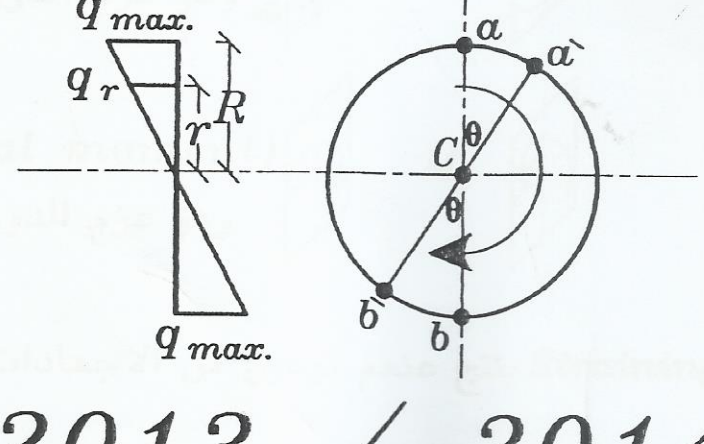
SECOND YEAR CIVIL STRUCTURAL ANALYSIS

Part (1) د/ عتابى

SHEAR STRESS DUE TO TORSIONAL MOMENT



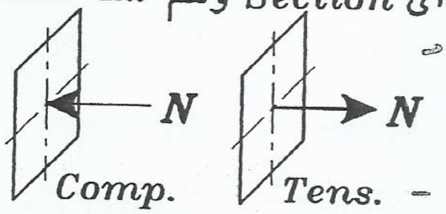
2013 / 2014

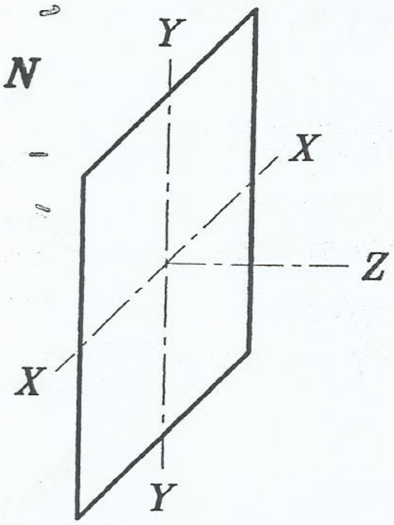
8

SHEAR STRESS DUE TO TORSION

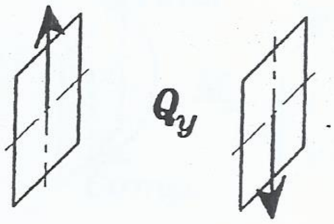
درسنا فى العام السابق الـ***Straining actions*** وهى عبارة عن القوى التى من المحتمل أن تؤثر على أى *Section* وهم ستة ***Straining actions***

1 − N (Normal Force)
و هى القوة فى اتجاه محور *(Z)*
و تكون اما شد أو ضغط

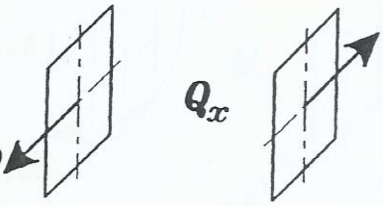




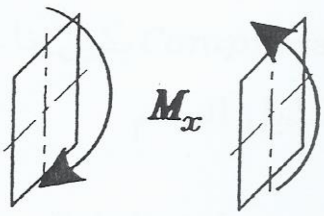
2 − Q_y (Shear Force)
و هى القوة فى اتجاه محور *(Y)*



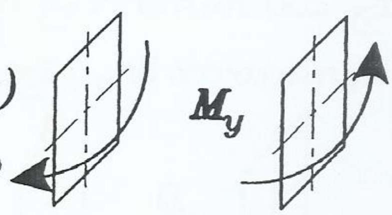
3 − Q_x (Shear Force)
و هى القوة فى اتجاه محور *(X)*



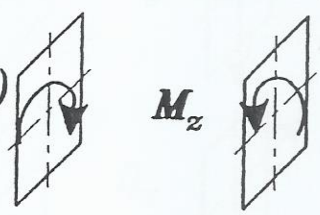
4 − M_x(Bending moment)
وهو عزم الدوران حول محور *(X)*



5 − M_y(Bending moment)
وهو عزم الدوران حول محور *(Y)*



6 − M_z(Torsional moment)
وهو عزم الدوران حول محور *(Z)*

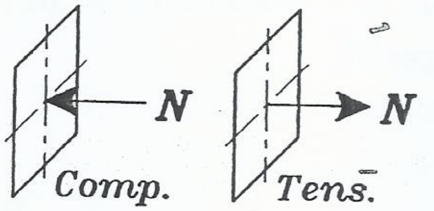


و الستة ***Straining actions*** ينتج عنهم نوعين من الاجهادات و هما

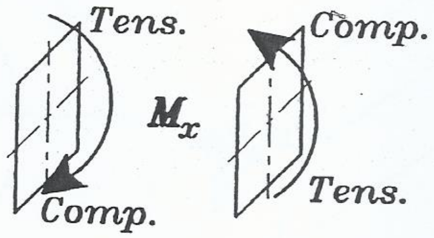
1-Normal Stresses

و هى الـ Stresses التى ينتج عنها ضغط أو شد على الـ Section و قد درسنا هذه الـ Stresses فى العام السابق و الـ Straining actions التى ينتج عنها هذا النوع هم ثلاثة

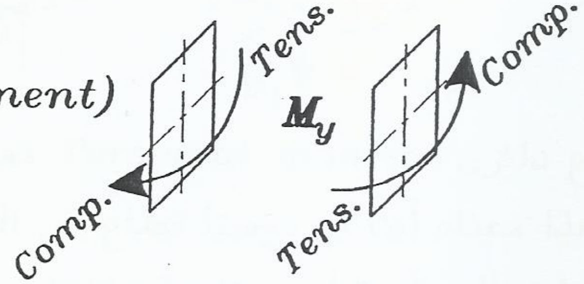
1 − N (Normal Force)



2 − M_x(Bending moment)



3 − M_y(Bending moment)

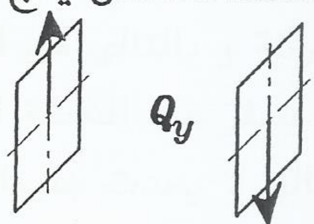


حيث أننا تعلمنا أن الـ Compression يكون ناحية رأس سهم الـ moment و الـ Tension يكون ناحية ذيل السهم .

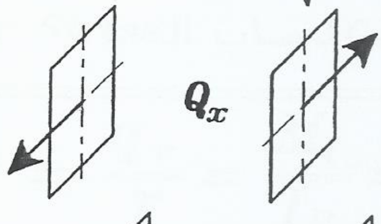
2-Shear Stresses

و هى الـ Stresses التى ينتج عنها Friction مع الـ Section و هذه هى موضوع هذا الدرس و الـ Straining actions التى ينتج عنها هذا النوع هم ثلاثة

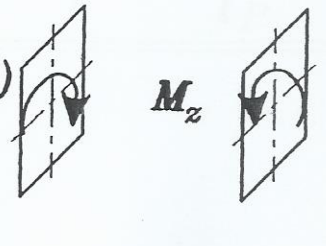
1 − Q_y (Shear Force)



2 − Q_x (Shear Force)

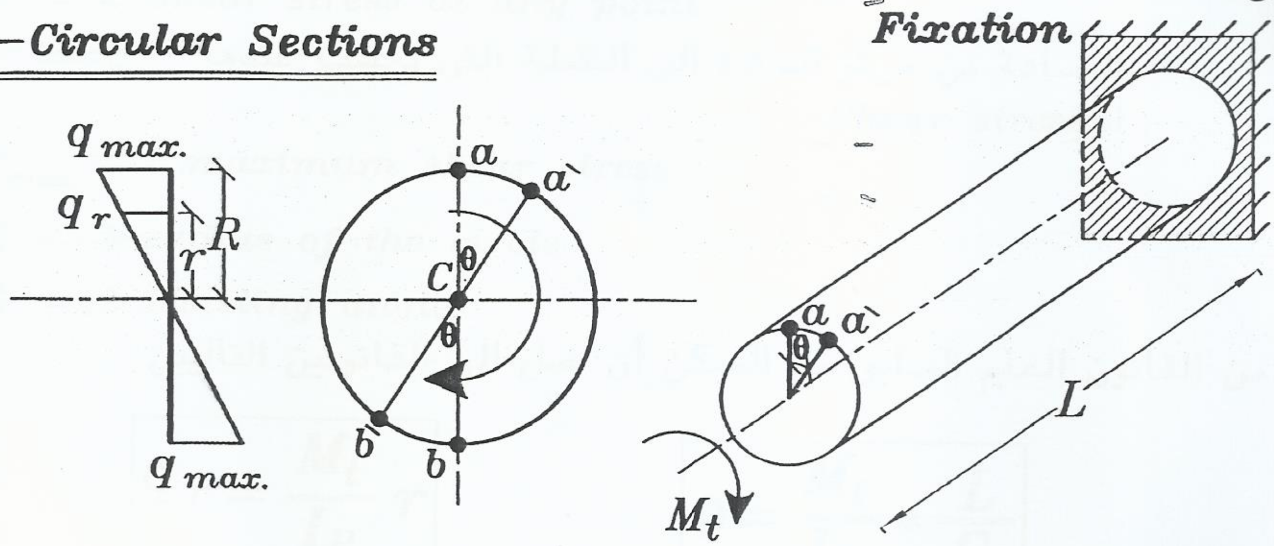


3 − M_z(Torsional moment)



و هنا مايهمنا هو حساب الـ *Shear Stresses* نتيجة الـ *Torsional moment*
حيث أننا درسنا فى الدروس السابقة الـ *Shear Stresses* نتيجة الـ *Forces*.
سوف ندرس الـ *Shear Stresses* نتيجة الـ *Torsional moment* على جميع أنواع القطاعات و لكن نبدأ بالقطاعات الدائرية (*Circular Sections*).

1 - Circular Sections



اذا اثرنا على قطاع دائرى *Torsional moment* فهذا معناه أن الكمَرة يحدث لها *Twisting* و هذا معناه أننا لو درسنا قطاع فى الكمرة نجد أنه يحدث له احتكاك مع القطاعات المجاورة له و نتيجة هذا الـ *Friction* ينتج الـ *Shear Stresses*.

نقطة (a) تتحرك الى ($a`$) نتيجة الـ *Torsional moment* و بالمثل (b)
أما نقطة (C) و حيث أن الـ *Shear Stress* يزداد كلما زاد الاحتكاك فهذا معناه أن اكبر *Shear Stress* موجود عند النقط الموجودة على حدود الدائرة حيث أنها النقط التى يحدث لها أكبر حركة و بالتالى هى النقط التى عليها أكبر *Friction* كما يكون الـ *Shear Stress* بصفر عند النقطة الموجودة فى مركز الدائرة (C) و ذلك لانها لا تتحرك و بالتالى لا يحدث عليها *Friction*.
و تكون المعادلة الـ *General* لحساب الـ *Shear Stress* نتيجة الـ *Torsion* كالتالى

$$\boxed{\frac{q_{max.}}{R} = \frac{q_r}{r} = \frac{M_t}{I_P} = \frac{\theta G}{L}}$$

Where:

$I_P \Longrightarrow$ *Polar moment of inertia* $= I_x + I_y$

$L \Longrightarrow$ *Length of member from the fixed point*

$G \Longrightarrow$ *Shear modulus* و اذا لم يعطى نأخذه $800 t \backslash Cm^2$

$q \Longrightarrow$ *Shear stress at any point*

$r \Longrightarrow$ المسافة من مركز الدائرة الى النقطة التى نحسب عندها ال *Shear stress*

$q_{max.} \Longrightarrow$ *maximum shear stress*

$R \Longrightarrow$ *radius of the circle*

$\theta \Longrightarrow$ *Twisting angle*

و من القانون العام السابق من الممكن أن نصل الى القانونين التاليين

$$\boxed{q_r = \frac{M_t}{I_P} r}$$

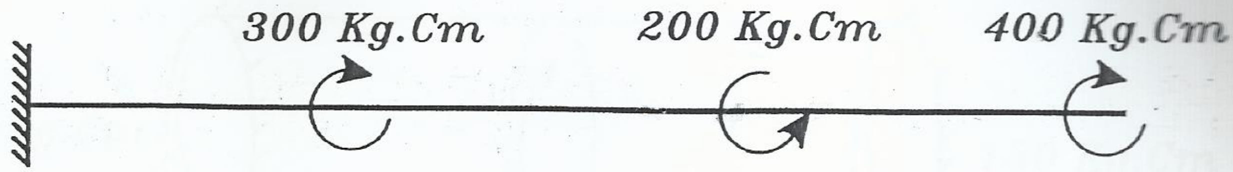
$$\boxed{\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}}$$

و لمعرفة أكبر *Shear stress* على أى كمرة نحتاج الى أكبر قيمة لل *Torsion* على الكمرة و لذلك نحتاج الى رسم *Diagram* يعبر عن قيم ال *Torsion* عند أى *Section* فى الكمرة و يسمى بال *Torsional moment diagram (T.M.D)* مثل ال *(B.M.D&S.F.D)* .

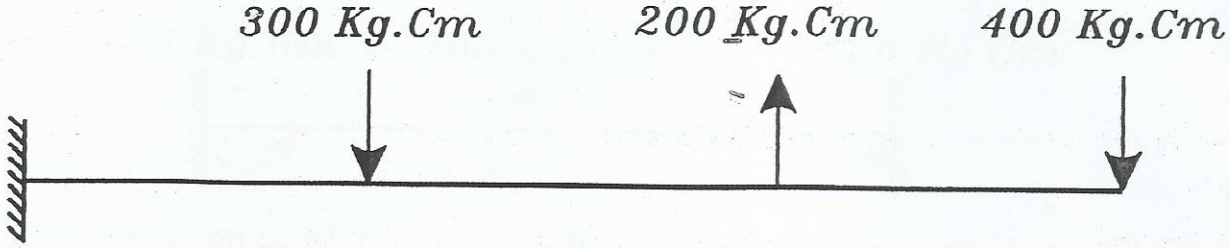
طريقة رسم ال*(T.M.D)* :

١- نتخيل كما لو كان كل *Torsional moment* عبارة عن *Shear force* مع الاخذ فى الاعتبار الاتجاهات حيث نفترض مثلا أن ال *moment* اللى بيلف مع عقارب الساعة تكون ال *Shear force* التى نضعها بدلا منه لاعلى و ال *moment* اللى بيلف عكس عقارب الساعة تكون ال *Shear force* التى نضعها بدلا منه لاسفل .

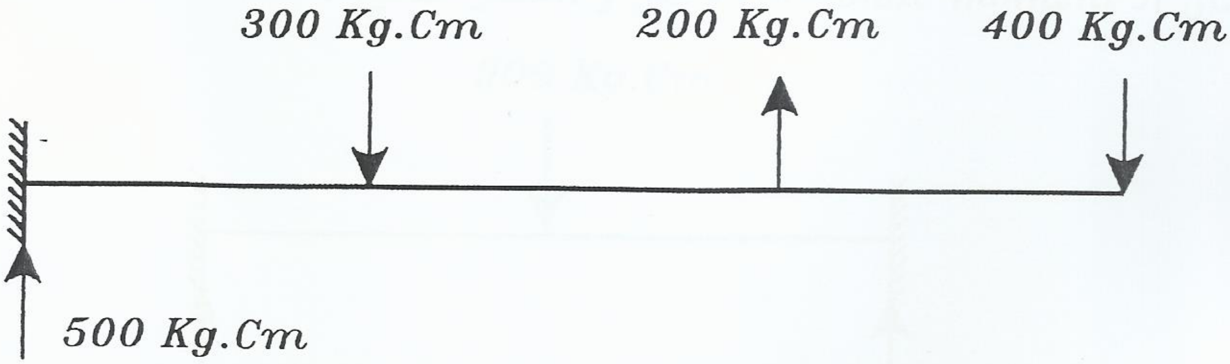
٢- نرسم ال *(T.M.D)* بالظبط كما لو كنا نرسم *(S.F.D)* .



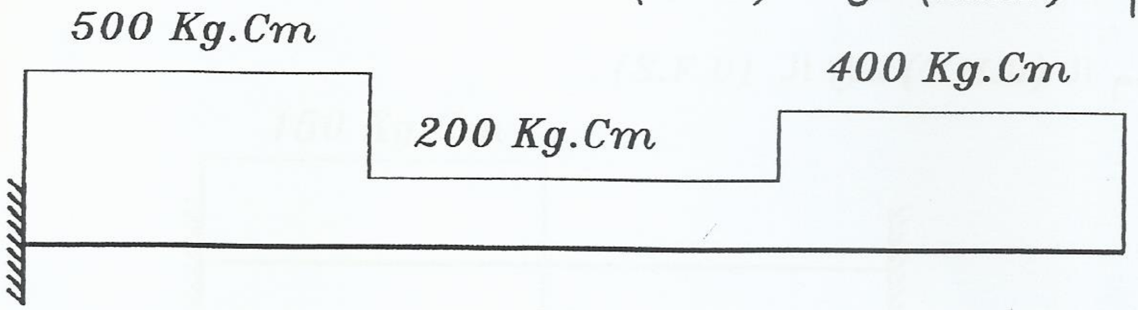
نفترض أن اتجاه الدوران عكس عقارب الساعة تكون القوة التى سنضعها مكان الـ Torsional moment لاعلى و العكس صحيح .



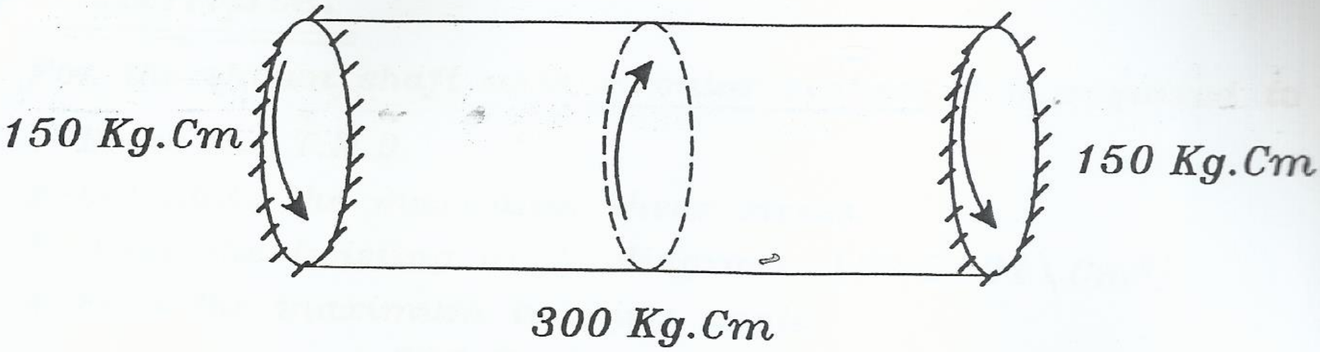
ثم نحسب الـ Reaction لهذه الكمرة عن طريق $\Sigma Y = 0$

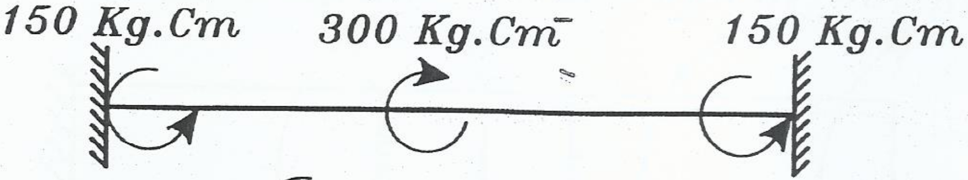


ثم نرسم الـ (T.M.D) مثل الـ (S.F.D)



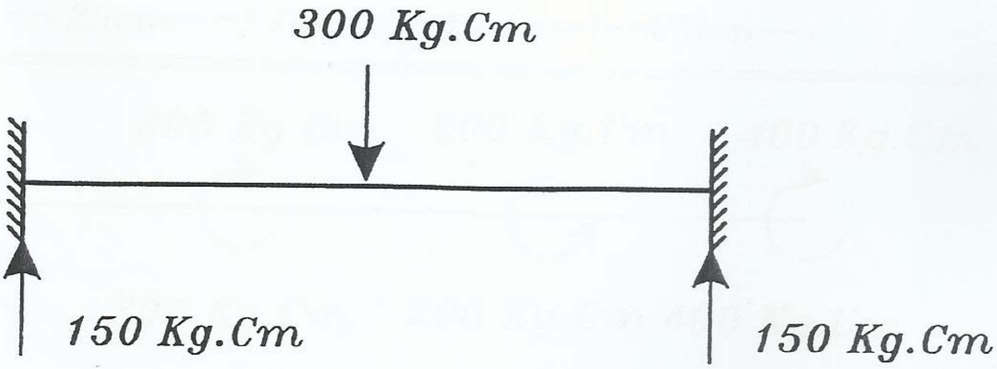
T.M.D



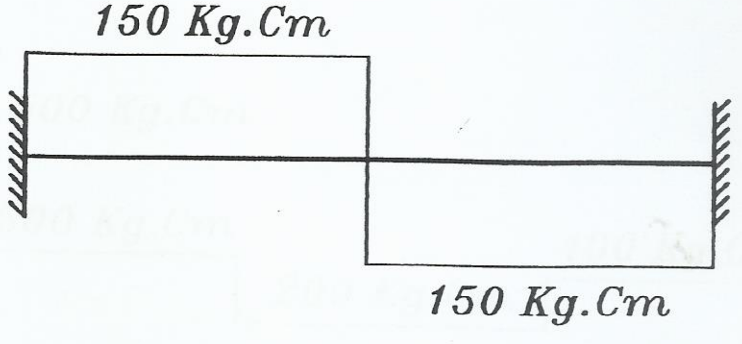


نفترض أن اتجاه الدوران عكس عقارب الساعة تكون القوة التى سنضعها

مكان ال *Torsional moment* لاعلى و العكس صحيح .



ثم نرسم ال (T.M.D) مثل ال (S.F.D)



T.M.D

Example:

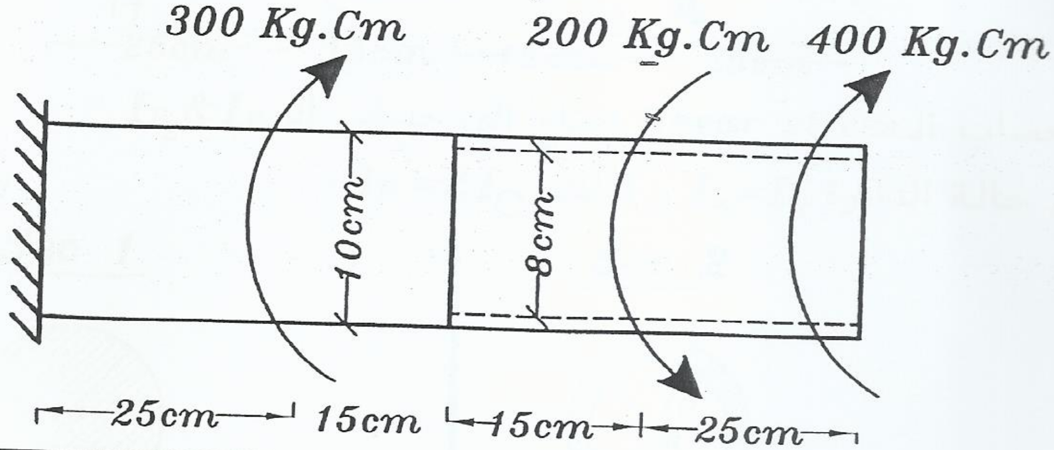
For the shown shaft with circular section it is required to :

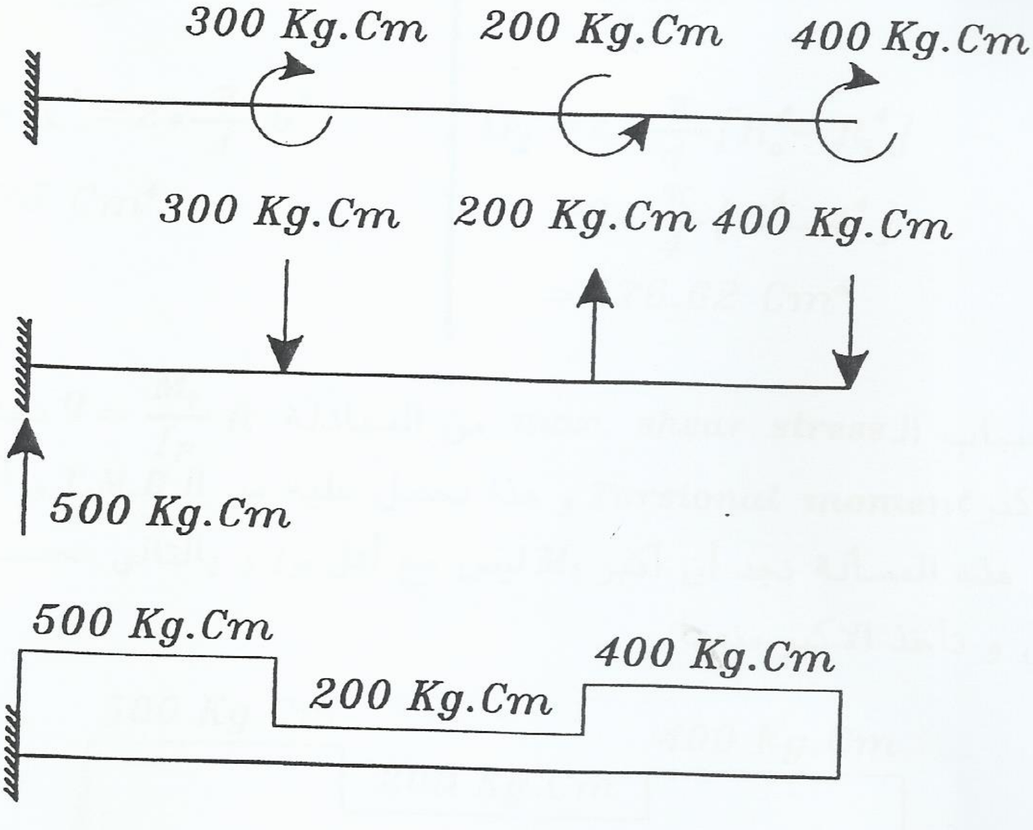
1-Draw the T.M.D.

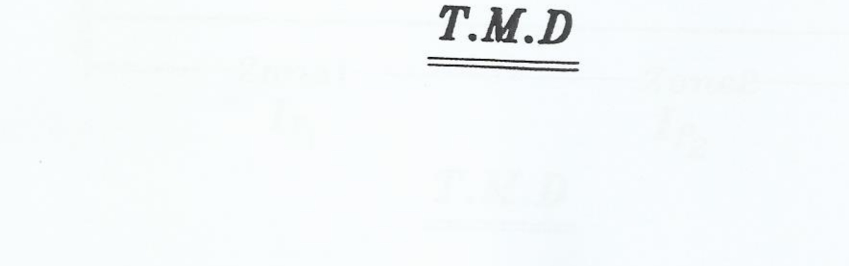
2-Calculate the maximum shear stress.

3-Draw the twisting angle diagram. ($G = 700 t \backslash Cm^2$)

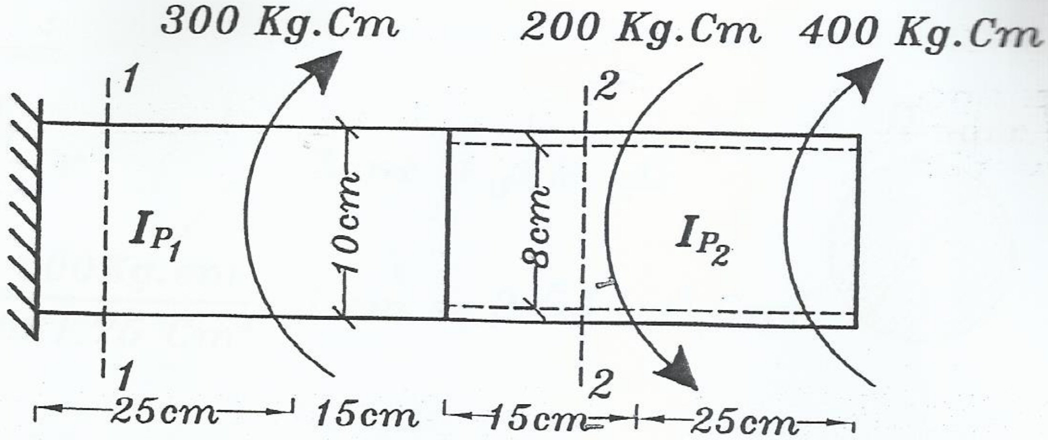
4-Find the maximum twisting angle.







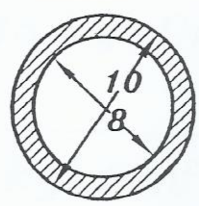
T.M.D



و لحساب الـ Shear stress نحتاج الى حساب الـ I_{P_2} & I_{P_1}

و فى حالة الدائرة $I_x = I_y$ و لذلك $I_P = 2I_O$ $\qquad I_P = I_x + I_y$

Sec 2



$$I_{P_2} = 2 * \frac{\pi}{4}[R_o^4 - R_i^4]$$

$$= 2 * \frac{\pi}{4}[5^4 - 4^4]$$

$$= 576.62 \ Cm^4$$

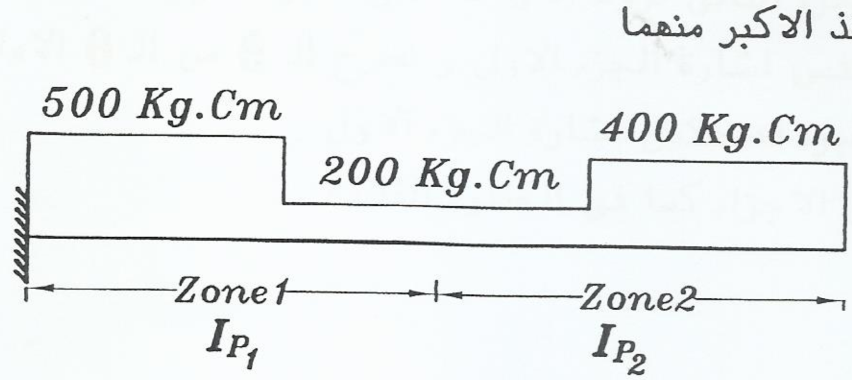
Sec 1

$$I_{P_1} = 2 * \frac{\pi}{4} R^4 = 2 * \frac{\pi}{4} 5^4$$

$$= 981.75 \ Cm^4$$

و لحساب الـ max. shear stress من المعادلة $q = \frac{M_t}{I_P} R$ نجد أننا نحتاج الى أكبر Torsional moment و هذا نحصل عليه من الـ T.M.D و أقل I_P

و فى هذه المسألة نجد أن أكبر M_t ليس مع أقل I_P و بالتالى نحسب الـ q مرتين و نأخذ الاكبر منهما



T.M.D

Zone 1 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

Zone 1 فى M_t أكبر

$$q_{max.} = \frac{500 Kg.cm}{981.75 \ Cm^4} * 5 \ cm = 2.54 \ kg \backslash Cm^2$$

Zone 2 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

Zone 2 فى M_t أكبر

$$q_{max.} = \frac{400 Kg.cm}{576.62 \ Cm^4} * 5 \ cm = 3.45 \ kg \backslash Cm^2$$

$$\boxed{q_{max.} = 3.45 \ kg \backslash Cm^2}$$

For twisting angle diagram

هو عبارة عن *diagram* يوضح قيمة الـ *Twisting angle* عند كل نقطة من نقاط الكمرة و خطوات رسمه كالتالى .

١- نقسم الكمرة الى أجزاء عند كل تغير فى الـ*Section* أو تغير فى الـ*T.M.D* و نحسب الـ θ لكل جزء .

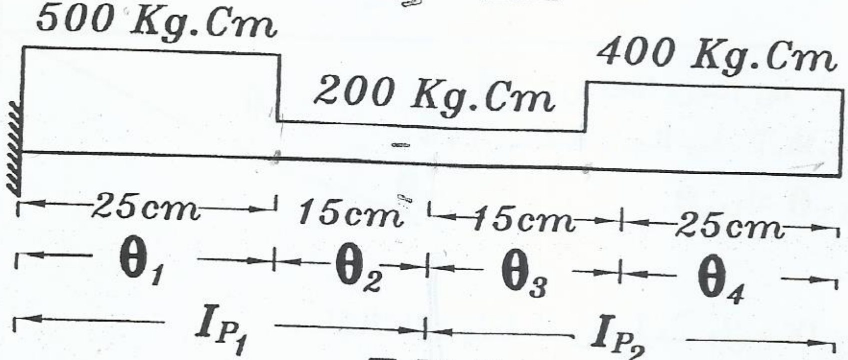
٢- نبدأ من النقطة الثابتة أى التى لا يحدث عندها دوران و نرسم الـ θ لاول جزء حسب اختيارنا فوق الكمرة أو تحتها و غالبا تكون النقطة الثابتة *Fixation*.

٣- بالنسبة للجزء الثانى نزود الـ θ له على الجزء الاول اذا كان الـ *T.M.D* فى هذا الجزء له نفس اشارة الجزء الاول و نطرح الـ θ من الـ θ الاولى اذا كان الـ*T.M.D* فى هذا الجزء له عكس اشارة الجزء الاول .

٤- نكمل باقى الاجزاء كما فى الخطوة الثالثة .

١- تقسم الكمرة الى أجزاء عند كل تغير فى ال$Section$ أو تغير فى ال$T.M.D$ و نحسب ال θ لكل جزء.

$$\boxed{\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}}$$



T.M.D

$$\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}$$

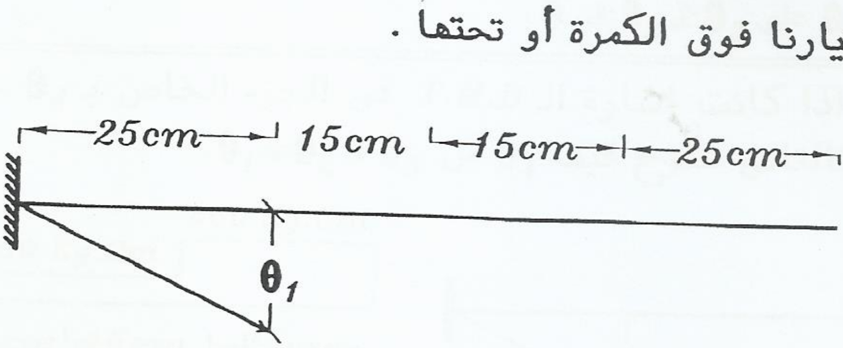
$$\theta_1 = \frac{0.5\ \ t.cm}{981.75\ cm^4} * \frac{25cm}{700\, t \setminus Cm^2} = 0.0000181\ rad.$$

$$\theta_2 = \frac{0.2\ \ t.cm}{981.75\ cm^4} * \frac{15cm}{700\, t \setminus Cm^2} = 0.0000043\ rad.$$

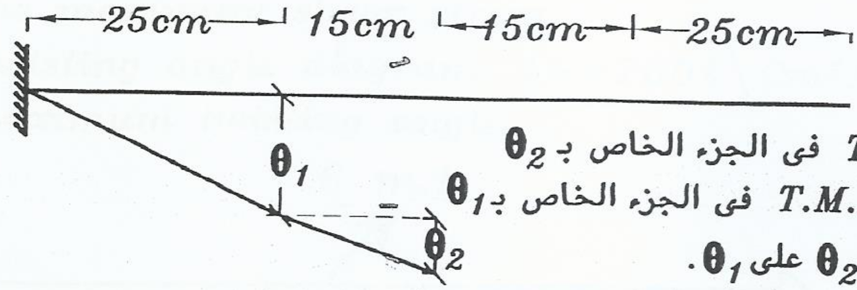
$$\theta_3 = \frac{0.2\ \ t.cm}{576.62\ cm^4} * \frac{15cm}{700\, t \setminus Cm^2} = 0.0000074\ rad.$$

$$\theta_4 = \frac{0.4\ \ t.cm}{576.62\ cm^4} * \frac{25cm}{700\, t \setminus Cm^2} = 0.000024\ \ rad.$$

٢- نبدأ من النقطة الثابتة أى التى لا يحدث عندها دوران و نرسم ال θ لاول جزء حسب اختيارنا فوق الكمرة أو تحتها.

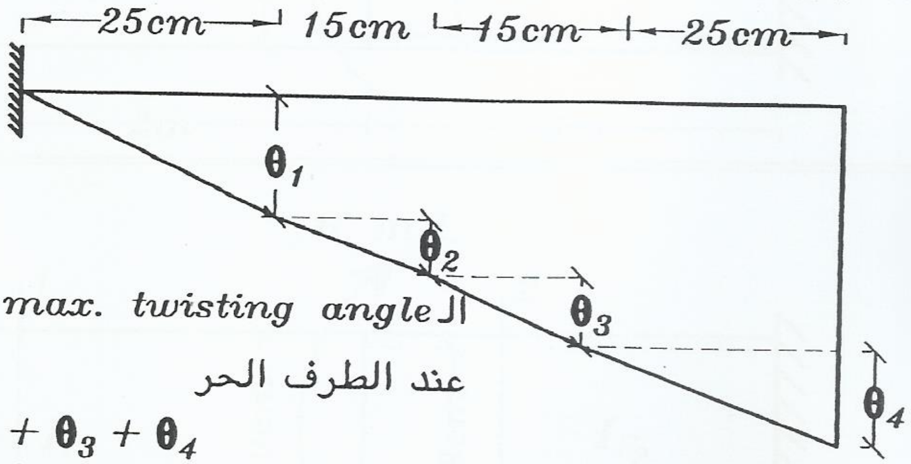


٣- بالنسبة للجزء الثانى نزود الـ θ له على الجزء الاول اذا كان الـ $T.M.D$ فى هذا الجزء له نفس اشارة الجزء الاول و نطرح الـ θ من الـ θ الاولى اذا كان الـ$T.M.D$ فى هذا الجزء له عكس اشارة الجزء الاول .



اشارة الـ $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_2
مثل اشارة الـ $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـθ_1
و بالتالى نجمع θ_2 على θ_1.

٤- نكمل باقى الاجزاء كما فى الخطوة الثالثة .



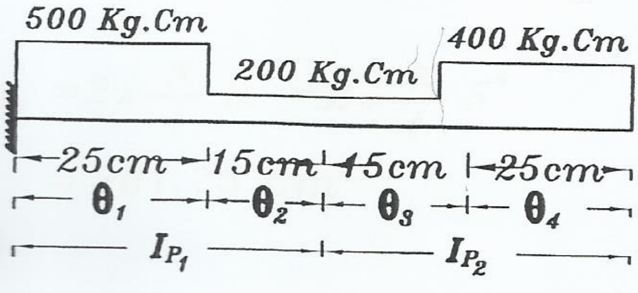
الـ $max.\ twisting\ angle$ فى نهاية الكمرة عند الطرف الحر

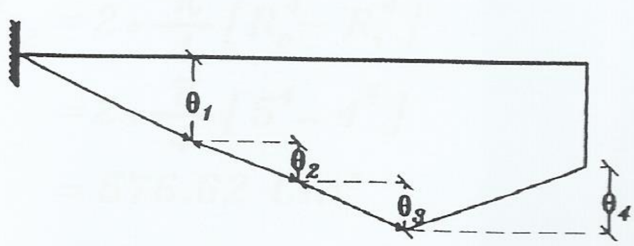
$$\theta_{max.} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$$
$$= 0.000269\ rad.$$

اشارة الـ $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_3 مثل اشارة الـ $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـθ_1
و بالتالى نجمع θ_3 على $\theta_1 \& \theta_2$.

اشارة الـ $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_4 مثل اشارة الـ $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـθ_1
و بالتالى نجمع θ_4 على $\theta_1 \& \theta_2 \& \theta_3$.

فى حالة مثلا اذا كانت اشارة الـ $T.M.D$ فى الجزء الخاص بـ θ_4 عكس الجزء الخاص بـ θ_1 كالتالى نطرح قيمة θ_4 من $\theta_1 \& \theta_2 \& \theta_3$.





$$\theta_{max.} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

Example:

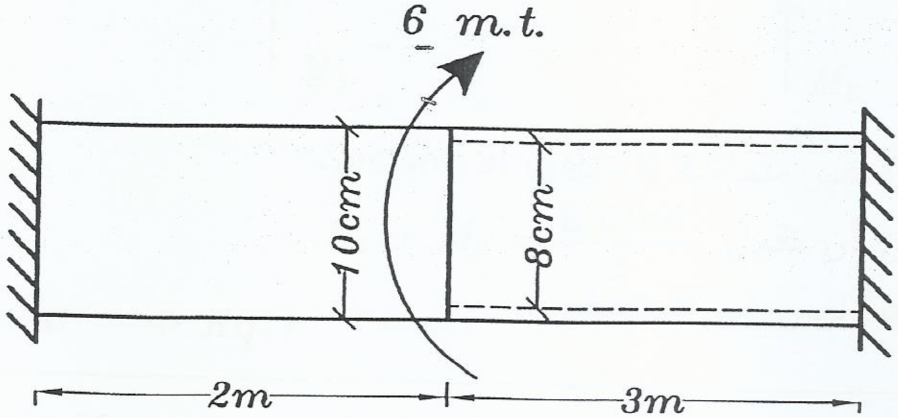
For the shown shaft with circular section it is required to :

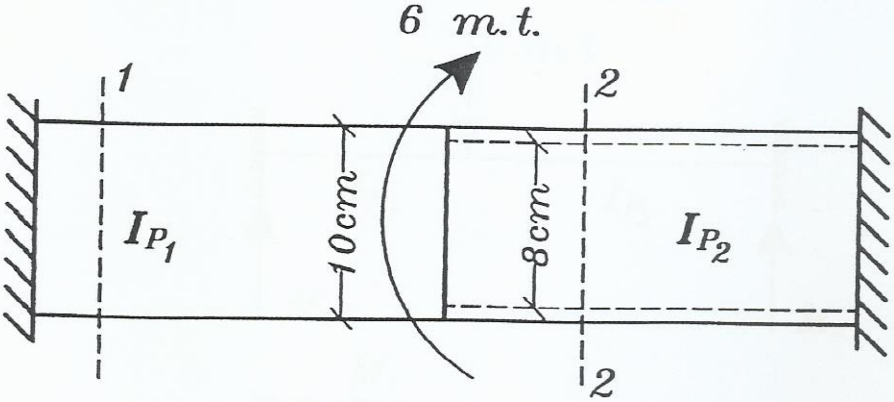
1-Draw the T.M.D.

2-Calculate the maximum shear stress.

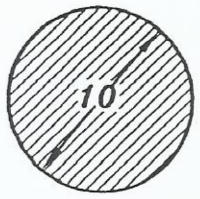
3-Draw the twisting angle diagram. ($G = 700 t \backslash Cm^2$)

4-Find the maximum twisting angle.





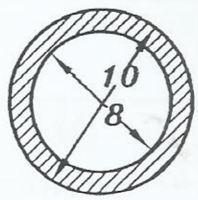
Sec 1



$$I_{P_1} = 2 * \frac{\pi}{4} R^4 = 2 * \frac{\pi}{4} 5^4$$

$$= 981.75 \ Cm^4$$

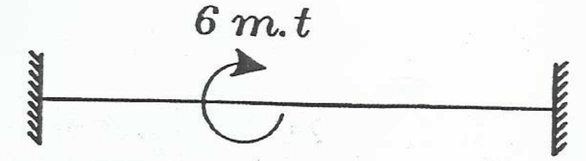
Sec 2

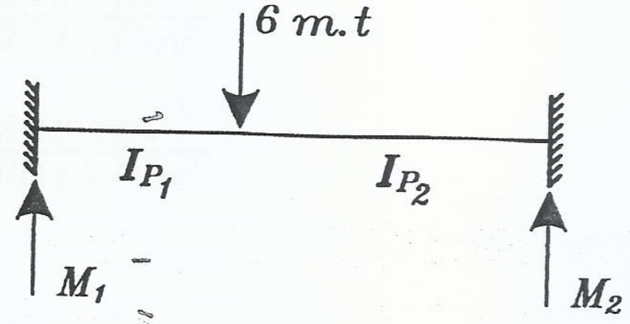


$$I_{P_2} = 2 * \frac{\pi}{4} [R_o^4 - R_i^4]$$

$$= 2 * \frac{\pi}{4} [5^4 - 4^4]$$

$$= 576.62 \ Cm^4$$





خد بالك الكمرة غير متماثلة لاختلاف ال Section

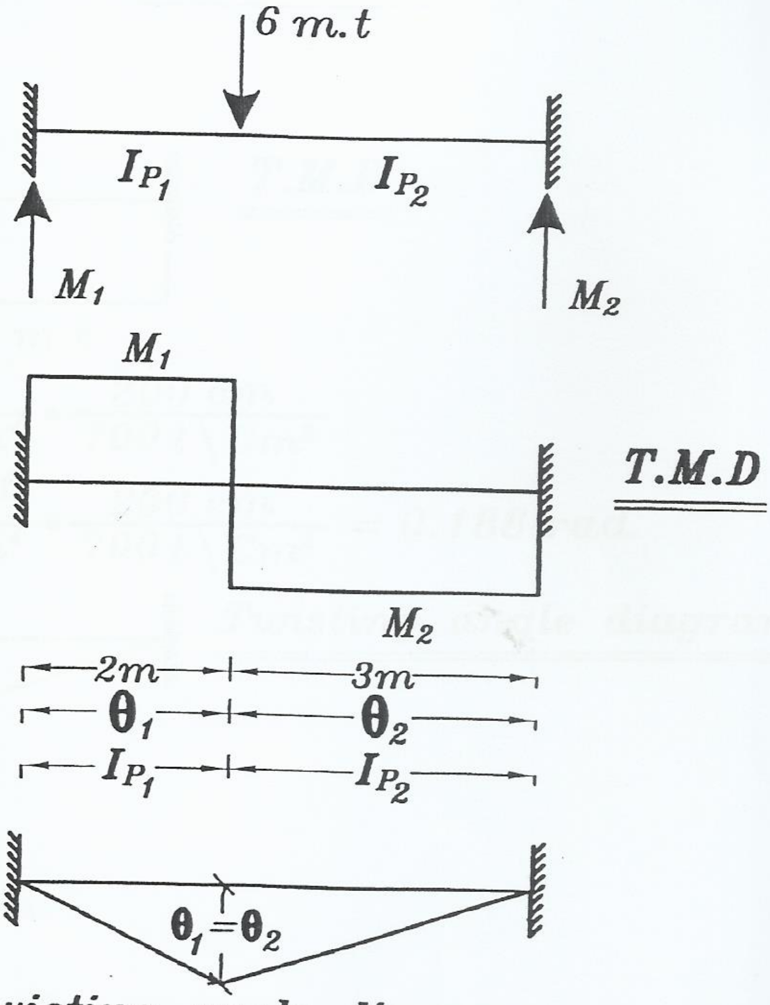
و لذلك لا يمكن أن نقول $M_1 + M_2 = \frac{\Sigma\, Load}{2}$

كما أن ال Load ليس فى المنتصف

$$\Sigma Y = 0$$

$$M_1 + M_2 = 6 \Longrightarrow Eq.1$$

For twisting angle diagram



Twisting angle diagram

$$\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}$$

$$\theta_1 = \frac{M_1}{981.75\ cm^4} * \frac{200\ cm}{700\ t\backslash Cm^2}$$

$$\theta_2 = \frac{M_2}{576.62\ cm^4} * \frac{300\ cm}{700\ t\backslash Cm^2}$$

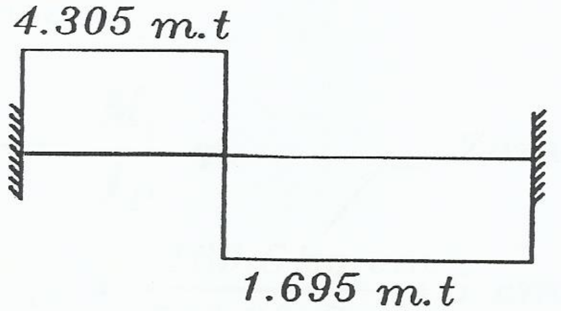
$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\frac{M_1}{981.75\ cm^4} * \frac{200\ cm}{\cancel{700\ t\backslash Cm^2}} = \frac{M_2}{576.62\ cm^4} * \frac{300\ cm}{\cancel{700\ t\backslash Cm^2}}$$

$$M_1 = 2.54 M_2 \Longrightarrow Eq.2$$

Solving the two equations

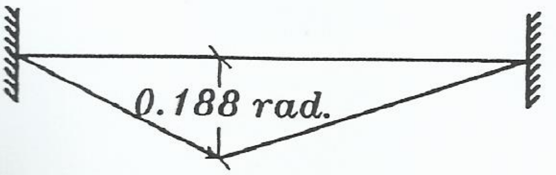
$\boxed{M_1 = 4.305\ m.t}$ $\boxed{M_2 = 1.695\ m.t}$



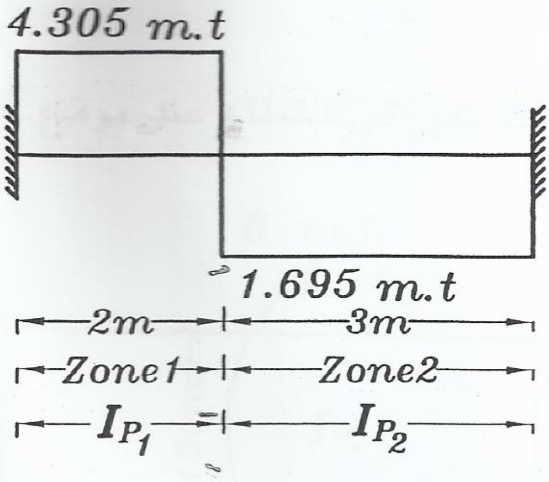
T.M.D

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{M_1}{981.75\ cm^4} * \frac{200\ cm}{700\ t\backslash Cm^2}$$

$$= \frac{430.5\ cm.t}{981.75\ cm^4} * \frac{200\ cm}{700\ t\backslash Cm^2} = 0.188\ rad.$$



Twisting angle diagram



T.M.D

Zone 1 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P}\, r$$

أكبر M_t فى Zone 1

$$q_{max.} = \frac{430.5\ kg.cm}{981.75\ Cm^4} * 5\ cm = 2.19\ kg\backslash Cm^2$$

Zone 2 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P}\, r$$

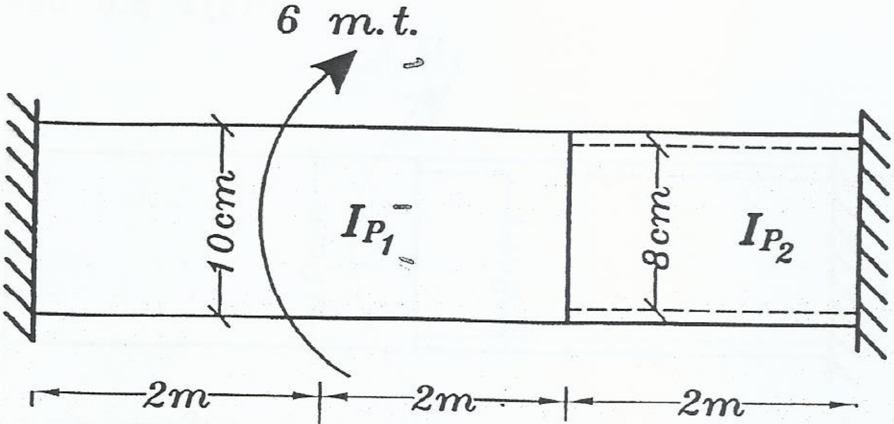
أكبر M_t فى Zone 2

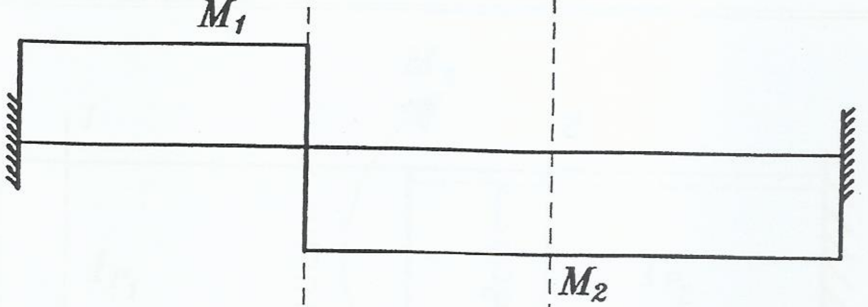
$$q_{max.} = \frac{169.5\ kg.cm}{576.62\ Cm^4} * 5\ cm = 1.46\ kg\backslash Cm^2$$

$$\boxed{q_{max.} = 2.19\ kg\backslash Cm^2}$$

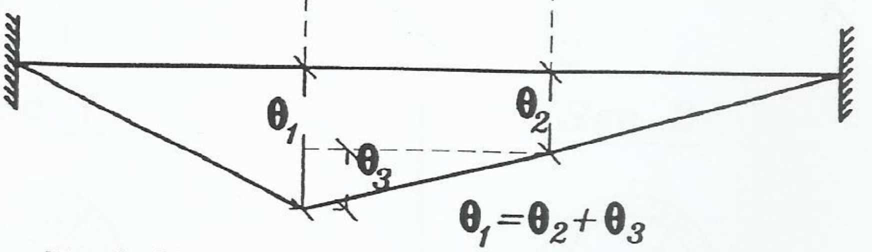
فكرة

فى نفس المسألة السابقة اذاحدث تغير فى القطاع عند موضع أخر غير تغير الـ $T.M.D$.





T.M.D



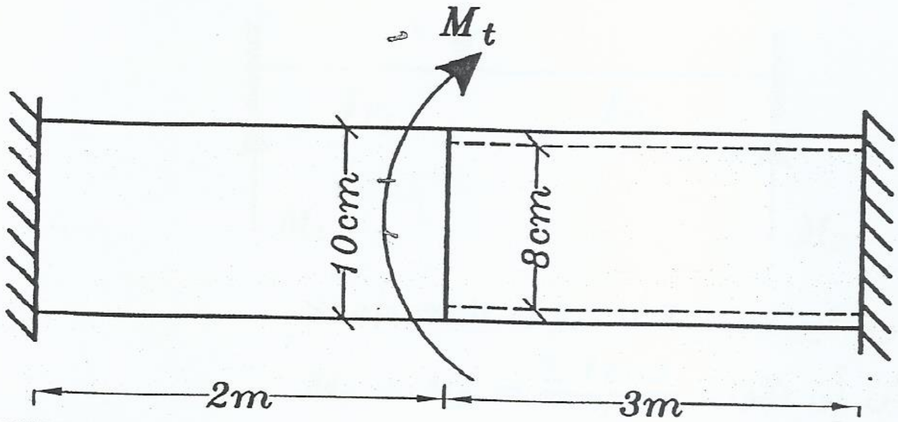
Twisting angle diagram

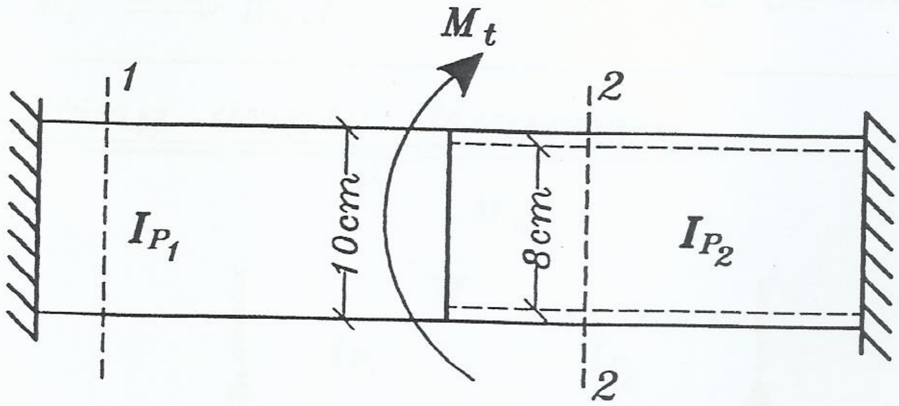
$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$$

$$\frac{M_1}{I_{P_1}} * \frac{\overset{cm}{200}}{G} \qquad \frac{M_2}{I_{P_2}} * \frac{\overset{cm}{200}}{G} \qquad \frac{M_2}{I_{P_1}} * \frac{\overset{cm}{200}}{G}$$

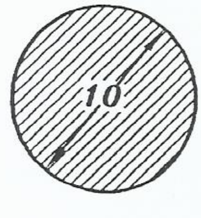
Example:

For the shown shaft with circular section it is required to find the maximum value of (M_t) so that the shear stress doesn't exceed 0.8 t\cm² .





Sec 1



$$I_{P_1} = 2 * \frac{\pi}{4} R^4 = 2 * \frac{\pi}{4} 5^4$$

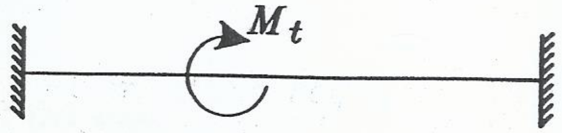
$$= 981.75 \ Cm^4$$

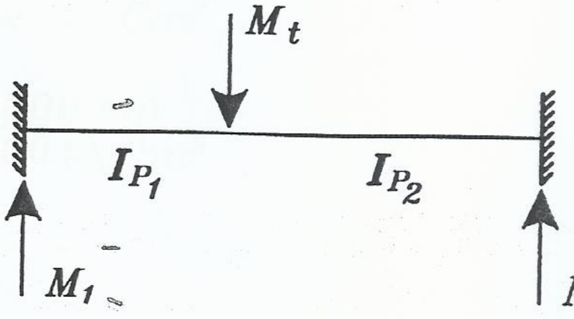
Sec 2

$$I_{P_2} = 2 * \frac{\pi}{4} [R_o^4 - R_i^4]$$

$$= 2 * \frac{\pi}{4} [5^4 - 4^4]$$

$$= 576.62 \ Cm^4$$





خذ بالك الكمرة غير متماثلة لاختلاف الـ *Section*

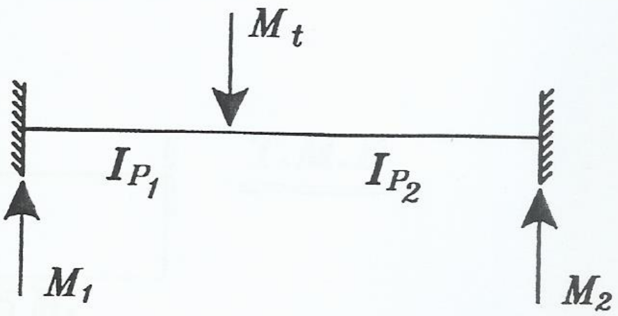
و لذلك لا يمكن أن نقول $M_1 + M_2 = \frac{\Sigma\ Load}{2}$

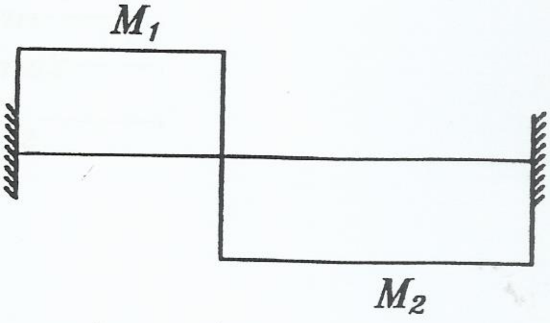
كما أن الـ *Load* ليس فى المنتصف

$\Sigma Y = 0$

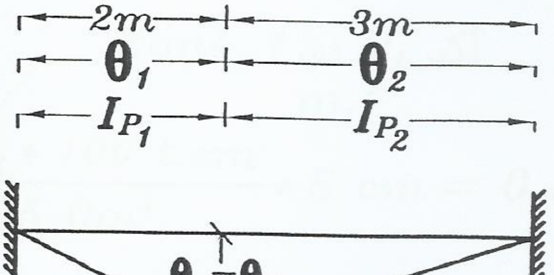
$M_1 + M_2 = M_t \Longrightarrow Eq.1$

For twisting angle diagram





T.M.D



Twisting angle diagram

$$\theta = \frac{M_t}{I_P} * \frac{L}{G}$$

$$\theta_1 = \frac{M_1}{981.75\ cm^4} * \frac{200\ cm}{700\ t \backslash Cm^2}$$

$$\theta_2 = \frac{M_2}{576.62\ cm^4} * \frac{300\ cm}{700\ t \backslash Cm^2}$$

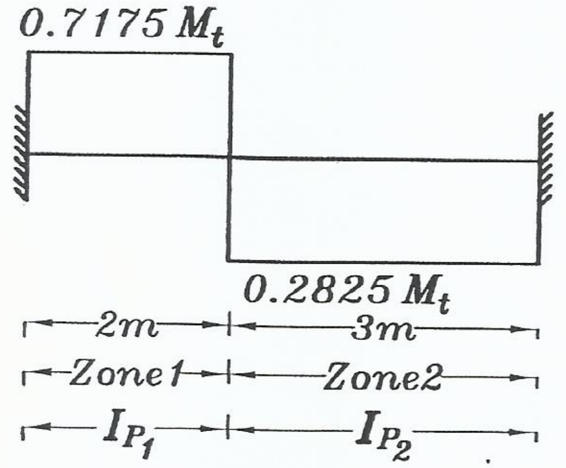
$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\frac{M_1}{981.75\ cm^4} * \frac{200\ cm}{\cancel{700\ t \backslash Cm^2}} = \frac{M_2}{576.62\ cm^4} * \frac{300\ cm}{\cancel{700\ t \backslash Cm^2}}$$

$M_1 = 2.54 M_2 \Longrightarrow Eq.2$

__*Solving the two equations*__

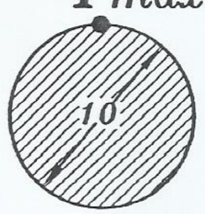
$\boxed{M_1 = 0.7175 M_t\ m.t}$ $\boxed{M_2 = 0.2825 M_t\ m.t}$



__*T.M.D*__

__*Zone 1 .:*__

$q_{max.}$



$$q_r = \frac{M_t}{I_P} r$$

أكبر M_t في Zone 1
m.t

$$q_{max.} = \frac{0.7175 M_t * 100\ t.cm}{981.75\ Cm^4} * 5\ cm = 0.80\ t \backslash Cm^2$$

$\boxed{M_t = 2.189\ m.t}$

Zone 2 :

$$q_r = \frac{M_t}{I_P}\, r$$

Zone 2 فى M_t أكبر
$m.t$

$$q_{max.} = \frac{0.2825 M_t * 100 \ t.cm}{576.62 \ Cm^4} * 5 \ cm = 0.80 \ t\backslash Cm^2$$

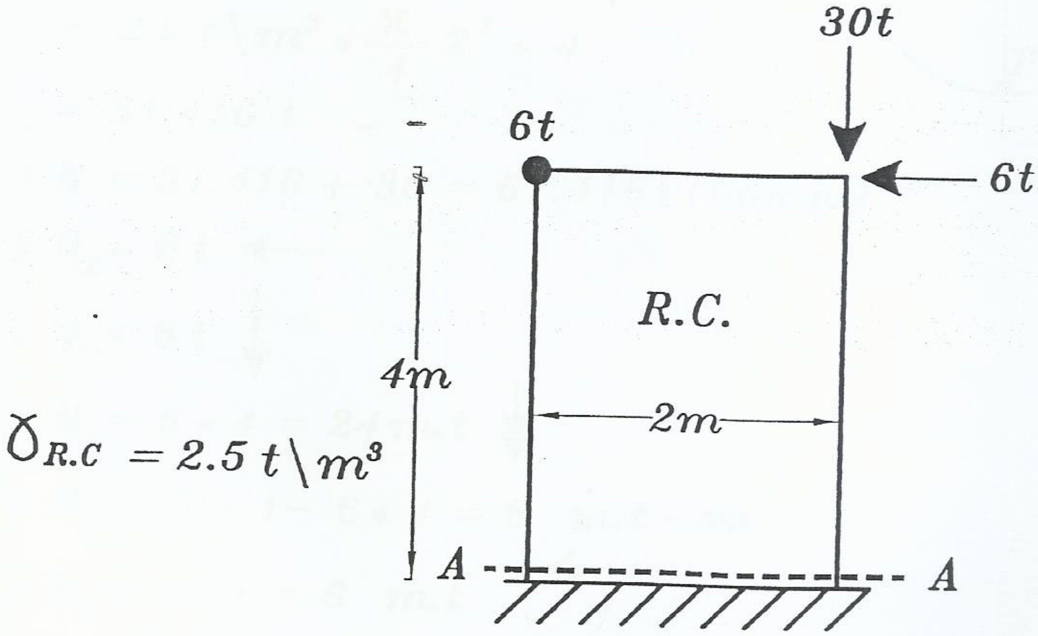
$$\boxed{M_t = 3.283 \ m.t}$$

نأخذ الاصغر من القيمتين

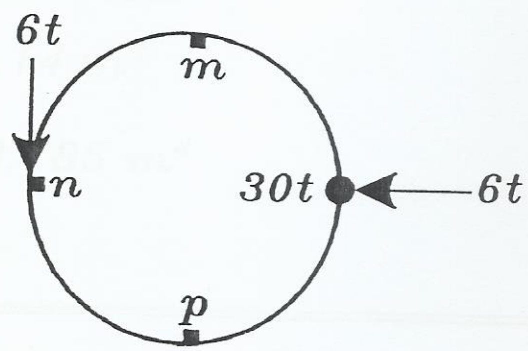
$$\boxed{M_t = 2.189 \ m.t}$$

Example:

For the shown R.C. pier which subjeted to the shown loads its required to find the straining actions at sec A–A and find the shear stresses at points (m , n and p) at sec A–A .



Elevation

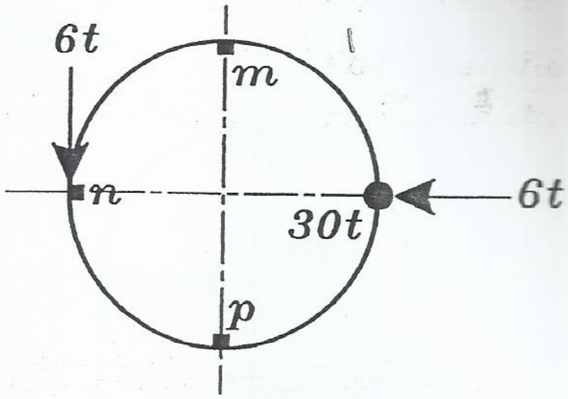


Plan

ال *Shear stresses* تنتج من ثلاثة *Straining actions* و هم Q_x & Q_y & M_t
و لذلك فى هذه المسألة سوف نحسب ال *Straining actions* أولا حتى نحدد
ال *Straining actions* التى تسبب ال *Shear stresses* .

Sec A–A

Straining actions



$Weight = \gamma_{R.C} * V$

$= 2.5\ t\backslash m^3 * \overset{A}{\frac{\pi}{4} 2^2} * \overset{h}{4}$

$= 31.416\ t$

$N = 31.416 + 30 = \mathbf{61.416\,t}$ (Comp.)

$Q_x = 6\ t$ ←

$Q_y = 6\ t$ ↓

$M_x = 6 * 4 = 24\ m.t$ ↡

$M_y = 30 * 1 - 6 * 4 = 6\ \ m.t$ ↠

$M_t = 6 * 1 = 6\ \ m.t$

Properties of area

$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} 2^2 = 3.14\ m^2$

$I = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} 1^4 = 0.785\ m^4$

$I_P = 2 * I = 1.57\ m^4$

الـ Shear stresses تنتج من ثلاثة Straining actions و هم Q_x & Q_y & M_t و الثلاثة موجودين فى هذا المثال و لذلك سوف نجمع الـ Shear stresses عند كل نقطة المحسوبة نتيجة الـ Q_x & Q_y & M_t

$$\boxed{q_r = \frac{M_t}{I_P}\, r}$$

الـ Shear stresses نتيجة M_t عند أى نقطة على بعد r من مركز الدائرة و الـ maximum يكون على المحيط الخارجى أى على بعد 1m

$$\boxed{q = \frac{4\,Q}{3\,A}}$$

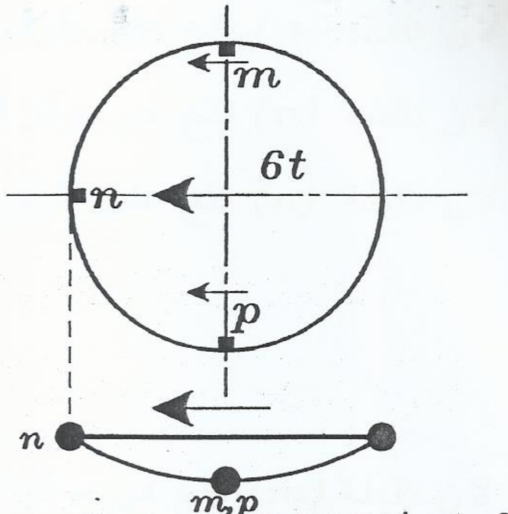
الـ Shear stresses نتيجة Q_x Or Q_y و-هذا هو الـ maximum و يكون عند مركز الدائرة

Shear stress due to (Q_x)

$$q = \frac{4Q}{3A}$$

$$q_{max.} = \frac{4}{3} * \frac{6\,t}{3.14\ m^2}$$

$$= 2.546\,t \backslash m^2$$



$q_{max.} = 2.546\,t \backslash m^2$

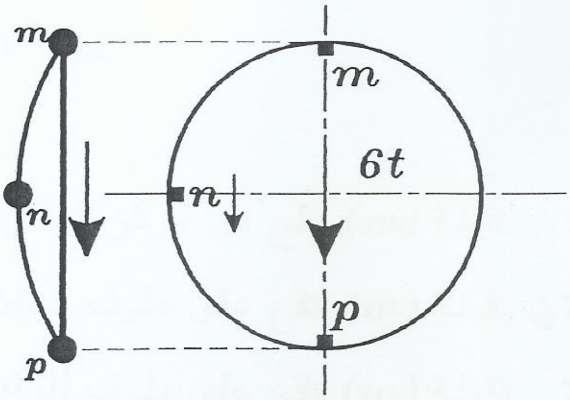
Shear stress due to (Q_y)

$$q = \frac{4Q}{3A}$$

$$q_{max.} = \frac{4}{3} * \frac{6\,t}{3.14\ m^2}$$

$$= 2.546\,t \backslash m^2$$

$q_{max.} = 2.546\ t \backslash m^2$

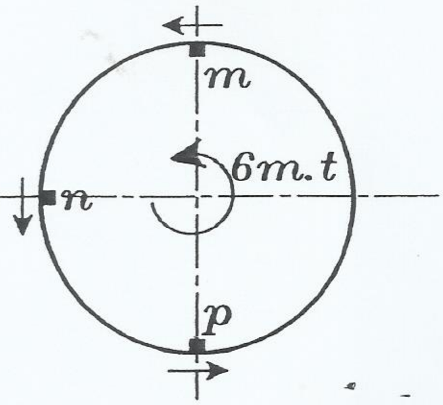


Shear stress due to (M_t)

$$q_r = \frac{M_t}{I_P}\, r$$

$$q_{max.} = \frac{6\ m.t}{1.57\ m^4} * 1\ m = 3.82\ t \backslash m^2$$

و لمعرفة اتجاه الـ *Shear stresses* نتيجة الـ M_t نرسم *Tangent* للدائرة عند النقطة و يكون اتجاه دوران الـ *Tangent* حول مركز الدائرة فى نفس اتجاه الـ M_t هو اتجاه الـ *Stress*



For point (n)

$q_x = 0$ لان نقطة (n) تقع على طرف الدائرة بالنسبة للـ Q_x

$q_y = 2.546\, t\backslash m^2 \downarrow$ لان نقطة (n) تقع فى مركز الدائرة بالنسبة للـ Q_y

$q_t = 3.82\, t\backslash m^2 \downarrow$ لان نقطة (n) تقع على طرف الدائرة بالنسبة للـ M_t

$q = 2.546 + 3.82 = 6.366\, t\backslash m^2 \downarrow$

For point (m)

$q_x = \overleftarrow{2.546}\, t\backslash m^2$ لان نقطة (m) تقع فى مركز الدائرة بالنسبة للـ Q_x

$q_y = 0$ لان نقطة (m) تقع على طرف الدائرة بالنسبة للـ Q_y

$q_t = \overleftarrow{3.82}\, t\backslash m^2$ لان نقطة (m) تقع على طرف الدائرة بالنسبة للـ M_t

$q = 2.546 + 3.82 = 6.366\, t\backslash m^2 \leftarrow$

For point (p)

$q_x = \overleftarrow{2.546}\, t\backslash m^2$ لان نقطة (m) تقع فى مركز الدائرة بالنسبة للـ Q_x

$q_y = 0$ لان نقطة (m) تقع على طرف الدائرة بالنسبة للـ Q_y

$q_t = \overrightarrow{3.82}\, t\backslash m^2$ لان نقطة (m) تقع على طرف الدائرة بالنسبة للـ M_t

$q = 3.82 - 2.546 = 1.274\, t\backslash m^2 \rightarrow$

درسنا ال *Shear stresses* نتيجة ال *Torsional moment* على القطاعات الدائرية و الان ندرس باقى القطاعات و المطلوب معرفته كيفية حساب ال *Shear stresses* و ال *Twisting angle* لكل من القطاعات التالية

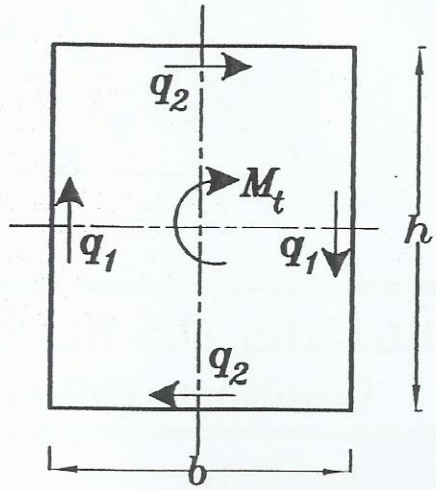
٢ - المستطيل (Rectangle)

حفظ

$$\boxed{h>b}$$

$$q_1 = \frac{(3 + 1.8\frac{b}{h})\, M_t}{h\, b^2} = q_{max.}$$

$$q_2 = q_1 * \frac{b}{h}$$



و من الممكن الحساب بطريقة أخرى حيث يعطى فى المسألة الجدول التالى و هو علاقة بين ال $\frac{h}{b}$ و ال B و ال α هما *factors* موجودين فى معادلات ال *Shear stresses* و ال *Twisting angle*

$\frac{h}{b}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
B	✓	✓	✓	✓	✓	✓
α	✓	✓	✓	✓	✓	✓

$$q_{max.} = \frac{M_t}{\alpha h\, b^2}$$

$$\theta = \frac{M_t}{B\, h\, b^3} * \frac{L}{G}$$

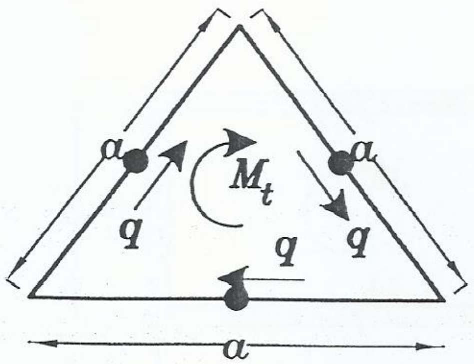
$$\alpha = \frac{1}{(3 + 1.8\frac{b}{h})}$$

٣ - المثلث المتساوى الاضلاع (Triangle) حفظ

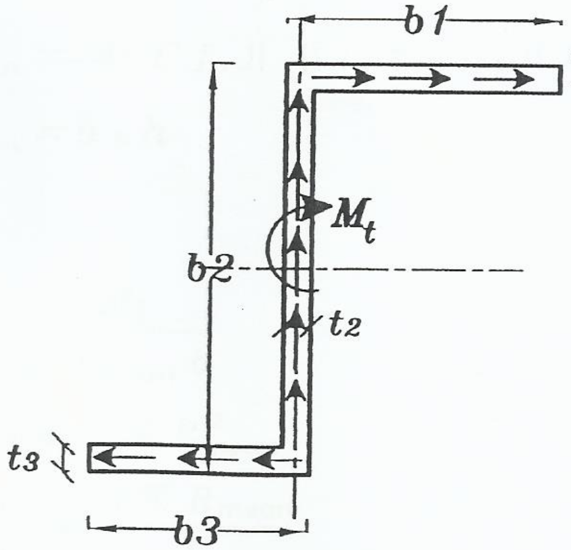
$$q_{max.} = \frac{20 M_t}{a^3}$$

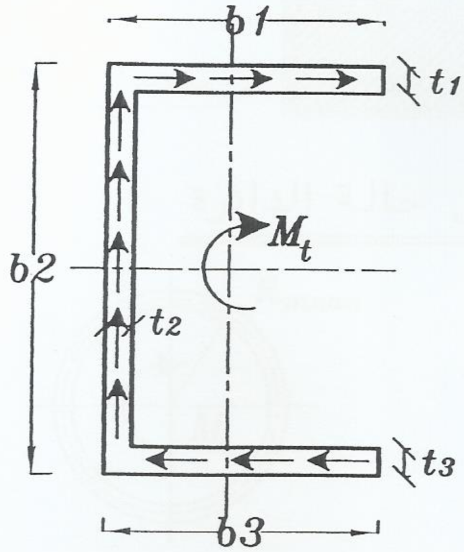
$$\theta = \frac{46.2 * M_t}{a^4} * \frac{L}{G}$$

و ال $q_{max.}$ موجود فى منتصف كل ضلع .



٤ - القطاعات ذات التخانة الصغيرة المفتوحة حفظ
(Open thin walled sections)





$$q = \frac{M_t * t}{\frac{\mu}{3} \Sigma b t^3}$$

$$q_{max.} = \frac{M_t * t_{max.}}{\frac{\mu}{3} \Sigma b t^3}$$

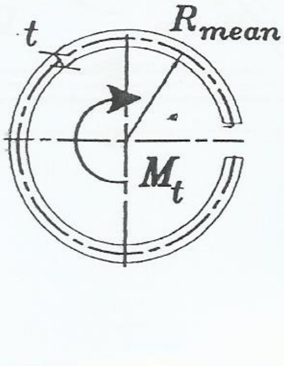
$$\theta = \frac{M_t}{\frac{\mu}{3} \Sigma b t^3} * \frac{L}{G}$$

μ = Shape factor = 1

$$\Sigma b t^3 = b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3 + b_3 t_3^3$$

فى حالة الدائرة

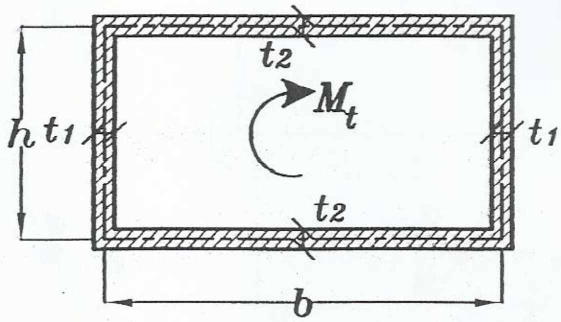
$$\Sigma b t^3 = \text{mean perimeter} * t^3$$
$$= 2 \pi R_{mean} * t^3$$



٥- القطاعات ذات التخانة الصغيرة المغلقة (حفظ)
(Closed thin walled sections)

$$q = \frac{M_t}{2\, A_{mean}\, t}$$

$$q_{max.} = \frac{M_t}{2\, A_{mean}\, t_{min.}}$$



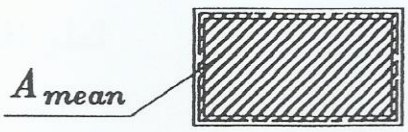
$$\theta = \frac{M_t}{46\, A^2_{mean}} * \frac{L}{G} * \Sigma \frac{ds}{t}$$

$$\Sigma \frac{ds}{t} = \Sigma \; \frac{\text{طول كل جزء}}{\text{تخانة هذا الجزء}}$$

$$= \frac{b_1}{t_1} + \frac{b_2}{t_2} + \frac{b_3}{t_3} + \ldots\ldots$$

$A_{mean} \Longrightarrow$ هى المساحة المحصورة داخل الـ $C.L.$

$A_{mean} = b * h$

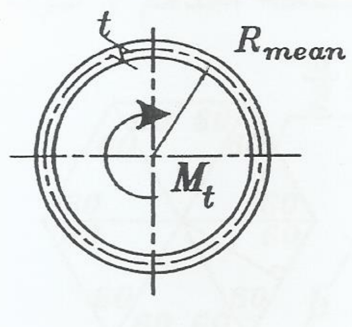


فى حالة الدائرة

$$q = \frac{M_t}{2\, A_{mean}\, t}$$

$$A_{mean} = \pi\, R^2_{mean}$$

$$\Sigma \frac{ds}{t} = \frac{2\pi\, R_{mean}}{t}$$

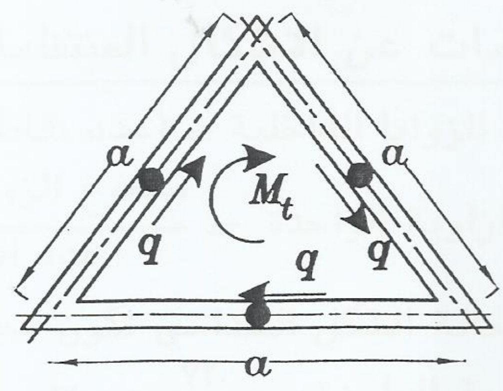


فى حالة المثلث

$$q = \frac{M_t}{2\, A_{mean}\, t}$$

$$A_{mean} = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2$$

و الـ $q_{max.}$ موجود فى منتصف كل ضلع .

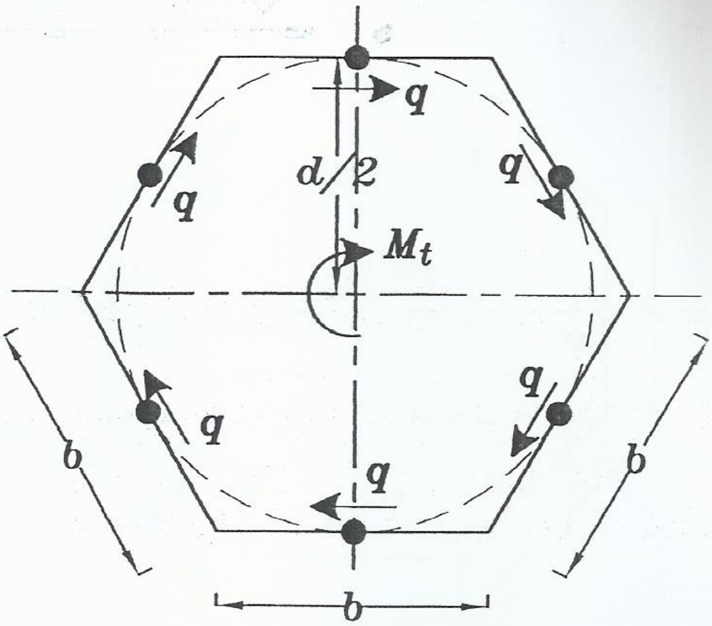


٧ - الشكل السداسى المتساوى الاضلاع (Hexagon)

$$q_{max.} = \frac{M_t}{0.217\, A\, d}$$

$$\theta = \frac{M_t}{0.133\, A\, d^2} * \frac{L}{G}$$

و ال $q_{max.}$ موجود فى منتصف كل ضلع .

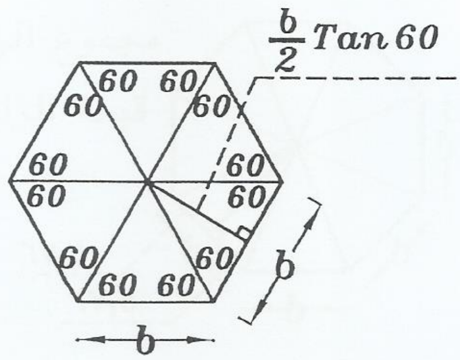


$d \Longrightarrow$ قطر الدائرة التى تمس أضلاع الشكل من الداخل

$A \Longrightarrow$ مساحة الشكل السداسى

و المساحة من الممكن حسابها عن طريق تقسيم الشكل الى ٦ مثلثات متساوية و حساب مساحة احدهم و ضربه فى ٦

$$\boxed{A = 6 * [\frac{1}{2} * b * \frac{b}{2} Tan 60]}$$



و من الممكن حساب المساحة مباشرة من القانون التالى

$$\boxed{A = \frac{3\sqrt{3}}{2} * b^2}$$

معلومات عن الاشكال المنتظمة

مجموع الزوايا الداخلية = (عدد نقاط الشكل - ٢) * ١٨٠

قيمة الزاوية الواحدة = $\frac{\text{مجموع الزوايا الداخلية}}{\text{عدد النقاط}}$

و فى حالة الشكل السداسى تكون مجموع الزوايا الداخلية = ٤ * ١٨٠ = ٧٢٠

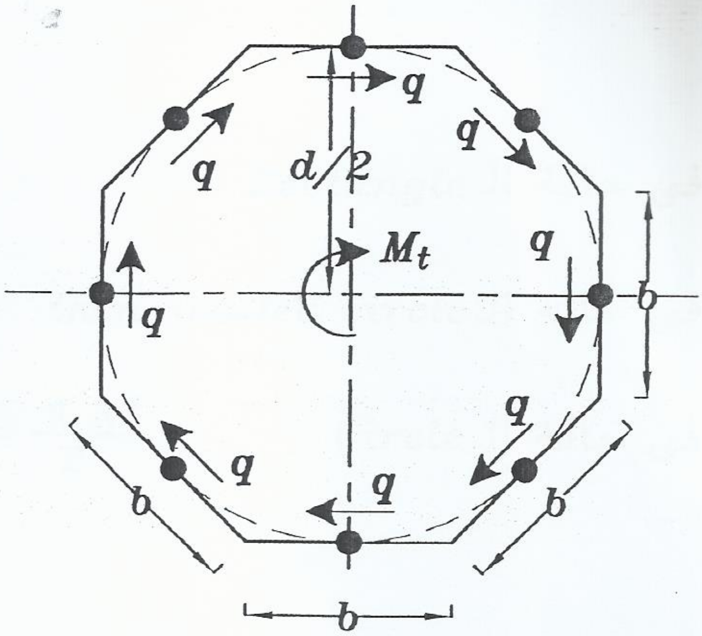
و الزاوية الواحدة = $\frac{٧٢٠}{٦}$ = ١٢٠

٨- الشكل الثمانى المتساوى الاضلاع

$$q_{max.} = \frac{M_t}{0.223\, A\, d}$$

$$\theta = \frac{M_t}{0.130\, A\, d^2} * \frac{L}{G}$$

و الـ $q_{max.}$ موجود فى منتصف كل ضلع .



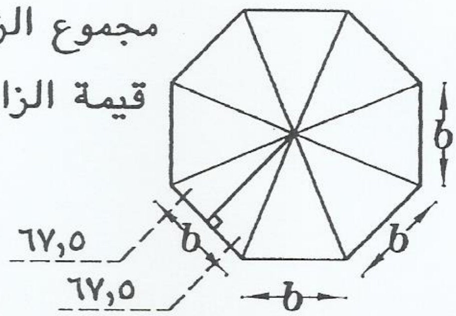
$d \Longrightarrow$ قطر الدائرة التى تمس أضلاع الشكل من الداخل

$A \Longrightarrow$ مساحة الشكل السداسى

و المساحة من الممكن حسابها عن طريق تقسيم الشكل الى ٨ مثلثات متساوية و حساب مساحة احدهم و ضربه فى ٨

مجموع الزوايا الداخلية = (٨ - ٢) * ١٨٠ = ١٠٨٠

قيمة الزاوية الواحدة = $\frac{١٠٨٠}{٦}$ = ١٣٥



$$\boxed{A = 8 * [\frac{1}{2} * b * \frac{b}{2} Tan 67.5]}$$

$$\boxed{\theta = \frac{M_t * L}{G J}}$$ دائما.

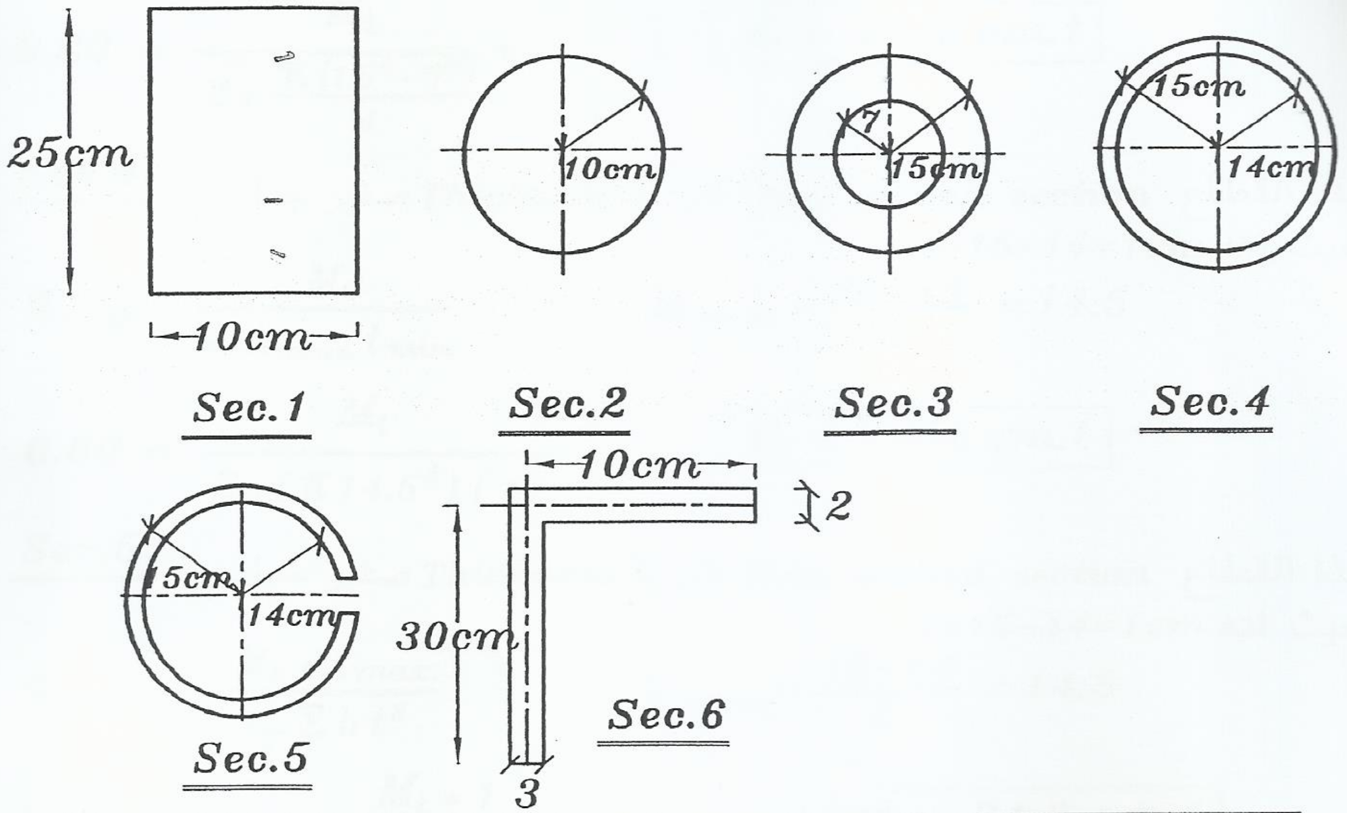
$J = \beta\, h\, b^3$ — فى حالة ال *Rectangle*

$J = \bar{I_P} = 2\,\pi\, R_{mean}^3 * t$ — فى حالة ال *thin walled circle*

$J = I_P = \frac{\pi R^4}{2}$ — فى حالة ال *Circle*

Example:

For the shown section calculate the maximum tortional moment applied so that the shear stresses don't exceed 0.8 t / cm^2.



Sec.1

$$q_1 = \frac{(3 + 1.8\frac{b}{h})\, M_t}{h\, b^2} = q_{max.}$$

$$0.80 = \frac{(3 + 1.8\frac{10}{25})\, M_t}{25 * 10^2} \qquad \boxed{M_t = 537\ cm.t}$$

Sec.2

$$q_{max.} = \frac{M_t}{I_P} R$$

$$0.80 = \frac{M_t}{2 * \frac{\pi 10^4}{4}} * 10 \qquad \boxed{M_t = 1256\ cm.t}$$

Sec.3

$$q_{max.}=\frac{M_t}{I_P}R$$

$$0.80=\frac{M_t}{2*\frac{\pi(15^4-7^4)}{4}}*15$$

$$\boxed{M_t=4040\ cm.t}$$

Sec.4

هذا القطاع Thin walled section لان الـ Thickness صغير جدا حيث انه t=15−14=1cm

$$q_{max.}=\frac{M_t}{2\ A_{mean}\ t_{min.}}$$

$$R_{mean}=\frac{15+14}{2}=14.5$$

$$0.80=\frac{M_t}{2*(\pi\,14.5^2)\,(1)}$$

$$\boxed{M_t=1056\ cm.t}$$

Sec.5

هذا القطاع Thin walled section لان الـ Thickness صغير جدا حيث انه t=15−14=1cm

$$q_{max.}=\frac{M_t*t_{max.}}{\frac{1}{3}\Sigma\,b\,t^3}$$

$$R_{mean}=\frac{15+14}{2}=14.5$$

$$0.80=\frac{M_t*1}{\frac{1}{3}*(2*\pi\,14.5)\,(1)^3}$$

$$\boxed{M_t=24.3\ cm.t}$$

$$\frac{1056}{24.3}=43.5$$

لاحظ أن Sec4 يقاوم Torsion أكثر من Sec5 بـ 43.5 مرة
و هذا معناه أن مقاومة الـ Closed Thin walled section
أكبر بكثير من الـ Open Thin walled section

Sec.6

$$q_{max.}=\frac{M_t*t_{max.}}{\frac{1}{3}\Sigma\,b\,t^3}$$

$$=\frac{M_t*3}{\frac{1}{3}(10*2^3+30*3^3)}$$

$$\boxed{M_t=31\ cm.t}$$