que tienen ciertos materiales ópticamente sensibles, como la baquelita, de con-

servar la deformación y las características de birrefringencia accidental cuando se les somete a un templado en estado de compresión y después se descargan.

Esta técnica se aplica cortando en planchas finas el modelo tridimensional y analizando éstas mediante procedimientos análogos a los empleados en fotoelasticidad bidimensional.

3. Recubrimientos fotoelásticos

Con este método no es necesario construir un modelo de la parte que se desea analizar, ya que es la misma pieza la que se utiliza. Sobre ella y en la zona que interese se adhiere una capa delgada de material birrefringente. El método necesita utilizar un polariscopio especial de reflexión que permite observar los fenómenos fotoelásticos, ya que el material de la pieza que analicemos será, por regla general, opaco.

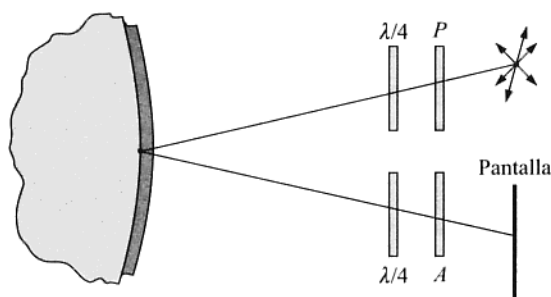


Figura 12.28.

En la Figura 12.28 se indica esquemáticamente la disposición del recubrimiento fotoelástico, así como el polariscopio especial a que nos hemos referido.

La aplicación de la fórmula (12.8.14) a la capa fotoelástica, teniendo en cuenta que la luz recorre dos veces el espesor t de la misma, es:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_c = \frac{NF}{2t} \quad (12.11.2)$$

y por las leyes de Hooke, las deformaciones principales unitarias son:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_c} (\sigma_1 - \mu_c \sigma_2)_c$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_c} (\sigma_2 - \mu_c \sigma_1)_c$$

Restando miembro a miembro, queda

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1 + \mu_c}{E_c} (\sigma_1 - \sigma_2)_c \quad (12.11.3)$$

De forma análoga, para la superficie, tendríamos:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1 + \mu_s}{E_s} (\sigma_1 - \sigma_2)_s \quad (12.11.4)$$

Se ha demostrado que las deformaciones unitarias de la capa coinciden exactamente con las de la pieza que se analiza, cuando no se presentan tensiones de cortadura en la superficie de separación entre la pieza y la capa de recubrimiento. En este caso, incluso, no hay limitación para el espesor t de la misma.

Igualando las expresiones (12.11.3) y (12.11.4), se tiene:

$$\frac{1 + \mu_c}{E_s} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1 + \mu_s}{E_s} (\sigma_1 - \sigma_2)_s$$

de donde

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_s = \frac{E_s}{E_c} \frac{1 + \mu_c}{1 + \mu_s} (\sigma_1 - \sigma_2)_c \quad (12.11.5)$$

expresión que nos permite calcular la diferencia de tensiones principales en los puntos de la superficie no cargada, en función de las diferencias de las que existen en el estado tensional plano creado en la capa y que podemos medir mediante el polariscopio de reflexión.

4. Lacas y barnices frágiles

Consiste esta técnica en recubrir la pieza que se quiere ensayar mediante un barniz que una vez seco acompaña a la pieza en su deformación superficial. La observación de las grietas que presenta la capa de barniz nos da información sobre el estado de deformación en los puntos de la superficie de la pieza que se ensaya.

El espesor del recubrimiento del barniz suele variar entre 0,10 y 0,15 mm. Se admiten las hipótesis de que el barniz aplicado no disminuye la deformabilidad de la pieza y que el estado de deformación superficial de ésta se manifiesta de forma idéntica en el barniz.

Se han dado diversas leyes para explicar el comportamiento de los barnices frágiles. Una de ellas es la que nos da la tensión en un estado de tracción monoaxial

$$\sigma = E \varepsilon_c \quad (12.11.6)$$

siendo σ la tensión de tracción en la pieza, en los puntos extremos de las grietas del barniz; E , el módulo de elasticidad del material de la pieza; ε_c , la deformación crítica en el barniz, obtenida mediante un ensayo de tracción monoaxial.

Las direcciones de las grietas son, generalmente, perpendiculares a las direcciones de las máximas deformaciones principales a tracción.

Esto es así en estados tensionales de tracción monoaxial. En el caso de estados bidimensionales es necesario modificar la ecuación anterior para que exprese correctamente la ley de rotura de los barnices frágiles.

5. Métodos interferométricos

Están basados estos métodos en los fenómenos de interferencias. Entre ellos, hay algunos que proporcionan los valores de la suma de las tensiones principales $\sigma_1 + \sigma_2$ en los puntos del modelo.

Pero otros permiten determinar las tensiones principales individualmente, mediante la medida punto por punto de la diferencia de caminos ópticos con la utilización de un interferómetro.

El procedimiento seguido se basa en las *ecuaciones de Favre*

$$\delta_1 = (a \sigma_1 + b \sigma_2)e \quad ; \quad \delta_2 = (a \sigma_2 + b \sigma_1)e \quad (12.11.7)$$

en las que δ_1 y δ_2 son los retardos absolutos, a y b constantes ópticas del material del modelo y e el espesor del mismo.

De estas ecuaciones se obtienen directamente los valores de las tensiones principales

$$\sigma_1 = \frac{a \delta_1 - b \delta_2}{e(a^2 - b^2)} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{a \delta_2 - b \delta_1}{e(a^2 - b^2)} \quad (12.11.8)$$

- BORESI, A. P., y LYNN, P. P.: *Elasticity in Engineering Mechanics*. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs. New Jersey, 1974.
- BORODICH, M. F.: *Theory of Elasticity*. Mir Moscú, 1968.
- BRILLOUIN, L.: *Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité* (2.^a ed.). Masson et Cie. París, 1949.
- BROEK, J. A., VAN DEN: *Elastic Energy Theory*. John Wiley. New York, 1942.
- DALLY, J. W., y RILEY, W. F.: *Experimental stress analysis* (2.^a ed.). McGraw-Hill Kogakusha. Tokio, 1978.
- DUGDALE, D. S., y RUIZ, C.: *Elasticidad para técnicos*. Reverté. Barcelona, 1973.
- FILONENKO-BORODICH, M.: *Theory of Elasticity*. Dover Publications Inc. New York, 1965.
- FROCHT, M. M.: *Photoelasticity*. John Wiley. New York, 1941.
- HEYMAN, J.: *Elements of stress analysis*. Cambridge University Press. Cambridge, 1982.
- LEIPHOLZ, H.: *Theory of Elasticity*. Noordhoff International Publishing. Leyden, 1974.
- LOVE, A. E.: *A treatise on the mathematical theory of Elasticity*. Dover Publications. New York, 1944.
- MUSKHELISHVILI, N. I.: *Some basic problems on the mathematical theory of Elasticity*. P. Noordhoff Ltd. Gröningen, 1953.
- PRESCOTT, J.: *Applied Elasticity*. Dover, New York, 1946.
- REISSMAN, H., y PAWLIK, P. S.: *Elasticity, theory and applications*. John Wiley. New York, 1980.
- SAADA, A. S.: *Elasticity: Theory and applications*. Pergamon Press Inc. New York, 1974.
- SAMARTIN, A.: *Curso de Elasticidad*. Librería Editorial Bellisco. Madrid, 1990.
- SECHLER, E. E.: *Elasticity in Engineering*. Dover. New York, 1968.
- SOKOLNIKOFF, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill. New York, 1956.
- SOLOMON, L.: *Elasticity Linéaire*. Masson et Cie Editeurs. París, 1968.
- SOMMERFELD, A.: *Mechanics of deformable bodies*. Academic Press. New York, 1964.
- SOUTHWELL, R. V.: *An introduction to the Theory of Elasticity*. Dover Publications Inc. New York, 1969.
- TIMOSHENKO-GOODIER. *Teoría de la Elasticidad*. Urmo. Bilbao, 1968.
- TORROJA, E. *Elasticidad*. Dossat. Madrid, 1963.
- WANG, C. T.: *Applied Elasticity*. McGraw-Hill. New York, 1953.

- BORESI, A. P., y LYNN, P. P.: *Elasticity in Engineering Mechanics*. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs. New Jersey, 1974.
- BORODICH, M. F.: *Theory of Elasticity*. Mir Moscú, 1968.
- BRILLOUIN, L.: *Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité* (2.^a ed.). Masson et Cie. París, 1949.
- BROEK, J. A., VAN DEN: *Elastic Energy Theory*. John Wiley. New York, 1942.
- DALLY, J. W., y RILEY, W. F.: *Experimental stress analysis* (2.^a ed.). McGraw-Hill Kogakusha. Tokio, 1978.
- DUGDALE, D. S., y RUIZ, C.: *Elasticidad para técnicos*. Reverté. Barcelona, 1973.
- FILONENKO-BORODICH, M.: *Theory of Elasticity*. Dover Publications Inc. New York, 1965.
- FROCHT, M. M.: *Photoelasticity*. John Wiley. New York, 1941.
- HEYMAN, J.: *Elements of stress analysis*. Cambridge University Press. Cambridge, 1982.
- LEIPHOLZ, H.: *Theory of Elasticity*. Noordhoff International Publishing. Leyden, 1974.
- LOVE, A. E.: *A treatise on the mathematical theory of Elasticity*. Dover Publications. New York, 1944.
- MUSKHELISHVILI, N. I.: *Some basic problems on the mathematical theory of Elasticity*. P. Noordhoff Ltd. Gröningen, 1953.
- PRESCOTT, J.: *Applied Elasticity*. Dover, New York, 1946.
- REISSMAN, H., y PAWLIK, P. S.: *Elasticity, theory and applications*. John Wiley. New York, 1980.
- SAADA, A. S.: *Elasticity: Theory and applications*. Pergamon Press Inc. New York, 1974.
- SAMARTIN, A.: *Curso de Elasticidad*. Librería Editorial Bellisco. Madrid, 1990.
- SECHLER, E. E.: *Elasticity in Engineering*. Dover. New York, 1968.
- SOKOLNIKOFF, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill. New York, 1956.
- SOLOMON, L.: *Elasticity Linéaire*. Masson et Cie Editeurs. París, 1968.
- SOMMERFELD, A.: *Mechanics of deformable bodies*. Academic Press. New York, 1964.
- SOUTHWELL, R. V.: *An introduction to the Theory of Elasticity*. Dover Publications Inc. New York, 1969.
- TIMOSHENKO-GOODIER. *Teoría de la Elasticidad*. Urmo. Bilbao, 1968.
- TORROJA, E. *Elasticidad*. Dossat. Madrid, 1963.
- WANG, C. T.: *Applied Elasticity*. McGraw-Hill. New York, 1953.

- Ángulo de torsión por unidad de longitud, 272
- Aparatos fotoelásticos
 - Polariscopio circular, 532
 - Polariscopio plano, 525
- Autovalores y autovectores
 - de la matriz de deformación, 80
 - de la matriz de tensiones, 23
- Beltrami y Haigh, criterio de, 479
- Birrefringencia accidental, 523
- Brewster, David, 522, 525
- Bridgman, 469, 512
- Castigliano, teoremas de, 442
- Centro de torsión, 284
- Círculos de Mohr
 - de deformaciones, 89
 - de tensiones, 35
- Coefficiente
 - de dilatación lineal, 165
 - de influencia, 431
 - de Lamé, 130
 - de Poisson, 120
 - de seguridad, 120, 473
 - óptico de tensiones, 524
- Componentes intrínsecas
 - del vector deformación unitaria, 83
 - del vector tensión, 13
- Compresión, esfuerzo de, 9
- Condiciones de compatibilidad de la matriz de deformación, 92
- Constante de Bridgman, 512
- Criterio de
 - Beltrami y Haigh, 479
 - Mohr, 486
 - la tensión tangencial octaédrica, 485
 - plastificación, 468
 - Rankine, 474
 - Saint-Venant, 478
 - Tresca, 475
 - Von Mises, 482
- Cuádricas directrices
 - de deformaciones, 88
 - de tensiones, 34
- Cuádricas indicatrices
 - de deformaciones, 86
 - de tensiones, 27
- Cuña plana cargada en la arista de su diedro, 395
- Curvas representativas de un estado elástico plano, 203
- Chapa plana o laja indefinida con taladro circular sometida a tracción o compresión y esfuerzo cortante, 376
- Deformaciones angulares, 81
- Deformación longitudinal unitaria, 83
- Deformaciones principales, 78
- Deformación transversal unitaria, 84
- Diagrama tensión-deformación, 117
- Dilatación cúbica unitaria
 - en coordenadas cartesianas, 78
 - en coordenadas cilíndricas, 334
- Direcciones principales
 - de deformaciones, 77
 - de tensiones, 21
- Disco macizo giratorio, 371
- Disco giratorio con orificio central, 374
- Distribución radial simple de tensiones, 386
- Ecuación característica
 - de la matriz de deformación, 78
 - de la matriz de tensiones, 21
- Ecuación fundamental de la Elasticidad, 151
- Ecuaciones de equilibrio
 - en coordenadas cilíndricas, 327
 - en el contorno, 19
 - interno, 18

- Ecuaciones de
 - Beltrami, 159
 - Favre, 544
 - Lamé, 129
 - Navier, 150
 - Michell, 159
- Elasticidad en coordenadas cilíndricas, 323
- Elipsoide de
 - deformaciones, 86
 - tensiones, 25
- Energía complementaria, 449
- Energía de deformación, 429
- energía potencial total, 439
- Equilibrio elástico, 7
- Equilibrio interno, ecuaciones de, 18
- Esfuerzo
 - cortante, 9
 - normal, 9
- Estado cilíndrico, 45
- Estado de
 - deformación plana, 192, 361
 - tensión homogéneo, 218
 - tensión plana, 193, 363
- Estado esférico, 46
- Estado tensional plano, 193, 363
- Estados elásticos axilimétricos, 334
- Estados elásticos bidimensionales, 191
- Estricción, 119
- Expresiones del potencial interno en función de las
 - deformaciones, 435
 - deformaciones y tensiones, 433
 - fuerzas exteriores, 432
 - tensiones, 435
- Extensómetros de autocompensación de temperatura, 515
- Factor de sensibilidad de una galga, 513
- Filón, solución de, 216
- Flamant-Boussinesq, problema de, 385
- Flexión
 - de una viga en voladizo cargada en su extremo, 224
 - pura, 220
 - simple, 225
- Fórmula de Clapeyron, 438
- Fórmula fundamental de la Fotoelasticidad, 530
- Fotoelasticidad, 522
- Función de
 - Airy, 213, 364
 - alabeo, 278
 - Love, 334
 - Prandtl, 280
- Galgas extensométricas, 511, 516
- Huggenberger, extensómetro de, 510
- Inercia torsional, 285
- Invariantes
 - de la matriz de deformación, 78
 - de la matriz de tensiones, 21
- Isobaras, líneas, 208
- Isoclinas, líneas, 205
- Isocromáticas, líneas, 205
- Isopacas, líneas, 208
- Isostáticas, líneas, 204
- Isoténicas, líneas, 210
- Kirchoff, teorema de unicidad de, 160
- Kirsch, solución de, 377
- Lacas y barnices frágiles, 543
- Lamé
 - coeficientes de, 130
 - elipsoide de, 25
- Ley de
 - Brewster, 525
 - Hooke, 120
- Leyes de
 - Hooke generalizadas, 123
 - Maxwell, 524
- Límite de
 - elasticidad, 118
 - fluencia, 119
 - proporcionalidad, 118
- Línea media, 6
- Líneas de Lüders, 119
- Líneas
 - de máxima tensión cortante, 207
 - isobaras
 - isoclinas, 205
 - isocromáticas, 208
 - isopacas, 208
 - isostáticas, 204
 - isoténicas, 210
- Lüders, líneas de, 119
- Materiales dúctiles, 468
- Materiales frágiles, 468
- Matriz de deformación
 - en coordenadas cartesianas, 77
 - en coordenadas cilíndricas, 328

- Matriz desviadora, 46, 92
- Matriz esférica, 46, 92
- Matriz de tensiones
 - en coordenadas cartesianas, 14
 - en coordenadas cilíndricas, 325
- Método de Moiré, 541
- Métodos experimentales en Elasticidad, 509
- Método extensométrico, 509
- Método interferométrico, 544
- Método de Rayleigh-Ritz, 451
- Método semi-inverso de Saint-Venant, 277
- Módulo de elasticidad transversal, 127
- Módulo de Young, 120
- Mohr, teoría de, 486
- Momento
 - flexor, 110
 - torsor, 10
- Papkovitch, P. F., 152
- Placa semi-indefinida sometida a una fuerza tangencial o a un momento en un punto del borde, 391
- Polariscopio circular, 532
- Polariscopio plano, 525
- Potencial de deformación, 154
- Potencial interno, 429
- Presa de gravedad de perfil triangular, 228
- Principio
 - de la energía complementaria, 449
 - de la energía potencial total, 439
 - de Saint-Venant, 160
 - de superposición, 122
 - de los trabajos virtuales, 435
- Principios variacionales
 - energía complementaria, 446
 - energía potencial total, 439
- Prisma mecánico, 6
- Problema de Boussinesq, 337
- Punto neutro, 205
- Punto singular, circular o isotrópico, 204
- Rankine, criterio de, 477
- Rayleigh-Ritz, método de, 451
- Recubrimientos fotoelásticos, 542
- Representación de Neuber-Papkovitch, 337
- Rigidez a la torsión, 275, 285
- Roseta extensométrica
 - en delta, 520
 - rectangular de tres elementos, 518
- Saint-Venant
 - criterio de, 478
- Separación de las tensiones principales, 537
- Sólido
 - rígido, 4
 - elástico, 5
 - verdadero, 6
- Solución de Filón, 216
- Solución de Kirsch, 377
- Superficie de
 - plastificación, 470
 - rotura, 471
- Tensión equivalente, 474
- Tensiones principales, 21
- Tensiones octaédricas
 - normal, 47
 - tangencial, 47
- Tensión de rotura, 119
- Teorema de
 - Castigliano, 442
 - Duhamel, 160
 - reciprocidad de las tensiones tangenciales, 16
 - reciprocidad de Maxwell-Betti, 439
 - Menabrea, 444
 - unicidad de Kirchhoff, 160
- Teoría de Mohr, 486
- Torsión de barras prismáticas
 - de sección arbitraria, 227
 - de sección circular o anular, 271
 - de sección elíptica, 286
 - de sección rectangular, 296
 - de sección triangular equilátera, 291
- Torsión, introducción a la, 271
- Tracción, esfuerzo de, 9
- Tresca, criterio de, 475
- Tubería cilíndrica de pared gruesa sometida a presión, 367
- Valor de franja, 530
- Vector
 - deformación unitaria, 83
 - de Galerkin, 152
 - tensión, 11
- Von Mises, criterio de, 482